arXiv:2601.16029v1 [cond-mat.stat-mech] 22 Jan 2026

一维 Fleming-Viot过程中的粒子通量

ÉricBrunet[1] 和 Bernard Derrida[2,1,2] 巴黎高等师范学院物理实验室，巴黎高等师范学院 PSL 大学、法国国家科学研究中心、索邦大学、巴黎大学，巴黎，法国。[2] 法兰西学院，巴黎，法国。

2026年1月23日

摘要

Fleming-Viot过程描述了一个由 N 粒子组成的系统，这些粒子在带有吸收点的图上扩散。每当一个粒子被吸收时，就会在 $N-1$ 剩余粒子中的一个粒子所在的位置生成一个新粒子，以取代它。本文考虑粒子位于半无限直线上、并朝作为吸收点的原点进行偏置扩散的情形。在大 N 极限下，密度的演化变得确定性，并呈现出许多与 Fisher-KPP 方程相似的特征：一参数稳态解族、长时间渐近行为对初始条件的依赖、Bramson 对数位移等。然而，一个显著的差异是，在 Fleming-Viot 情形下，对于任意初始条件和任意时间，都可以显式计算该解。通过修改原点附近的扩散规则，可以产生吸收粒子通量的转变，这与行波中的推动-拉动转变非常相似。最后，利用截断近似（已知该近似在行波理论中是正确的），我们推导出吸收粒子通量的领先大 N 修正的一系列预测。

1 引言

Fleming-Viot过程可以看作一组 N 在带有一个吸收顶点的图上进行随机跳跃、彼此互不作用的粒子。每当一个粒子到达吸收顶点时，它就会立即被重新放置到 $N-1$ 其余粒子中随机均匀选取的一个粒子所在的位置。因此，一个问题是，该系统在长时间极限下是否会达到稳态，以及稳态具有哪些特征 [46]。

在同一个图上，也可以考虑一个进行随机跳跃的单个粒子。众所周知 [26, 45, 46] ，给定粒子在时间 t尚未被吸收的条件下，其位置分布与这样一个 Flemming-Viot 过程中的粒子密度的大 N 极限相同；在该过程中， N 粒子的初始位置彼此独立，且服从单个粒子的位置分布。对于任意有限时间 t，这一流体力学极限均成立。

在仍然存活的条件下，单个粒子扩散的平稳分布称为准平稳分布（qsd）。对于有限连通图，存在唯一的准平稳分布；当 N 个粒子数目趋于无穷且 $N\to\infty$ 和 $t\to\infty$ 时，Fleming-Viot 过程的密度收敛到该准平稳分布 [3, 19]。对于无限图，单粒子问题可能存在无穷多个准平稳分布。一个问题是，取决于初始分布 [26, 4, 20, 36, 35]，在这些准平稳解中，受条件限制而存活下来的行走者会选中哪一个（如果确实会选中）。另一个问题是，当 $t\to\infty$ 且随后 $N\to\infty$ 时，Fleming-Viot 过程会选中哪个准平稳分布。我们预计，在许多情况下，Fleming-Viot 过程选中的解是“最小”解，它被定义为使粒子到达吸收态的平均时间最短的准平稳分布 [46, 4, 30, 43]。

本文结构如下。第 2 节研究由 N 个粒子组成的 Fleming-Viot 过程：这些粒子在正整数上进行偏向原点的连续时间随机游走，0 为吸收点。按照 Flemming-Viot 过程的通常定义，每当一个粒子被吸收，就将其移动到 $N-1$ 个其余粒子之一所在的位置。本文关注截至时间 t 被吸收的粒子总数 Q_t ，以及这一数量如何取决于初始条件。在 $N\to\infty$ 极限下，Q_t/N 与单个行走者的生存概率直接相关。我们将得到这一数量的显式表达式，该表达式对任意时间 t 和任意初始条件均成立。由此可以得到其长时间渐近行为；我们将证明，在长时间极限下，它表现出与 Fisher-KPP前沿的位置非常相似的行为 [27, 33]，包括 Bramson对数项 [13, 14]。

在第 3 节中，我们将说明，通过改变原点附近的跳跃率，Flemming-Viot 过程会发生一种与行波的推动-拉动转变非常相似的转变，其中也包括相同的交叉区域。 [21]

