arXiv:2601.15923v1 [math.SG] 22 Jan 2026

高维 Heegaard Floer 同调与谱网络

KO HONDA、YIN TIAN 和 TIANYU YUAN

摘要。给定一个闭曲面 C 以及与谱曲线相关联的实恰当拉格朗日子流形 $\Sigma \subset T^*C$，我们利用 Floer 理论，特别是高维黑加德弗洛尔同调（HDHF），构造一个同态 $\mathrm{BSk}_\kappa(C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$，将 C 的辫子 skein 代数映射到 Σ 的矩阵值辫子 skein 代数。我们概述一个证明，说明此映射与一种混合 Floer–Morse 方法相一致：该方法计数 HDHF 型全纯曲线与某些 Morse 梯度图像的耦合，这些图像称为折叠莫尔斯树；证明中使用 Fukaya-Oh 和 Ekholm 的绝热极限定理的一种变体，该变体比较全纯曲线与 Morse 流树。

目录

1. 引言 2 2. 辫子 skein 代数与矩阵值辫子 skein 代数 5 3. 从 $T^*_{\mathrm{hol}}C$ 到 T^*C 6 4. Floer 理论方法 7 4.1. 基方向 7 4.2. 一致的扰动数据集 8 4.3. 模空间与横截性 9 4.4. 映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 的定义 10 4.5. 定理 1.6 的证明 10 5. 对 Σ 的修改 13 6. 同调变量 14 7. 混合 Floer-Morse 方法 15 7.1. 基方向 15 7.2. 一致的扰动数据集 16 7.3. 混合模空间 17 7.4. 对 Σ^ϵ_ν 的修改 21 8. 两种方法的等价性 21 8.1. 从乌贼到黎曼曲面 21 8.2. 两个模空间之间的对应关系 25 参考文献 34

日期：2026年1月23日。2020年数学主题分类。主要分类 53D40；次要分类 57K20。1

1. 引言

令 C 为闭黎曼曲面，ω_C 为 C 的典范线丛。固定一个整数 $N \geq 1$，令 ϕ_i 为 $\omega_C^{\otimes i}$ 在 $1 \leq i \leq N$ 上的亚纯截面。数据 $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$ 定义了一条谱曲线

$$\Sigma_\phi = \left\{ (z, p_z) \;\middle|\; z \in C, p_z \in T^*_{\mathrm{hol},z}C,\ P_\phi(z,p_z) := p_z^N + \sum_{i=1}^{N} \phi_i(z) p_z^{N-i} = 0 \right\}, \tag{1.1}$$

其中，$T^*_{\mathrm{hol}}C$ 表示 C的全纯余切丛。

在开创性论文[GMN13], 中，Gaiotto、Moore 和 Neitzke 在研究与曲面缺陷耦合的四维 $\mathcal{N} = 2$ 超对称规范理论时，引入了谱网络的概念。粗略地说，谱网络是定义在 C 上的一组轨迹网络，与亚纯微分 ϕ 相关，并遵循某些局部规则。谱网络提供了一种将 C 上的路径提升到Σ_ϕ上的路径的方法，从而诱导出一个映射，即从 Σ_ϕ 上 $\mathfrak{gl}(1)$-平坦丛的模空间映射到 C上 $\mathfrak{gl}(N)$-平坦丛的模空间的“非阿贝尔化映射”。这个非阿贝尔化映射允许量子化，得到纽结图代数之间的映射 $\mathrm{Sk}(C, \mathfrak{gl}(N)) \to \mathrm{Sk}(\Sigma_\phi, \mathfrak{gl}(1))$。在 Neitzke-Yan 的工作[NY20]中，这称为q-非阿贝尔化。

注 1.1。 本文不对“谱网络”的含义作出定义，读者可参阅 *[Nei21]*。我们转而定义一类称为折叠莫尔斯流树 的图像，它们与和 π 相关联的谱网络“相切”：$\Sigma_\phi \to C$。

本文提出了量子化非阿贝尔化映射的另一种方法。我们不采用纽结图代数，而是考虑辫子 skein 代数。Morton-Samuelson [MS21], 研究的实曲面上的辫子 skein 代数由曲面加厚空间中的 κ 股辫子生成，其中 κ 为正整数，并满足某些辫式关系。本文的目标之一是利用 Floer 理论给出一个代数映射 $\mathcal{F} : \mathrm{BSk}_\kappa(C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\phi))$，将 C 上的辫子 skein 代数映射到 Σ_ϕ 上的矩阵值辫子 skein 代数；$\mathrm{BSk}_\kappa(C)$ 和 $\mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\phi))$ 的定义见第 2 节。

当 $\kappa = 1$ 时，辫子 skein 代数化约为基本群的群环，因此我们的映射 $\mathcal{F}$ 基本上恢复了 Gaiotto-Moore-Neitzke（GMN）映射。GMN 与 Floer 理论之间的关系由 Nho [Nho23] 进行了研究。我们映射的新要素在于用 Floer 理论，特别是高维黑加德弗洛尔同调（HDHF），来诠释纽结图关系。斯凯因理论与全纯曲线之间的关系最早由 Ekholm-Shende [ES19], 进行研究，他们给出了 HOMFLY-PT 多项式的曲线计数诠释。在此工作的基础上，我们展示了曲面的辫子 skein 代数与该曲面的余切纤维的带绕 HDHF（A_∞-）代数之间的同构，见 [HTY24]。我们将

这一同构扩展到谱网络。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(N)\text{-local systems on } C & \xleftarrow[\text{GMN/Nho}]{} & \mathfrak{gl}(1)\text{-local systems on } \Sigma_\phi \\ \uparrow{\scriptstyle \kappa=1} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa=1} \\ \mathrm{BSk}_\kappa(C) & \xrightarrow{\text{this paper}} & \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\phi)) \end{array}$$

我们关注通过 Floer 理论建立实辛几何与谱网络之间的联系。近期已有几项沿着相同思路开展的研究。Casals 和 Nho 研究了谱网络中的 Betti拉格朗日子流形及其 Legendrian渐近 [CN25]。在近期的工作中，Ekholm、Longhi、Park 和 Shende [ELPS25] 通过开 Gromov-Witten 理论讨论了 q- 非阿贝尔化映射。

从现在起，我们作如下假设：

条件 1.2. $P_\phi = 0$、$\frac{\partial P_\phi}{\partial z} = 0$和 $\frac{\partial P_\phi}{\partial p_z} = 0$ 不同时成立，其中 P_ϕ 属于(1.1).

由隐函数定理， Σ_ϕ 是光滑的。由于条件1.2 是关于2 余维的条件， ϕ， Σ_ϕ 对于 ϕ的一般选择是光滑的。

投影 $\pi\colon \Sigma_\phi \to C$ 在 C上是一个 N 重分支覆盖，其分歧点恰为 $\Sigma_\phi \cap \{\frac{\partial P_\phi}{\partial p_z} = 0\}$。

注1.3. 由于 P_ϕ 可能有极点， Σ_ϕ 实际上是一个带 puncture 的黎曼曲面，而“$\pi\colon \Sigma_\phi \to C$ 是 C上的分支覆盖”实际上是指将穿孔点集合 P 加回 Σ_ϕ后， π 延拓为一个分支~覆盖。

我们进一步要求：

条件1.4. 所有分歧点都是简单的。

此处我们从$(T^*_{\mathrm{hol}}C, \Omega = dz \wedge dp_z)$ 的全纯余切丛转到$(T^*C, \omega = \mathrm{Re}\ \Omega)$ 的实余切丛 C；更多细节见第3 节。在这一变换下，谱曲线 Σ_ϕ 变成T^*C中的一个实拉格朗日子流形，为简洁起见记作 Σ 。

我们进一步要求如下条件：

条件 1.5. Σ 是 T^*C中的实恰当拉格朗日子流形，即 Σ 关于 λ =Re Λ是恰当的，其中 $\Lambda = -p_z dz$ 是满足 $d\Lambda = \Omega = dz \wedge dp_z$的全纯刘维尔形式。

参见 [Nho23，第 4.5 节。1] 其中给出了关于实精确性的判据和讨论。

令 $HW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i}C)$ 表示 $\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i}C$位于 $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_\kappa\}$上的$\kappa$ 余切纤维不交并的缠绕 HDHF 代数。我们的主要结果如下：

定理 1.6。存在一个代数映射

$$\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}\colon HW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i}C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)),$$

它由全纯曲线计数给出。

我们还在第 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 节引入一些同调变量，以此拓展6，从而更接近这些工作 [GMN13] 和 [NY20]。

同构 $HW\left(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T_{q_i}^* C\right) \cong \mathrm{BSk}_\kappa(C)$ 从 [HTY24] 继而推出如下结论：

推论 1.7。存在一个代数映射

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{BSk}_\kappa(C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)).$$

映射 $\mathcal{F}$ 的主要优点在于，HOMFLY skein 关系在 $\mathcal{F}$下自然保持。另一方面，曲线计数与谱曲线 Σ_ϕ 所对应的谱网络之间的联系，从定义中并不明显。

In o为解决这一问题，我们给出上述映射的一个混合Floer–Morse版本 ：

命题 1.8。存在一个映射

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}\colon HW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T_{q_i}^* C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$$

它是通过计数与折叠莫尔斯流树耦合的全纯曲线得到的。

猜想 1.9. $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}} = \mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$。

本文概述猜想 1.9 的一个证明，该证明采用了 Fukaya-Oh 的绝热极限定理的一种变体 [FO97] 以及 Ekholm 的绝热极限定理的一种变体 [Ekh07], , 这些定理建立了全纯曲线与莫尔斯流树之间的联系。细节留待后续工作阐述，不过 证明的所有步骤都有相似或类似的结果，且这些结果已见于文献。

定义 $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}$ 时所考虑的折叠莫尔斯流树，与 q-非阿贝尔化[NY20] 中对 $N = 2$ M2膜的解释非常相似。主要区别在于，此处我们考虑辫子，而 Neitzke 和 Yan 考虑的是一般的弧。对于 $N = 2$，我们对折叠莫尔斯树的计数给出了 [NY20] 所称的绕行变换和交换变换。由于存在圆柱方向，针对 $N = 3$ 的曲线计数应该有所不同（一般而言，我们计数的曲线更少）。明确比较这种差异将会很有趣。

注 1.10。 尽管纽结图代数和辫子 skein 代数都涉及加厚曲面中的曲线，但作者尚未发现二者之间存在直接联系。一个棘手之处在于框架。辫子 skein 代数中的元素没有规范框架；参见 *[MS21*，第 1.3 节及定理 4 的证明。*1]*其中有更详细的讨论。

本文结构如下：第 2 节和 3 节为预备内容。在第 4 节中，我们定义从 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 的余切纤维 HDHF 到 C 矩阵值辫子 skein 代数的 Floer 理论映射，并证明定理 1.6。我们在第 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$6 节中引入一些同调变量，以讨论其增强形式。在第 7 节中，我们介绍针对 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 的混合 Floer-Morse 方法，并在第 8 节中概述证明这两种方法一致的过程。

致谢。感谢 Vivek Shende 提议开展本项目，并感谢 Tobias Ekholm、Yoon Jae Nho、Francis Bonahon、Helen Wong、Vijay Higgins 和 Octav Cornea

在交流中提供帮助。我们还要感谢 Erkao Bao 的广泛交流，以及其在梯度图粘合方面提供的帮助。

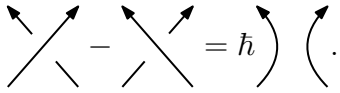
2. 辫子 skein 代数与矩阵值辫子 skein 代数

本节简要回顾辫子 skein 代数，并介绍矩阵值辫子 skein 代数。

设 $\mathfrak{q} = \{q_1, \dots, q_\kappa\} \subset C$ 是一个 κ 元基点的集合。令 $\mathrm{Br}_\kappa(C, \mathfrak{q})$ 表示以 $\mathfrak{q} \times \{0\}$ 为起点、以 $\mathfrak{q} \times \{1\}$ 为终点，由 κ 条与切片 $C \times \{t\}$、$t \in [0,1]$ 横截的 $C \times [0,1]$ 股辫子组成的辫群；乘法由辫子的串接给出。

定义 2.1（Morton-Samuelson）。辫子 skein 代数 $\mathrm{BSk}_\kappa(C, \mathfrak{q})$ 是群代数 $\mathbb{Z}[\hbar][\mathrm{Br}_\kappa(C, \mathfrak{q})]$ 关于辫子同痕关系和局部 HOMFLY skein 关系的商：

(2.1)



详见 [HTY24] 以了解更多细节。

设 $\pi\colon \Sigma \to C$ 是一个具有简单分歧点的 N 重分支覆盖，$Z \subset C$ 是分支点集，$Z \subset \Sigma$ 是位于 Z 之上的分歧点集，$P \subset C$ 是 P_ϕ 的极点集，P 是将 Σ 补成闭黎曼曲面的穿孔点集（见注1.3）。假设 $\mathfrak{q} \cap (Z \cup P) = \varnothing$，且每个分支点之上都只有一个分歧点。设 $\pi^{-1}(q_i) = \{p_{i1}, \dots, p_{iN}\}$，其中 $i = 1, \dots, \kappa$。考虑一个映射指标集

$$\mathfrak{I} = \{\alpha : \{1, \dots, \kappa\} \to \{1, \dots, N\}\}. \tag{2.2}$$

我们有 $|\mathfrak{I}| = N^\kappa$。给定 $\alpha \in \mathfrak{I}$，令 $\mathfrak{p}_\alpha = \{p_{1\alpha(1)}, \dots, p_{\kappa\alpha(\kappa)}\}$ 为 Σ 上的一组 κ 个互不相交的点，使得 $\pi : \mathfrak{p}_\alpha \to \mathfrak{q}$ 是一个双射。

定义辫子 skein 代数 $\mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma, \mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta)$ 为由以下辫子生成的自由 $\mathbb{Z}[\hbar]$- 模的商：从 $\Sigma \times [0,1]$ 的 $\mathfrak{p}$ 到 $\mathfrak{p}_\alpha$，模去局部 HOMFLY skein 关系（2.1）以及一个附加关系：

(2.3)



其中交叉表示 Σ 上的一个简单分歧点。

定义 2.2。关于 Σ、相对于 $\pi\colon \Sigma \to C$ 的矩阵值辫子 skein 代数为：

$$\mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)) = \{M = [M_{\alpha\beta}] \mid M_{\alpha\beta} \in \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma, \mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta), \alpha, \beta \in \mathfrak{I}\},$$

其中 th 该乘积由 $N^\kappa \times N^\kappa$-矩阵乘法和辫子的串接给出 *s.*

注2.3. 关系式 (2.3) 如下得出：设 $\mathfrak{s}$ 是 C 上的一个自旋结构，并设$\sim\pi^*\mathfrak{s}$ 是拉回到 $\Sigma \setminus Z$上的自旋结构。注意， $\pi^*\mathfrak{s}$ 无法延拓过分歧点；将自旋结构视为定义在 1-骨架上的稳定平凡化，并且该平凡化延拓到 2-骨架上，即可清楚看出这一点。假设我们使用$\pi^*\mathfrak{s}$为相关的全纯曲线模空间 $\mathcal{T} := \mathcal{T}\mathrm{ind}_{=1}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 定向（见第 4.5 节）。考虑一参数族 $u_\tau \in \mathcal{T}, \tau \in [-\epsilon, \epsilon]$，其中 $\epsilon > 0$ 充分小。存在一个求值映射 $\mathcal{E}$，使得 $\mathcal{E}(u_\tau) \in \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$（见第4.4节）。若 $\mathcal{E}(u_{-\epsilon})$ 在局部由 (2.3) 的左侧给出， $\mathcal{E}(u_\epsilon)$ 在局部由右侧给出，并且族 $\mathcal{E}(u_\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处横截地穿过分歧点，那么 u_0 不是可定向的，并且穿过 u_0时定向发生反转。由此得到 (2.3)。

注 2.4. 也可以同样地选择一个定义在整个Σ上的自旋结构，此时我们在 $-$ 中将 $+$ 替换为 (2.3)。

3. 从 T^*全纯C到 T^*C

本节概述如何从全纯辛流形T^*全纯C转到实余切丛 T^*C。该识别在局部由 $(z, p_z) \mapsto (x, y, p_x, -p_y)$ 给出。

$T^*_{\mathrm{hol}}C$上的典范全纯辛形式为 $\Omega = dz \wedge dp_z$，而 T^*C 上的典范辛形式为

$$\omega = \mathrm{Re}\,\Omega = \mathrm{Re}\,dz \wedge dp_z = \mathrm{Re}(dx + idy)(dp_x - idp_y) = dxdp_x + dydp_y.$$

