arXiv:2601.15978v1 [math.AC] 22 Jan 2026

等次数生成单项式完全交中对称多项式的最大秩性质

FILIP JONSSON KLING 和 SAMUEL LUNDQVIST

Abstract. 众所周知，零特征下的单项式完全交具有强 Lefschetz 性质。该性质等价于以下陈述：变量之和的任意次幂都是完全交上的最大秩元素。本文研究在等次数生成的完全交中，用另一个对称多项式替代这一元素时会发生什么。

我们利用分次技巧，完整回答了关于幂和对称多项式的问题；对于两个变量的情形，则通过推导一族托普利茨矩阵行列式的闭式公式，解决了任意 Schur 多项式的情形。此外，我们还针对三个或更多变量时的初等对称多项式和完全齐次对称多项式，得到了部分结果，并提出了若干开放问题。

1. 引言

Lefschetz 性质近来已成为交换代数及相关领域中的热门研究方向。若 A 是一个分次阿廷代数，那么当存在一个线性形式 $\ell \in A_1$ 使得乘法映射

$$\cdot \ell : A_i \to A_{i+1}$$

对所有 i，其秩均为最大秩，也就是说，它是单射或满射。如果 ℓ 的所有幂所对应的乘法映射也都具有最大秩，我们就称 A 具有强 Lefschetz 性质。满足强 Lefschetz 性质的代数，其奠基性例子是域$\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/$ 上的 Artinian 单项式完全交（.....， $x_n^{d_n}$），其中域$\mathbf{k}$ 的特征为零；这一结果由 Stanley [18] 和 Watanabe [20] 分别独立证明。在他们的工作中，他们证明了乘以元素 $x_1 + \cdots + x_n$ 及其幂所定义的映射始终具有最大秩。因此，一个自然的问题是，乘以其他多项式是否也能得到具有最大秩的映射。

多项式 $x_1 + \cdots + x_n$ 是许多广为研究的对称多项式族中的第一个元素。它可以视为 p_1，即幂和对称多项式；也可以视为 h_1，即完全对称多项式；或视为 e_1，即初等对称多项式；还可以视为 $s_{(1,0,\ldots,0)}$，即 Schur 多项式。这些对称多项式族都包含次数更高的成员，它们并非只是 $x_1 + \cdots + x_n$ 的幂。

本文的主要目标是开启对这类问题的研究：哪些对称多项式在何种单项式完全交上定义的映射具有最大秩，哪些则不具有。我们将研究范围限定在等次数生成的情形 $d = d_1 = \ldots = d_n$。我们的研究与先前的结果相联系，并提出了关于由对称群 S_n 的作用固定的代数的问题。

Conca、Krattenthaler 和 Watanabe [3] 曾研究由n幂和对称多项式或由n完全对称多项式生成的理想何时构成完全交。时至今日，即使是 $n = 3$这一情形也仍未得到分类。

Haglund、Rhoades 和 Shimozono [6] 研究了与 Delta 猜想相关的理想 $(x_1^d, \dots, x_n^d) + I_{n,d}$，其中 $I_{n,d}$ 由次数为 $n-d+1, n-d+2, \dots, n$ 的初等对称多项式生成，并成功确定了它们的 Gr¨obner 基，从而建立了与 Demazure 特征的联系。

Kustin、Rahmati 和 Vraciu [11] 研究了超曲面环 $k[x_1, x_2, x_3]/(x_1^N + x_2^N + x_3^N)$ 中 (x_1^d, x_2^d, x_3^d) 的自由分解；Kustin、R.G. 和 Vraciu [9,10] 则考察了 $n = 4$ 的相应问题。此外，在特征 p 下也有相关结果，其中 Miller 、 Rahmati 和 R. G. [12] 研究了 $n = 3$ 的贝蒂数结构。

此前也有人研究过对称多项式的最大秩问题。例如，Moreno-Soc´ıas 和 Snellman [17] 证明，任意偶次数的完全对称多项式都是外代数中的最大秩元素。

本文结构如下。第 2 节介绍所用代数工具的一些预备知识。第 3 节讨论幂和对称多项式。通过对相关多项式赋予更细的分次，我们在定理 3.9 中完整刻画了它们何时是最大秩元素。接着，第 4 节考察舒尔多项式。在定理 4.3 中，我们给出一族托普利茨矩阵行列式的闭式公式，并据此在定理 4.6 中指出两个变量的舒尔多项式何时是最大秩元素。此外，我们还建立了关于更多变量的舒尔多项式的一些结果。在第 5 节和第 6 节中，我们针对次数为 d 的初等对称多项式和完全对称多项式何时是最大秩元素提出猜想，并利用 Macaulay 逆系统建立部分结果。随后，在第 7 节中，我们汇总了一些进一步的观察，并提出未来研究的猜想。最后，为了给更倾向组合学的读者提供参考，我们在文末附上关于 Artin–Gorenstein 代数的附录，其中列出这类代数中乘法映射的一些结果；据我们所知，这些结果此前未见于其他文献。

2. Algebraic preliminaries

本文中，$\mathbf{k}$始终表示一个零特征域。我们将考虑标准分次的阿廷单项式完全交

$$A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^d, \dots, x_n^d).$$

分次代数 R 的希尔伯特级数，记作 $\mathrm{HS}(R;t)$，是编码其分次分量维数的形式幂级数，因此 $\mathrm{HS}(R;t) = \sum_i \dim_{\mathbf{k}}(R_i)t^i$。众所周知，

$$\mathrm{HS}(A;t) = \frac{(1-t^d)^n}{(1-t)^n} = (1 + t + \cdots + t^{d-1})^n.$$

特别地， A 的希尔伯特级数是一个次数为 $n(d-1)$ 的多项式，称为 A 的顶端次数，它关于 $(n(d-1))/2$ 对称。

我们称形式 $f \in A_k$ 是 A 上的最大秩元素，简称最大秩元素；如果对于任意 i，乘法映射 $\cdot f : A_i \to A_{i+k}$ 要么是单射

要么是满射。等价地，如果 f 的希尔伯特级数等于 A 上的 $A/(f)$，则称 f 是最大秩元素

$$[(1-t^k)\,\mathrm{HS}(A;t)],$$

其中方括号表示截断至第一个非正项。

由于 A 是 Gorenstein 的，当且仅当乘以 f 的映射 A_j 到 A_{j+k}为单射时，元素 $f \in A_k$ 才是最大秩元素；这里取满足 $\dim_{\mathbf{k}} A_j \leq \dim_{\mathbf{k}} A_{j+k}$的最大 j，参见引理 A.2。这一性质将在全文中使用。此外，差

$$\mathrm{HS}(A/(f);t) - [(1-t^k)\,\mathrm{HS}(A;t)]$$

是对称的，参见命题 A.3。

Macaulay 逆系统将用于确定第 5 节和第 6 节中的向量空间维数。设 $R = \mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$，并考虑对偶 $S = k[X_1,\dots,X_n]$，其中 x_i 按 $x_i \circ F = \frac{\partial F}{\partial X_i}$的方式作用于 $F \in S$。对于理想 $I = (f_1,\dots,f_r) \subset R$，逆系统记作 I^{-1}，是在此作用下被 $f_1,\dots,f_r$ 湮灭的子模，并且

$$\dim_{\mathbf{k}}(I^{-1})_d = \dim_{\mathbf{k}}(R/I)_d.$$

3. The power sum symmetric polynomial

本节的目标是对幂和对称多项式何时具有完整分类。

$$p_{k,n} = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

是一个最大秩元素，位于

$$A = \mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^d,\dots,x_n^d).$$

首先，我们注意到 $p_{k,\,n} = 0$在 A中当 $k \geq d$成立时。因此，当 $d \leq k \leq n(d-1)$ 时，$p_{k,\,n}$ 显然不会是最大秩元素；而当 $k > n(d-1)$ 时，它显然会是最大秩元素，因为只有在后一种情形下，所有映射才都预期为零映射。因此，在本节余下部分中，我们可以假设 $k < d$。

我们论证中的一个关键部分是，可以像 [1, 10]中先前所考虑的那样，对单项式采用更细的分次。

定义 3.1. 单项式 $x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$具有 k-次数 $(d;\, a_1, a_2, \dots, a_n)$，如果 $d = \sum_{i=1}^n j_i$，$a_i \equiv j_i$ (模 k)，且对于所有 i 均有 $0 \leq a_i < k$。

就我们的目的而言，关于此分次需要注意的重要一点是，乘以 $p_{k,n}$ 在以下意义下保持分次。设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 m是一个 k-次数为 $(i;\mathbf{a})$ 的单项式。那么 $p_{k,n}\cdot m$ 的 k-次数为 $(i+k;\, \mathbf{a})$。因此，映射 $\cdot p_{n,k} : A_i \to A_{i+k}$ 可分解为直和

$$\cdot p_{n,k} : \bigoplus_{a_1=0}^{k-1}\cdots\bigoplus_{a_n=0}^{k-1} A_{i;a_1,\dots,a_n} \to \bigoplus_{a_1=0}^{k-1}\cdots\bigoplus_{a_n=0}^{k-1} A_{i+k;a_1,\dots,a_n}$$

其中

$$(\cdot p_{n,k})\,(A_{i;a_1,\dots,a_n}) \subseteq A_{i+k;a_1,\dots,a_n}.$$

因此，在检查$p_{n,k}$: $A_i \to A_{i+k}$ 是否为单射时，等价于检查所有映射$\cdot p_{n,k}$:$A_{i;a_1,\dots,a_n} \to A_{i+k;a_1,\dots,a_n}$ 是否为单射。

接下来，考虑$A_{i;a_1,\dots,a_n}$中的一个元素，我们可以将其写为 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\cdot f(x_1^k,\dots,x_n^k)$，其中 f是某个多项式。通过改变我们所处的代数，只需研究形如 $f(x_1^k,\dots,x_n^k)$的元素即可。

引理 3.2. 元素 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\cdot f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 是乘以 $p_{n,k}$ 所得乘法算子的核中的非零元素（在 $A=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^d,\dots,x_n^d)$ 中），当且仅当$f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 是乘以 $p_{n,k}$所得乘法算子的核中的非零元素（在 $B=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^{d-a_1},\dots,x_n^{d-a_n})$中）。

证明。该引理可由反复应用以下事实得出：

$$x_l\cdot g\in(x_1^{s_1},\dots,x_n^{s_n})$$

对于某些整数 $l,s_1,\dots,s_n$和多项式 g，当且仅当

$$g\in(x_1^{s_1},\dots,x_{l-1}^{s_{l-1}},x_l^{s_l-1},x_{l+1}^{s_{l+1}},\dots,x_n^{s_n}).$$

取 $g=p_{n,k}\cdot f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 即可得到其为核元素的等价关系，而 $g=f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 则给出其非零的等价关系。□

在我们这一系列化简的下一步中，帮助我们的仍然是更细的分次，不过是间接地起作用。

引理 3.3. 设 $d=km+i$ 为某个 $1\le i\le k$，并且不失一般性地假设 $a_1,\dots,a_j<i$，而 $a_{j+1},\dots,a_n\ge i$。那么，$f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 是代数 $B=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^{d-a_1},\dots,x_n^{d-a_n})$ 中乘以 $p_{n,k}$ 所得乘法映射的核中的非零元素，当且仅当它是 $C=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^{km+k},\dots,x_j^{km+k},x_{j+1}^{km},\dots,x_n^{km})$ 中乘以 $p_{n,k}$ 所得乘法映射的核中的非零元素。