在第 4 节和第 5 节中，我们研究连续介质中的 Flemming-Viot 过程，它可以理解为第 2 节和第 3 节所讨论离散情形的极限情形。在这个连续版本中，表达式更简单，因此可以更深入地分析初始条件对长时间渐近行为以及从拉动前沿到推动前沿的转变所产生的影响。

最后，在第 6 节中，我们将截断近似 [15]应用于 Flemming-Viot 问题，以预测稳态下通量的首个大 N 修正。特别是在拉动情形中，我们预计，与其 $N\to\infty$ 极限相比，平稳状态下被吸收粒子的通量将增加 $(\ln N)^{-2}$ 量级。

2 正整数上的 Fleming-Viot过程

本节考虑一种 Fleming-Viot过程，其中 N 粒子位于一维格点上，位置为严格正整数。每个粒子都独立于其他粒子的运动，在连续时间内进行偏置随机游走。若粒子在时间 t位于格点 j ，则在无穷小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，它以概率$\alpha\mathrm{d}t$ 移动到格点 $j+1$ ，并以概率 $\beta\,\mathrm{d}t$移动到格点 $j-1$ 。（粒子以概率1 –($\alpha+\beta$)dt留在格点 j 。）每当粒子到达原点时，它便立即被移至随机选取的另一 $N-1$ 粒子所在的位置。当 $\alpha<\beta$时，所有粒子都朝原点移动，系统达到稳态。（当 $\alpha\geq\beta$ 时，系统的动力学不会达到稳态；这里不讨论这种情况，并始终假设 $\alpha<\beta$。）

根据该过程的定义，不难看出，格点 j 在时间 t 的粒子数期望值 $\langle n_j\rangle n_j$ 满足以下演化方程

$$\frac{\mathrm{d}\langle n_j\rangle}{\mathrm{d}t}=\alpha\langle n_{j-1}\rangle+\beta\langle n_{j+1}\rangle-(\alpha+\beta)\langle n_j\rangle+\frac{\beta}{N-1}\Big(\langle n_1n_j\rangle-\langle n_1\rangle\delta_{j,1}\Big). \tag{1}$$

约定 $n_0=0$。该问题的所有难点都源于关联 $\langle n_1n_j\rangle$。

现在考虑一个在相同晶格上以相同跃迁速率移动的单个行走者。令 $v_j(t)$ 表示该行走者截至时间 t 从未到达原点，且在时间 t 位于位置 j 的概率。显然，对于 $j\geq1$

$$\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}=\alpha v_{j-1}+\beta v_{j+1}-(\alpha+\beta)v_j\qquad\text{with } v_0=0. \tag{2}$$

令 e^{-q_t} 表示行走者截至时间 t 从未到达原点的概率：

$$e^{-q_t}=\sum_k v_k(t). \tag{3}$$

由式 (2) 可得

$$\frac{\mathrm{d}e^{-q_t}}{\mathrm{d}t} = -\beta v_1. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}q_t}{\mathrm{d}t} = \beta v_1 e^{q_t} = \beta u_1, \tag{4}$$

其中u_j 定义为

$$u_j(t) = e^{q_t} v_j(t). \tag{5}$$

该量 u_j 表示行走者在时间 t 给定 其截至时间 t从未到达原点的条件下，位于位置 j 的概率。由（2）可得

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \alpha u_{j-1} + \beta u_{j+1} - (\alpha+\beta)u_j + \beta u_1 u_j, \tag{6}$$

与（1）进行比较。事实上，若对（1）作平均场近似，即将 $\langle n_1 n_j\rangle$ 替换为 $\langle n_1\rangle\langle n_j\rangle$，并令 $N\to\infty$，则可得 $\langle n_j\rangle/N$ 满足与（6）中的 u_j 相同的方程。

众所周知 [26, 45, 46]，对于固定时间 t，如果 Flemming-Viot 过程中的 N 个粒子的初始位置相互独立，且服从分布 $u_j(0)$，那么对所有 N 和 j，都有

$$\frac{n_j(t)}{N} \to u_j(t) \quad \text{as } N\to\infty. \tag{7}$$

换言之，当 $N\to\infty$时，（1）的平均场理论变得精确。

令 Q_t 表示截至时间 t被原点吸收的粒子数。在 $\mathrm{d}t$期间，它以概率 $\beta n_1(t)\,\mathrm{d}t$增加 1，因此