我们还有全纯刘维尔形式 $\Lambda = -p_z dz$，使得 $d\Lambda = \Omega$；以及实刘维尔形式 $\lambda = \mathrm{Re}\,\Lambda = -(p_x dx + p_y dy)$。

由于 $\Sigma := \Sigma_\phi$ 是 $T^*_{\mathrm{hol}}C$中的一条光滑代数曲线，全纯辛形式 Ω 在 Σ 上消失，也就是说， Σ 是 $T^*_{\mathrm{hol}}C$的全纯拉格朗日子流形。将谱曲线 Σ 视为 T^*C中的曲面时，由于 $\omega = \mathrm{Re}\,\Omega$ 消失，它成为 T^*C中的实拉格朗日子流形。 [验证：令 $\{v, Jv\}$ 为一点处切空间$T\Sigma$ 的一组基，其中 J 是 $T^*_{\mathrm{hol}}C$的复结构，

$$dzdp_z(v, Jv) = dz(v)dp_z(Jv) - dz(Jv)dp_z(v) = idz(v)dp_z(v) - idz(v)dp_z(v) = 0,$$

因为 dz 和 dp_z 是（J， i）-反线性的。]

设 U 是 $C \setminus Z$ 的一个可缩开子集，其中 Z 是 C 的分支轨迹。于是，$\pi^{-1}(U)$ 在局部可写成函数 $U \to \mathbb{R}$ 的图像 df_1、……、df_N 的并集。我们说明局部定义的函数 f_j 与引言中关于 Σ 的定义多项式 $P_\phi(z, p_z)$ 之间的关系：在 $\pi^{-1}(U)$ 上，我们可以将 $P_\phi(z, p_z)$ 分解为 $= \prod_{j=1}^N (p_z - \psi_j(z))$。那么， Σ 在局部由 $p_z = \psi_j(z) = a_j(z) + ib_j(z)$ 给出。记 $z = x + iy$ 和 $p_z = p_x - ip_y$，用实数表示， Σ 是 $\alpha_j := a_j dx - b_j dy =$ 上 $\mathrm{Re}\ \psi_j(z)dz$ 的图像。于是，根据柯西-黎曼方程， $d\alpha_j = 0$，并且我们可以写成 $\alpha_j = df_j$。由 $\mathrm{Re}\ \psi_j(z)$ 给出的叶状结构与 f_j 的等值集相切，而由 $\mathrm{Im}\ \psi_j(z)dz$ 给出的叶状结构与 ∇f_j 相切。对于差值 $\psi_i - \psi_j$ 和 $f_i - f_j$，同样成立。

4. Floer理论方法

设 C 是一个闭曲面。设 $CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$ 是 A_∞ 的缠绕 HDHF 代数κ，其中包含 T^*C 个互不相交的余切纤维，并令 $HW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$ 为其（上）同调。关于 [HTY24] 和 [CHT24] 对 $CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$ 的定义，参见相关文献。在我们的情形中，它是一个支撑于次数 0 的普通代数。

本节的目标是证明定理 1.6，即定义一个 Floer理论评价映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$，从 $CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$ 到矩阵值辫子 skein 代数 $\mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$，定义在 Σ上，其中 $\pi\colon \Sigma \to C$ 是一个 N 重分支覆盖。回顾这一同构

$$HW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C) \cong \mathrm{BSk}_\kappa(C, \mathbf{q}) \tag{4.1}$$

根据 [HTY24],，我们进而得到一个映射 $\mathcal{F}\colon \mathrm{BSk}_\kappa(C, \mathbf{q}) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$。我们还注意到，定理 1.6 的证明与（4.1）的证明遵循相同的思路。

4.1. 基方向。定义 HDHF 的关键思路是，计数从任意亏格的定义域到目标辛流形的全纯映射，同时要求这些映射在一个基底上具有分支覆盖结构（也就是说，我们的映射的定义域被视为 Hurwitz空间中的一个元素）。

令 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，并令 $D_m = D \setminus \{p_0, \ldots, p_m\}$为其中的 $p_i \in \partial D$，它们按逆时针顺序排列。令 $\partial_i D_m$ 为从 p_i到 p_{i+1} 的边界弧，其中 $i \in \mathbb{Z}/(m+1)\mathbb{Z}$。令 $\mathcal{A}_m$ 为 D_m 模去自同构后的模空间；我们以光滑方式选取 $\mathcal{A}_m$ 的等价类的代表元 D_m，并滥用记号，将其写作 $D_m \in \mathcal{A}_m$。

如通常所做的，对每个 D_m，可以光滑地选取条带状端 e_i、$i = 0$、……、m。我们将与 p_i 对应的 D_m 的条带状端 e_i、$i = 1$、……、m视为正端$[0, \infty)_{r_i} \times [0,1]_{t_i}$，并将与 p_0 对应的条带状端 e_0 视为负端（$-\infty$、$0]_{r_0} \times [0,1]_{t_0}$。

接下来，令 $D_{m,l}$ 为 D_m，并带有一个有限的（无序）内部标记点集合 $\{h_1, \ldots, h_l\}$。我们将 $D_{m,l}$ 模去自同构后的集合记为 $\mathcal{A}_{m,l}$。

约定 **4.1.** 有时我们省略 $D_{m,l}$ 中的下标 l，并记作 D_m，以表示应用遗忘函子后的结果。

引理 4.2（条带状端与颈的光滑选取）。

(1) 对每个 $D_{m,l}$，都存在条带状端 e_i, $i = 0, \ldots, m$的一种光滑选取，且其上没有标记点。(2) 对于满足以下条件之一的 $D_{m,l} \in \mathcal{D}_{m,l}$： (a) D_m 充分接近边界 $\mathcal{D}_m$；或 (b) $D_{m,l}$ 有标记点充分深入某个 e_i，存在一组光滑选取的条带状颈 n_i，其类型为 $[-L, L]_r \times [0,1]_t \subset D_{m,l}$（这里 L 依赖于 $D_{m,l}$和 n_i，且 $([-L, L] \times [0,1]) \cap \partial D_{m,l} = [-L, L] \times \{0,1\}$），其上没有标记点。(3) $D_{m,l} \setminus ((\cup_i n_i) \cup (\cup_j e_j))$的每个分支都与某个 $D_{m',l'} \setminus (\cup_j e_j)$一致，其中 $m + l > m' + l'$。

为方便起见，本文中我们也记作 $Y_{m-1} := D_m$，其中 $\partial_i Y_{m-1} = \partial_i D_m$ for$i = 0$, ……, m。令 $\mathcal{Y}_{m-1}$ 为 Y_{m-1} 对自同构取模后的模空间；同样，我们

可以光滑地选取 $\mathcal{Y}_{m-1}$ 的等价类的代表元 Y_{m-1}。我们类似地定义 $Y_{m-1,\ l}$ 和 $\mathcal{Y}_{m-1,\ l}$。本文中，我们主要使用 $\mathcal{Y}_1$ 和 $\mathcal{Y}_2$。

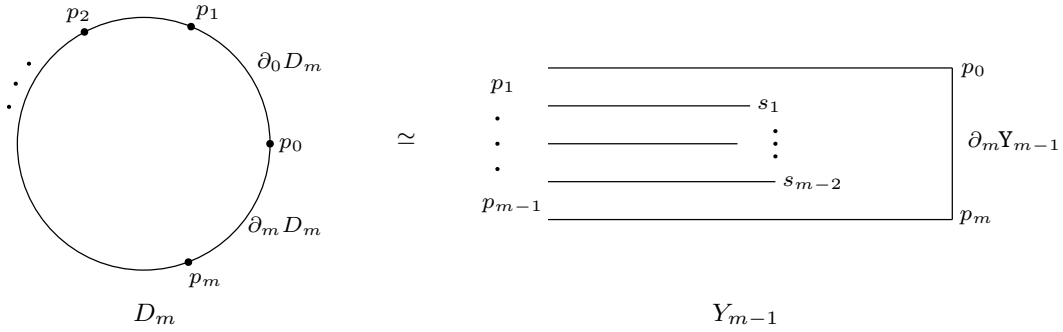


图1

考虑 Y_{m-1} for $m \geq 2$ 的如下一个代表：

$$(-\infty, 0]_s \times [0,1]_\tau \subset \mathbb{C} \tag{4.2}$$

沿着 $m-2$ 的裂口 $\tau = (m-2)/(m-1) \ldots, \tau = 1/(m-1)$；这里 $s = \mathrm{Re}\ z$和 $\tau = \mathrm{Im}\, z$。参见图 1 右侧。由于 Y_{m-1} 没有非平凡的自同构群，我们称此表示为 标准坐标，属于 Y_{m-1}。$\mathcal{Y}_{m-1}$ 的坐标由裂口的长度给出。

4.2. 扰动数据的一致族。为了实现定义 $CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$ 中所用全纯映射模空间的横截性，只需考虑由 Y_1 和 Y_2 参数化的定义域依赖几乎复结构。然而，为了与第 8节中的混合 Floer-Morse 方法进行比较，我们将要求对几乎复结构作更精细的扰动，该扰动依赖于 $Y_{1,\ l}$ 和 $Y_{2,\ l}$、$l \geq 0$，具体将在本小节中说明。

固定闭曲面 C 上的一个一般黎曼度量 g_0，并令 $|\cdot|$ 为 T^*C 上的诱导范数。令 $\mathcal{H}(T^*C) \subset C^\infty(T^*C, \mathbb{R})$ 表示满足以下条件的光滑函数 H

$$H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2$$

在 T^*C 的某个紧子集之外。固定 $\epsilon > 0$，并令 $\mathcal{H}^\epsilon(T^*C) \subset \mathcal{H}(T^*C)$ 表示满足 $H(q,p) = 0$（对任意 $|p| < \epsilon$）的子集。另固定 $H_0 \in \mathcal{H}(T^*C)$，使得本文所考虑的余切纤维之间的所有时间-1 哈密顿轨道均非退化。

考虑一个以 Y_1 为参数的哈密顿函数光滑族：

$$H_{Y_1} : Y_1 \to \mathcal{H}(T^*C), \tag{4.3}$$

其在 $\partial_2 Y_1$ 附近取值于 $\mathcal{H}^\epsilon(T^*C)$。我们要求 $H_{Y_1} = H_0$ 在条带状端 e_1 上成立。记 $X_{H_{Y_1}}$ 为 H_{Y_1} 的哈密顿向量场，即 $\omega(X_{H_{Y_1}}, \cdot) = dH_{Y_1}$。

记 $\mathcal{J}(T^*C, \omega)$ 为 T^*C 上与典范辛形式 ω 相容的几乎复结构的集合。固定一个光滑族 $J_t \in \mathcal{J}(T^*C, \omega)$，使其满足

$t \in [0,1]$。令

$$\mathcal{J}_{1,l} := \{J_{Y_{1,l}} : Y_{1,l} \to \mathcal{J}(T^*C,\omega) \mid Y_{1,l} \in \mathcal{Y}_{1,l}\} \tag{4.4}$$

是一个关于 $Y_{1,l}$ 光滑变化的几乎复结构族，并且满足$J_{Y_{1,l}}(r_1,t_1) = J_{t_1}$ 在条带状端 e_1 上。

定义 4.3. 满足上述条件的对 $(H_{Y_1}, \{J_{Y_{1,l}}\})$ 称为$\mathcal{Y}_{1,l}$的扰动数据。

如果 $\mathcal{J}_{1,l}$ 与 $\mathcal{Y}_1$的边界分层相容l （这里是指每个 $J_{Y_{1,l}}$ 在r-不变的条带状端和由引理 4.2 给出的颈部上，并且遵循引理 4.2（3）中给出的识别），那么 $\{\mathcal{J}_{1,l} \mid l \geq 0\}$ 称为一个 几乎复结构的相容族。

引理 4.4. 存在一个几乎复结构的相容族 $\{\mathcal{J}_{1,l} \mid l \geq 0\}$ 。

证明。这是一个简单的归纳构造，利用了 $\mathcal{J}(T^*C,\omega)$ 是可缩这一事实。□

定义 4.5. $\{\mathcal{Y}_{1,l}\}$ 的相容扰动数据族由每个 $\mathcal{Y}_{1,l}$ 的扰动数据组成，且 $\{\mathcal{J}_{1,l}\}$ 是一个相容的几乎复结构族。

4.3. 模空间与横截性。给定 $\mathbf{y} \in CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i}C)$ 和 $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}$，其中 $\mathfrak{I}$ 由 (2.2) 给出，令 $\mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 表示由 $((F,j), u)$ 构成的集合，其中 (F,j) 是一个带边界的紧黎曼曲面，$\mathbf{w}_0$,$\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$ 是 F 上互不相交的 κ元组边界标记点，$\dot{F} = F \setminus \cup_i \mathbf{w}_i$，并且

$$u : \dot{F} \to Y_1 \times T^*C$$

是一个连续映射，满足

$$(du - X_{H_{Y_1}} \otimes d\tau)^{0,1}_{j,J_{Y_{1,l}}} = 0, \tag{4.5}$$

并满足以下条件：

(1) 对于 $m = 0$，若 $\pi_{Y_1} \circ u(z) \subset \partial_m Y_1$，则 1, $\pi_{T^*C} \circ u(z) \in \sqcup_i T^*_{q_i}C$。$\partial F$ 中投影到 $\partial_m Y_1$ 的每个分支都映射到不同的 $T^*_{q_i}C$。(2) 若 $\pi_{Y_1} \circ u(z) \subset \partial_2 Y_1$，则 $\pi_{T^*C} \circ u(z) \in \Sigma$。(3) 当 s_1时，$\pi_{T^*C} \circ u$ 趋于 $\mathbf{y}, \mathbf{p}^\beta$；当 $s_0 \to -\infty$时，趋于 $\mathbf{p}_\alpha$。(4) $\pi_{Y_1} \circ u$ 是 κ重分支覆盖 Y_1，其中假设分支点都是简单的，并对应于 $Y_{1,l}$上的标记点。

这里，π_{Y_l}和 π_{T^*C}分别是 $Y_l \times T^*C$到第一和第二个因子的投影。然后我们设

$$\mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta) = \sqcup_{l \geq 0} \mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta).$$

注意，若 $((F,j), u) \in \mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$，则根据黎曼-赫尔维茨公式，$\chi(F) = \kappa - l$。

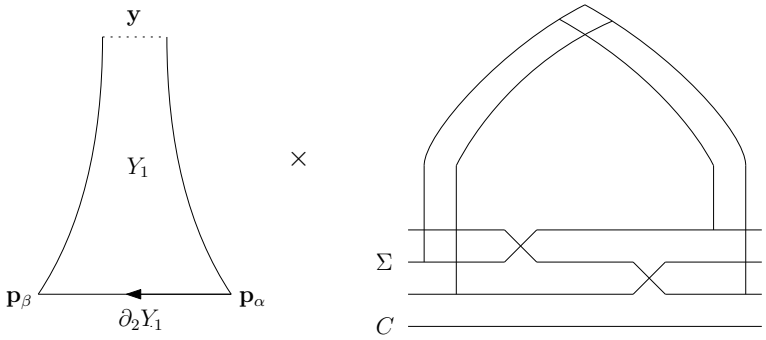


图2

引理4.6. 对于 $\{\mathcal{Y}_{1,l}\}$, $\mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 的一般一致扰动数据集，其维数为 0，并且对所有 $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{p}_\beta$，都由离散的正则曲线组成。

证明。根据与 $\mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 的类似指标计算，其虚维数为0，参见 [HTY24，定理 2。3]。由于可以灵活选择几乎复结构，$\mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 的横截性是标准的。□

引理4.7. 对于 $\{\mathcal{Y}_{1,l}\}$ 的一般一致扰动数据集，在固定 $\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta$ 和 $l \geq 0$ 的情况下，模空间 $\mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 由有限条曲线组成。

证明. 这是标准的 Gromov 紧性，因为 $\mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 中的曲线具有能量界。□

4.4. 映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 的定义。给定 $u \in \mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$，将 $\pi_{T^*C} \circ u$ 限制到 $(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\partial_2 Y_1)$ 上，得到一个元素 $\mathcal{E}(u) \in \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))$ — 称为 u 的求值映射 — 它仅在 $N^\kappa \times N^\kappa$ 矩阵的 $\alpha\beta$ 项上有支撑。这里我们固定一个参数化 $\phi_{Y_1}\colon [0,1] \to \partial_2 Y_1$。

接着定义

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathrm{hol}}\colon & CW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i} C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)), \\ & \mathbf{y} \mapsto \sum_{u \in \mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)} (-1)^{\sharp(u)} \cdot \hbar^{\kappa - \chi(F)} \cdot \mathcal{E}(u). \end{aligned} \tag{4.6}$$