证明。设 g是一个次数为 $(s;0,0,\dots,0)$ 的 k 多项式，I是B 的定义理想，J是 C的定义理想。我们要证明，$g\in I$ 当且仅当$g\in J$。由于 $J\subseteq I$，一个方向的蕴含显然成立。对于另一方向，假设 $g\in I$。这意味着 g 中的每个单项式都能被某个l整除，其中 $x_l^{d-a_l}$。现在注意到，由于 g的次数为 $(s;0,0,\dots,0)$，g 中单项式的每个变量的指数都是 k的倍数。因此，如果一个变量能被$x_l^{d-a_l}$整除，那么它的指数至少是大于或等于 $d-a_l$的最小的 k 的倍数；当 $l\le j$ 时，这个倍数为 $km+k$，否则为 km。因此 $g\in J$。最后，取 $g=f(x_1^k,\dots,x_n^k)$ 和 $g=p_{n,k}\cdot f(x_1^k,\dots,x_n^k)$，即可得到该引理的结论。□

为了得到下一个结果，我们需要函数

$$H(n,k,i,j,m)=\begin{cases}nk+2ij-ni-n-kj-k & \text{if } mn-(n-j) \text{ is even}\\ nk+2ij-ni-n-kj-2k & \text{if } mn-(n-j) \text{ is odd.}\end{cases}\tag{1}$$

经过这些准备，我们现在可以证明主要结果，确定当 $p_{k,n}$ 是 $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^d,\dots,x_n^d)$ 上的最大秩元素时的情形。

命题 3.4. 设 $d=km+i$ 为某个 $1\le i\le k$，并令 H 如(1)中所定义。那么，当且仅当区间 $0\le j\le n$ 内存在一个 j 使得 $p_{k,n}$不是 $A=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^d,\dots,x_n^d)$ 上的最大秩元素

$$H(n,k,i,j,m)\ge 0.$$

证明. 由于 A 是完全交，因而也是 Gorenstein，由引理 A.2 可知，只需检查乘以 $p_{k,n}$是否存在意外的核元素。利用 k-次数的考量，我们可以假设这样的元素具有 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\cdot f(x_1^k,\ldots,x_n^k)$ 的形式，其中 f是某个多项式。若假设 $a_1,\ldots,a_j<i$而 $a_{j+1},\ldots,a_n\geq i$，则由引理 3.2 和引理 3.3 可知，我们等价地可以在 $C=\mathbf{k}[x_1,\ldots,x_n]/(x_1^{km+k},\ldots,x_j^{km+k},x_{j+1}^{km},\ldots,x_n^{km})$ 中寻找核元素 $f(x_1^k,\ldots,x_n^k)$。最后一步化简时，我们注意到 $p_{k,n}\cdot f(x_1^k,\ldots,x_n^k)$ 在 C中为零这一陈述中，可以将 $x_1^k,\ldots,x_n^k$视为变量。因此，若对所有$1\leq t\leq n$令 $y_t=x_t^k$，则这等价于 $(y_1+\cdots+y_n)\cdot f(y_1,\ldots,y_n)$ 在$D=\mathbf{k}[y_1,\ldots,y_n]/(y_1^{m+1},\ldots,y_j^{m+1},y_{j+1}^m,\ldots,y_n^m)$ 中为零。由于 $y_1+\cdots+y_n$是单项式完全交 D中变量之和，且 D 具有弱 Lefschetz 性质，因此这样的多项式 f 出现在次数 e 当且仅当 $\dim_{\mathbf{k}}(D_e)>\dim_{\mathbf{k}}(D_{e+1})$。为确定这样的最低次数 e，我们首先计算 D 的顶端次数 s_D 为

$$\begin{aligned}s_D&=j\,(m+1)+(n-j)m-n\\&=mn-(n-j).\end{aligned}$$

若 s_D 为偶数，根据 D 的希尔伯特级数形状，我们知道 e 的最小可能值为 $s_D/2$；若 s_D 为奇数，则该值为$\frac{s_D+1}{2}$，见 [14]。因此，取一个f，使其属于此次数下的核。于是，$f(x_1^k,\ldots\ldots,x_n^k)$的次数为 $ks_D/2$或 $k(s_D+1)/2$，因此$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\cdot f(x_1^k,\ldots\ldots,x_n^k)$的最小次数为 $ks_D/2+\sum a_s$或$k(s_D+1)/2+\sum a_s$，具体取决于 $mn-(n-j)$是偶数还是奇数。

找到核元素可能的最低次数后，我们现在需要判断在该次数下是否预期具有单射性。同样，根据我们对 A的希尔伯特级数形状的了解，我们知道，若源次数与目标次数之和不超过顶端次数，则在 A上乘以一个形式预期是单射的。在此情形下，顶端次数为 $s_A=n(d-1)=n(km+i-1)$。当 $mn-(n-j)$为偶数时，源次数为 $ks_D/2+\sum a_s$，目标次数为 $ks_D/2+\sum a_s+k$。将二者之和与 s_A比较，我们得到

$$\begin{aligned}&(ks_D/2+\sum a_s)+(ks_D/2+\sum a_s+k)\\&=kmn-k(n-j)+2\left(\sum_{s=1}^n a_s\right)+k\\&=s_A-ni-kn+kj+2\left(\sum_{s=1}^n a_s\right)+k+n.\end{aligned}\tag{2}$$

由于我们只关心确定是否存在一个要求单射性的次数，因此我们只在意 $\sum_{s=1}^n a_s$ 尽可能小的情形，也就是 $a_1=\cdots=a_j=0$ 和 $a_{j+1}=\cdots=a_n=i$ 的情形。此时 $\sum_s a_s=(n-j)i=ni-ji$。在这些情形下，(2) 简化为

$$\begin{aligned}s_A-ni-kn+kj+2\left(\sum_{s=1}^n a_s\right)+k+n&=s_A+ni+kj-kn-2ij+k+n\\&=s_A-H(n,k,i,j,m)\end{aligned}$$

因此，当且仅当 $H(n,\ k,\ i,\ j,\ m) \geq 0$ 时，才要求单射性。最后，在 $mn-(n-j)$ 为奇数的情形下，对 $k(s_D+1)/2+\sum a_s$ 进行类似计算，也可得出当 $H(n,\ k,\ i,\ j,\ m) \geq 0$ 时，要求单射性，正如所需。□

注记 3.5. 命题 3.4 的证明中的论证以及前面的讨论，同样适用于考虑幂和对称多项式的幂 $(p_{k,n})^t$ ，因为代数 D 具有强 Lefschetz 性质。为避免平凡的边界情形，假设 $k<d$ 和 $kt \leq n(d-1)$；在与命题 3.4 相同的设定下，我们有：$(p_{k,n})^t$ 是 A上的最大秩元素，当且仅当区间 $0 \leq j \leq n$ 中存在一个 j ，使得

$$nk+2ij-ni-n-kj-k \geq 0 \text{ if } mn-(n-j)+t \text{ is odd}$$
$$nk+2ij-ni-n-kj-2k \geq 0 \text{ if } mn-(n-j)+t \text{ is even.}$$

在给出 $p_{n,k}$ 是最大秩元素的完整分类之前，我们先将上述命题应用于一些具体情形，并处理当 n 或 k 较小时的若干零星情形。

引理 3.6. 形式 $p_{k,2}$ 在 $\mathbf{k}[x,y]/(x^d,y^d)$ 上不具有最大秩，当且仅当出现以下情形。若 $k=2m$，则除 $d \equiv m$(模 k)外，其他所有情形均不成立；若 $k=2m+1$，则除 $d \equiv m$ (模 k)或 $d \equiv m+1$ (模 k)外，其他所有情形均不成立。特别地，当 $k=2$时，若 d 为偶数，则不成立；当$k=3$时，若 d 能被三整除，则不成立；当 $k=4$时，除非 $d \equiv 2$(模 4)，否则不成立。

证明. 根据命题 3.4，我们需要考察 $H(2,k,i,0,m)$、 $H(2,k,i,1,m)$ 和 $H(2,k,i,2,m)$ 的非负性。由于 $n=2$ 是偶数， m 的奇偶性不起作用。因此， $H(2,k,i,0,m)$ $=k-2i-2$， $H(2,k,i,1,m)$ $=-2-k$，且 $H(2,k,i,2,m)$ $=2i-k-2$。由于对所有 $k \geq 1$ 都有 $-2-k<0$，若满足 $k \geq 2(i+1)$ 或 $2i-2 \geq k$ 中的一个条件，则会出现失败。当 $k=2m$ 时，这些条件化简为 $m \geq i+1$ 和 $i-1 \geq m$，因此 $i=m$ 是唯一无法确立失败的情形。同样，当 $k=2m+1$ 时，这些条件化简为 $m+1/2 \geq i+1$ 和 $m+1/2 \leq i-1$，这表明除非 $i=m$ 或 $i+m+1$，否则所有情形都不具有最大秩，正如所需。□

引理 3.7. 形式 $p_{2,n}$ 在 $\mathbf{k}[x_1,\ldots,x_n]/(x_1^d,\ldots,x_n^d)$ 上无法满足预期单射性：当 $n \geq 4$ 时，对任意偶数 $d>2$ 都如此；当 $n=3$ 时，对任意 $d \equiv 2 \pmod 4$ 都如此。在其余满足 $n \geq 3$ 的情形下，它具有最大秩。

证明. 首先，写作 $d=2m+2$，并假设 $n \geq 4$。由命题 3.4，当 $H(n,2,2,j,m)$ 非负时，我们便得到所需的单射性失效；对于适当的 j，这是因为在此情形下 $k=i=2$。这里

$$H(n,2,2,j,m)=\begin{cases}2j-n-2 & \text{if } mn-(n-j) \text{ is even}\\ 2j-n-4 & \text{if } mn-(n-j) \text{ is odd.}\end{cases}$$

该量在 j 较大时取最大值，因此代入 $j=n-1$ 和 $j=n$ 可得，$H(n,2,2,n-1,m)$ 和 $H(n,2,2,n,m)$ 分别取得两个值 $n-4$ 和 $n-2$。由于当 $n \geq 4$时，它们中总有一个非负，因此可知此处存在所述的失败情形。当 $d=2m+1$时， $H(n,2,1,j,m)$ 要么是 -2，要么是 -4。无论哪种情况，它总是负数，与 n 和 j无关，因此在这种情况下它具有最大秩。最后，对于 $n=3$，我们有 $H(3,2,2,j,m)$ $=2j-5$或 $H(3,2,2,j,m)$ $=2j-7$，

n	k	j	m （模 2）	$H(n,k,i,j,m)$	d 失败
4			0	$5-4i$	$3m+1$
4			1	$5-4i$	$3m+1$
4			0	$4i-7$	$3m+2, 3m+3$
4			1	$4i-7$	$3m+2, 3m+3$
3			0	$2-3i$	–
3			1	$7-3i$	$5m+1, 5m+2$
3			0	$2-i$	$5m+1, 5m+2$
3			1	$-3-i$	–
3			0	$i-8$	–
3			1	$i-3$	$5m+3, 5m+4, 5m+5$
3			0	$3i-8$	$5m+3, 5m+4, 5m+5$
3			1	$3i-13$	$5m+5$
3			0	$1-3i$	–
3			1	$5-3i$	$4m+1$
3			0	$1-i$	$4m+1$
3			1	$-3-i$	–
3			0	$i-7$	–
3			1	$i-3$	$4m+3, 4m+4$
3			0	$3i-7$	$4m+3, 4m+4$
3			1	$3i-11$	$4m+4$
3			0	$-3i$	–
3			1	$3-3i$	$3m+1$
3			0	$-i$	–
3			1	$-3-i$	–
3			0	$i-6$	–
3			1	$i-3$	$3m+3$
3			0	$3i-6$	$3m+2, 3m+3$
3			1	$3i-9$	$3m+3$