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q_t\rangle}{\mathrm{d}t} = \beta\langle n_1\rangle. \tag{8}$$

两边除以 N 并令 N 趋于无穷大，右端收敛于 $\beta u_1 = \beta v_1 e^{q_t} = \mathrm{d}q_t/\mathrm{d}t$，见式 (4)，由此可得

$$\frac{\langle Q_t\rangle}{N} \to q_t \qquad \text{as } N\to\infty. \tag{9}$$

2.1 稳态解

我们首先证明，方程 (6) 存在一族由一个参数刻画的稳态解。对于稳态解，式 (4) 意味着

$$q_t = \kappa t \qquad \text{其中 } \kappa = \beta u_1. \tag{10}$$

量 κ表示被吸收的粒子通量的 $\frac{1}{N}$ 倍。于是，由式 (6) 得

$$0 = \alpha u_{j-1} + \beta u_{j+1} - (\alpha+\beta-\kappa)u_j \quad \text{for } j\ge 1, \qquad u_0 = 0. \tag{11}$$

方程 (11) 在 $u_0 = 0$ 和 $\kappa = \beta u_1$ 条件下的解为 [34, 44]

$$u_j = \frac{\kappa\left[(\alpha+\beta-\kappa+\Delta)^j - (\alpha+\beta-\kappa-\Delta)^j\right]}{(2\beta)^j\,\Delta} \qquad \text{if } 0<\kappa<\kappa_c, \tag{12}$$

$$u_j = \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{\sqrt{\alpha\,\beta}}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^j j \qquad \text{if } \kappa=\kappa_c. \tag{13}$$

其中 Δ 和 κ_c 由下式给出

$$\Delta = \sqrt{(\alpha+\beta-\kappa)^2 - 4\alpha\beta}, \qquad \kappa_c = (\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2. \tag{14}$$

（κ_c 是使 $\Delta = 0$成立的 κ 的最小值。当 $\kappa \le 0$ 或 $\kappa > \kappa_c$时，不存在正解。可以验证 $\sum_j u_j = 1$。）

这与 Fisher-KPP 方程 [33, 27]颇为相似 [30]：这里存在一族由通量 κ标记的稳态解，正如 Fisher-KPP 中存在一族由速度 v 标记的行波解。在解为正的条件下，这里存在一个最大通量 κ_c，而 Fisher-KPP 中则存在一个最小速度 v_c。在这两种情况下，稳态或行波在空间上的渐近衰减均为指数形式，如式 (12) 中的 $\kappa < \kappa_c$ 或 $v > v_c$所示；但在极值情形下，会像式 (13) 中的 $\kappa = \kappa_c$ 或 $v = v_c$那样多出一个线性前因子。

因此，问题是确定给定初始条件下会达到哪个稳态解。

2.2 任意初始条件下的精确解

对于任意初始条件$u_j(0)$，平均场方程 (6) 可以精确求解。首先，我们需要求解以 $v_j(0) = u_j(0)$ 为初始条件的线性方程 (2)，然后由式 (3) 和 (5) 得到$u_j(t)$。

为求解线性方程 (2)，我们首先写出

$$v_j(t) = \sum_{k\ge 1} \pi_{j,k}(t) u_k(0), \tag{15}$$

其中 $\pi_{j,k}(t)$ 满足与 $v_j(t)$ 相同的演化方程 (2)，但初始条件替换为 $\pi_{j,k}(0) = \delta_{j,k}$。量 $\pi_{j,k}(t)$ 表示一个随机游走者（以速率 α 向右跳跃、以速率 β 向左跳跃）在时间 t 内从 k 到达 j 且不经过原点的概率。

容易验证

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mathrm{d}z}{z} \left[z^j - \left(\frac{\beta z}{\alpha}\right)^{-j} \right] z^{-k} e^{(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z})t}, \tag{16}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{j-k}{2}} \sin(\theta j) \sin(\theta k) \exp\left[\left(2\sqrt{\alpha\beta}\cos\theta - \alpha - \beta \right) t \right], \tag{17}$$