这里 $\sharp(u) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 u的定向，它取决于 Σ上的自旋结构。 Σ 上的规范自旋结构由 C上的自旋结构诱导得到，这必然要求附加关系（2.3）。详见 [Nho23，第6节.2。2]。由于 $CW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i} C)$ 仅支撑在次数 0，$\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 是在上同调层面定义的。

4.5. 定理 **1.6**的证明。 本小节证明定理 1.6。证明与 [HTY24的命题6类似。5] 并证明

$$\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mu^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}')) = \mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{y}) \mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{y}'), \tag{4.7}$$

对任意 $\mathbf{y}$， $\mathbf{y}' \in CW(\sqcup_i T^*_{q_i} C)$，其中 μ^2 是 HDHF 的乘积映射，而方程（4.7）右侧是以复合记号书写的串接。

首先注意以下事实：设 ψ^ρ 为李维尔向量场的时间-对数 ρ 流，其中该向量场属于 pdq。由于 $(\psi^\rho)^*\omega = \rho\omega$，根据 [Abo12，引理 3。5] 我们有：

引理 4.8。存在一个同构

$$CW^*(\boldsymbol{L_0}, \boldsymbol{L_1}; H, J_t) \simeq CW^*(\psi^\rho(\boldsymbol{L_0}), \psi^\rho(\boldsymbol{L_1}); \tfrac{H}{\rho} \circ \psi^\rho, \psi^\rho_* J_t).$$

为了定义相关的模空间 $\mathcal{T}^l(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}', \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$，我们首先按照 Abo12$(\{H_{Y_m}\}, \{J_{Y_{m,l}}\}, \{\alpha_{Y_m}\})$的过程，为 $\{\mathcal{Y}_{m,l}\}_{m\le 2}$构造一组相容的扰动数据，参见 [Abo12第 4] 节。我们已经处理过 $m = 1$的情形，因为不需要 α_{Y_1}。

考虑一族由 Y_2 参数化的哈密顿函数：

$$H_{Y_2} \colon Y_2 \to \mathcal{H}(T^*C), \tag{4.8}$$

其在 $\partial_3 Y_2$ 附近取值于 $\mathcal{H}^\epsilon(T^*C)$。我们还要求满足以下条件：

(1) H_{Y_2} 在 Y_1 的右侧退化中，与 H_{Y_1} 的两个部分中的每一部分上（见图 3）一致；(2) 参照图 3所示的左侧退化，其中 Y_2 退化为 A 和 B，$H_{Y_2} = H_0$ 在条带状端 e_1上，e_2 位于 A 上，

$$H_{Y_2} = (H_0 \circ \psi^2)/4$$

在 A 的条带状端 e_0 上，以及在 B 上的 $H_{Y_2} = (H_{Y_1} \circ \psi^2)/4$。

$J_{Y_{2,l}}$ 的选取与此类似，并且在条带状端 e_1、e_2 上与 J_{t_1} 和 J_{t_2} 相一致。我们还要求

(1) 在图3右侧退化的两个 Y_1 副本上，$J_{Y_{2,l}} = J_{Y_1}$；(2) 在 A 的条带状端 e_0 上，$J_{Y_{2,l}} = \psi_*^2 J_{t_0}$，并且在 B $= Y_{1,l'}$ 上，$J_{Y_{2,l}} = \psi_*^2 J_{Y_{1,l'}}$。

最后一项扰动数据是在 Y_2 上的闭 1-形式 α_{Y_2}，满足

(1) $\alpha_{Y_2} = d\tau$ 在 Y_1 图右侧退化的3的两个副本上；(2) $\alpha_{Y_2} = 2d\tau$ 附近 $\partial_3 Y_2$；(3) $\alpha_{Y_2} = dt_i$ 在 e_i，$i = 1, 2$，以及$\alpha_{Y_2} = 2dt_0$ 在 A 的端 e_0 上，以及 B 上的$\alpha_{Y_2} = 2d\tau$。

满足上述条件的（$H_{Y_2}, \{J_{Y_{2,l}}\}, \alpha_{Y_2}\}$）的存在性显而易见。

沿用[Abo12第3节5], 中的术语，我们称 e_1、e_2 为权重1，而 e_0 的权重为2。

现在，我们将模空间 $\mathcal{T}^l(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 定义为（F, u）的集合，其中 $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in CW($ $\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i} C)$、$(F, j)$ 是带边界的紧黎曼曲面，$\mathrm{w}_0, \ldots, \mathrm{w}_3$是互不相交的 κ元组边界标记点，属于 F, $F = F \setminus \cup_i \mathrm{w}_i$，并且

$$u \colon \dot{F} \to Y_2 \times T^*C$$

是一个满足以下条件的连续映射

$$(du - X_{H_{Y_2}} \otimes \alpha_{Y_2})^{0,1}_{j, J_{Y_{2,l}}} = 0, \tag{4.9}$$

并且满足以下条件：

(1) 对于 $m = 0, 1, 2$, $\pi_{T^*C} \circ u(z) \in \sqcup_i T^*_{q_i}\Sigma$ 若 $\pi_{Y_2} \circ u(z) \subset \partial_m Y_2$。$\partial F$ 中投影到 $\partial_m Y_2$ 的每个分支都映射到不同的 $T^*_{q_i}C$。(2) $\pi_{T^*C} \circ u(z) \in \Sigma$ 若 $\pi_{Y_2} \circ u(z) \subset \partial_3 Y_2$。(3) 当 $s_1, s_2, s_3 \to +\infty$ 时，$\pi_{T^*C} \circ u$ 趋于 $\mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta$；当 $s_0 \to -\infty$ 时，趋于 p_α。(4) $\pi_{Y_2} \circ u$ 是 Y_2 的 κ 重分支覆盖，其中简单分支值对应于 $Y_{2,l}$ 上的标记点。

我们定义 $\mathcal{T}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta) = \sqcup_{l\geq 0}\mathcal{T}^l(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$。

引理 4.9. 对于 $\{\mathcal{Y}_{m,l}\}_{m\leq 2}$ 的一般一致扰动数据集，$\mathcal{T}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 是一个维数为 1 的光滑流形，并且允许紧化。

证明。根据一个类似于 $\mathcal{T}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}', \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 的指标公式，虚维数为 1，参见 [HTY24，定理 2。3]。$(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}', \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta)$ 的横截性和紧致性是标准的。注意，对于本引理，我们可以使用定义在整个 Σ 上的任意自旋结构。□

接下来，利用 $\Sigma\setminus Z$ 上的拉回自旋结构 $\pi^*\mathfrak{s}$，我们考察 $\mathcal{T}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 的所有可能的余维 1 边界退化。边界退化有四种类型：

(T1) $\coprod_{\mathrm{y}'', \chi'+\chi''-\kappa=\chi} \mathcal{M}^{\mathrm{ind}=0,\chi'}(\mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{y}'') \times \mathcal{T}^{\mathrm{ind}=0,\chi''}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}'', \mathrm{p}_\beta)$; (T2) $\coprod_{\mathrm{p}_\gamma, \chi'+\chi''-\kappa=\chi} \mathcal{T}^{\mathrm{ind}=0,\chi'}(\mathrm{p}_\gamma, \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta) \times \mathcal{T}^{\mathrm{ind}=0,\chi''}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{p}_\gamma)$; (T3) 沿着 Σ 发生节点退化的集合 $\partial_n\overline{\mathcal{T}}^{\mathrm{ind}=1,\chi}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$; (T4) 在某个点，$\mathcal{E}(u)$ 的 $\alpha\beta$ 分量（回忆一下，$\mathcal{E}(u)$ 是一个 $N^\kappa \times N^\kappa$ 矩阵，且仅在 $\alpha\beta$ 分量上受到 $\tilde{}$ 支撑）与 Z 中的一个点相交。

(T1) 如图 3 左侧所示，对 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mu^2(\mathrm{y}, \mathrm{y}'))$ 有贡献，其中 $\mathcal{M}^{\mathrm{ind}=0,\chi'}(\mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{y}'')$ 是计算 HDHF 中 $\mu^2(\mathrm{y}, \mathrm{y}')$ 的模空间。(T2) 如图 3 右侧所示，对 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathrm{y})\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathrm{y}')$ 有贡献。标准的粘合论证表明，$\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mu^2(\mathrm{y}, \mathrm{y}'))$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathrm{y})\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}(\mathrm{y}')$ 的所有贡献都来自这类断裂退化。(T3) 如图 4 所示，对应于 HOMFLY skein 关系 (2.1)，该关系在 [ES19] 和 [HTY24] 中有所描述。在情形 (T4) 中，如注2.3所述，曲线在接触分歧点前后的定向相差 -1；这对应于关系 (2.3)。

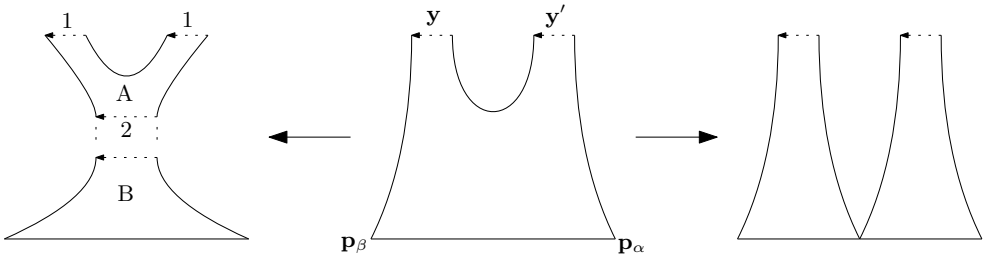


图 3. $\mathcal{T}^{\mathrm{ind}=1,\chi}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}', \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 的两种可能退化。A 的端点权重已标出。

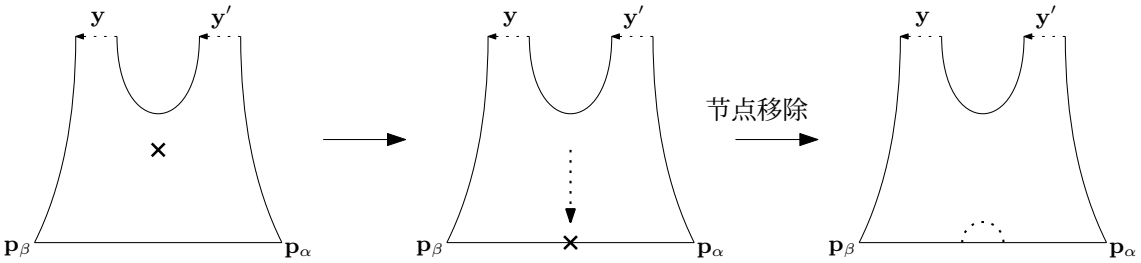


图4. $\mathcal{T}_{\text{ind}=1,\chi}(p_\alpha, y', y, p_\beta)$ 的节点退化。

5. 对 Σ的修改

为了从 Floer理论方法转向混合 Floer-Morse 方法，我们定义 Σ 的两种修改。

(1) 在 C^∞上的分歧点附近施加一个幅度为 Σ 的小哈密顿扰动，将分支点转化为尖点折叠和燕尾，这些是更一般的奇异性；这样做是为了以最小改动运用 Ekholm 的绝热极限定理[Ekh07] 。在 Σ的 Legendrian 提升的前投影中，一个分歧点被修改为三个尖点折叠，它们在三个燕尾奇异点处相交；见图 5。我们省略这一标准构造的细节，转而请读者参阅[CZ22；

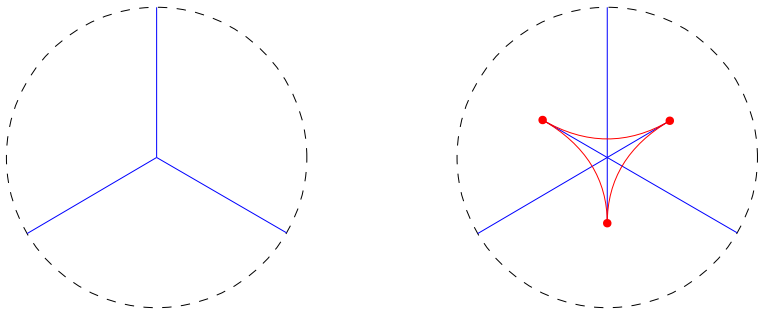


图 5. 左：分歧点附近 Σ 的 Legendrian 提升前沿在 $\mathbb{R}^2_{x,y}$ 上的投影。蓝色射线表示两个片层的横截相交。右：我们对Σ施加一个小的哈密顿扰动。红色的边是尖点，红点是燕尾奇异点。

CN25]。选择一列以图 5 为模型的 Σ 哈密顿扰动 $\{\zeta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}_{>0}}$，使“尖点区域”（即图 5 右侧虚线圆所围成的区域）的大小趋于零，并记作 $\Sigma_\nu := \zeta_\nu(\Sigma)$。更准确地说，选择一个递减序列 $\{R_\nu > 0\}$，使得 R_1 足够小，并且当 $\nu \to \infty$ 时 $R_\nu \to 0$。在 C 上固定一个度量 g_0，并令 U_{R_ν} 为 C 中以 Z 上各点为中心的所有开 R_ν 圆盘的并集。我们要求 ζ_ν 的支集的投影以及 Σ_ν 的折叠区域都位于 U_{R_ν} 内。

(2) 给定一个局部由图像 $p_z = df(z)$ 给出且 $\epsilon > 0$ 很小的拉格朗日子流形 Σ，我们将 Σ^ϵ 定义为局部由 $p_z = \epsilon df(z)$ 给出的拉格朗日子流形。另外，令 $\pi_\epsilon\colon \Sigma^\epsilon \to \Sigma$ 为自然微分同胚，它由沿着 T^*C 的纤维投影给出。

我们定义 $\mathrm{Mat}(N^\kappa,\ \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\nu^\epsilon))$如定义 2.2所述，方法是选取基点 q使其远离 U_{R_1}。于是存在一列同构

$$(\zeta_\nu^{-1}\circ\pi_{\nu,\epsilon})_*:\mathrm{Mat}(N^\kappa,\mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\nu^\epsilon))\to\mathrm{Mat}(N^\kappa,\mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)),$$

其中 $\pi_{\nu,\ \epsilon}$ 是自然微分同胚$\Sigma_\nu^\epsilon\to\Sigma_\nu$。

Σ_ν^ϵ 上的自旋结构是通过推前由 Σ 上的自旋结构诱导得到的。

令 $\nu\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\epsilon>0$ 充分小。我们通过对 p_α、p_β 在 Σ 上以及 p_α、p_β 在 Σ_ν^ϵ 上的自然识别，并稍微滥用记号，以与定义 $\mathcal{T}^l(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 和 $\mathcal{T}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 相同的方式定义 $\mathcal{T}^l_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 和 $\mathcal{T}_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$。容易验证，引理4.6 和4.7 的类似结论对于 $\mathcal{T}^l_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 和 $\mathcal{T}_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 仍然成立。

然后我们定义

$$\mathcal{F}^{\nu,\epsilon}_{\mathrm{hol}}\colon CW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i}C)\to\mathrm{Mat}(N^\kappa,\mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\nu^\epsilon)) \tag{5.1}$$

以与 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 相同的方式，通过计算 $\mathcal{T}_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$ 中的元素。第 4 节中的所有引理同样适用于 $\mathcal{F}^{\nu,\ \epsilon}{}_{\mathrm{hol}}$。

下面命题的证明与引理 4.9 的证明类似，故略去：

引理 5.1。 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}=(\zeta_\nu^{-1}\circ\pi_{\nu,\ \epsilon})_*\circ\mathcal{F}^{\nu,\ \epsilon}{}_{\mathrm{hol}}$对所有 $\nu\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\epsilon>0$ 均成立。

6. 同调变量

本节引入同调变量 c，它扩展了系数环。

现在假设 C 是一个至少有一个穿孔点的闭黎曼曲面。我们仍有一个分支覆盖 $\pi:\Sigma\to C$，满足 $\Sigma\subset T^*_{\mathrm{hol}}C$。令 $Z\subset C$ 为分支点的集合，这些都是双分支点；令 $\widetilde{Z}\subset\Sigma$ 为分歧点的集合。

我们将选取两条不同的弧 b_p^+ 和 b_p^- 给出的分支割线的并延伸至每个穿孔点，并满足：

(1) $\pi(b_p^+)=\pi(b_p^-)$，且从 $\pi(p)\in Z$ 延伸至 C的一个穿孔点；(2) 若 b_p^+（分别为 b_p^-）在 p附近位于 df_i（分别为 df_j）的图像上，则 $\pi(b_p^+)$背离 $\pi(p)$，并在 p附近与 $\nabla(f_i-f_j)$相切且方向一致；(3) 弧的定向使得 b_p^+背离 p，而 b_p^-指向 p；(4) 所有 p 上的 $b_p^+\cup b_p^-$彼此不交；(5) $b_p^+\cup b_p^-$与 $\pi^{-1}(\mathrm{q})$不相交。

然后我们定义

$$\mathcal{B}:=\sqcup_{p\in\widetilde{Z}}(b_p^+\cup b_p^-).$$

我们可以改进 $\mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$（4.6）中的定义，使其取值于

$$\mathrm{Mat}(N^\kappa,\mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma))\otimes\mathbb{Z}[c^{\pm1}],$$

因此，将 $\mathcal{E}(u)$ 替换为 $\mathcal{E}(u)c^{\langle\mathcal{E}(u),\mathcal{B}\rangle}$，其中 $\langle\mathcal{E}(u)\ \mathcal{B}\rangle$ 是 Σ 上的代数交数。参照第 4.5 节中的 $\mathcal{T}:=\mathcal{T}\mathrm{ind}_{=1}(\mathrm{p}_\alpha,\mathrm{y}',\mathrm{y},\mathrm{p}_\beta)$，若 (u_2,u_1) 是类型（T2）的边界点，而 (w,u_3) 是 $\mathcal{T}$ 的某个分支两端处类型（T1）的边界点，则不难验证：

$$\langle\mathcal{E}(u_1)\mathcal{E}(u_2),\mathcal{B}\rangle=\langle\mathcal{E}(u_3),\mathcal{B}\rangle,$$

因为 $\mathcal{E}(u_1)\mathcal{E}(u_2)$ 与 $\mathcal{E}(u_3)$ 端点相对同伦。

Rema命题 6.1。 设置 $c = q^{-1/2}$ 给出了与下列对象类似的因子： *[NY20*，图 18 *]*.