FIGURE 1. p_n不是在某些 n 和 k 取值下，给定 A 的 $d = km + i$ 上的最大秩元素，k 。

只有第一种情况在 $j = 3$ 时非负，而第二种情况从不非负。第一种情况发生于 $3m$ –(3 − 3) 为偶数时，也就是说， m 为偶数时。因此，$p_{2,\ 3}$ 不具有最大秩的唯一情形是：对于偶数 m ， $d = 2m + 2$ ，即 $d \equiv 2$ （模 4）。□

引理 3.8. 对于以下 n 和 k 的取值，乘以形式$p_{n,\ k}$在 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots, x_n^d)$ 上的预期单射性恰好在 d 的以下取值下失效。

- $n = 4$、$k = 3$ 以及任意 d。
- $n = 3$、$k = 5$ 以及任意 d。
- $n = 3$， $k = 4$ 和 $d \neq 2$ （模 4）。
- $n = 3$， $k = 3$ 和 $d \neq \pm 1$ （模 6）。

证明。由于证明与引理 3.6 和引理 3.7 类似，我们将所有必要的计算汇总在图 1 中。

例如，当 $n = k = 3$ 时，表格可作如下解读。回顾命题 3.4，当且仅当 $d = km + i$ $H(3, 3, i, j, m) \geq 0$ 对某个 j 成立时，我们会得到单射性失效。查看满足 $n = k = 3$ 的行后可知，当 m 为偶数时，在 $i = 3m + 2$ 和 $d = 3m + 3$ 的情况下会失效，这两种情况都来自满足 $j = 3$ 的那一行；但在 $d = 3m + 1$ 时不会失效。因此，当 $d \equiv 1$ （模 6）时，它具有最大秩；但当 $d \equiv 2, 3$（模 6）时则不具有最大秩。当 m 为奇数时，表格表明 $d = 3m + 1$ 和 $d = 3m + 3$ 的情况下会失效，前者来自 $j = 0$，后者来自 $j = 2$ 或 $j = 3$；但在 $d = 3m + 2$ 时不会失效。因此，当 $d \equiv 5$ （模 6）时它具有最大秩；但当 $d \equiv 4, 6$（模 6）时则不具有最大秩，正如所声称的那样。其余结果也可以用同样的方法从图 1 得出。□

现在我们可以准确地说明，幂和对称多项式$p_{n,\ k} = x_1^k + \cdots + x_n^k$何时是 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ \ldots\ldots, \ x_n^d)$ 上的最大秩元素。

定理 3.9. 设 $n \geq 2$。那么，对于某个整数 $d > k$，当且仅当 d 取图 2 所示的值时，幂和对称形式$p_{n,\ k} = x_1^k + \cdots + x_n^k$ 的乘法是 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ \ldots\ldots, \ x_n^d)$ 上的最大秩元素。

k \ n	2	3	≥ 4
2	d 奇数	$d \not\equiv 2$ (模 4)	d 奇数
3	$d \not\equiv 0$ （模 3）	$d \equiv \pm 1$ （模 6）	-
4	$d \equiv 2$ （模 4）	$d \equiv 2$ （模 4）	-
$2m > 4$	$d \equiv m$ （模 k）	-	-
$2m + 1 > 4$	$d \equiv m, \ m + 1$ （模 k）	-	-

FIGURE 2. 所有 $d > k$ 满足 $p_{n,k}$ 的元素都是 A上的最大秩元素。

证明。 由引理 3.6 和引理 3.7 可知，当 $n = 2$ 或 $k = 2$ 时，该结论成立。考虑引理 3.8 中的零星情形后，我们只需证明，在以下情形中，对任意 $d > k$，$p_{n,k}$ 都不是最大秩元素：当 $k \geq 6$ 且 $n \geq 3$时；当 $k \geq 4$ 且 $n \geq 4$时；以及当 $k \geq 3$ 且 $n \geq 6$时。

设 $d = km + i$，其中 $1 \leq i \leq k$。由命题 3.4 可知，我们需要找到 j，使得 $H(n, k, i, j, m) \geq 0$，其中 H 如式 (1) 所定义。令 $H_1(n, k, i, j)$ 满足如下定义：当 $mn - (n - j)$ 为偶数时， $H_1(n, k, i, j) = H(n, k, i, j, m)$。由于在 $j = 0$ 或 $j = 1$的情形中，至少有一种情形满足 $H(n, k, i, j, m) = H_1(n, k, i, j)$，且 $j = n - 1$ 或 $j = n$中也至少有一种情形满足这一关系，因此只需证明，对于 $j = 0$ 和 $j = 1$，或对于 $j = n - 1$ 和 $j = n$， $H_1(n, k, i, j) \geq 0$，即可得到所需结果。注意到

$$H_1(n, k, i, j) = j(2i - k) + nk - ni - n - k,$$

我们看到，当 $2i \leq k$ 时， H_1 在 $j \in \{0, 1\}$ 时达到最大值；当 $2i \geq k$ 时， H_1 在 $j \in \{n - 1, n\}$ 时达到最大值。

首先假设 $2i \leq k$。那么

$$H_1(n, k, i, 0) = nk - ni - n - k \geq nk - \frac{nk}{2} - n - k = \frac{nk}{2} - n - k$$

and

$$H_1(n, k, i, 1) = 2i - k + nk - ni - n - k = (n - 2)k - (n - 2)i - n \geq \frac{(n - 2)k}{2} - n.$$

注意，这两个下界相等，因此我们将该函数记为$h(n,k)$。在考察 $h(n,k)$ 之前，先来看 $2i \geq k$ 的情形。那么

$$H_1(n,k,i,n-1) = (n-2)i - n \geq \frac{(n-2)k}{2} - n = h(n,k)$$

and

$$H_1(n,k,i,n) = ni - n - k \geq \frac{nk}{2} - n - k = h(n,k).$$

因此，在所有情况下，只需证明 $h(n,k) \geq 0$，即可得到所需的 H_1 非负性。这只是一个简单的微积分问题。对 n 求导可得，$h_n(n,k) = \frac{k}{2} - 1 \geq 0$，因为 $k \geq 2$ 始终成立。因此，h 随 n 递增。接着，对于 $k \geq 3$，计算 $h(6,k) = 2k - 6 \geq 0$ 表明，当 $n \geq 6$ 和 $k \geq 3$ 时，$h(n,k) \geq 0$；对于 $k \geq 4$，计算 $h(4,k) = k - 4 \geq 0$ 表明，当 $n \geq 4$ 和 $k \geq 4$ 时，$h(n,k) \geq 0$；最后，对于 $k \geq 6$，计算 $h(3,k) = \frac{k}{2} - 3 \geq 0$ 表明，当 $n \geq 3$ 和 $k \geq 6$ 时，$h(n,k) \geq 0$。□

4. Schur polynomials

本节开始研究 Schur 多项式何时是单项式完全交上的最大秩元素。先从定义开始。

定义 4.1. 设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 是一个分拆。*Schur* 多项式$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ 是由下式定义的对称多项式:

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1+n-1} & x_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}.$$

以上只是 Schur 多项式众多等价定义中的一种。关于其他定义及其丰富理论的介绍，我们推荐阅读 [19, 第 7] 章。Schur 多项式还包含若干有趣的对称多项式子族。例如，如果 $\lambda = (\lambda_1, 0, \ldots, 0)$ 只有一个部分，那么

$$s_{(\lambda_1,0,\ldots,0)} = h_{\lambda_1} = \sum_{a_1+\cdots+a_n=\lambda_1} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

它就是次数为 λ_1的完全对称齐次多项式。另一个有趣的子族出现在 $\lambda = (1,1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ 只有大小为一的部分时。若非零部分的数量为 k，那么

$$s_{(1,1,\ldots,1,0,\ldots,0)} = e_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

是关于 n 个变量的第 k 个初等对称多项式。

对于一般的分拆 λ，要确定 Schur 多项式 $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ 在次数为 d 生成的单项式完全交上何时是最大秩元素，是一项艰巨的任务。因此，我们先从变量较少的情形入手。

4.1. 情形 $n = 2$. 现在我们的目标是，对于任意分拆 (a, b)，彻底确定 $s_{(a,b)}(x, y)$ 何时是代数 $A = \mathbf{k}[x, y]/(x^d, y^d)$ 上的最大秩元素。首先，我们有如下观察：

$$s_{(a,b)}(x,y) = \frac{\begin{pmatrix} x^{a+1} & x^b \\ y^{a+1} & y^b \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}} = (xy)^b \frac{\begin{pmatrix} x^{a-b+1} & 1 \\ y^{a-b+1} & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}} = (xy)^b h_{a-b}(x,y).$$

由于 $h_{a-b}(x, y) = x^{a-b} + x^{a-b-1}y + \cdots + y^{a-b}$，我们很好地了解了 $s_{(a,b)}(x, y)$ 的形式。此外，由于 $s_{(a,b)}$ 的次数为 $a+b$，若 $a+b \geq 2d-2$，则 $s_{(a,b)}$ 显然是一个最大秩元素。因此，除非另有说明，我们可以假设 $a + b < 2d - 2$。

现在先假设 $a + b = 2m$。那么，根据引理 A.2，$s_{(a,b)}$ 是最大秩元素，当且仅当乘以 $s_{(a,b)}$ 的映射从次数 $d - 1 - m$ 到 $d - 1 + m$ 是双射。现在，A_{d-1-m} 的一组基为 $\{x^{d-1-m}, x^{d-m}y, \ldots, y^{d-1-m}\}$，而 A_{d-1+m} 的一组基为 $\{x^{d-1}y^m, x^{d-2}y^{m+1}, \ldots, x^m y^{d-1}\}$。由于 $s_{(a,b)}$ 是所有次数为 $a + b$ 且能被 $(xy)^b$ 整除的单项式之和，我们可知，相对于这些基，表示乘以 $s_{(a,b)}$ 的映射的 $(d - m) \times (d - m)$ 矩阵 M 如下所示

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } x^{d-m-i+b}y^{i-1+b} \text{ divides } x^{d-j}y^{m+j-1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，$x^{d-m-i+b}y^{i-1+b}$ 整除 $x^{d-j}y^{m+j-1}$ 当且仅当 $x^{d-m-(i+1)+b}y^{i+b}$ 整除$x^{d-(j+1)}y^{m+j}$。因此，M 的每条对角线都是常数，即 M 是一个托普利兹矩阵。此外，若 $a \geq d-1$，则 M是全 1 矩阵，并且当 $a+b < 2d-1$时不具有最大秩。因此，从现在起可以假设 $a < d-1$。那么，M 是托普利兹矩阵，其第一行由 $a - m + 1$个 1 后接若干个 0 组成，第一列由 $m - b + 1$ 个 1 后接若干个 0 组成。