其中，(16) 中的围道是任意一条环绕 $z = 0$ 的闭合曲线。注意到对于任意复数 $z \neq 0$, $z^j e^{(\beta z - \alpha - \beta + \alpha/z)t}$ 和 $(\beta z/\alpha)^{-j} e^{(\beta z - \alpha - \beta + \alpha/z)t}$ 都是 (2) 的解，并验证 $\pi_{j,k}(0) = \delta_{j,k}$ 以及 $\pi_{0,k}(t) = 0$，即可得到~~(16)~~。(17) 的形式则通过变量代换 $z = \sqrt{\alpha/\beta} e^{i\theta}$ 得到。

我们看到，方程 (3)、(5)、(15) 和 (16)（或 (17)）给出了$u_j(t)$和 q_t 在任意时间以及任意初始条件下的显式表达式。

2.3 长时间渐近行为

固定 j 和 k，可以利用鞍点法（或拉普拉斯法）从 (16) 或 (17) 中求得$\pi_{j,\,k}(t)$ 在 t 较大时的渐近行为。当 t较大时，(17) 的主要贡献来自接近 0 的 θ；更确切地说，主要贡献来自量级为 $1/\sqrt{t}$的 θ。作变量代换 $\theta = u/\sqrt{t}$，然后按 t 的幂展开，可得到一些高斯积分，从而得到

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}}{\left(t\sqrt{\alpha\beta}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{j-k}{2}} \frac{jk}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{5 - 4j^2 - 4k^2}{16\sqrt{\alpha\beta}\, t} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \right). \tag{18}$$

由式（15）可得

$$v_j(t) = \frac{e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}}{\left(t\sqrt{\alpha\beta}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{jS}{2\sqrt{\pi}} \big(1 + o(1)\big), \tag{19}$$

在满足以下求和条件的情况下

$$S = \sum_{k\geq 1} k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}} u_k(0) \tag{20}$$

是有限的。此外，如果总和 $\sum_{k\geq 1} k^3 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}} u_k(0)$ 也有限，那么式 (19) 中的 $o(1)$ 修正实际上是一个 $\mathcal{O}(1/t)$。

接着，仍假设 $S < \infty$，我们计算 $\sum_{j\geq 1} v_j(t)$，最终由 (3) 和 (5) 得到，$u_j(t)$ 在 $t \to \infty$ 趋于无穷时收敛到极大 $\kappa = \kappa_c$ 解 (13)，并且

$$q_t = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2 t + \frac{3}{2}\log(t) + \log\left[\frac{2\sqrt{\pi}(\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2}{S}\right] + o(1). \tag{21}$$

式 (21) 中得到的 $\frac{3}{2}\log(t)$ 修正（假设 S 有限）让人联想到 Fisher-KPP 中的 Bramson 位移 [13, 14]。值得注意的是，与 Fisher-KPP 问题不同，这里可以显式计算 q_t 在大 t展开中的常数项，适用于任意满足 S 有限的初始条件。此外，如果初始条件衰减得足够快，那么大 t 展开中的下一项为 $1/t$。这不同于 Fisher-KPP 情形：在其中，位置的大 t展开在 $1/t$ 项 [24, 16,10, 11, 41, 29]之前包含普适的 $1/\sqrt{t}$ 项和 $\log(t)/t$ 项。

当总和 (20) 发散时，即当初始条件衰减得不够快时，q_t 的大 t 渐近行为会发生改变。在第 4 节中，我们将讨论该问题的连续空间版本，并更详细地探讨初始条件对这些渐近行为的影响。这里我们仅考虑 $u_k(0)$ 关于 k 指数衰减的情形：

$$u_k(0) = b_k + Cc^k \tag{22}$$

其中 $\sqrt{\alpha/\beta} < c < 1$，且 b_k 衰减得足够快，使得 $\tilde{S} = \sum_k k\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k/2} b_k$ 绝对收敛。b_k 部分对 $v_j(t)$ 的贡献等于将 (19) 中的 S 替换为 $\tilde{S}$；这一贡献最终会证明可以忽略。为计算 Cc^k 项的贡献，我们在 (16) 中选取一条处处满足 $|z| > c$ 的围道。于是，可以将 (15) 中的求和移至 (16) 的积分号之下，从而得到

$$v_j(t) = [\text{contribution of the } b_k] + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|>c} \frac{\mathrm{d}z}{z}\left[z^j - \left(\frac{\beta z}{\alpha}\right)^{-j}\right]\frac{Cc}{z-c} e^{(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z})t}. \tag{23}$$