7. 混合 Floer-Morse 方法

我们讨论上一节中 Floer理论方法的混合 Floer-Morse 对应物。

在 [Yua23], 中，第三位作者在流形的对称积上定义了 Morse 理论，其中 A_∞-结构通过计数折叠莫尔斯流树来定义。我们将该论文调整到我们的设定中，使得修改后的折叠莫尔斯流树版本给出非阿贝尔化映射的量子化。

7.1。 基方向。 我们将描述参数化基方向的对象，这些对象对应于通常的 HDHF 基方向 $Y_{m,\ \imath}$ 见第 4.1节。

定义 7.1。折叠度量带树是一棵树 $T = (V(T)\ E(T)) =$，配备了一个长度函数 (V, E)

$$\ell \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

使得 $V = V_{\text{ext}} \sqcup V_{\text{int}}$ 并且满足以下条件:

(1) 存在一个分解 $V_{\text{ext}} = \{v_0\} \sqcup V_{\text{diag}} \sqcup V_{\text{cusp}}$，其中 v_0 是唯一的根顶点。 V_{diag} 的顶点（分别为 V_{cusp}的顶点）称为对角顶点（分别为尖点顶点）。(2) 每条 $e \in E$ 均沿指向 v_0的方向定向。(3) 每个内部顶点 $v \in V_{\text{int}}$ 的价数为 $|v| \geq 3$，并且有一个循环序h_v： $E_v \to \{0, 1, \ldots, |v| - 1\}$，其中 E_v是与 v 相邻的边的集合， h_v是一个双射，并且 $h_v = 0$ 对应出边。[1]

注意，我们允许 $\ell\ (e)\ = 0$。

令 $\mathcal{Y}_{m,\ k,\ r,\ s}$ 为由二元组构成的空间（非正式地称为“乌贼”）

$$Y_{m,k,r,s} := (Y_{m,k}, \boldsymbol{T} := (\{T_1, \ldots, T_n\}, \{t_1, \ldots, t_n\})),$$

其中 $Y_{m,\ k} \in \mathcal{Y}_{m,\ k}$、 T_1、 ……、 T_n、 $n \geq 0$均为折叠度量带状树，

$0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$、 $r = \sum_{i=1}^{n} |V\ (T_i)\ _{\text{diag}}|$， 且 $s = \sum_{i=1}^{n} |V\ (T_i)\ _{\text{cusp}}|$。 对于每个 T_i， 其根顶点与 $t_i \in [0, 1] \simeq \partial_{m+1} Y_m$重合。这里，我们为所有 $Y_m \in \mathcal{Y}_m$ 固定了一个光滑的（反向定向）参数化族 ϕ_{Y_m}： $[0, 1] \to \partial_{m+1} Y_m$。例如见图 6。我们将非正式地把 $Y_{m,\ k}$ 称为“鱿鱼身体”，把 T_i 称为“鱿鱼腿”。[2]

约定 7.2。有时我们会省略 $Y_{m,k,r,s}$ 的某些下标，例如写作 Y_m,$Y_{m,r}$ 或 $Y_{m,k,r}$, 并默认指的是应用遗忘函子后的结果。

$\mathcal{Y}_{m,\ k,\ r,\ s}$ 上存在一个自然定义的拓扑，并且该拓扑允许进行紧化 .

[1]循环序指的是带状树嵌入平面时顶点周围的逆时针顺序。[2]严格来说，乌贼有八条“腕”和两条“触手”。

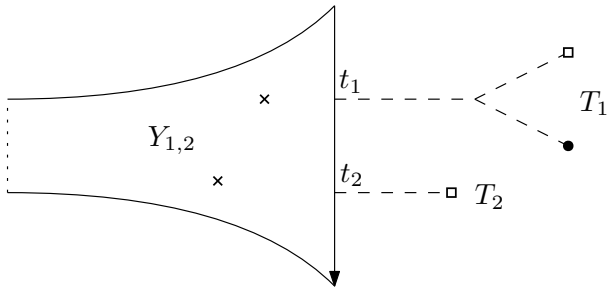


图 6. 一个 $Y_{1,2,2,1}$ 的示例。交叉处表示 $Y_{1,2}$ 中的标记点。方框表示 V_{diag} 中的顶点，黑点表示 V_{cusp} 中的一个顶点。

7.2. 一致的扰动数据集。现在我们描述与 $\{\mathcal{Y}_{m,k,r,s}\}$相关联的一致的扰动数据集。

令 $\mathfrak{M}(C)$ 为 C 上黎曼度量的集合。给定黎曼度量 $g \in \mathfrak{M}(C)$，其诱导的典范几乎复结构 J_g 在 T^*C 上满足以下性质：

(1) J_g 与 T^*C 上的典范辛形式 ω 相容。(2) J_g 将垂直切向量（即与纤维相切的向量）映射为相对于列维-奇维塔联络 ∇_g 而言的 T^*C 的水平切向量。

(3) 在 T^*C 的零截面上，对于 $v \in T_qC \subset T_{(q,0)}(T^*C)$，令 $J_g(v)(\cdot) = g(v, \cdot) \in T_q^*C \subset T_{(q,0)}(T^*C)$。

令 $E_{\text{cusp}} \subset E$ 为不在任何从V_{diag}出发并以 v_0为终点的有向路径上的边的子集。对于每个 $Y_{m,k,r,s} \in \mathcal{Y}_{m,k,r,s}$，我们可以赋予$Y_{m,k,r,0} := \varphi(Y_{m,k,r,s}) \in \mathcal{Y}_{m,k,r,0}$，它是通过收缩 $Y_{m,k,r,s}$的所有尖点边 E_{cusp} 得到的。我们也将收缩映射记作

$$\varphi\colon T_i \to \varphi(T_i)$$

对于每个 T_i，其中$Y_{m,\ k,\ r,\ s}$。

定义 7.3. 对于 $\mathcal{Y}_{m,\ k,\ r,\ s}$，扰动数据由以下内容组成：

(1) 一个哈密顿函数的光滑族

$$H_{Y_m}\colon Y_m \to \mathcal{H}(T^*C),$$

使得 H_{Y_m} 在 $\partial_{m+1}Y_m$附近取值于 $\mathcal{H}^{\epsilon}(T^*C)$；

(2) 一个几乎复结构的光滑族

$$J_{Y_m}\colon Y_m \to \mathcal{J}(T^*C, \omega);$$

（3）对于每个 $1 \le i \le n$，一个黎曼度量的光滑族

$$g_{T_i}\colon T_i \to \mathfrak{M}(C);$$

满足以下条件：

(4) there exists $g \in \mathfrak{M}(C)$ such that $J_{Y_{m,k}}|_{\partial_{m+1}Y_m} = J_g$ and $g_{T_i}(v_0) = g$ for each $1 \le i \le n$;

(5) 将 $(E_i)_{\text{cusp}}$ 记作 T_i 中无法从对角顶点沿有向路径到达的边，则 g_{T_i} 在 $(E_i)_{\text{cusp}}$ 上为常数；(6) g_{T_i} 在每个内部顶点的一个小邻域内，以及每条满足 $\ell(e) = 0$ 的边 e 上均为常数。

注 7.4. 就实际用途而言，只需将 g_{T_i} 取为常值函数 g （4）的一个小扰动，并在 T_i的有限个点的邻域上进行扰动，每条边的内部各取一点。我们希望（6）的第一部分成立，从而满足定义7.9中的基尔霍夫定律 (FM4)。

定义 7.5. $\{\mathcal{Y}_{m,k,r,s}\}$ 的相容扰动数据集由分别对应于每个$\mathcal{Y}_{m、k、r、s}$ 的扰动数据组成，并且与紧化相容。此外，我们要求

$$g_{T_i}(y) = g_{\varphi(T_i)}(\varphi(y)) \tag{7.1}$$

对于$Y_{m、k、r、s} \in \mathcal{Y}_{m、k、r、s}$的每个 $y \in T_i$。

7.3. 混合模空间。混合 Floer-Morse 方法涉及定义一种混合模空间，其元素为全纯曲线与折叠莫尔斯树组成的有序对（非正式地称为“折叠鱿鱼映射”）。

给定 $\mathbf{y} \in CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i} C)$，令 $\mathcal{T}_0^k(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ 表示 $((F, j), u)$ 的集合，其中 (F, j) 是带边界的紧黎曼曲面，$\mathbf{w}_0$,$\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$ 是互不相交的 κ 元边界标记点组，属于 F, $F = F \setminus \cup_i \mathbf{w}_i$，并且

$$u\colon \dot{F} \to Y_1 \times T^*C$$

是一个连续映射，满足

$$(du - X_{H_{Y_1}} \otimes d\tau)^{0,1}_{j, J_{Y_{1,k}}} = 0, \tag{7.2}$$

并且满足以下条件：

(1) 对于 $m = 0$，当 $\pi_{Y_1} \circ u(z) \subset \partial_m Y_1$ 时，$\pi_{T^*C} \circ u(z) \in \sqcup_i T^*_{q_i}\Sigma$。投影到 $\partial_m Y_1$ 的 ∂F 的每个分支都映射到不同的 $T^*_{q_i} C$。(2) 当 $\pi_{Y_1} \circ u(z) \subset \partial_2 Y_1$ 时，$\pi_{T^*C} \circ u(z) \in C$。(3) 当 $s_1, s_2 \to +\infty$ 时，$\pi_{T^*C} \circ u$ 趋于 $\mathbf{y}, \mathbf{q}$；当 $s_0 \to -\infty$ 时，趋于 $\mathbf{q}$。(4) $\pi_{Y_1} \circ u$ 是 κ 重的 Y_1 的分支覆盖，其中假设分支点是简单的，并且对应于 $Y_{1,k}$ 上的标记点。

接着我们设定

$$\mathcal{T}_0(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = \sqcup_{k \geq 0} \mathcal{T}_0^k(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q}).$$

T以下是引理 4.6 和 4.7的类似结果，陈述如下，不予证明。

引理 7.6。对于一般一致的扰动数据集，$\mathcal{T}_0(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ 的维数为 0，并且对所有 $\mathbf{y}$ 都由离散的正则曲线组成。

引理 7.7. 对于一般一致的扰动数据集以及固定的 $\mathbf{y}$ 和$k \geq 0$，模空间 $\mathcal{T}_0^k(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ 由有限条曲线组成。

定义 7.8. 折叠度量带树 $T=(V,E)$ 的一个 κ-折叠提升是一个二元组 (G,π_0)，由一个度量带状图 $G=(V,E)$ 和一个映射 $\pi_0\colon G\to T$ 构成，构造如下：令 $\sqcup_\kappa T:=\sqcup_{i=1}^{\kappa}T^i$ 为不交并，其中每个 $T^i=(V^i,E^i)$ 都是 T 的一个副本。对于每个 $v\in V$，将对应的顶点副本记为 $v^1,\dots,v^\kappa$。

(1) 对于每个 $v\in V_{\mathrm{diag}}$，选择两个顶点 v^i 和 v^j 及其相邻边 e^i 和 e^j；其他顶点称为普通外部顶点。然后，通过识别 v^i 和 v^j，将 e^i 和 e^j 粘合为一个带状图。所得粘合边 e_{glue} 的长度为 $\ell(e_{glue})=\ell(e^i)+\ell(e^j)$。(2) 对于每个 $v\in V_{\mathrm{cusp}}$，选择一个顶点 v^i 并将其称为尖点顶点；其他顶点也称为普通外部顶点。

映射 π_0 是通过将每个 T^i 与 T 识别，并按照上述描述将 $\sqcup_\kappa T$ 的某些顶点取商得到的；它限制在 $G\backslash\pi_0^{-1}(V_{\mathrm{diag}})$ 上是一个 κ 重覆盖映射。

定义 7.9。折叠莫尔斯树是一对 (G,π_0)，其中 (G,π_0) 是折叠度量带树 T 的一个 κ-折叠提升，并且 $\gamma\colon G\to C$ 是满足以下条件的连续映射：

(FM1) 对于每个可缩开子集 $U\subset C\backslash Z$，存在 N 光滑函数 f_1、……、f_N 定义在 U 上，使得原像 $\pi^{-1}(U)$ 由 $\widetilde{\ }$ 的图像 df_1、……、df_N 给出。（回顾第3节中的讨论。）对于每个 $e\in E$，限制在 $(\gamma|_e)^{-1}(U)$ 时，

$$\gamma'(s)=\nabla_{g\circ\pi_0}(f_{i_B(e)}-f_{i_T(e)})(\gamma(s)),$$

对于某个 $i_B(e)$ $i_T(e)\in\{1,\dots,N\}$。（这里的下标 T 和 B 分别表示“顶部”和“底部”；当树如图6所示绘制、出边指向左侧且各边朝向根顶点时。）

(FM2) 若 $e\notin\widetilde{E}$ 与一个普通外部顶点相邻，则 $i_B(e)=i_T(e)$，且 $\gamma|_e$ 是常值映射；否则 $i_B(e)\neq i_T(e)$。

(FM3) 若 $e\notin\widetilde{E}$ 时当趋近点时，e 相邻 $-f_{i_T(e)}$ 的负梯度流极限为 Z 中的一点。

(FM4) 梯度流保持带状结构，即满足基尔霍夫定律：对于每个 $\widetilde{\ }$ 内部顶点 $v\in V$，将与 v 相邻的循环排序的边依次记为 e_0、……、$e_{|v|-1}$（同样按逆时针顺序），其中 e_0 为出边。那么

$$i_B(e_{i+1})=i_T(e_i),\quad \textit{for } 1\le i\le|v|-2,$$
$$i_T(e_0)=i_T(e_{|v|-1}),\quad i_B(e_0)=i_B(e_1).$$

我们常常在折叠莫尔斯树的记号中省略 π_0。

Let $\mathbf{y}\in CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa}T^*_{q_i}C)$ and $\alpha,\beta\in\mathfrak{J}$.