例 4.2。令 $d = 7$ 和 $(a, b) = (3,1)$。那么，将$s_{(3,1)} = (xy)h_2(x, y)$乘到 $A = \mathbf{k}[x, y]/(x^7, y^7)$上，从次数 4 到次数 8 的乘法所对应的矩阵为

$$M(3,3,5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

该矩阵的行列式为 0，因此 $s_{(3,1)}$ 不是 A上的最大秩元素。

近年来，人们研究了不同族的 (0，1) 托普利茨矩阵的行列式公式，例如参见 [15]。如今，我们用于确定 $s_{(a,b)}$ 何时为最大秩元素的主要工具，是对上述形式的托普利茨矩阵的行列式的完整描述，因此该描述本身也可能具有独立的研究价值。

定理 4.3. 设 $M(r, c, n)$ 为一个大小为 $n \times n$ 的托普利兹矩阵，其第一行由 c 个 *1* 后接若干个 *0* 构成，第一列由 r 个 *1*

后接若干个 0。则

$$\det(M(r,c,n)) = \begin{cases} (-1)^{n(r-1)} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{r+c-1} \\ (-1)^{(n+1)(r-1)} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{r+c-1} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。证明的关键思路是将 $M(r,\ c,\ n)$ 视为另一个矩阵的特化，而该矩阵的行列式有已知公式。为此，令 $M_e(r,\ c,\ n)$ 为托普利兹矩阵，其首行为 e_{r-1}，e_r，……，e_{r+c-2}，0，0，……，，首列为 e_{r-1}，e_{r-2}，……，e_1，1，0，……，其中 e_i 是关于变量 x_1，……，x_{r+c-2} 的 i 次初等对称多项式。于是，根据雅可比-特鲁迪恒等式，可以计算 $M_e(r,\ c,\ n)$ 的行列式

$$s_\lambda = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda'_1} & e_{\lambda'_1+1} & \cdots & e_{\lambda'_1+l-1} \\ e_{\lambda'_2-1} & e_{\lambda'_2} & \cdots & e_{\lambda'_2+l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda'_l-l+1} & e_{\lambda'_l-l+2} & \cdots & e_{\lambda'_l} \end{pmatrix}$$

其中 λ' 是分拆 λ 的共轭分拆。为了得到 $M_e(r,\ c,\ n)$，令 $\lambda'_i = r-1$，其中 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$，且 $l = n$，并注意到

$$\det(M_e(r,c,n)) = s_{(r-1)^n}(x_1,\ldots,x_{r+c-2})$$

其中，分拆 $\lambda = (r-1)^n$ 由 $\lambda_i = n$ 给出，其中 $i = 1,\ldots,r-1$，即 $(r-1)^n$ 是一个有 $r-1$ 行、n 列的矩形。

为了将 $M_e(r,c,n)$ 与 $M(r,c,n)$ 联系起来，现在需要找出 $x_1,\ldots,x_{r+c-2}$ 的一个特化，使得对所有 $i = 1,\ldots,r+c-2$，都有 $e_i(x_1,\ldots,x_{r+c-2}) = 1$。回忆恒等式

$$(t+x_1)\cdots(t+x_{r+c-2}) = t^{r+c-2}+e_1(x_1,\ldots,x_{r+c-2})t^{r+c-3}+\cdots+e_{r+c-2}(x_1,\ldots,x_{r+c-2}).$$

由此可知，我们要寻找以下表达式的根：

$$t^{r+c-2}+t^{r+c-3}+\cdots+t+1 = \frac{t^{r+c-1}-1}{t-1}.$$

但这些根是 q^j 的 $(r+c-1)$ 次单位根，其中 $q = e^{\frac{2\pi i}{r+c-1}}$ 且 $j = 1,2,\ldots,r+c-2$。因此

$$\begin{aligned} \det(M(r,c,n)) &= \det(M_e(r,c,n))|_{x_j=-q^j} \\ &= s_{(r-1)^n}(-q,-q^2,\ldots,-q^{r+c-2}) \\ &= (-q)^{n(r-1)}\cdot s_{(r-1)^n}(1,q,\ldots,q^{r+c-3}), \end{aligned}$$

这里用到了 Schur 多项式 s_λ 是齐次多项式，次数为 $|\lambda|$。

我们现在的任务是计算 $s_{(r-1)^n}(1,\ q,\ \ldots\ldots,\ q^{r+c-3})$。幸运的是，这被称为舒尔函数的主特化，而斯坦利钩公式 [19,定理 7.21。2]给出

$$s_{(r-1)^n}(1,q,\ldots,q^{r+c-3}) = q^{b((r-1)^n)}\prod_{u\in(r-1)^n}\frac{1-q^{r+c-2+c(u)}}{1-q^{h(u)}}$$

其中，乘积遍历分拆 $(r-1)^n$ 的所有项 $u=(i,\ j)$，

$$b((r-1)^n)=\sum_{k=1}^{r-1}(k-1)n=\frac{n(r-1)(r-2)}{2},$$

对于 $u=(i,\ j)$，$c(u)=j-i$ 是 u 处的内容，而 $h(u)=(n-j)+(r-1-i)+1$ 是 u 处的钩长。因此

$$s_{(r-1)^n}(1,q,\dots,q^{r+c-3})=q^{\frac{n(r-1)(r-2)}{2}}\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-q^{r+c-2+j-i}}{1-q^{(n-j)+(r-1-i)+1}}.$$

重新编号后，我们当前的目标是计算

$$\prod_{i=0}^{r-2}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1-q^{c+n-1+i-j}}{1-q^{j+i+1}}.$$

回顾 q-二项式系数的定义

$$\binom{a}{b}_q=\frac{(1-q^a)(1-q^{a-1})\cdots(1-q^{a-b+1})}{(1-q)\cdots(1-q^b)},$$

经过简短计算可得

$$\prod_{i=0}^{r-2}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1-q^{c+n-1+i-j}}{1-q^{j+i+1}}=\prod_{i=0}^{r-2}\frac{\binom{c+n-1+i}{n+i}_q}{\binom{c-1+i}{i}_q}. \tag{3}$$

这里我们再次幸运地发现，当 q 是单位根时，有一些方法可以简化 q-二项式系数的计算。如果 q 是 e 次单位根，那么 q-Lucas 定理 [13] 指出，若 $a=ke+s$ 且 $b=le+t$，其中 $0\le s,t<e$，则

$$\binom{a}{b}_q=\binom{k}{l}\cdot\binom{s}{t}_q.$$

令 $e=r+c-1$并写作 $n+i=le+t$，我们得到 $c-1+n+i=le+(t+c-1)$，当 $t<r$ 时；而当 $t\ge r$时，$c-1+n+i=(l+1)e+(t-r)$。因此

$$\binom{c+n-1+i}{n+i}_q=\begin{cases}\binom{c-1+t}{t}_q & \text{if } t<r\\ \binom{l+1}{l}\cdot\binom{t-r}{t}_q=0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，要使 $\binom{c+n-1+i}{n+i}_q$ 对所有 $i=0,\dots,r-2$均非零，从而使（3）中的乘积非零，唯一的可能是 $n\equiv 0$（模 $r+c-1$）或 $n\equiv 1$（模 $r+c-1$）；在其他所有情况下，所求的行列式都为零。

当 $n\equiv 0$ (模 $r+c-1$) 时，$n=el$ 对某些 l 和 $\binom{c+n-1+i}{n+i}_q=\binom{c-1+i}{i}_q$成立，因此 (3) 中的乘积化简为 1。若 $n\equiv 1$ (模 $r+c-1$)，则 (3) 中几乎所有项都可直接化简为 1；注意到 $\binom{c-1}{0}_q=1$，我们只需计算 $\binom{c-1+r-1}{r-1}_q$。根据 q-二项式系数的定义，有

$$\binom{c-1+r-1}{r-1}_q=\prod_{i=1}^{r-1}\frac{1-q^{c+r-1-i}}{1-q^i}.$$

现在注意到，由于 q 是主 $(r+c-1)$ 单位根， $q^{r+c-1-i}=q^{-i}$，因此有

$$\frac{1-q^i}{1-q^{c+r-1-i}}=\frac{1-q^i}{1-q^{-i}}=\frac{q^i(1-q^i)}{q^i-1}=-q^i.$$

因此

$$\prod_{i=1}^{r-1}\frac{1-q^{c+r-1-i}}{1-q^i}=\prod_{i=1}^{r-1}(-q)^{-i}=(-1)^{r-1}q^{-\frac{r(r-1)}{2}}.$$

综上所述，当 $n\equiv 0$ （模 $r+c-1$）时，我们有

$$\det(M(r,c,n))=(-q)^{n(r-1)}\cdot q^{\frac{n(r-1)(r-2)}{2}}=(-1)^{n(r-1)}$$

利用本例中的 $q^n=1$。接下来，当 $n\equiv 1$ （模 $r+c-1$）时，则有 $q^n=q$，从而得到

$$\begin{aligned}\det(M(r,c,n))&=(-q)^{n(r-1)}\cdot q^{\frac{n(r-1)(r-2)}{2}}\cdot(-1)^{r-1}\cdot q^{-\frac{r(r-1)}{2}}\\&=(-1)^{(n+1)(r-1)}\cdot q^{n(r-1)+\frac{n(r-1)(r-2)}{2}-\frac{r(r-1)}{2}}\\&=(-1)^{(n+1)(r-1)}\cdot q^{r-1+\frac{(r-1)(r-2)}{2}-\frac{r(r-1)}{2}}\\&=(-1)^{(n+1)(r-1)}\cdot q^0=(-1)^{(n+1)(r-1)}.\end{aligned}$$

记住，在所有其余情况下，$\det(M(r,\ c,\ n))=0$，我们就完成了证明。 □

对于 $a+b$ 为偶数的情形，当 $s_{(a,b)}$ 是最大秩元素时，我们现在可以断言。

引理 4.4. *Schur* 多项式$s_{(a,b)}$，其中 $a+b=2m$，在 $\mathbf{k}[x,y]/(x^d,y^d)$ 上是最大秩元素，当且仅当 $m\geq d-1$, $d\equiv m$ (模 $a-b+1$) 或 $d\equiv m+1$(模 $a-b+1$)。

证明. 若 $m\geq d-1$，则 $s_{(a,b)}$ 的次数足够大，因此显然是最大秩元素。否则，若 $m<d-1$ 且 $a<d-1$，则本节开头的讨论表明，从次数 $d-1-m$ 到 $d-1+m$ 的 $s_{(a,b)}$ 乘法由 $M(a-m+1,m-b+1,d-m)$ 表示，并且 $s_{(a,b)}$ 是最大秩元素，当且仅当 $\det(M(a-m+1,m-b+1,d-m))\neq 0$。根据定理 4.3, $\det(M(a-m+1,m-b+1,d-m))$ 非零，当且仅当

$$d-m\equiv 0,1 \pmod{a-b+1} \iff d\equiv m,m+1 \pmod{a-b+1}$$

如前所述。最后，注意若 $m<d-1$ and $a\geq d-1$，则从次数 $d-1-m$ 到 $d-1+m$ 的 $s_{(a,b)}$ 乘法由全 1 矩阵表示，因此不具有最大秩。这与我们的条件一致，因为此区间内没有d满足模条件。事实上，不等式链

$$m+(a-b+1)=2a-m+1\geq 2(d-1)-m+1>2(d-1)-(d-1)+1=d>m+1,$$

由我们的假设得到，这意味着 m、 $m+1$ 和 d 都属于不同的等价类（模 $a-b+1$）。 □

现在我们转向 $a+b=2m+1$ 的情形。对于最大秩性质失效的情况，我们将在此构造一个明确的核元素。

引理 4.5. 若 $a+b=2m+1$, $a+b<2d-2$ 和 d 不等于 $m, m+1$ 或$m+2$ (模 $a-b+1$)，则 $s_{(a,b)}$ 不是$\mathbf{k}[x,y]/(x^d,y^d)$上的最大秩元素。