在 (23) 中，可以将围道 $|z| > c$ 替换为以原点为中心、半径为 $\sqrt{\alpha/\beta}$ 的圆，以及围绕极点 $z = c$ 的另一个小圆。第一个圆和 b_k 的贡献在长时间极限下可以忽略，而 $v_j(t)$由 $z = c$处的留数主导：

$$v_j(t) \simeq C\left[c^j - \left(\frac{\beta c}{\alpha}\right)^{-j}\right] e^{(\beta c - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{c})t}. \tag{24}$$

（(23) 中的其他贡献与 (19) 中一样，均为 $e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}$ 阶；由于对于 $c > \sqrt{\alpha/\beta}$，$\beta c - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{c} > -(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2$，因此可以忽略。）

由 (24) 最终得到

$$u_j(t) \to \frac{(1-c)(\beta c - \alpha)}{\beta c^2 - \alpha}\left[c^j - \left(\frac{\beta c}{\alpha}\right)^{-j}\right], \tag{25}$$

这就是 $\kappa = \alpha + \beta - \frac{\alpha}{c} - \beta c$时的稳态解 (12)，并且

$$q_t = \left[\alpha + \beta - \frac{\alpha}{c} - \beta c\right] t - \log\frac{C(\beta c^2 - \alpha)}{(1-c)(\beta c - \alpha)} + o(1). \tag{26}$$

同样地，对于 Fisher-KPP 方程的行波，渐近剖面由初始条件在无穷远处的衰减方式决定。

3 拉动与推动情形之间的过渡

本节考虑第 2 节中 Fleming-Viot过程的一个修改版本，其中格点 1 上的速率 β 被修改为 $\beta_1 < \beta$。随着 β_1 变化，我们将看到在临界值 $\beta_1^* = \beta - \sqrt{\alpha\beta}$ 处发生一次转变，这与行波[31, 6, 42, 28, 1, 2, 5, 21]中拉动前沿与推动前沿之间的转变非常相似。

Fleming-Viot过程中期望值 $\langle n_j \rangle$ 的演化方程（1）变为

$$\frac{\mathrm{d}\langle n_j \rangle}{\mathrm{d}t} = \alpha\langle n_{j-1}\rangle + \beta\langle n_{j+1}\rangle - (\alpha+\beta_j)\langle n_j\rangle + \frac{\beta_1}{N-1}\Big(\langle n_1 n_j\rangle - \langle n_1\rangle\delta_{j,1}\Big), \tag{27}$$

其中

$$\beta_j = \begin{cases} \beta_1 & \text{for } j = 1, \\ \beta & \text{for } j > 1. \end{cases} \tag{28}$$

方程（2）给出了以相同速率跳跃的单个行走者存活至时间 t 并位于位置 j 的概率$v_j(t)$，该方程变为

$$\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t} = \alpha v_{j-1} + \beta v_{j+1} - (\alpha+\beta_j)v_j, \tag{29}$$

其中 $v_0 = 0$。我们引入 q_t 以及在给定行走者存活的条件下，其于时间 t 位于 j 的概率$u_j(t)$，如第 2 节中的（3）和（5）所示:

$$u_j(t) = e^{q_t}\, v_j(t), \qquad 1 = e^{q_t}\sum_{j\geq 1} v_j(t). \tag{30}$$

于是，$u_j(t)$的演化方程（6）变为

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \alpha u_{j-1} + \beta u_{j+1} - (\alpha+\beta_j)u_j + \beta_1 u_1 u_j, \tag{31}$$