定义 7.10. 以 $Y_{1,\ k,\ r,\ s}$ 为基底的折叠鱿鱼映射是一个有序对 $((F,u),(G,\gamma))$，其中：(FS1) $Y_{1,\ k,\ r,\ s}:=(Y_{1,\ k},\ \boldsymbol{T}:=(\{T_1,\dots,T_n\},\ \{t_1,\dots,t_n\}))\in\mathcal{Y}_{1,\ k,\ r,\ s}$；(FS2) $(F,u)\in\mathcal{T}_0^k$(q, y, q)，且 $\dot{F}$ 分支覆盖 $Y_{1,\ k}$；(FS3) $G=\sqcup_{i=1}^{n}G_i$，G_i 是 κ 折叠提升 T_i 的，且 $(G_i,\ \gamma|_{G_i})$ 是一棵折叠莫尔斯树；

(FS4) 对于根顶点 $v_i \in T_i$，存在一个识别

$$\eta_i : \pi_0^{-1}(v_i) \xrightarrow{\sim} (\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\phi_{Y_1}(t_i))$$

使得 $\gamma(v) = \pi_{T^*C} \circ u(\eta_i(v))$（回忆一下，$\phi_{Y_1}$ 是一个映射 $[0,1] \to \partial_2 Y_1$）；

(FS5) 对于连续的 T_i、T_{i+1}，存在一个识别

$$\pi_0^{-1}(v_i) \xrightarrow{\eta_i} (\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\phi_{Y_1}(t_i)) \xrightarrow{\sim} (\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\phi_{Y_1}(t_{i+1})) \xrightarrow{\eta_{i+1}^{-1}} \pi_0^{-1}(v_{i+1}),$$

其中间映射由沿着……的平行传输给出

$$(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\phi_{Y_1}([t_i, t_{i+1}])).$$

若在识别下，v 被映到 v'，且 e 和 e' 是与 v 和v'相邻的边，则对应于 $i_B(e)$ 的片在平行传输下与对应于$i_T(e')$的片一致。

令$\mathcal{P}_{k,\ r,\ s}(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$为以$Y_{1,\ k,\ r,\ s} \in \mathcal{Y}_{1,\ k,\ r,\ s}$ 为基底的折叠鱿鱼映射（$(F, u), (G, \gamma)$）的模空间，并令

$$\mathcal{P}^l(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \coloneqq \bigsqcup_{0 \le k \le l, s \ge 0} \mathcal{P}_{k, l-k, s}(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q}).$$

与[NY20] 相比，我们的设定有一个优点：对于图像中任意数量的环，相关模空间的指标均为0：

引理 7.11。对于一般的一致扰动数据集，$\mathcal{P}^l(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$由横截切出的刚性元素组成，使得：

(P1) $Y_{1,\ k,\ l-k,\ s}$ 满足 $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$；(P2) 对于每个 T_i，与根顶点相邻的边的长度为正，且所有内部顶点都是三价的；(P3) $Y_{1,\ k}$ 的标记点与 $\partial_2 Y_1$不相交；(P4) γ 的像与 U_{R_ν} 中所有以 Z 和 P中的点为中心的 R_ν-圆盘的并集不相交，但与趋于尖点边的尖点顶点相邻的边除外；

并且对于每个 $l \ge 0$，其数量是有限的。

证明。注意，在定义 7.3 中，我们允许 g_{T_i} 在 $E_i \backslash (E_i)_{\text{cusp}}$上依赖于定义域，但在 $(E_i)_{\text{cusp}}$上为常数。根据 [Yua23，引理 2.6]，，对 g_{T_i} 在 $E_i \backslash (E_i)_{\text{cusp}}$ 上的依赖于定义域的扰动，足以使与 V_{diag} 相邻的每条边上的梯度轨迹横截地与 C^κ的大对角线相交。g_{T_i} 在剩余部分 $(E_i)_{\text{cusp}}$ 上的扰动是常数，但利用从尖点顶点出发的流树的归纳论证，这仍足以保证横截性；该论证见 [CN25，定理 1(i) 的证明]。因此，$\mathcal{P}^l(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ 由横截切出的刚性元素组成，结合上述讨论以及求值映射的横截性

$$\mathcal{E}(u) = (\pi_{T^*C} \circ u)(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\partial_2 Y_1)$$

对于 (u, γ)，$\in \mathcal{P}^l(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ 蕴含 (P1)–(P4)。

结合 Gromov 紧性与 [Yua23，引理 2.7]，$\mathcal{P}_{k,l-k,s}$(q, y, q) 对每个 l, k, s 都是有限集。此外，由于 [CN25，命题 3.18]，对于每个 l, k，除有限多个s 外，$\mathcal{P}_{k,l-k,s}$(q, y, q) 均为空。因此，$\mathcal{P}^l$(q, y, q) 对每个 $l \geq 0$都是有限集。□

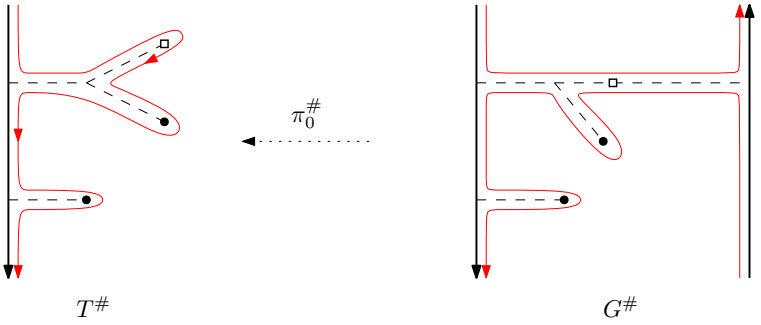


图 7

现在回顾参数化 $\phi_{Y_1}\colon\ [0,1] \to \partial_2 Y_1$。利用这一参数化，将 $\pi_{T^*C} \circ u$ 限制在 $(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\partial_2 Y_1)$ 上，可得到从 q 到 q、位于 C 上的 κ 股辫子 $\mathcal{E}^\flat(u)$；不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{E}^\flat(u)$ 与 C 的分支点不相交。

我们定义

$$Y_1^\sharp := Y_1 \sqcup N(T_1) \sqcup \cdots \sqcup N(T_n)/\sim,$$

其中，当 $\epsilon > 0$ 充分小时，$N(T_i)$、$i = 1$、.....、n 是 T_i 的一个 ϵ-厚带状邻域，T_i 的根顶点 v_i 有一个区间邻域 $N(v_i) \simeq [-\epsilon, \epsilon] \times \{v_i\} \subset \partial N(T_i)$，而 $N(v_i)$ 沿着 $[t_i - \epsilon, t_i + \epsilon]$ 粘合到 $\partial_2 Y_1$。类似地，我们定义

$$\dot{F}^\sharp := \dot{F} \sqcup N(G_1) \sqcup \cdots \sqcup N(G_n)/\sim,$$

其中，$N(G_i)$ 是 G_i 的 ϵ 厚带状邻域，而 $\partial N(G_i)$ 中 T_i 的根顶点的 $[-\epsilon, \epsilon]$ 个原像通过识别 η_i 粘合到 F。

令 $T^\sharp$ 为 $Y_1^\sharp$ 中与 $\partial_2 Y_1$ 非平凡相交的边界分支，并令 $G^\sharp$为 $\dot{F}^\sharp$ 中与 $(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\partial_2 Y_1)$非平凡相交的边界分支之并；$T^\sharp$（分别为 $G^\sharp$）由图 7中的一条红弧（分别为数条红弧）给出。此外，还有一个覆盖映射 $\pi_0^\sharp\colon\ G^\sharp \to T^\sharp$。

我们对 $\phi_{Y_1}^\sharp\colon\ [0,1] \tilde{\to} T^\sharp$（因此也对 $G^\sharp$ 的每个分支）进行参数化，使得 $\phi_{Y_1} = \phi_{Y_1}^\sharp$ 在 $\partial_2 Y_1$ 与 $T^\sharp$ 相同的部分上成立。根据 (FS4) 和 (FS5)，$\pi_{T^*C} \circ u|_{\partial Y_1}$ 和 γ 可以一致地提升到 Σ，经过小扰动后将它们粘合起来，得到一个 κ 股辫子 $G^\sharp \to \Sigma$，它为 Mat(N^κ, BSk$_\kappa(\Sigma)$) 中的一个矩阵元素 $\mathcal{E}^\sharp(u, \gamma)$ 作出贡献。我们定义

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}\colon CW(\sqcup_{i=1}^\kappa T^*_{q_i} C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma)), \tag{7.3}$$
$$\mathbf{y} \mapsto \sum_{l \geq 0} \sum_{(u,\gamma) \in \mathcal{P}^l(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q})} (-1)^{\sharp(u,\gamma)} \cdot \hbar^{\kappa - l} \cdot \mathcal{E}^\sharp(u, \gamma).$$

为了证明 $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}$ 是一个代数映射，我们需要分析维数为 1 的模空间。然而，针对 $N>2$ 的一参数谱网络族可能会经历非局部拓扑变化，因此难以通过这种方式验证 $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}$ 的不变性。我们将在下一节通过比较相关模空间，概述 $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}} = \mathcal{F}_{\mathrm{hol}}$ 的证明；代数映射这一性质是这种等价关系的副产品。

7.4. 对于 Σ_ν^ϵ 的修改。我们描述将 Σ 替换为 Σ_ν^ϵ 时所作的修改。存在一个映射

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}^{\nu,\epsilon}\colon CW(\sqcup_{i=1}^{\kappa} T^*_{q_i}C) \to \mathrm{Mat}(N^\kappa, \mathrm{BSk}_\kappa(\Sigma_\nu^\epsilon)),$$

其定义方式与 (7.3) 相同，但求和所遍历的是一个稍作修改的模空间 $\mathcal{P}^l_{\nu,\epsilon}(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q})$，即相对于 Σ_ν^ϵ的折叠鱿鱼映射模空间，其中定义7.9 中的条件 (FM3) 替换为

~ ~

(FM3') 若 $e\in E$ 与尖点顶点 $v\in V$相邻，则$f_{i_B(e)} - f_{i_T(e)}$ 的负梯度流在以 R_ν中的某一点为中心的一个 -圆盘内，正则地趋近于一条尖点边 Z（见图 5中的红色尖点边）。

引理 7.12. 对每个 $l\geq 0$，存在 $\nu_l>0$ 使得

$$(\zeta_\nu^{-1}\circ\pi_{\nu,\epsilon})_*\circ\mathcal{F}^{\nu,\epsilon}_{\mathrm{Mor}} = \mathcal{F}_{\mathrm{Mor}} \mod \hbar^{l+1},$$

只要 $\nu>\nu_l$。

证明。对每个 $l\geq 0$，根据引理 7.11， $\mathcal{P}^l$(q, y, q) 是一个有限集。由 [CN25 的引理 3.23]，可知，当 $\nu_l>0$ 足够大时，对所有$\nu>\nu_l$和 $l'\leq l$， $\mathcal{P}^{l'}$(q, y, q) 与 $\mathcal{P}^{l'}_{\nu,\epsilon}$(q, y, q) 之间存在双射。此外，$\mathcal{P}^{l'}_{\nu,\epsilon}$(q, y, q) 中每个元素对 $(\zeta_\nu^{-1}\circ\pi_{\nu,\epsilon})_*\circ\mathcal{F}^{\nu,\epsilon}_{\mathrm{Mor}}$的贡献，与其对应元素在 $\mathcal{P}^{l'}$(q, y, q) 中对 $\mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}$ 的贡献相同。因此，对于 $\nu>\nu_l$，$(\zeta_\nu^{-1}\circ\pi_{\nu,\epsilon})_*\circ\mathcal{F}^{\nu,\epsilon}_{\mathrm{Mor}} = \mathcal{F}_{\mathrm{Mor}}$ 模 $\hbar^{l+1}$。□

8. 两种方法的等价性

本节概述所需引理的证明，这些引理将推出猜想 1.9。

8.1. 从乌贼到黎曼曲面。 在本小节中，我们定义一个粘合映射 Θ_λ，当 $\lambda>0$ 充分小时，将乌贼空间映射到带有内部标记点的全纯圆盘空间，并介绍其基本性质。这是对 [FO97] 中定理 10.4 和第 14 节的推广，推广到带有内部标记点的圆盘情形。

8.1.1. 加厚。设 $T=(V,E)$ 是一棵折叠度量带树。对于每条边 $e\in E$，我们定义

$$\Theta_\lambda(e) := \{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq \mathrm{Re}\, z\leq \ell(e), -\lambda/2\leq \mathrm{Im}\, z\leq \lambda/2\}\backslash\{0,\ell(e)\},$$

它是一个具有两个边界穿孔的闭条带。我们将 Θ_λ(e) 视为 int(e) $=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq$ Re $z\leq \ell$(e)（Im $z=0\}$）的加厚，其中 e 沿负 Re(z) 方向定向。两个边界穿孔将两个垂直边界分支分成四个部分。

接下来我们定义 T 的加厚 $\Theta_\lambda(T)$ 如下：对于一个内部顶点 $v\in V_{\mathrm{int}}$，将与 v 相邻的循环排序的边记为 e_0、.....、 $e_{|v|-1}$，使得 $h_v(e_i) = i$,

其中 e_0 是出边。然后，对于 $i = 1$、.....、$|v| - 1$，我们将 $\Theta_\lambda(e_i)$ 的左下垂直边界与 $\Theta_\lambda(e_{i+1})$ 的左上垂直边界识别起来 $i = 1$、.....、$|v| - 1$；将 $\Theta_\lambda(e_{|v|-1})$ 的左下垂直边界与 $\Theta_\lambda(e_0)$的右下垂直边界识别起来；将 $\Theta_\lambda(e_1)$ 的左上边界与 $\Theta_\lambda(e_0)$的右上垂直边界识别起来。然后填充内部可去穿孔。见图 8。

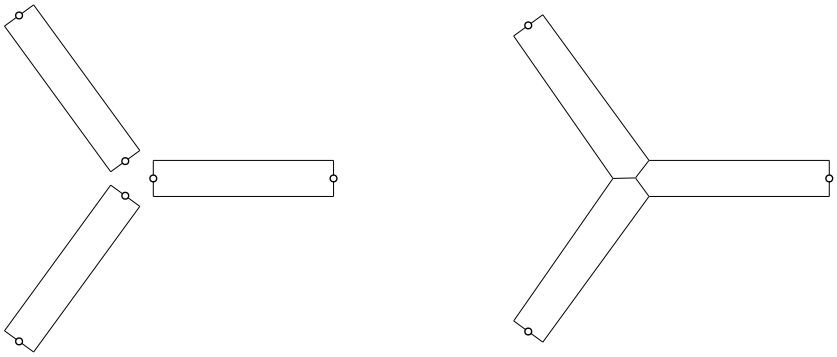


图 8

如果 e 与一个对角顶点相邻 $v \in V_{\text{diag}}$，我们就将 $\Theta_\lambda(e)$ 的右上方和右下方竖直边界识别起来。然后填补可去奇点，并将其转换为一个内部标记点。参见图 9。



图 9

如果 e 与一个尖点顶点 $v \in V_{\text{cusp}}$相邻，我们就将 $\Theta_\lambda(e)$ 的右上方和右下方竖直边界识别起来，填补可去奇点，但不将其转换为标记点。

上述操作的结果记为 $\Theta_\lambda(T)$。

注 8.1. 注意，若与对角顶点相邻的一条边 e 满足 $\ell(e) = 0$，则 $\Theta_\lambda(T)$ 等价于 $\Theta_\lambda(T')$，其中 T' 是通过移除边 e 并将相邻边 e'、e'' 首尾连接得到的。此外，在 $(\ell(e'), 0) \in \Theta_\lambda(e' \cup e'')$ 处也会有一个内部标记点。

8.1.2. 拼接鱿鱼腿。固定 $\lambda > 0$ 为小量。令 $l \geq k \geq 0$。令 $\mathcal{Y}^\lambda_{m,\ k,\ l-k,\ s}$ 为 $\mathcal{Y}_{m,\ k,\ l-k,\ s}$ 的子集，其中包含

$$Y_{m,k,l-k,s} = (Y_{m,k}, (\{T_1, \dots, T_n\}, \{t_1, \dots, t_n\})),$$

满足以下间距条件：

(Sp) $t_0 := 0 < t_1 < \cdots < t_n < 1 =: t_{n+1}$ and each $t_{i+1} - t_i > 2\lambda$.