证明。 假设 $2m+1<2d-2$，这样我们就不会因平凡的原因而不具有最大秩。于是，关键关系为

$$(x-y)\cdot h_{l-1}(x^{a-b+1},y^{a-b+1})\cdot s_{(a,b)}-y^bx^{(a-b+1)l+b}+x^by^{(a-b+1)l+b}=0. \tag{4}$$

为证明 (4)，我们可以先约去公因子 $(xy)^b$，因为 $s_{(a,b)}(x,y)=(xy)^bh_{a-b}(x,y)$。回想 $h_{k-1}(x,y)=\frac{x^k-y^k}{x-y}$，我们有——

$$\begin{aligned}&(x-y)\cdot h_{l-1}(x^{a-b+1},y^{a-b+1})\cdot h_{a-b}-x^{(a-b+1)l}+y^{(a-b+1)l}\\ =&(x-y)\cdot\frac{x^{(a-b+1)l}-y^{(a-b+1)l}}{x^{a-b+1}-y^{a-b+1}}\cdot\frac{x^{a-b+1}-y^{a-b+1}}{x-y}-x^{(a-b+1)l}+y^{(a-b+1)l}\\ =&0.\end{aligned}$$

当 $d\le(a-b+1)l+b$ 时，(4) 将 $(x-y)h_{l-1}(x^{a-b+1},y^{a-b+1})$ 视为乘以$s_{a,b}$所得的一个非零核元素。要判断这种情况何时出乎意料，令$d=(a-b+1)l+b-q$，其中 q 是某个自然数。由于该核元素的次数为 $1+(l-1)(a-b+1)$，若

$$2(1+(l-1)(a-b+1))+a+b\le 2d-2,$$

化简后得到

$$2q+3\le a-b+1 \tag{5}$$

注意，该元素确实非零，因为它的首项为 $x^{(a-b+1)(l-1)+1}$；经过简短计算可知，只要$q<a$，其指数就严格小于 d，而 (5) 成立时这一条件满足。在进一步考察 (5) 之前，将 (4) 乘以 $(xy)^q$，可得一个次数为 $1+(l-1)(a-b+1)+2q$ 的非零核元素，其中当 $d=(a-b+1)l+b+q$ 时成立。现在，若

$$2(1+(l-1)(a-b+1)+2q)+a+b\le 2d-2,$$

这也可化简为

$$2q+3\le a-b+1.$$

再次，经过简短计算可知，它总是有一个非零首项。因此，当 $d=(a-b+1)l+b+q$ 且 $2|q|+3\le a-b+1$ 时，我们得到一个出乎意料的核元素。由于 $a-b+1=2(m-b+1)$，可知 $|q|$ 可以取值 $0,\ 1,\ \dots,\ m-b-1$。换言之，如果 $d\pmod{a-b+1}$ 的值属于集合 $\{b-(m-b-1),\ b-(m-b-2)\dots,\ b,\ b+1,\ \dots,\ b+(m-b-1)\}$，则 $s_{(a,b)}$ 不是最大秩元素。由于 $b-(m-b-1)\equiv 2b-m+1+a-b+1=a+b-m+2=m+3$ (模 $a-b+1$)，该集合与 $\{m+3,m+4,\dots,b,b+1,\dots,m-1\}$ 相同，因此除 $d\equiv m,\ m+1,\ m+2$ (模 $a-b+1$) 的情形外，已涵盖所有情况，正如所需。□

由此，我们现在可以准确说明 $s_{(a,b)}$ 何时是$\mathbf{k}[x,y]/(x^d,\ y^d)$ 上的最大秩元素。

定理 4.6。 *Schur* 多项式$s_{(a,b)}$ 是代数$\mathbf{k}[x,y]/\left(x^d,y^d\right)$ 上的最大秩元素，当且仅当满足以下条件之一：

- $a+b\ge 2d-2$，或者
- $d\equiv m,\ m+1$ (模 $a-b+1$) 当 $a+b=2m$，或者
- $d\equiv m,\ m+1,\ m+2$ (模 $a-b+1$) 若 $a+b=2m+1$。

证明。若 $a+b \geq 2d-2$，显然可知 $s_{(a,b)}$ 是最大秩元素，因此假设 $a+b < 2d-2$。若 $a+b = 2m$，则结论由引理 4.4 得出。若 $a+b = 2m+1$，则我们知道，乘以 $s_{(a,b)}$ 是最大秩元素，当且仅当从次数 $d-1-m-1$ 到次数 $d-1+m$的映射是单射。现在，假设 $a < d$。那么它由一个 $(d-m-1) \times (d-m)$ 托普利兹矩阵 M表示，其中第一行包含 $a-m+1$ 个 1，后接若干个 0；第一列包含 $m-b+1$ 个 1，后接若干个 0。因此，删除最后一列后得到矩阵 $M(m-b+1, a-m+1, d-m-1)$。根据定理 4.3，当 $d \equiv m+1, m+2$(模 $a-b+1$) 时，该矩阵具有最大秩。因此在这些情况下，M 也具有最大秩。若改为在 M底部添加一行，得到 $M(m-b+1, a-m+1, d-m)$，则当$d \equiv m, m+1$(模 $a-b+1$) 时，该矩阵具有最大秩，因此在这些情况下，M也具有最大秩。此外，在其余情况下，根据引理 4.5，$s_{(a,b)}$ 不是最大秩元素。最后，若 $a \geq d$，则乘以 $s_{(a,b)}$ 由一个大小为 $(d-m-1) \times (d-m)$ 的全 1 矩阵表示。除非$d = m+2$，否则该矩阵不具有最大秩；这里注意到，$d \geq m+2$是满足 $a+b < 2d-2$的必要条件。$d = m+2$ 也是我们的判别准则所涵盖的唯一情形，因为若 $d \geq m+3$，我们有

$$m + (a-b+1) = 2a - m \geq 2d - (d-3) > d,$$

这表明 d 在其他任何情况下都不满足该同余关系。 □

推论 4.7. 初等对称多项式 $e_1 = x+y$ 和 $e_2 = xy$在所有 $d \geq 2$下，都是 $A = \mathbf{k}[x,y]/(x^d, y^d)$ 上的最大秩元素。此外，完全齐次对称多项式 h_a 是 A 上的最大秩元素，当且仅当

- $a \geq 2d-2$，或
- $d \equiv m$，$m+1$ (模 $a+1$) 如果 $a = 2m$，或
- $d \equiv m$，$m+1$，$m+2$ (模 $a+1$) 如果 $a = 2m+1$。

证明。这可由定理 4.6 直接推出，因为 $e_1 = s_{(1,0)}$, $e_2 = s_{(1,1)}$ 和$h_a = s_{(a,0)}$。 □

4.2. **情形** $n \geq 3$。在完整刻画了舒尔多项式何时在两个变量中定义最大秩元素之后，自然会问，增加变量的数量后会发生什么。在这种情况下，其表现对我们来说仍是个谜，但我们可以给出一个部分结果。

首先，若 $\lambda = (1, 0, \ldots\ldots, 0)$，则已知 $s_\lambda = e_1 = h_1 = x_1 + \cdots + x_n$ 是 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots\ldots, x_n^d)$ 中的最大秩元素，因为 A 具有强 Lefschetz 性质。此外，注意到，当且仅当 $\lambda_n = 0$ 且 $\gcd(\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \ldots\ldots, \lambda_n) = 1$ by[4, 定理 3.1]时，Schur 多项式 s_λ（其中 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)$）不可约。若 s_λ 可约，则下一个结果表明，它在 A 上不是最大秩元素，至少当 d 不太小时如此。

命题 4.8。如果 $n \geq 3$ 和 s_λ 是可约的，那么当满足以下条件时，s_λ 不是$\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots\ldots, x_n^d)$ 上的最大秩元素

$$d \geq \frac{n + |\lambda|}{n-2}.$$

证明。首先假设 $\lambda_n \neq 0$。根据舒尔多项式的定义，可得

$$s_\lambda = (x_1 \cdots x_n)^{\lambda_n} s_{(\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \cdots, 0)}.$$

由于 $\lambda_n \neq 0$，因此 $x_1^{d-\lambda_n}$ 是乘法 s_λ 在 $A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^d, \dots, x_n^d)$ 中的一个非零核元素。如果

$$2(d - \lambda_n) + |\lambda| \leq n(d-1),$$

化简后得到

$$\frac{n + |\lambda| - 2\lambda_n}{n-2} \leq d.$$

接下来，若 $\lambda_n = 0$，则再次根据舒尔函数的定义可知 th at

$$V_g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^g - x_j^g}{x_i - x_j},$$

其中 $g = \gcd(\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \dots, \lambda_n)$ 是 s_λ 的一个因子。此外，根据[4, 定理 3.1], ，多项式 s_λ / V_g 要么是常数，要么是不可约的。因此，若 $\lambda_n = 0$ 且 s_λ 可约，则 $g > 1$ 且 s_λ 有因子 V_g。假设 s_λ 具有这种形式，并写作 $d = gq + r$，其中 $0 < r \leq g$。接下来我们断言，多项式

$$f = (x_1 - x_2) \cdot h_q(x_1^g, x_2^g)$$

是乘以 s_λ 的非零核元素。它非零，因为在 $f = (x_1 - x_2) \cdot h_q(x_1^g, x_2^g)$ 中不会发生消去，因为 $g \geq 2$，例如 $x_1 x_2^{gq}$ 就是一个非零项。为说明它属于核，注意到 $h_{g-1}(x_1, x_2)$ 是 V_g 的一个因子。计算如下

$$h_{g-1}(x_1, x_2) \cdot f = \frac{x_1^g - x_2^g}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1^{g(q+1)} - x_2^{g(q+1)}}{x_1^g - x_2^g}(x_1 - x_2) = x_1^{g(q+1)} - x_2^{g(q+1)}$$

再结合 $g(q+1) \geq d$，便可得出 f 是一个核元素。为了判断在 f 所在的次数上何时期望单射性，我们得到不等式

$$2(gq + 1) + |\lambda| \leq n(d-1),$$

化简后得到

$$\frac{n + |\lambda| + 2(1-r)}{n-2} \leq d.$$

由于我们假设 $r > 0$，因此在这两种情况下，只需考虑

$$\frac{n + |\lambda|}{n-2} \leq d.$$

□

5. The elementary symmetric polynomial

现在，我们将注意力转向初等对称多项式

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

根据推论 4.7，我们可以准确知道 k 和 d 取哪些值时， e_k 才是 $\mathbf{k}[x, y]/(x^d, y^d)$ 上的最大秩元素。不过，当变量有三个或更多时，分类问题就更加困难。因此，在本节余下部分，我们考虑与定义完全交指数的次数 d 相同的 $A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^d, \dots, x_n^d)$ 和 e_d。在这种情况下，我们可以给出一个猜想性的分类，并证明这些条件是必要的。