其中有 $u_0 = 0$。与第 2 节一样，这是式（27）在 N 较大时的平均场版本。

线性方程组（29）对于任意初始条件 $v_j(0) = u_j(0)$ 都可以精确求解。像式（15）中一样，写成

$$v_j(t) = \sum_{k\geq 1} \pi_{j,k}(t)\, u_k(0), \tag{32}$$

我们看到，$\pi_{j,\,k}(t)$ 是满足初始条件 $\pi_{j,\,k}(0) = \delta_{j,\,k}$ 的方程（29）的解。

采用导出式（16）的方法，解可表示为

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} z^{-k}\varphi_j(z) e^{\left(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z}\right)t} \tag{33}$$

with

$$\varphi_j(z) = z^j - \Big(\frac{\beta z}{\alpha}\Big)^{1-j}\, \frac{\alpha + (\beta_1-\beta)z}{\beta_1 + \beta(z-1)} \quad \text{for } j \geq 1, \qquad\qquad \varphi_0 = 0. \tag{34}$$

其中围道应使 0 和 $z_1 = 1 - \beta_1/\beta$ 处的两个极点都位于其内部。（注意，在 $t = 0$ 处，如果围道取为半径较大的圆，则有

$$\frac{1}{2\pi i} \times \frac{1}{z} z^{-k}\varphi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} z^{j-k-1} + \mathcal{O}(|z|^{-j-k}) \quad \text{as } |z| \to \infty. \tag{35}$$

第一项的积分给出初始条件 $\delta_{j,\,k}$，而第二项在 $j \geq 1$ 和 $k \geq 1$ 下的积分为零，因为当围道的半径趋于无穷时，它趋于 0。)

在第2.2节中，我们使用半径为 $z_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$的圆作为围道。这里，如果该围道包含极点 $z_1 = 1 - \beta_1/\beta$，我们也可以使用同一围道。我们检查得出， $0 < z_1 < z_0$ 当且仅当$\beta_1^* < \beta_1 < \beta$ ，其中

$$\beta_1^* = \beta - \sqrt{\alpha\beta}. \tag{36}$$

那么，如果 $\beta_1^* < \beta_1 < \beta$,

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=z_0} \frac{\mathrm{d}z}{z} \varphi_j(z) z^{-k} e^{\left(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z}\right)t}. \tag{37}$$

另一方面，如果 $\beta_1 < \beta_1^*$，就必须在 z_1 周围再加一条围道，从而得到

$$\begin{aligned} \pi_{j,k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=z_0} \frac{\mathrm{d}z}{z} \varphi_j(z) z^{-k} e^{\left(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z}\right)t} \\ + \frac{\beta^{k-1}\alpha^{j-1}}{(\beta - \beta_1)^{j+k}} \left[(\beta_1 - \beta)^2 - \alpha\beta\right] e^{\left(\frac{\alpha\beta_1}{\beta - \beta_1} - \beta_1\right)t} \qquad \text{if } \beta_1 < \beta_1^*, \end{aligned} \tag{38}$$

其中第二项只是 $\frac{1}{z}\varphi_j(z) z^{-k} e^{\left(\beta z - \alpha - \beta + \frac{\alpha}{z}\right)t}$ 在 z_1 周围的留数。事实上，当 β_1 穿过值 β_1^* 时，表达式（37）和（38）互为解析延拓。

由（30）、（32）、（34）、（37）和（38），可以提取出 q_t 和 $u_i(t)$ 的长时间渐近行为。结果取决于 $\beta_1 - \beta_1^*$ 的符号

- 对于 $\beta_1^* < \beta_1 < \beta$ （拉动情形）：$\pi_{j,k}(t)$ 由（37）给出，可如第2.3节所示，在 $z = \sqrt{\alpha/\beta}$ 处用鞍点法求值。由此可得

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}}{2\sqrt{\pi}\left(t\sqrt{\alpha\beta}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{j-k}{2}} \left[\left(j - \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 - \beta_1^*}\right)\left(k - \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 - \beta_1^*}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right]. \tag{39}$$

引入 S，如公式（20）所示，并按如下方式引入 R：

$$R = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}} u_k(0), \qquad S = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}} k u_k(0). \tag{40}$$