（Sp）是引理7.11中（P1）的一个更精确版本。此外，对于固定的 $C \gg 0$，令 $\mathcal{Y}^{\lambda,\ C}_{m,\ k,\ l-k,\ s}$ 为 $\mathcal{Y}^{\lambda}_{m,\ k,\ l-k,\ s}$ 的子集，其中没有任何树 T_i 的边与满足 $\ell < C\lambda$ 的对角顶点相邻。

为了分析 $\mathcal{F}^{\nu,\ \epsilon}\mathrm{Mor}$，只需考虑 $m = 1$。

给定 $Y_{1,\ k,\ l-k,\ s} \in \mathcal{Y}^{\lambda}_{1,\ k,\ l-k,\ s}$，我们按如下方式将每棵树 T_i 的加厚 $\Theta_\lambda(T_i)$ 粘合到 $Y_{1,\ k}$：设 T_i 中与根顶点相邻的边为 e_0。然后通过映射将 $\{\mathrm{Re}\, z = 0\} \cap \Theta_\lambda(e_0) \subset \Theta_\lambda(T_i)$ 粘合到 $\partial_2 Y_1$

$$z \mapsto \phi_{Y_1}(t_i - \mathrm{Im}\, z),$$

然后填充可去奇点。参见图 10。

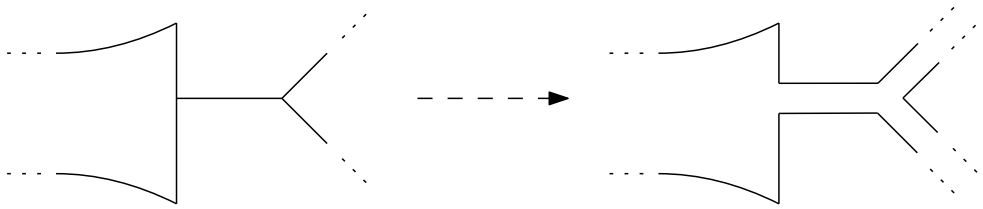


图 10

对于每个 $l \geq 0$，我们定义了映射

$$\Theta_\lambda : \bigsqcup_{0\leq k\leq l,\, s\geq 0} \mathcal{Y}^{\lambda}_{1,k,l-k,s} \to \mathcal{Y}_{1,l}. \tag{8.1}$$

下面的引理是 [FO97，引理 14。5] 的推广，陈述如下但不予证明：

引理 8.2. 设 $C > 0$ 为一个固定的大常数，$\lambda_0 > 0$ 充分小，且 $\lambda \in (0, \lambda_0]$。则将 $\Theta_\lambda|_{s=0}$ 限制在子集上时，它是一个局部微分同胚

$$\bigsqcup_{0\leq k\leq l} \mathcal{Y}^{\lambda,C}_{1,k,l-k,0} \subset \bigsqcup_{0\leq k\leq l} \mathcal{Y}^{\lambda}_{1,k,l-k,0}.$$

8.1.3. 对 $\{\mathcal{Y}_{1,l}\}$的一致扰动数据集的相容选择的附加要求。给定 $\{\mathcal{Y}_{1,k,r,0},\ k, r \geq 0\}$ 和 $\lambda_0 > 0$上的一致扰动数据集，我们的目标是对 $\{\mathcal{Y}_{1,l}\}$上的一致扰动数据的选择施加附加条件，该选择依赖于 Σ^{ϵ}_{ν}（即依赖于 ϵ 和 ν）以及 $\lambda \in (0, \lambda_0]$，从而与 $\{\mathcal{Y}_{1,k,r,0},\ k, r \geq 0\}$上的扰动数据相容。为保持一致性，我们希望 $J_{Y_{1,l}}$ 当 $\epsilon \to 0$、$\nu \to \infty$和 $\lambda \to 0$时，Σ^{ϵ}_{ν} 趋于 J_{Y_1}。我们无需考虑哈密顿函数，因为假设它们在 T^*C的零截面附近为零。

主要的困难在于，与 [FO97] 相比，$\Theta_\lambda|_{s=0}$ 既非单射也非满射。给定序列 $(Y^n_{1,\ k+r})_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$，其中元素属于 $\mathcal{Y}_{1,\ k+r}$，且该序列收敛到 $\mathcal{Y}_{1,\ k,\ r,\ 0}$，关键问题是区分哪些分支点收敛到对角顶点，哪些仍然是分支点。由于 $\Theta_\lambda|_{s=0}$ 不是单射，区分这两组点时存在歧义。解决方法是只在 $\mathcal{Y}_{1,\ k+r}$ 的一个子集上指定 $J_{Y_{1,\ k+r},\ \lambda}$，在该子集上我们可以轻易地区分这两组分支点，然后再以光滑方式将其扩展到整个 $\mathcal{Y}_{1,\ k+r}$。

我们首先注意到，由对角顶点产生的 $\Theta_\lambda(Y_{1,\,0,\,r,\,0})$ 的所有标记点都靠近 $\partial_2 Y_1$。我们采用模型 $(-\infty,\,0]\times[0,1]\subset\mathbb{C}$，其中 Y_1 来自方程（4.2）。于是：

引理 8.3。固定正整数 l，并令 $\alpha_0>0$ 足够小。存在足够小的 $\lambda_0>0$ 以及一个光滑函数 $g:(0,\lambda_0)\to\mathbb{R}_{>0}$，使得：

(1) $\lim_{\lambda\to 0} g(\lambda)=0$；(2) 对任意 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 和 $Y_{1,\,0,\,r,\,0}\in\mathcal{Y}^\lambda_{1,\,0,\,r,\,0}$，$0\le r\le l$，$\Theta_\lambda(Y_{1,\,0,\,r,\,0})$ 中的所有标记点都满足 $\operatorname{Re} z>-g(\lambda)$；以及 (3) Θ_λ 限制在 $\mathcal{Y}^\lambda_{,\,1\,0\overset{C}{r},\,,\,,\,0}$ 上时，对于 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，它是到 $\mathcal{Y}_{1,\,r}$ 中其像的一个双射。

令 $h:(0,\lambda_0)\to\mathbb{R}_{>0}$ 为一个光滑函数，使得 $\lim_{\lambda\to 0}h(\lambda)=0$ 且 $\lim_{\lambda\to 0}\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}=-\infty$，我们定义

$$E^\lambda_{k,r}:=\{Y_{1,k+r}\in\mathcal{Y}_{1,k+r}\,|\,Y_{1,k+r}\in\Theta_\lambda(\mathcal{Y}^\lambda_{1,k,r,0}),\ k\text{ marked points have }\operatorname{Re} z<-h(\lambda)\},$$

对所有 $k+r=l$ 和 $0<\lambda<\lambda_0$均成立。换言之，$Y_{1,\,k+r}\in E^\lambda_{k,\,r}$ 具有 k 个标记点，其 $\operatorname{Re} z<-h(\lambda)$，而来自对角顶点的其余 r 个标记点满足 $\operatorname{Re} z>-g(\lambda)$。我们还定义 $E^\lambda_{,\,k\,\overset{C}{r},\,,\,,\,0}$ 为 $E^\lambda_{k,\,r}$ 的子集，使得 $Y_{1,\,k+r}$ 属于 Θ_λ-像 $\mathcal{Y}^\lambda_{,\,1\,k\overset{C}{r},\,,\,,\,0}$。

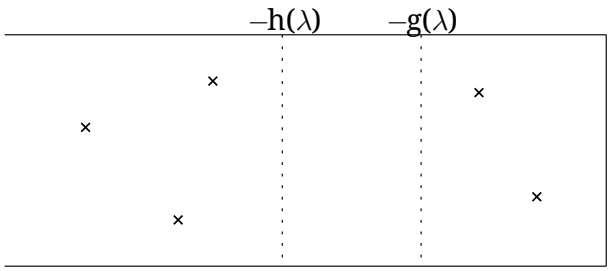


图 11。$E^\lambda_{k,\,r}$的一个例子。

现在我们可以定义几乎复结构的族 $J_{Y_{1,\,k+r},\,\lambda}$。给定 $Y_{1,\,k+r}=\Theta_\lambda(Y_{1,\,k,\,r,\,0})\in E^\lambda_{k,\,r}$、一棵 T_i 由 $Y_{1,\,k,\,r,\,0}$组成的树，以及一条边 $e\subset T_i$：

(1) 如果 $Y_{1,\,k+r}\in E^\lambda_{,\,k\,\overset{C}{r},\,,}$，则我们设定：

$$J_{Y_{1,k+r},\lambda}(w):=J_{g_{T_i}(\operatorname{Re} w)}\quad\text{on}\quad\Theta_\lambda(e)\subset\mathbb{C}_w, \tag{8.2}$$

其中我们将 e 与 $[0,\ell(e)]$（后者沿负方向定向），并且 g_{T_i} 如定义 7.3所述；

（2）如果 $Y_{1,\,k+r}\in E^\lambda_{k,\,r}\setminus E^\lambda_{,\,k\,\overset{C}{r},\,,}$，那么对于所有与带有$\ell<C\lambda$的对角顶点相邻的边 e：

$$J_{Y_{1,k+r},\lambda}(w):=J_{g_{T_i}(0)}\quad\text{on}\quad\Theta_\lambda(e)\subset\mathbb{C}_w, \tag{8.3}$$

而对于所有其他边，我们使用（8.2）。

我们还在 Re $z < -h(\lambda)$ 上设定 $J_{Y_1,\ k+r,\ \lambda} = J_{Y_1}$。由于 $\mathcal{J}(T^*C, \omega)$ 是可缩的，我们可以轻松地以光滑方式将 $J_{Y_1,\ k+r,\ \lambda}$ 延拓到所有 $Y_{1,\ k+r} \in \mathcal{Y}_{1,\ k+r}$，以及所有 $0 < \lambda \leq \lambda_0$。我们还可以令 $J_{Y_1,\ k+r,\ \lambda}$ 与紧化相容。

8.2. 两个模空间之间的对应关系。第 8.2 节的目标是概述猜想 1.9 的证明，该证明分为四个步骤，分别对应以下四个小节。我们指出，证明的所有步骤都有类似或相应的结果，且这些结果已见于文献。

8.2.1. 步骤 1：当 $\epsilon \to 0$ 时的极限。在这一步中，我们对全纯映射 $v \in \mathcal{T}^l_{\nu,\epsilon}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 取一个子序列极限，其中 $\epsilon \to 0$（$\nu \gg 0$ 固定），并得到一个折叠鱿鱼映射。（请回忆，$\mathcal{T}^l_{\nu,\epsilon}$ 中的下标 ν, ϵ 表示求值映射的目标为 Σ^ϵ_ν，而 l 表示标记点／分支点的数量。）

精确表述如下，这一紧致性结果源自 Cant- Chen [CC23]（后者又是 Floer [Flo88], Fukaya-Oh [Fuk96], 和 Ekholm [Ekh07 第 5] 节的推广），并需对极限梯度图像进行更细致的分析。

定理 8.4。令 $l_0 \geq 0$、$0 \leq l \leq l_0$、$\nu > 0$ 充分大，且 $\lambda > 0$ 充分小。给定一个序列

$$(v_j : \dot{F}_j \to Y^j_{1,l} \times T^*C) \in \mathcal{T}^l_{\nu,\epsilon_j}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{y}, \mathbf{p}_\beta),$$

其中 $\epsilon_j \to 0$，在取子列并保持记号不变后，v_j 收敛到一个折叠鱿鱼映射（u，γ）$\in \mathcal{P}^\nu_{k,\ l-k}(\mathrm{q}, \mathrm{y}, \mathrm{q})$，其中某个 $0 \leq k \leq l$ 的定义域为

$$Y_{1,k,l-k,s} = (Y_{1,k}, (\{T_1, \ldots, T_n\}, \{t_1, \ldots, t_n\})),$$

假设扰动数据具有一般性，则引理 *7.11*中的 (Sp)、(P2)、(P4) 以及下文的 (P3')（对 (P3) 的加强版）均成立。

(P3') $Y_{1,k,l-k} \in E^\lambda_{k,l-k}$.

给定定义在 C 上的局部实值函数 f_0、f_1，以及 $\nabla_{g(\gamma(s))}(f_1 - f_0)$ 的一条梯度轨迹 $\gamma(s)$，即一个映射 $\gamma\colon [A, B]_s \to C$，使得 $\gamma'(s) = \nabla_{g(\gamma(s))}(f_1 - f_0)(\gamma(s))$，对应于 γ 的近似全纯条带是映射

$$w_\gamma : [A, B]_s \times [0, 1]_t \to T^*C,$$
$$(s, t) \mapsto (\gamma(s), t df_1(\gamma(s)) + (1 - t) df_0(\gamma(s)).$$

注意，Im $w_\gamma|_{t=0} \subset$ Graph(df_0) 和 Im $w_\gamma|_{t=1} \subset$ Graph(df_1)，我们称 w_γ 是从 df_0 到 df_1。

“v_j 趋近于 (u, γ)”是指，对于 $j \gg 0$，v_j 接近断裂为 u 以及一组全纯条带；这些全纯条带接近于与 $\gamma|_e$ 对应的近似全纯条带，其中 e 遍历 G 的所有边，而函数由 $\Sigma^{\epsilon_j}_\nu$ 和 $\gamma|_e$ 定义。

证明。根据 [CC23] 和 [Ekh07，第 5], 节，在取子序列后，全纯映射

$$v_j : \dot{F}_j \to Y^j_{1,l} \times T^*C$$

收敛到某个二元组 (u,γ)，由 $u \in \mathcal{T}^l_{\nu,\,0}(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q})$ 和一个 n-元组组成

$$\gamma = (\gamma_1 : G_1 \to C, \dots, \gamma_n : G_n \to C)$$

莫尔斯梯度图。我们首先注意到，可以利用 [DW23] 和 [ES22]消去幽灵气泡（包括内部和边界上的）；另见 [CHT24，第3节。7]。

我们声称，对于每个 $i = 1, \dots, n$，γ_i 的定义域 G_i 是一个折叠度量带树 T_i 的 κ 重折叠提升 $\pi_0 \colon G_i \to T_i$。由于每个 $\dot{F}_j$ 都是 Y_1^j 的 κ 重分支覆盖，$\iota \in \operatorname{Im}\Theta_\lambda$，存在 $\pi_0 \colon G_i \to T_i$，它是一个 κ 重覆盖，但在以下位置除外：(i) 对角顶点，以及 (ii) T_i 中有限多个内部非顶点 $b_1, \dots, b_m$，使得 $\#\pi_0^{-1}(b_{i'}) < \kappa$。(i) 类的每个顶点对应一个被推至端点的分支点；(ii) 类的每个顶点对应一簇彼此靠近且留在内部的分支点。我们的目标是排除 (ii) 类的可能性。由于 $\mathcal{E}(u)$ 是一般的，并且从 $[0,1]_t \times C$ 中观察时是一个辫子，$\mathcal{E}(u)$ 的每个常值 t 截面都是 C 上由 κ 个互不相交点组成的元组，而 γ_i 在其终端点附近是单射的（即 T_i 根顶点的 π_0^{-1}）。假设 G_i 有两条边 e_1 和 e_2，它们从 $b_{i'}$ 上方的同一顶点出发，并在根顶点上方终止。由于 $\ell(e_1) = \ell(e_2)$，梯度轨线 $\gamma_i(e_1)$ 和 $\gamma_i(e_2)$ 必须在其初始点同步相交。第8.1.3节对扰动数据的要求使梯度轨线处于一般位置，而同步相交在 t 上施加了一个余维一条件。另一方面，从尖点边发出的梯度轨线，以及对应于对角顶点的梯度轨线 e_{glue} 都是刚性的；而存在一个 (ii) 类顶点会使 t 受到过度约束。因此，(ii) 类顶点不存在，所声称的结论得证。

由于 $\mathcal{T}^l_{\nu,\epsilon_J}(\mathbf{p}_\alpha,\mathbf{y},\mathbf{p}_\beta)$ 的虚维数为 0，$u \in \mathcal{T}^l_{\nu,}\mathbf{0}(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q})$ 中不可能有多个层，因此只有 $u \in \mathcal{T}^l_{\nu,}\overline{\mathbf{0}(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q})}$。条件 (Sp)、(P2)、(P3')、(P4) 由扰动数据的一般性和引理 7.11 得出。□

8.2.2. 第 2 步：调整鱿鱼身体的边界。令

$$(u : \dot{F} \to Y_1 \times T^*C, \gamma) \in \mathcal{P}^\nu_{k,l-k}(\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{q}),$$

我们假设其满足条件 (P1)–(P4)，由引理 7.11 可知。根据定义，$\pi_{T^*C} \circ u$ 将 $\partial\dot{F}$ 在 $\partial_2 Y_1$ 之上的部分（即 $(\pi_{Y_1} \circ u)^{-1}(\partial_2 Y_1)$）映射到 C。

这一步的目标是修改 u，使其变为 u°（即“调整鱿鱼身体的边界”），从而将 $(\pi_{Y_1} \circ u^\circ)^{-1}(\partial_2 Y_1)$ 映射到 Σ^ϵ_ν，但鱿鱼腿将要连接到 u° 的点的小邻域除外。

将 $\mathcal{E}(u)$ 视为 $[0,1]_t \times C$ 中的一条辫子。利用定义 7.10 中的 (FS4) 和 (FS5)，我们可以得到 $\mathcal{E}(u)$ 的分段连续提升 $\mathcal{E}_{\epsilon,\,\nu}(u)$，并将其视为 $[0,1]_t \times \Sigma^\epsilon_\nu$ 中的一条辫子，使得：

(B1) $\mathcal{E}_{\epsilon,\,\nu}(u)$从某个 $\mathbf{p}_\alpha$ 出发，并在某个 $\mathbf{p}_\beta$结束；(B2) 对每个顶点 $v \in \sqcup_i \pi_0^{-1}(v^i)$，其中 v^i 是 T_i的根顶点，随着 t 沿着$\partial_2 Y_1$增加，提升 $\mathcal{E}_{\epsilon,\,\nu}(u)$会从图像 $df_{i_T(v)}$ 对应的片跃变到图像 $df_{i_B(v)}$对应的片；(B3) $t = t_i$ 处的这些不连续点是仅有的不连续点。