猜想 5.1。设 $n \geq 3$ 和 $d \leq n$。那么， e_d 是 A 上的最大秩元素，当且仅当满足以下条件之一：

- $d = 2$，或者
- $d = 3$ 且 $n \neq 2$ (模 3)。

现在我们证明猜想 5.1 的必要性部分。

命题 5.2. 设 $n \geq 3$ 和 $1 \leq d \leq n$。那么，如果 $d \geq 4$，或者 $d = 3$ 且 $n \equiv 2$ (模 3)，则 e_d 不是 A 上的最大秩元素。

证明。证明的思路是，在足够高的次数下，找到 $(x_1^d, \ldots, x_n^d, e_d)$ 的逆系统中的一个元素 F，从而证明 e_d 在某个次数上对 A 不满足预期满射性。令

$$V(n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x_{\sigma(1)}^{n-1} x_{\sigma(2)}^{n-2} \cdots x_{\sigma(n-1)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

是变量 n 中的范德蒙多项式。由 [7, 例 2.28]，我们知道 e_d 湮灭 $V(n)$。接下来，令 $e_i(a, a+1, \ldots\ldots, b)$ 表示变量 x_a，x_{a+1}，……，x_b 的 i 次初等对称多项式，并且

$$V(a, \ldots, b) = \prod_{a \leq i < j \leq b} (x_i - x_j)$$

变量 x_a，……，x_b 中的范德蒙多项式。设 $(s-1)d + 1 \leq n + 1 \leq sd$，其中 $s \geq 2$。那么

$$(6)\quad e_d = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_s = d \\ i_j \geq 0}} e_{i_1}(1, 2, \ldots, d-1)\, e_{i_2}(d, d+1, \ldots, 2d-1) \cdots e_{i_s}((s-1)d, \ldots, n)$$

并且我们声称它湮灭这个形式

$$F = (x_1 \cdots x_{d-1})^{d-1} V(d, \ldots, 2d-1) \cdots V((s-1)d, \ldots, n).$$

事实上，由于 $e_{i_j}((j-1)d, \ldots\ldots, jd-1)$ 对 $j \geq 2$ 的 $V((j-1)d, \ldots\ldots, jd-1)$ 起湮灭作用，因此只需证明 (6) 中所有非零项都含有某个满足 $j \geq 2$ 非零的指标 i_j。但是，如果对所有 $j \geq 2$都有 $i_j = 0$，那么这就迫使 $i_1 = d$，从而得到项 $e_d(1, \ldots\ldots, d-1) = 0$。因此 e_d 湮灭 F。此外，对所有 i，x_i^d 都湮灭 F。当 $i \leq d-1$时这显然成立；对于更高的 i，则因为 F 中的每个范德蒙因子至多包含 d 个变量，因此单项式的指数至多为 $d-1$。于是 F属于 $(x_1^d, \ldots\ldots, x_n^d, e_d)$ 的逆系统。

接下来，为了判断逆系统 $(x_1^d, \ldots, x_n^d, e_d)$ 中次数为 D 的元素何时是意外的，我们回顾一下：如果 $D + (D-d) \geq n(d-1)$，那么 e_d 在次数 D 上具有预期满射性。由于 F 的次数为 $(d-1)^2 + (s-2)\binom{d}{2} + \binom{n-(s-1)d+1}{2}$，因此当下式成立时，形式 F 是意外的

$$2\left((d-1)^2 + (s-2)\binom{d}{2} + \binom{n-(s-1)d+1}{2}\right) - d \geq n(d-1),$$

这可以简化为

$$g(n, d) = (sd - (n+1))^2 + (1-s)d^2 + (n-2)d + 1 \geq 0.$$

要判断 $g(n, d)$ 何时非负，对 n 求导可知，g 在 $n = sd - d/2 - 1$ 处取得最小值。因此，由于

$$g(sd - \frac{d}{2} - 1, d) = \frac{3d^2}{4} - 3d + 1 \geq 0$$

如果 $d \geq 4$，我们得到 $g(n,\ d) \geq 0$（当 $d \geq 4$ 时），并且对于 d 的这些取值，e_d 不满足预期满射性。最后，如果 $d = 3$，则 $n \in \{3s-1, 3s-2, 3s-3\}$。在这些取值处计算 $g(n,$ 3) 得到 $g(3s-1,\ 3) = 1 > 0$，且 $g(3s-2,\ 3) = g(3s-3,\ 3) = -1 < 0$。因此，当 n 具有 $n = 3s-1$ 的形式，或等价地，当 $n \equiv 2$（模 3）时，e_3 不是最大秩元素。□

6. The complete homogeneous symmetric polynomial

对于最后一类对称多项式，我们现在考虑完全齐次对称多项式

$$h_k = \sum_{a_1+\cdots+a_n=k} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

与初等对称多项式的情形类似，我们确实能够完整分类 h_k 何时是$\mathbf{k}[x,y]/(x^d,$ $y^d)$ 上的最大秩元素；但对于三个或更多变量，目前尚未找到这样的分类。因此，在本节余下部分，我们考虑次数为 d 的 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots, x_n^d)$ 和 h_d，其中 d 与定义该完全交的指数相同。在这种情况下，我们可以给出一个猜想性的分类以及一些部分结果。

猜想 6.1. 设 $n \geq 3$。那么 h_d 是 A 上的最大秩元素，当且仅当满足以下条件之一：

- $d = 2$,
- $d = 3$ 且 $n \not\equiv 1$（模 3），或
- $d = 4$ 且 $n = 3$。

我们尚无法证明猜想 6.1，但对于每个固定的 n，我们可以证明，除有限多个 d 取值外，h_d 在 A 上都不是最大秩元素。

命题 *6.2*。*</style}*完全齐次多项式 h_d 在 $n \geq 3$ 且 $d \geq n+2$ 时，不是 A 上的最大秩元素。

证明。这里的思路与命题 5.2 的证明相同：我们希望在 $(x_1^d, \ldots, x_n^d, h_d)$ 的逆系统中找到一个次数足够高的形式 F，以证明 h_d 在 A 上某个次数的预期满射性失败。根据 [7, 例 2.87]，当 $d > s$ 时，h_d 会湮灭 $(x_1 \cdots x_n)^s V(n)$，其中 $V(n)$ 是 n 个变量的范德蒙多项式。更多细节也可参见 [2, 命题 2.1] 或 [8] 。此外，对所有 i，使 x_i^d 湮灭 $(x_1 \cdots x_n)^s V(n)$ 的最大 s 是 $d-n$。因此，令$F = (x_1 \cdots x_n)^{d-n} V(n)$。为判断逆系统 $(x_1^d, \ldots, x_n^d, h_d)$ 中一个次数为 D 的元素何时是意外的，我们回顾一下：若 $D + (D-d) \geq n(d-1)$，则 h_d 对次数 D 具有预期满射性。由于 F 的次数为 $\binom{n}{2} + n(d-n)$，形式 F 在以下情形下是意外的

$$2\left(\binom{n}{2} + n(d-n)\right) - d \geq n(d-1),$$

可简化为

$$d \geq n + 1 + \frac{1}{n-1}.$$

由于 d 和 $n \geq 3$ 是整数，因此当$d \geq n+2$时，我们得到 F 是意外的。□

与命题 5.2 的证明类似，我们认为，猜想 6.1 中 h_d 的最大秩性质的所有失效，都可以用 $(x_1^d, \ldots\ldots, x_n^d, h_d)$ 的逆系统中形如以下形式的意外元素来解释

$$\prod_{j=1}^{s}(x_{i_j}\cdot x_{i_j+1}\cdots x_{i_{j+1}-1})^{r_j}\cdot V(i_j,\ldots,i_{j+1}-1)$$

其中 $V(a, \ldots\ldots, b)$ 是关于变量 $x_a, \ldots\ldots, x_b$ 的范德蒙多项式，而 s、$i_1, \ldots\ldots, i_{s+1}$、$r_1, \ldots\ldots, r_s$ 是一些经过适当选取的数。

7. 展望与进一步观察

本文对若干情形进行了分类，确定了特定对称多项式何时是等次数生成单项式完全交上的最大秩元素。然而，对于大多数常见的对称多项式，在哪些完全交上它们是最大秩元素，仍是一个悬而未决的问题。本节将提出这一方向上若干自然的后续问题，并根据在 Macaulay2 [5] 中所做的计算给出一些进一步的猜想。

最主要、也最具挑战性的开放问题，是对 Schur 多项式何时为单项式完全交上的最大秩元素进行分类。

问题 7.1. 给定一个有 k 个部分的分拆 λ，求所有满足以下条件的整数 $n \geq k$ 和 $d \geq 2$: *Schur* 多项式 $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ 是代数$\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots, x_n^d)$上的最大秩元素。

如果能找到分拆 λ 的其他性质，使其在某些 n 和 d取值下必然是或不是最大秩元素（类似于命题 4.8），那将很有意义。另一种可能的研究方向是对渐近行为进行分类。例如，固定一个分拆 λ 和变量数 n，当 d 足够大时，能否判断 s_λ 何时是由 $(x_1^d, \ldots, x_n^d)$ 定义的完全交上的最大秩元素？在三变量情形下，我们有如下猜想。

猜想 7.2. 设 λ 是一个至多有三个部分的分拆，s_λ 是一个 *Schur* 多项式，且 $A = \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^d, x_2^d, x_3^d)$。考虑以下两个集合

$$F = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mid \lambda_3 \neq 0 \ \textit{or}\ \gcd(\lambda_1+2, \lambda_2+1) > 1\} \cup \{(s,s,0) \mid s \geq 5\},$$
$$P = \{(2,2,0), (3,3,0), (4,4,0)\}.$$

那么，对于所有足够大的 d，s_λ 是否为 A 上的最大秩元素，其表现如下。

- 若 $\lambda \in F$，则不成立。
- 若 $\lambda \in P$，则其关于 d 呈周期性；对于 $\lambda = (2、2、0)$，成为最大秩元素的条件为$\star$ $d \equiv 24、5 \pmod 6$；对于 $\lambda = (3、3、0)$，条件为$\star$ $d \equiv 6 \pmod 8$；对于 $\lambda = (4、4、0)$，条件为$\star$ $d \equiv 8 \pmod{10}$。
- 若 $\lambda \notin F \cup P$，则它是最大秩元素。

当然，也可以研究某个对称多项式 p 所对应的理想 $(x_1^d、\ldots\ldots、x_n^d、p)$ 的其他性质。例如，根据猜想 5.1 和猜想 6.1，当 x_1^d 是 3 的倍数时，理想 $(x_1^3、\ldots\ldots、x_n^3、h_3)$ 与 $(x_1^3、\ldots\ldots、x_n^3、e_3)$ 的希尔伯特级数应当

相同。事实上，我们认为它们的贝蒂表也相同。

猜想 7.3. 理想$(x_1^3, \ldots, x_n^3, h_3)$与$(x_1^3, \ldots, x_n^3, e_3)$具有相同的贝蒂数，当且仅当 $n = 3a$。

仅仅要求 e_3 和 h_3 是代数 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^3, \ldots, x_n^3)$ 上具有最大秩性质的对称多项式还不够。我们知道，多项式 $(x_1 + \cdots + x_n)^3$ 也是 A 上的最大秩元素，但对于 $n = 6$，$(x_1^3, \ldots, x_6^3, (x_1 + \cdots x_6)^3)$ 的贝蒂表与其他的不同。还可以从 $(x_1^3, \ldots, x_6^3, f)$ 得到第三个由最大秩元素产生的贝蒂表，其中 f 是一般的、但不一定对称的三次多项式。

此外，当某个对称多项式 p不是最大秩元素时，它与最大秩元素的差距在许多情况下似乎具有良好的组合解释。照常令 $A = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots, x_n^d)$。由命题 A.3 以及 A 具有单峰希尔伯特级数这一事实可知，由 $\mathrm{HS}(A/(p); t) - [(1 - t^{\deg(p)} \mathrm{HS}(A; t))]$, 给出的级数，其中 $[(1 - t^{\deg(p)} \mathrm{HS}(A; t))]$ 是预期的希尔伯特级数，具有对称性。此外，随着 d增大，实验结果表明，这个差值的系数趋于稳定。例如，当 $n = 5$时， e_4 在 A 上不是最大秩元素；对于 $d = 5$、7、9，其差距分别为 $10t^{11}(1 + 5t + t^2)$ $10t^{15}(1 + 5t + 14t^2 + 5t^3 + t^4)$ 和 $10t^{19}(1 + 5t + 14t^2 + 30t^3 + 14t^4 + 5t^5 + t^6)$。因此，这里关注的数列始于 $10 \cdot (1, 5, 14, 30, \ldots,)$，我们猜测它是平方金字塔数 a_i 的十倍，其中 $a_i = \sum_{j=1}^{i} j^2$。

其他有趣的情形，例如考虑 e_5 for $n = 6$，此时差的系数看起来像 $15 \cdot \binom{i+3}{4}$；或者 e_6 when $n = 7$，此时差的系数给出数列 $21 \cdot (1, 6, 20, 51, 111, \ldots...)$。令我们惊讶的是，数列 1，6，20，51，111，.....是在线整数数列百科全书 [16] 中唯一数列的起始片段，该数列由 A266760 给出，即仿射考克斯特群 D_5的增长级数，这也暗示了它与考克斯特群可能存在联系。

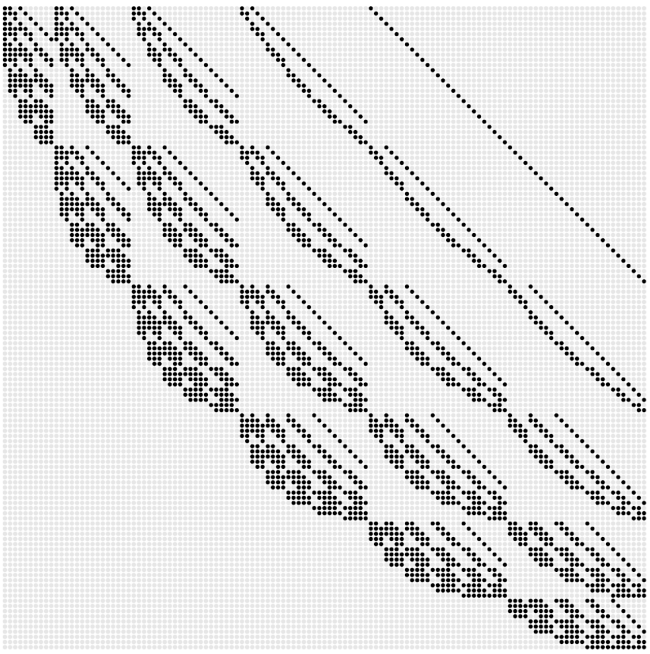


FIGURE 3. $n = 4$， $k = 4$ 当且仅当 $d = 6$ 时的乘法矩阵。

最后，我们想提及一些与组合设计的联系。考虑一个含有 n 个元素的固定集合 X。接下来，我们可以构造一个矩阵 W：其行由 X 中所有含有 i 个元素的子集 T 索引，列由 X 中所有含有 $i+k$ 个元素的子集 K 索引；当且仅当$T \subseteq K$ 时， W 的第 (T, K) 个元素为 1，否则为 0。当 $d = 2$时，表示在 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ 上乘以 h_k、从次数 i映到次数 $i+k$的矩阵，正是矩阵 W。矩阵 W 已被充分理解并得到广泛研究，例见 [21] 及其中的参考文献。如果 X 是多重集，则可以采用相同的构造，考察表示两个不同大小的 X 多重子集之间包含关系的矩阵 W。若X是由元素 $1, \ldots, n$各重复 $d-1$ 次组成的多重集，则在 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^d, \ldots, x_n^d)$ 上乘以 h_k、从次数 i映到 $i+k$，可以由此类矩阵 W 表示；该矩阵由大小为i 的多重子集包含于大小为 $i+k$的多重子集这一关系定义。尽管关于 X 为集合的情形已有大量文献，我们却未能找到此前关于 X 为多重集时这些矩阵的研究。当 $n = 2$时，我们知道它们是托普利茨矩阵，并且定理 4.3 给出了其行列式的公式。对于较大的 n，这些矩阵不再是托普利茨矩阵，但仍能发现有趣的模式。关于由指定的 n、k和 d取值所得到的矩阵W，请参见图 3 和图 4 中的示例。取值 i 的选择使得W 成为方阵。图中的每个黑点表示矩阵中的一个 1，每个灰点表示一个 0。

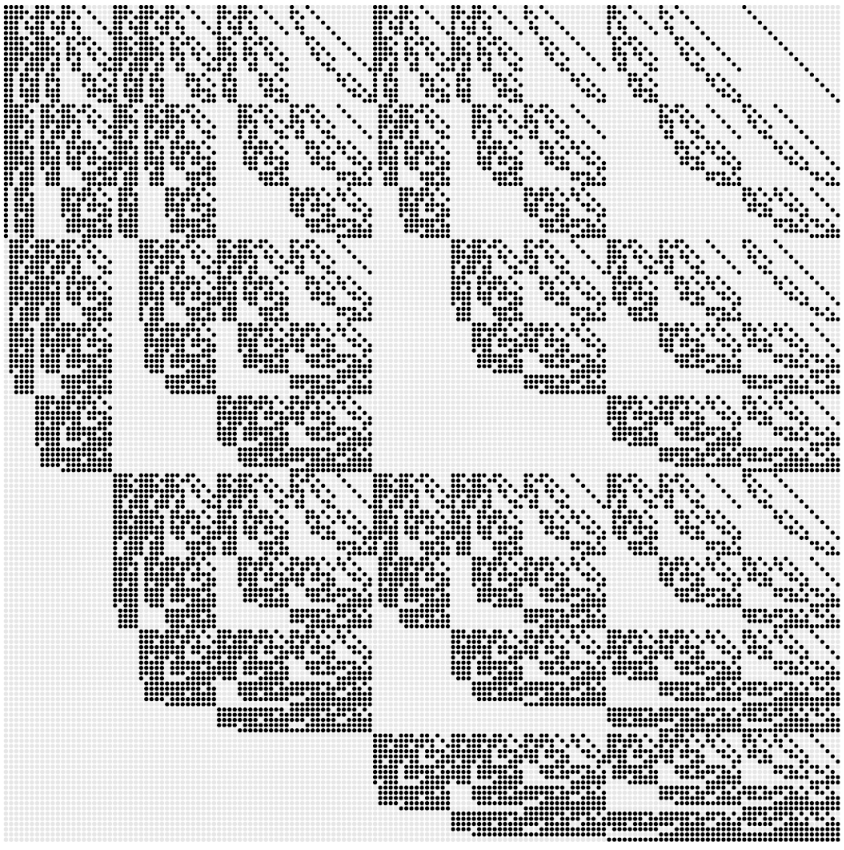


FIGURE 4. 当 $n = 7$， $k = 6$ 和 $d = 3$时的乘法矩阵。

Acknowledgments

本文的创作广泛使用了 Macaulay2 进行计算机实验。作者谨此感谢 Per Alexandersson 就对称多项式理论进行的宝贵讨论。第二作者获得了瑞典研究理事会项目 VR2022-04009 的资助。

References

[1] J¨orgen Backelin 和 Alessandro Oneto。关于一类幂理想。J. Pure Appl. Algebra，219(8):3158–3180，2015。[2] Fran¸cois Bergeron、Adriano Garsia 和 Glenn Tesler。由交错多项式生成的多个左正则表示。J. Comb. Theory, Ser. A，91(1-2):49–83，2000。[3] Aldo Conca、Christian Krattenthaler 和 Junzo Watanabe。对称多项式的正则序列。Rend. Semin. Mat. Univ. Padova，121:179–199，2009。[4] Roberto Dvornicich 和 Umberto Zannier。生成对称域的牛顿函数与 Schur 多项式的不可约性。Adv. Math.，222(6):1982–2003，2009。[5] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问 http://www2.macaulay2.com。[6] James Haglund、Brendon Rhoades 和 Mark Shimozono。有序集合划分、广义余不变量代数与 Delta 猜想。Adv. Math.，329:851–915，2018。[7] Tadahito Harima、Toshiaki Maeno、Hideaki Morita、Yasuhide Numata、Akihito Wachi 和 Junzo Watanabe。Lefschetz性质，《数学讲义》第 2080 卷。施普林格，海德堡，2013。[8] Satoru Isogawa。由连续次数的完全齐次对称多项式定义的完全交理想的 Macaulay对偶生成元。熊本高等专门学校研究报告，1:1–10，2025。[9] Andrew R. Kustin、Rebecca R. G. 和 Adela Vraciu。(x^N, y^N, z^N, w^N) 的自由分解。J. Algebra，590:338–393，2022。[10]Andrew R. Kustin、Rebecca R. G. 和 Adela Vraciu。超曲面环中理想 $(x_1^N, x_2^N, x_3^N, x_4^N)$ 的叠系，其中超曲面环由 $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ 定义。J. Algebra，615:205–242，2023。[11] Andrew R. Kustin、Hamidreza Rahmati 和 Adela Vraciu。对角超曲面环中极大理想括号幂的自由分解。J. Algebra，369:256–321，2012。[12] Claudia Miller、Hamidreza Rahmati 和 Rebecca R. G.。一般超曲面上 Frobenius幂的稳定行为。Trans. Am. Math. Soc., Ser. B，11:1350–1393，2024。[13] Gloria Olive。广义幂。Amer. Math. Monthly，72:619–627，1965。[14] Les Reid、Leslie G. Roberts 和 Moshe Roitman。关于完全交及其希尔伯特函数。Can. Math. Bull.，34(4):525–535，1991。[15] Yaroslav Shitov。某些 (0, 1) 托普利茨矩阵的行列式。Linear Algebra Appl.，618:150–157，2021。[16] Neil J. A. Sloane。在线整数数列百科全书。Notices Am. Math. Soc.，65(9):1062–1074，2018。[17] Jan E. Snellman 和 Guillermo Moreno-Soc´ıas。关于外代数中一般理想的希尔伯特级数的一些猜想。Homol. Homotopy Appl.，4:409–426，2000。[18] Richard P. Stanley。韦尔群、硬Lefschetz定理与 Sperner性质。SIAM J. Algebraic Discret. Methods，1:168–184，1980。[19] Richard P. Stanley。枚举组合学。第 2 卷，《剑桥高等数学研究丛书》第 62 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999。[20] Junzo Watanabe。Artin-Gorenstein环的 Dilworth 数。Adv. Math.，76(2):194–199，1989。[21] Richard M. Wilson。关于 t-子集与 k-子集关联矩阵的对角形式。Eur. J. Comb.，11(6):609–615，1990。