假设 $\mu > 0$ 很小。考虑正方形

$$S_{v,\mu} = [-\mu/2, \mu/2]_x \times [-\mu/2, \mu/2]_y \subset C$$

宽度为 μ，以 $\sqcup_i \mathcal{E}(u)|_{t=t_i}$为中心，并由 $v \in \sqcup_i \pi_0^{-1}(v^i)$ 编号，使得 $\mathcal{E}(u)$ 沿着 $y = 0$ 与每个正方形相交，且其方向为正 x方向。如果 $\epsilon = \epsilon(\mu) > 0$ 足够小，例如在 $O(\mu^2)$ 中，那么我们可以对每个 $S_{v,\ \mu}$ 上的 Σ_ν^ϵ 进行如下修改：

(1) 移除原像 $\pi^{-1}(S_{v,\ \mu})$ 中对应于 $df_{i_T(v)}$ 和$df_{i_B(v)}$的两片，其中 $\pi\colon \Sigma_\nu^\epsilon \to C$ 是投影；以及(2) 将其替换为一片 df，其中 f沿着 $x = -\mu/2$在 $f_{i_T(v)}$与沿着 $x = \mu/2$在 $f_{i_B(v)}$ 之间插值，且导数较小。

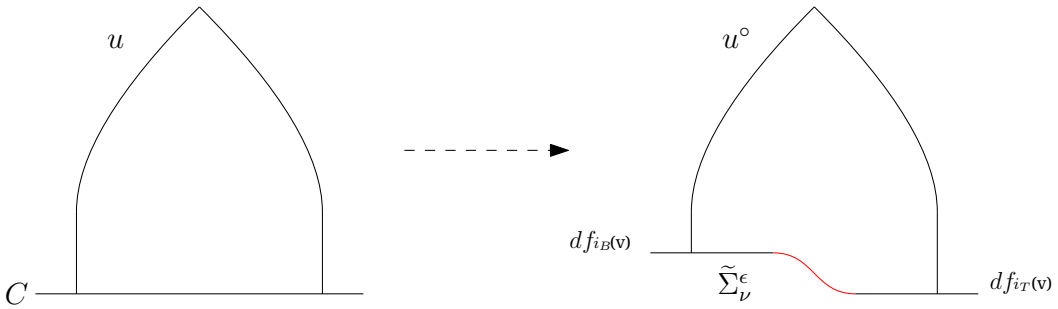


图 12

引理 8.5。当 $\mu > 0$ 足够小时，并且 $\epsilon = \epsilon(\mu)$ 足够小，使得 $\epsilon \in O(\mu^2)$，存在唯一的全纯映射 $u^\circ\colon \dot{F} \to Y_1 \times T^*C$，位于模空间 $\mathcal{T}_{\nu,\ \tilde{\Sigma}_\nu^\epsilon}^k(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}, \mathrm{q}_\beta)$ 中。其定义方式与 $\mathcal{T}_{\nu,\ 0}^k(\mathrm{q}, \mathrm{y}, \mathrm{q})$ 相同，但有以下区别：

(1) 将 (q,y,q) 替换为 (p_α,y,p_β)，其中 p_α 和 p_β 如 (B1) 中所给出；以及$\widetilde{\ }$(

2) 将 C 替换为 Σ_ν^ϵ,

并且它接近于 $u_\circ$ 此外，u° 是横截切出的。

证明。这直接来自 $u \in \mathcal{T}_{\nu,\ 0}^k(\mathrm{q}, \mathrm{y}, \mathrm{q})$ 的正则性以及 Gromov 紧性。注意，Σ_ν^ϵ 具有边界，但如果相对于 μ 将 $\epsilon > 0$ 取得足够小，则曲线 u° 将远离边界。□

8.2.3. 步骤 3：粘合莫尔斯梯度图。在这一步中，我们构造与莫尔斯梯度图“对应”的全纯曲线。

设 M 为一个 n 维流形，g 为 M 上的黎曼度量，f_0、f_1 为 M 上的一般光滑函数（例如，使得 $f_1 - f_0$ 为莫尔斯函数）。设 $\gamma\colon [A, B]_\sigma \to M$ 是 $\nabla_{g(\sigma)}(f_1 - f_0)$ 的一条轨迹，它避开 $f_1 - f_0$ 的一个临界点；其中 $\nabla_{g(\sigma)}$ 是相对于度量族 $g(\sigma)$ 而定义的，该度量族与 g 相距 C^1。当 $\epsilon > 0$ 足够小时，我们将重标度轨迹 γ_ϵ：$[A/\epsilon, B/\epsilon]_s \to C$ 定义为 $\nabla_{g(\epsilon s)}\epsilon(f_1 - f_0)$ 的一条轨迹，其像与 γ 相同。

定义 8.6. 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，一个 $J_{g(\epsilon s)}$-全纯条带

$$v : [A/\epsilon, B/\epsilon]_s \times [0,1]_t \to T^*M$$

从 ϵdf_0 到 ϵdf_1 在满足以下条件时逼近 γ：

（1） $J_{g(\epsilon s)}$ 是依赖于定义域且接近 J_g 的典范几乎复结构；（2） v 与从 ϵdf_0 到 ϵdf_1、对应于 γ_ϵ 的近似全纯条带 C^0相差 $O(\epsilon)$ 阶的误差。

定义 8.7。对于足够小的 $\epsilon > 0$，全纯映射 v： $\Theta_\lambda(T) \to T^*M$（具有依赖于定义域的 J）逼近莫尔斯梯度图 γ： $T \to M$（其莫尔斯函数依赖于各条边），如果对于 T的每条边 e，$v|_{\Theta_\lambda(e)}$ 逼近 $\gamma(e)$,
全纯条带的虚拟延拓。设 $\epsilon > 0$ 足够小。设 f_0、f_1： $M \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，并且在 0 的某个开邻域 $U \subset \mathbb{R}^n \subset M$ 上为线性函数；再设 γ： $(-\infty, 0]_s \to \mathbb{R}^n$ 是 $\nabla(f_1 - f_0)$ 的一条轨迹，从 $f_1 - f_0$的一个临界点出发，且 $\gamma(0) = 0$。假设 g 和 J_g 在 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和 $T^*U \subset \mathbb{C}^n$上是标准的。注意，存在 $C > 0$ 使得 $\gamma|_{[-C,0]}$ 的像包含于 U 中，并且 df_0、df_1 在 U上为常数。令

$$v : (-\infty, 0]_s \times [0,1]_t \to T^*M$$

是从 ϵdf_0 到 ϵdf_1、逼近 γ的全纯半条带。

定义 8.8。

(1) 若虚拟延拓 $\widetilde{v}$ of v存在，则满足以下条件：

- $\widetilde{v} = v$ 在 $(-\infty, 0] \times [0,1]$; 且
- $\widetilde{v}$在 $[-C, \infty) \times [0,1]$ 是将 $v|_{[-C,0]\times[0,1]}$ 延拓为全纯半-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$条带 $[-C, \infty)$ 的延拓，该条带从 ϵdf_0 到 ϵdf_1，并逼近 $f_1 - f_0$的梯度 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$轨迹 $\widetilde{\gamma}$，其中 f_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $f_i|_U$的光滑延拓，使得$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\gamma}$ 终止于 $f_1 - f_0$的一个临界点。(2) 若存在 v的虚拟延拓 $\widetilde{v}$，则全纯半条带 v 是虚拟可延拓的。

我们也可以类似地定义全纯条带 v： $[A, B]_s \times [0,1]_t \to T^*M$的虚拟延拓和虚拟可延拓性，以及逼近莫尔斯梯度图像的全纯曲线的相应概念。

边模型。我们先准备以下类型的边模型：对应于 (a) 有限长度梯度轨线、(b) 终止于尖点边的梯度轨线，以及 (c) 终止于对角顶点的梯度轨线的全纯条带。

(a) 型曲线由以下内容给出：

定理 8.9. 给定足够小的 $\epsilon > 0$，存在一个 $J_{g(\epsilon s)}$-全纯条带 v，从 ϵdf_0 到 ϵdf_1，它逼近 γ。此外， v 可虚拟可延拓，且具有正则虚拟延拓。

证明。 这只是 Floer 所作双射的重新表述 [Flo88], , 该双射将莫尔斯临界点之间的完备梯度轨迹与 Floer 轨迹对应起来，也就是说，将边界落在 图像(ϵdf_0) 和 图像(ϵdf_1) 上的全纯条带与相应的交点对应起来，随后再进行拉伸。 □

Ekholm 构造了类型（b）曲线 [Ekh07], , 它们也可以通过正则虚拟延拓进行延拓。梯度轨线在 $\mathrm{Sym}^\kappa C$上终止的尖点边具有以下形式

$$(c \times C^{\kappa-1}) \setminus \Delta \subset \mathrm{Sym}^\kappa C,$$

其中 c 是 C 中的一条尖点边（即投影到 C上的 Σ^ϵ_ν 中的尖点边），而 Δ 是大对角线。这类尖点边是 Morse-Bott 型的，但可以转化为 Morse 型。

类型（c）曲线只不过是一个全纯条带 $v\colon\ [A,B]_s \times [0,1]_t \to T^*C$，从$\epsilon df_0$ 到 ϵdf_1，它逼近由定理 8.9 给出的轨迹 γ——再加上一个与定义域自同构 $(s,t) \mapsto (A+B-s, 1-t)$ 对应的分支双覆盖。根据条件 1.5， γ 不是闭轨迹的子集，因此处处某处单射。因此， v作为一个映到 $\mathrm{Sym}^2 C$ 、 $\widetilde{\ }$穿过对角线的轨形全纯映射，具有一个正则的虚拟延拓。（设 $\widetilde{u}\colon\ \Sigma \to V$是轨形全纯映射 $u\colon\ \Sigma \to V/G$ 到一个全局商轨形的提升。若在线性化$\overline{\partial}$算子 L 作用于 $\widetilde{u}$ 时，将定义域和值域限制在 G不变部分上所得的算子是满射，则 u 正则。通过平均过程， L 本身的满射性蕴含这一点。）

Y形连接件。接下来我们描述称为 Y形连接件的局部模型，它们对应于三价顶点的邻域。设 $w_{a,b,c,d}$ 为满足下列条件的全纯映射 $D_3 \to \mathbb{C}_{z=x+iy}$：

(1) $\partial_0 D_3, \partial_1 D_3, \partial_2 D_3$ 分别映射到 $y=a, y=c, y=b$，并且

(2) $w_{a,b,c,d}$ 在 int(D_3) $\xrightarrow{\sim} \{a<y<c\} \setminus \{y=b, x \le d\}$上限制为一个双全纯同构。

记 a $=(a_1,\ldots,a_n)$、b $=(b_1,\ldots,b_n)$、c $=(c_1,\ldots,c_n)$、d $=(d_1,\ldots,d_n)$，其中 $a_i<b_i<c_i$ 对所有 i成立，我们定义

$$w_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}} = (w_{a_1,b_1,c_1,d_1},\ldots,w_{a_n,b_n,c_n,d_n}) : D_3 \to \mathbb{C}^n,$$

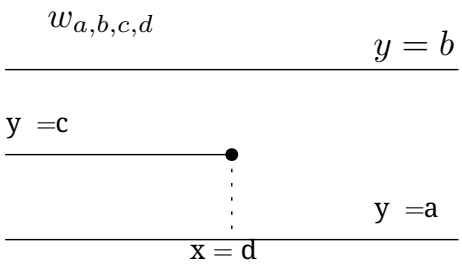


图13. 一个 Y 形连接子的分支

设 f_1、 f_2、 $f_3\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，使得 df_1、 df_2 和 df_3 为常数，并且 $\nabla(f_3-f_2)$ 与 $\nabla(f_2-f_1)$ 线性无关。我们可以假设：

（F）经过线性坐标变换后， $\nabla(f_3 - f_1)$、 $\nabla(f_3 - f_2)$ 和 $\nabla(f_2 - f_1)$ 的所有坐标均为正。

然后我们设定 $\mathsf{a} = \nabla f_1$、$\mathsf{b} = \nabla f_2$、$\mathsf{c} = \nabla f_3$。这给出了一个映射族 $w_{\mathsf{a},\ \mathsf{b},\ \mathsf{c},\ \mathsf{d}}$，其中 a、b、c 固定，d 是变量。

注 8.10. Fukaya-Oh证明中存在一个专家们熟知的粘合误差 *[Fuk96]*。该证明声称 Y 形状的连接子 w 具有满射的线性化 $\overline{\partial}$ 算子

$$D_w : W^{1,p}_\delta(w^*T\mathbb{C}^n) \to L^p_\delta(\Lambda^{0,1}_{\mathbb{C}} w^*T\mathbb{C}^n), \tag{8.4}$$

当 $\delta > 0$ 足够小时。相反，算子 D_w具有 n维余核，由常值反全纯微分张成。Fukaya-Oh证明可以通过几种或多或少等价的方式修正；例如参见 Ekholm *[Ekh07]* 和 Bao-Zhu *[BZ]*。后者将问题改写为障碍丛粘合问题，并结合度计算。

下面的粘合结果与 [Ekh07 第 6] 节的结果相似：

定理 8.11。给定一棵折叠莫尔斯树 $(\pi_0 : G \to T, \gamma : G \to C)$，可以使用 Y 形连接子，将类型 (a)–(c) 的全纯条带粘合成一条全纯曲线 $v : \Theta_\lambda(T) \to \mathrm{Sym}^\kappa(T^*C)$，它对应于 Morse 梯度图 $\gamma_\kappa : T \to \mathrm{Sym}^\kappa C$。全纯曲线 v 是虚拟可延拓且正则的。从逼近折叠莫尔斯树的虚拟可延拓全纯曲线的模空间到折叠莫尔斯树的模空间，存在一个满射的 1 次映射。

这里我们将折叠莫尔斯树视为梯度图 $\gamma_\kappa : T \to \mathrm{Sym}^\kappa C$。请注意，在折叠莫尔斯树的定义中，对角顶点对应于与 $\mathrm{Sym}^\kappa C$ 的大对角线最顶层分层的交点。

定理8.11 的证明思路 [BZ], 与此有相似之处，感谢 Erkao Bao 向我们讲解了该证明。

证明思路。

A 部分：三价顶点处的基本粘合。本部分概述三价顶点处最基本的粘合，不讨论估计，也不处理最一般情形。

设 $\epsilon > 0$ 足够小。我们作如下简化：

(1) 环境流形是一个二维流形 M and $f_1, f_2, f_3 : M \to \mathbb{R}$ 是一般光滑函数；(2) $\nabla(f_3 - f_2)$ 和 $\nabla(f_2 - f_1)$ 的入射轨线 γ_1 and γ_2 是刚性的（模定义域 $\mathbb{R}$-平移），并从临界点 $p_1, p_2 \in M$ 出发；(3) $\nabla(f_3 - f_1)$ 的出射轨线 γ_3 构成一个一维族（模定义域 $\mathbb{R}$-平移），由沿垂直于 γ_3 的方向平移给出，并通向一个临界点 $q \in M$；(4) γ_1 and γ_2 在 v 相交，且其中一条 γ_3 从 v 离开；(5) 存在一个关于 $v = 0$ 的局部坐标图 U，其选取独立于 ϵ，使得 df_1, df_2, df_3 在 U 上为常数，并在对 U 进行小扰动后，在 U 上满足 (F)。

一般情形下，需要追踪从 p_1, p_2 出发的不稳定流形与从 q 出发的稳定流形之间的交点。

令 v_1、v_2、v_3 为分别对应于 γ_1、γ_2、γ_3的全纯条带，它们由定理 8.9赋予了虚拟延拓；再令 w_0 为一个 Y形连接子，除仿射线性项外，它与 v_i、i =1、2、3相一致。

对于 $i = 1, 2$，全纯映射 $v_i\colon (-\infty, 0]_s \times [0,1]_t \to \mathbb{C}^2$ 是一个半条带，有两种方法可以使线性化的 $\overline{\partial}$-算子 D_{v_i} 成为 Fredholm 算子：(i) 沿 $s = 0$ 施加边界条件（如 [FO97] 和 [BZ] 中所做的那样）；或 (ii) 将 v_i 虚拟延拓为定义域为 $(-\infty, \infty) \times [0,1]$ 的全纯映射 $\widetilde{v}_i$。部分区域 $s > 0$ 被视为“虚拟的”（即在我们的粘合问题中实际上并不存在），仅用于借助 $D_{\widetilde{v}_i}$求逆误差项；误差求逆后，结果会限制到部分区域$s \le 0$。令 $\widetilde{v}_i^* TC$为“拉回丛”。可以验证，算子

$$D_{\widetilde{v}_i} : W^{1,p}_\delta(\widetilde{v}_i^* TC) \to L^p_\delta(\Lambda^{0,1}_{\mathbb{C}} \widetilde{v}_i^* TC)$$

h作为 Fredholm 指数 ind $= 0$，且是一个同构。$\widetilde{v}_3$ 的情形类似 s.