Appendix A. Artinian Gorenstein algebras

这里附上一个附录，介绍一些关于 Artin Gorenstein代数中乘以某个元素的事实；正文此前曾用到这些事实。专家们应该都熟知这些性质，但由于我们未能找到适当的参考文献，为了完整起见，现于此给出证明。

我们先回顾一下：域 $\mathbf{k}$ 上的阿廷代数 $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_e$ 若具有一维顶端，则称其为 $Gorenstein$ 代数。也就是说，若 $\dim_{\mathbf{k}}(A_e) = 1$且对所有 $i\} = A_e$都有 $\{f \mid fx_i = 0$ 。阿廷 Gorenstein 代数还有许多其他等价定义。为陈述其中一些定义，我们回顾预备知识中介绍的 Macaulay 逆系统。设 $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$，并考虑对偶$S = k[X_1, \ldots, X_n]$，其中 x_i作用于 $F \in S$的方式为 $x_i \circ F = \frac{\partial F}{\partial X_i}$。对于这样的 $F \in S$，其湮灭子 Ann(F) $= \{g \in R \mid g \circ F = 0\}$ 是 R中的一个理想。

现在我们汇集一些 Gorenstein代数的定义，供后文使用。

命题 A.1. 设 A 是域$\mathbf{k}$上的一个阿廷代数。那么以下条件等价。

(1) A 是顶端次数为 e的 *Gorenstein* 代数。*(2)* A 上的乘法诱导出完美配对 $A_i \times A_{e-i} \to A_e \simeq \mathbf{k}$ 对所有$i = 0,1, \ldots, e$均成立。*(3)* 存在一个次数为 e 的形式 F，使得 $A \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(\mathrm{Ann}(F))$。

满足 $A \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]/$(Ann($F$)) 的形式 F称为代数 A的*Macaulay* 对偶生成元 。

Artin Gorenstein代数的对称性使得判断某个元素是否为该代数上的最大秩元素变得更容易。

引理 A.2. 设 f 是一个次数为 k 的形式， A 是一个顶端次数为 e的 *Artin Gorenstein*代数。那么映射 $\cdot f\colon\ A_i \to A_{i+k}$ 与 $\cdot f : A_{e-(i+k)} \to A_{e-i}$具有相同的秩。此外，若乘以 f 的映射是从 A_j到 A_{j+k} 的单射，对满足 维数$_{\mathrm{k}}(A_j) \leq$ 维数$_{\mathrm{k}}(A_{j+k})$ 的最大 j 而言，则 f 是 A上的最大秩元素。

证明。由于 A 是 Gorenstein 代数，我们知道 $A\hat{}$ 上的乘法给出了一个完美配对。也就是说，设 $B_i = \{g_1, \ldots, g_s\}$ 和 $B_{e-i} = \{\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_s\}$ 分别是 A_i 和 A_{e-i} 的基，并设 F 是 A 的对偶生成元。那么$g_a \cdot \hat{g}_b = \lambda_{a,b}F$ 对某个常数 $\lambda_{a,b}$ 对任意 a, b 都成立，并且矩阵 $G = (\lambda_{a,b})_{a,b=1}^{s}$ 可逆。类似地，设 $H = (\lambda'_{a,b})_{a,b=1}^{t}$ 是由 $B_{e-(i+k)} = \{h_1, \ldots, h_t\}$ 与 $B_{i+k} = \{h_1, \ldots, h_t\}$ 之间的完美配对得到的最大秩矩阵，其中 $A_{e-(i+k)}$ 和 A_{i+k} 分别是它们的基。

现在，若 M 表示关于上述基的映射 $\cdot f : A_i \to A_{i+k}$，则 M 的第 j 列为 $(c_{1,j}, \cdots, c_{t,j})^T$，其中 $fg_j = c_{1,j}\hat{h}_1 + \hat{\cdots} + c_{t,j}\hat{h}_t$。根据 H 的定义，我们还可得

$$\begin{pmatrix} h_1 f g_j \\ \vdots \\ h_t f g_j \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} c_{1,j} F \\ \vdots \\ c_{t,j} F \end{pmatrix}.$$

因此，利用 H 可逆这一事实，并将上述推理应用于 M 的所有列，我们得到

$$MF = (c_{i,j}F) = H^{-1}\begin{pmatrix} fh_1g_1 & fh_1g_2 & \cdots & fh_1g_s \\ fh_2g_1 & fh_2g_2 & \cdots & fh_2g_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ fh_tg_1 & fh_tg_2 & \cdots & fh_tg_s \end{pmatrix}.$$

此外，如果我们将索引从 i 改为 $e-(i+k)$，那么原本从 A_i 到 A_{i+k} 的映射就变为从 $A_{e-(i+k)}$ 到 A_{e-i} 的映射。根据我们的设定，这种情况的处理方式完全相同，只需交换 g 和 h 的角色。因此，若 M' 是在我们选定的基下表示 $\cdot f\colon A_{e-(i+k)} \to A_{e-i}$ 的矩阵，则

$$M'F = G^{-1}\begin{pmatrix} fh_1g_1 & fh_2g_1 & \cdots & fh_tg_1 \\ fh_1g_2 & fh_2g_2 & \cdots & fh_tg_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ fh_1g_s & fh_2g_s & \cdots & fh_tg_s \end{pmatrix} = G^{-1}(HMF)^T = G^{-1}M^TH^TF.$$

由于乘以可逆矩阵不会改变秩，且矩阵转置的秩与原矩阵的秩相同，我们得出 $\mathsf{rank}(M') = \mathsf{rank}(G^{-1}M^TH^T) = \mathsf{rank}(M)$，并且映射 $\cdot f\colon A_i \to A_{i+k}$ 与 $\cdot f\colon A_{e-(i+k)} \to A_{e-i}$ 的秩相同。

对于引理的最后一部分，我们现在作如下论证。由于对所有 i，$\dim_k(A_i) = \dim_k(A_{e-i})$，第一部分表明，只需在要求单射性的所有次数上证明最大秩即可。现在，令 j 为满足下述条件的最大次数

$\cdot f\colon A_j \to A_{j+k}$ 是单射。于是由第一部分可知，$\cdot f\colon A_{e-(j+k)} \to A_{e-j}$ 是满射，因此 $(A/(f))_{e-j} = 0$。由于所有变量的次数都是 1，这就意味着对所有 $l \geq 0$，$(A/(f))_{e-j+l} = 0$，从而对所有 $l \geq 0$，$\cdot f\colon A_{e-j+l-d} \to A_{e-j+l}$ 都是满射。再应用一次第一部分，即可得出对所有 $l \geq 0$，$\cdot f\colon A_{j-l} \to A_{j-l+d}$ 都是单射，因此在所有可能要求单射性的次数上，f 都是单射的。□

一个众所周知的事实是，Gorenstein代数的希尔伯特级数具有对称性。也就是说，若 A 是顶端次数为 e 的 Artin Gorenstein代数，且 $\mathrm{HS}(A;t) = \sum_{i=0}^{e} a_i t^i$ 是 A 的希尔伯特级数，那么对所有 i，$a_i = a_{e-i}$。现在我们希望将这种对称性概念推广到常数项可能为零的级数。为此，对于形如 $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_m t^m$ 的级数，其中 $a_n a_m \neq 0$，若对所有 i 都有 $a_{m+i} = a_{n-i}$，则称 p 是对称的。

希尔伯特级数 $\mathrm{HS}(A;t) = \sum_{i=0}^{e} a_i t^i$ 是单峰的，如果存在整数 s 使得

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{s-1} \leq a_s \geq a_{s+1} \geq \cdots \geq a_{e-1} \geq a_e.$$

注意，并非所有 Gorenstein代数都具有单峰希尔伯特级数，但所有完全交代数都有。事实证明，如果 A 是一个具有单峰希尔伯特级数的 Gorenstein代数，那么一个形式在 A 上不满足最大秩元素条件的程度总是定义了一个对称级数。

命题 A.3. 设 A 是一个具有单峰希尔伯特级数的 *Artinian Gorenstein* 代数，f 是一个次数为 k 的形式，并考虑多项式

$$[(1-t^k)\,\mathrm{HS}(A;t)]$$

其中，方括号表示将多项式截断于第一个非正系数处。则差值 $\mathrm{HS}(A/(f);\, t) - [(1 - t^k)\,\mathrm{HS}(A;\, t)]$ 是对称的。

证明。设 A 的顶端次数为 e。我们可以假设 $k \leq e$，否则差为零多项式。现在考虑正合列

$$0 \to K_i \to A_i \xrightarrow{\cdot f} A_{i+k} \to (A/(f))_{i+k} \to 0$$

and

$$0 \to K_{e-(i+k)} \to A_{e-(i+k)} \xrightarrow{\cdot f} A_{e-i} \to (A/(f))_{e-i} \to 0.$$

By 由引理 A.2 可知，映射 $\cdot f$ 在两种情况下的秩相同，因此

$$\dim_{\mathbf{k}}(A_i) - \dim_{\mathbf{k}}(K_i) = \dim_{\mathbf{k}}(A_{e-(i+k)}) - \dim_{\mathbf{k}}(K_{e-(i+k)}). \tag{7}$$

记 $p(t) = \mathrm{HS}(A/(f);\, t) - [(1 - t^k)\,\mathrm{HS}(A;\, t)]$。若能证明，对于所有满足 $i + k \leq e - i$的 i， p 中 t^{i+k} 的系数等于 t^{e-i} 的系数，我们便完成了证明。接下来，利用短正合列， $p(t)$中 t^{i+k} 的系数为

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbf{k}}(A/(f))_{i+k} - (\dim_{\mathbf{k}}(A_{i+k}) - \dim_{\mathbf{k}}(A_i)) \\
=&(\dim_{\mathbf{k}}(A_{i+k}) - \dim_{\mathbf{k}}(A_i) + \dim_{\mathbf{k}}(K_i)) - (\dim_{\mathbf{k}}(A_{i+k}) - \dim_{\mathbf{k}}(A_i)) \\
=&\dim_{\mathbf{k}}(K_i).
\end{aligned}$$

这里我们利用了 A 的希尔伯特级数的单峰性，从而知道 $[(1 - t^k)\,\mathrm{HS}(A; t)]$中 t^{i+k} 的系数。再次利用短正合列和 (7)， $p(t)$中 t^{e-i} 的系数为

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbf{k}}(A/(f))_{e-i} - 0 \\
=&\dim_{\mathbf{k}}(A_{e-i}) - \dim_{\mathbf{k}}(A_{e-(i+k)}) + \dim_{\mathbf{k}}(K_{e-(i+k)}) \\
=&\dim_{\mathbf{k}}(A_{e-i}) - (\dim_{\mathbf{k}}(A_i) - \dim_{\mathbf{k}}(K_i)) \\
=&\dim_{\mathbf{k}}(K_i),
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 $\dim_{\mathbf{k}}(A_i) = \dim_{\mathbf{k}}(A_{e-i})$，因为 A是顶端次数为 e的 Artin Gorenstein代数。因此，对于任意 i， $p(t)$ 中 t^{i+k} 和t^{e-i} 的系数相等，这表明 $p(t)$是对称的。□

Filip Jonsson Kling, Department of Mathematics, Stockholm University, 10691 Stockholm, Sweden电子邮箱地址: filip.jonsson.kling@math.su.se

Samuel Lundqvist, Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91Stockholm, Sweden电子邮箱地址: samuel@math.su.se