对于每个使得定义域为 w，我们将算子 D_w 修改为

$$W^{1,p}_\delta(w^* T\mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{R}\langle \rho_1, \rho_2 \rangle, \tag{8.5}$$

其中 ρ_1、ρ_2 定义如下：令 $[0,\infty)_r \times [0,1]_t$ 为对应于 D_3正向/出射端的条带状端。令 $\rho(r)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 为一个光滑阶跃函数，使得对于 $r \in [0,1]$，$\rho(r) = 0$；对于 $r \in [2,\infty)$，$\rho(r) = 1$。然后定义 ρ_i、$i = 1$、2：它们在 $D_3 \setminus ([0,\infty) \times [0,1])$ 上等于零，在 $[0,\infty) \times [0,1]$ 上等于 $\rho(r)e_i$，其中 e_i 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个标准单位向量。可以验证，Fredholm 指数 ind$(D_w) = 0$，且D_w 是一个同构。

现在我们将预粘合应用于（v_1、v_2、v_3、w_0）以得到$u_{(0)}$。我们使用通常的牛顿迭代来构造一条真正的全纯曲线，并解释迭代的初始步骤。对$\overline{\partial} u_{(0)}$ 有贡献的误差来自在 v_i 与 w_0之间进行插值，以处理 $i = 1$，2；这些误差可以利用（D_{w_0}）$^{-1}$ 求逆。将一个与∇（$f_3 - f_1$）平行的项商去后，得到如下形式的项

$$\xi + c(\rho_1 - \rho_2), \quad \xi \in W^{1,p}_\delta(w^* T\mathbb{C}^2), \quad c \in \mathbb{R},$$

其中，c（$\rho_1 - \rho_2$）是法向方向上的分支。接下来，当D_{v_3}的定义域属于类 W^1, $_\delta{}^p$时，误差 $\overline{\partial} c$（$\rho_1 - \rho_2$）无法求逆；因此我们遇到了一个障碍丛问题，并且当 v_3 沿其一维族发生平移，使得$w_0 + \xi + \overline{\partial} c$（$\rho_1 - \rho_2$）与 v_3 达到一阶一致时，障碍截面大致为零。实际计算归结为一个度计算，其值为 1。

B部分。在本部分中，我们说明如何将三价顶点粘合应用于当前情形。设 ($\pi_0\colon G \to T$, $\gamma\colon G \to C$) 为一棵折叠莫尔斯树，将其视为 Morse 梯度图$\gamma_\kappa\colon T \to \mathrm{Sym}^\kappa C$。我们从 γ_κ in $\mathrm{Sym}^\kappa C$ 中始于对角线顶点或尖点顶点的梯度轨线开始。相应的边模型存在虚拟延拓，且属于 Type (b) 或 (c)。这些梯度轨线在 $\mathrm{Sym}^\kappa C$中的一点相交

远离大对角线，并且可以在 $(T^*C)^\kappa$ 中将其与 Type (a) 边模型粘合。我们通过归纳逐步附加边，从而得到一条虚拟可延拓的全纯曲线v：$\Theta_\lambda(T) \to \mathrm{Sym}^\kappa(T^*C)$，对应于 γ_κ：$T \to \mathrm{Sym}^\kappa C$。□

8.2.4. 第 4 步：折叠鱿鱼腿粘合。在这一步中，我们将鱿鱼腿附加到第 2 步得到的鱿鱼身体上。这产生了一个全纯映射 $\mathcal{T}^{l}_{\nu,\ \epsilon}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$，当 $\epsilon > 0$ 足够小时且 $\nu \gg 0$ 时，它接近于断裂为 $(u, \gamma) \in \mathcal{P}^{\nu}_{k,\ l-k}(\mathrm{q}, \mathrm{y}, \mathrm{q})$。

这种鱿鱼腿粘合类似于 Oh-Zhu [OZ24，定理 18]中处理的粘合问题。在那篇论文中，作者给出了一个新的直接证明：Cornea-Lalonde[CL06] 和 Biran-Cornea [BC09] 的珍珠轨迹模空间，通过绝热粘合，与具有拉格朗日边界的通常全纯曲线模空间等价。（在 [BC09] 中，这一等价性是通过一种延拓论证来证明的：该论证将珍珠彼此粘合，但不与梯度轨线粘合。）

令 $\epsilon > 0$ 足够小，且 $\nu \gg 0$。令 u° 为引理 8.5 所给出的、接近 u 的全纯映射，并令 v 为与步骤 3 中折叠莫尔斯树 γ 相对应的虚拟可延拓全纯曲线。

连接件。我们描述与 u 和 γ之间交界处的邻域相对应的局部模型，称为连接件。令 w_0 为一个全纯映射

$$D_2 = \mathbb{R}_s \times [0,1]_t \to \mathbb{C}_{z=x+iy}$$

使得：

(1) $\partial_0 D_2 = \{t = 0\}$ 和 $\partial_1 D_2 = \{t = 1\}$ 分别映射到 $y = 0$ 和 $y = 1$；(2) w_0 在 $\mathrm{int}(D_2)$ 上的限制为一个双全纯同构 $\tilde{\to} \{y > 0\} \setminus \{y = 1, x \le 0\}$。

注意，w_0 在定义域 s-平移意义下唯一。

映射 w_0 可以通过定义域平移 $s = s_0$ 和目标平移 $x = x_0$进行修改。设 $w_{c,\ d}$ 为这样一个映射，它由以下性质唯一确定：当 $s \to \infty$时，$w_{c,\ d}(s,t)$ 趋近于 $ce^{\pi(s+it)} + d$，其中 $c > 0$ 且 $d \in \mathbb{R}$。记 $\mathrm{c} = (c_1, \dots, c_{2\kappa})$、$\mathrm{d} = (d_1, \dots, d_{2\kappa})$，定义

$$w_{\mathbf{c},\mathbf{d}} = (w_{c_1,d_1}, \dots, w_{c_{2\kappa},d_{2\kappa}}) : D_2 \to \mathbb{C}^{2\kappa}.$$

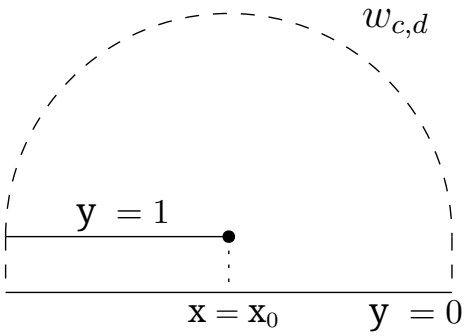


图14

粘合。该粘合与步骤 3 中的粘合非常相似，下面说明牛顿迭代的前几个步骤。

为简便起见，我们假设以下 (SL1)–(SL4)：

(SL1) 只有一条鱿鱼腿被粘合，且粘合发生在 $t = 1/2$.

将 u° 视为映射 $Y_1 \to \mathrm{Sym}^\kappa T^*C$，令 u°_τ 为 u° 在 $Y_{1,\tau} = Y_1 \setminus \{\phi_{Y_1}(\tau)\}$上的限制，其中 $\tau \in (1/2 - \lambda', 1/2 + \lambda')$，且 $\lambda' > 0$ 很小但独立于 ϵ。选择一个条带状端

$$\mathcal{S}_\tau := (-\infty, 0]_s \times [0, 1]_t \subset \dot{Y}_{1,\tau}$$

位于 $\phi_{Y_1}(\tau)$的一个邻域上，该邻域依赖于 τ，但不依赖于 ϵ。

(SL2) 存在局部坐标 $U \subset \mathbb{R}^{2\kappa}$，用于 $\mathrm{Sym}^\kappa C$，以及局部坐标 $T^*U \subset T^*\mathbb{R}^{2\kappa} = \mathbb{C}^{2\kappa}$，用于 $\mathrm{Sym}^\kappa T^*C$，使得 γ的端点为 $(0, 0) \in T^*C$；(SL3) γ 限制在 U 上是 $\nabla(f_1 - f_0)$的一条轨迹，其中 $\nabla f_0 = 0$ 且 $\nabla f_1 = (1, \dots, 1)$。

当 $\epsilon > 0$ 较小时，重缩放 $\mathbb{C}^{2\kappa}$ 会将 Graph ϵdf_0 和 Graph ϵdf_1 映射到 Graph df_0 和 Graph df_1。

(SL4) 存在 $R_1(\epsilon)$ $R_2(\epsilon) \gg 0$，其满足 $R_2(\epsilon) - R_1(\epsilon) \gg 0$，使得 $\frac{1}{\epsilon} u^\circ_\tau$ 在 $\{-R_2(\epsilon) < s < -R_1(\epsilon)\}$ 上的限制在 Graph df_0 和 Graph df_1 上具有边界，并收敛到 $w_{\mathbf{c}(\tau),\ \mathbf{d}(\tau)}$，其中某个 $\mathbf{c}(\tau)$ 和 $\mathbf{d}(\tau)$ 满足条件，模去定义域 $\mathbb{R}$- 平移 $w_{\mathbf{c}(\tau),\ \mathbf{d}(\tau)}$。

我们注意到，当 $\epsilon > 0$ 时，$(\mathbf{c}(\tau), \mathbf{d}(\tau))$ 关于 $\tau - 1/2$ 大致呈线性关系。

现在为简单起见，假设 $\kappa = 2$。在这种情况下，我们可以取 v 为刚性的。（另请注意，u° 始终是刚性的。）对于每个 u°_τ，都存在一个如 (SL4) 中的单个连接子 $w_{\mathbf{c}(\tau),\ \mathbf{d}(\tau)}$，它与 $\frac{1}{\epsilon} u^\circ_\tau$ 的端部“在一阶意义上”一致；我们可以调整 τ，使得 $w_{\mathbf{c}(\tau),\ \mathbf{d}(\tau)}$ 与 v 在一阶意义上一致。这类 τ 的带符号计数为 1。

选取这样一个 τ，我们将三元组 $(v, w = w_{\mathbf{c}(\tau),\ \mathbf{d}(\tau)}, u^\circ_\tau)$ 预粘合到 $u_{(0)}$，并像之前一样求逆误差$\overline{\partial} u_{(0)}$。

线性化的 $\overline{\partial}$-算子

$$D_w : W^{1,p}_\delta(w^*T\mathbb{C}^2) \to L^p_\delta(\Lambda^{0,1}_{\mathbb{C}} w^*T\mathbb{C}^2)$$

可以按照 (8.4) 中同样的方法进行分析。它有 2 维余核，并且按照 (8.5) 及其前后段落中的做法，我们扩充定义域，得到

$$\widetilde{D}_w : W^{1,p}_\delta(w^*T\mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{R}\langle \rho_1, \rho_2 \rangle \to L^p_\delta(\Lambda^{0,1}_{\mathbb{C}} w^*T\mathbb{C}^2),$$

这是一个同构。

~与之前一样，$(D_w)^{-1}(\overline{\partial} u_{(0)})$，在除去对应于沿着 u°_τ 的条带状端平移 s- 的项之后，得到一个如下形式的项

$$\xi + c(\rho_1 - \rho_2), \quad \xi \in W^{1,p}_\delta(w^*T\mathbb{C}^2), \quad c \in \mathbb{R},$$

其中 $c(\rho_1 - \rho_2)$ 是法向方向上的分支。然后我们调整 u°_τ，使其负端与 $w + c(\rho_1 + \rho_2)$ 一致。

将所有步骤综合起来，我们得到：

定理 8.12. 设 $l_0 \geq 0, \nu > 0$ 足够大，且 $\lambda > 0$ 足够小。对于足够小的 $\epsilon > 0$，存在一个从 $\sqcup_{\alpha,\beta\in\mathfrak{I}}\mathcal{T}^l_{\nu,\epsilon}(\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{y}, \mathrm{p}_\beta)$ 到 $\mathcal{P}^l_\nu(\mathrm{q}, \mathrm{y}, \mathrm{q})$ 的满射，次数为 1，对所有 $0 \leq l \leq l_0$ 均成立。

根据定理8.12，$\mathcal{F}^\nu,\ {}_\epsilon\mathrm{Mor} = \mathcal{F}^\nu_{\mathrm{hol}} \bmod \hbar^{l+1}$ for $\nu \gg 0$。因此，由引理5.1和7.12 并取极限 $l \to \infty$，我们完成了猜想1.9的证明概要。

参考文献

[Abo12] Mohammed Abouzaid，《关于缠绕 Fukaya 范畴与基于基点的环路》，J. Sym- plectic Geom. 10 (2012), 27–79。[BC09] Paul Biran 和 Octav Cornea，《拉格朗日子流形的刚性与单有理覆盖》，《Geometry & Topology》13 (2009), 2881–2989。[BZ] Erkao Bao 和 Ke Zhu，《从莫尔斯树到伪全纯圆盘——Y 图》，准备中。[CC23] Dylan Cant 和 Daren Chen，《边界位于邻近的拉格朗日子流形上的全纯曲线的绝热紧致性》，预印本，2023年。arXiv: 2302.13391。[CHT24] Vincent Colin、Ko Honda 和 Yin Tian，《高维 Heegaard Floer 同调在接触拓扑中的应用》，J. Topol. 17 (2024), Paper No. e12349, 77。[CL06] Octav Cornea 和 Franc.ois Lalonde，《簇同调：构造与结果概述》，Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 12 (2006), 1–12。[CN25] Roger Casals 和 Yoon Jae Nho，《谱网络与 Betti拉格朗日子流形》，预印本，2025年。arXiv: 2504.08144。[CZ22] Roger Casals 和 Eric Zaslow，《勒让德编织： N-图演算、旗簇模空间及其应用》，《Geometry & Topology》26 (2022), 3589–3745。[DW23] Aleksander Doan 和 Thomas Walpuski，《辛六维流形中的嵌入曲线计数》，Comment. Math. Helv. 98 (2023), 693–769。[Ekh07] Tobias Ekholm，《一阶喷射空间中的莫尔斯流树与勒让德接触同调》，《Geometry & Topology》11 (2007), 1083–1224。[ELPS25] Tobias Ekholm、Pietro Longhi、Sunghyuk Park 和 Vivek Shende，《由曲线计数得到的纽结迹》，预印本，2025年。arXiv: 2510.19041。[ES19] Tobias Ekholm 和 VivekShende，《膜上的纽结》，预印本，2019。arXiv: 1901.08027

[ES22] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende，幽灵气泡审查，预印本，2022年。arXiv: 2212.05835。[Flo88] Andreas Floer，拉格朗日交点的 Morse 理论，《微分几何杂志》28（1988），513–547。[FO97] Kenji Fukaya 和 Yong-Geun Oh，余切丛中的零圈开弦与莫尔斯同伦，《亚洲数学杂志》1（1997），96–180。[Fuk96] Kenji Fukaya，莫尔斯同伦及其量子化，《几何拓扑》（美国佐治亚州雅典，1993）2（1996），409–440。[GMN13] Davide Gaiotto、Gregory W. Moore 和 Andrew Neitzke，谱网络，《安利·亨利·庞加莱年刊》14（2013），1643–1731。[HTY24] KO HONDA、YIN TIAN 和 TIANYU YUAN，高维 Heegaard Floer 同调与赫克代数，《欧洲数学学会杂志》（JEMS）（2024）。[MS21] Hugh Morton 和 Peter Samuelson，双仿射赫克代数与斯凯因理论，《数学物理通讯》385（2021），1655–1693。

[Nei21] Andrew Neitzke，谱网络笔记，预印本，2021。[Nho23] YoonJae Nho，族 Floer 理论、非阿贝尔化与谱网络，预印本，2023年。arXiv：2307.04213。[NY20] Andrew Neitzke 和 Fei Yan，q-线缺陷的非阿贝尔化，《高能物理学杂志》（2020），153，65。[OZ24] Yong-Geun Oh 和 Ke Zhu，Floer 轨迹的部分塌缩退化与绝热粘合，《数学学报》（英文版）**40**（2024），161–249。[Yua23] Tianyu Yuan，折叠莫尔斯流树，预印本，2023年。arXiv：2309.05976。

加利福尼亚大学洛杉矶分校，美国加利福尼亚州洛杉矶市，邮编 90095 电子邮箱：honda@math.ucla.edu 网址：http://www.math.ucla.edu/~honda

北京师范大学数学科学学院；教育部数学与复杂系统重点实验室，中国北京 100875 电子邮箱：yintian@bnu.edu.cn

东方理工大学数学科学学院，中国浙江宁波 315200 电子邮箱：tyyuan@eitech.edu.cn