对于衰减足够快、使 S 有限的初始条件，可得

$$v_j(t) = \frac{e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}}{2\sqrt{\pi}\left(t\sqrt{\alpha\beta}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{j}{2}} \left[\left(j - \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 - \beta_1^*}\right)\left(S - \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 - \beta_1^*} R\right) + o(1)\right]. \tag{41}$$

其中， $o(1)$实际上是一个 $\mathcal{O}(1/t)$，前提是 $u_k(0)$下降得足够快。然后，根据归一化（见公式（30））,

$$u_j(t) \to \frac{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2}{\alpha\beta_1} \left[(\beta_1 - \beta_1^*)j - \beta_1 + \beta\right] \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{j}{2}}, \tag{42}$$

and

$$q_t = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2 t + \frac{3}{2}\log(t) + \log\left[\frac{2\sqrt{\pi}\beta^{\frac{3}{4}}(\beta_1 - \beta_1^*)^2(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2}{\alpha^{\frac{1}{4}}\beta_1[(\beta_1 - \beta_1^*)S + (\beta - \beta_1)R]}\right] + o(1). \tag{43}$$

式 (42) 中的极限形状是式 (31) 的稳态解，其最大通量为 $\kappa = \kappa_c = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2$。

- 对于 $\beta_1 < \beta_1^*$ （推动情形）：
  我们用 (38) 来计算$\pi_{j,\,k}$。第一项仍由 (39) 给出，但它被附加项所主导。假设

$$S' = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{\beta}{\beta-\beta_1}\right)^k u_k(0) \tag{44}$$

  是有限的，可得

$$v_j(t) = S' \frac{\beta^{-1}\alpha^{j-1}}{(\beta-\beta_1)^j}\left[(\beta_1-\beta)^2-\alpha\beta\right] e^{(\frac{\alpha\beta_1}{\beta-\beta_1}-\beta_1)t}\big(1+o(1)\big) \qquad \text{if } \beta_1 < \beta_1^*, \tag{45}$$

  其中的修正实际上随时间呈指数级小。利用 (30)，可得

$$u_j(t) \to \frac{\beta-\beta_1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta-\beta_1}\right)^j, \tag{46}$$

  这是 (31) 中与通量 $\kappa = \beta_1 - \frac{\alpha\beta_1}{\beta-\beta_1}$ and 对应的稳态解 ——

$$q_t = \left(\beta_1 - \frac{\alpha\beta_1}{\beta-\beta_1}\right)t + \log\left[\frac{(\beta-\beta_1-\alpha)\beta}{[(\beta-\beta_1)^2-\alpha\beta]S'}\right] + o(1). \tag{47}$$

  （另见 [46]。）

- 对于 $\beta_1 = \beta_1^* + \mathcal{O}(1/\sqrt{t})$（交叉区间）：
  交叉区间包含临界情形 $\beta_1 = \beta_1^*$，并与 pulled 和 pushed 情形相衔接。写作

$$\beta_1 = \beta_1^* - (\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}\frac{c}{\sqrt{t}}, \tag{48}$$

  由 (37)（若 $c<0$）或由 (38)（若 $c>0$）可得

$$\pi_{j,k}(t) = \frac{e^{-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t}}{\sqrt{\pi}\big(t\sqrt{\alpha\beta}\big)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{j-k}{2}}\left[1+2ce^{c^2}\int_{-\infty}^{c} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)\right]. \tag{49}$$

  在首阶近似下，假设 $R<\infty$，$u_j(t)$ 的长时间极限因此为

$$u_j(t) \to \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{j}{2}}, \tag{50}$$

  且 q_t 为

$$q_t = (\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2 t + \frac{1}{2}\log t + \log\frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\beta^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{4}}R} - \Psi_1(c) + o(1), \tag{51}$$

  with

$$\Psi_1(c) = \log\left[1+2ce^{c^2}\int_{-\infty}^{c} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right]. \tag{52}$$

  若 $c = (\beta_1^*-\beta_1)\sqrt{t}/(\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}$ 变大，但仍小于 $\sqrt{t}$，这对应于范围 $\frac{1}{\sqrt{t}} \ll |\beta_1^*-\beta_1| \ll 1$，则可得 ——

$$\Psi_1(c) \simeq \begin{cases} c^2 + \log(2c\sqrt{\pi}) = \frac{(\beta_1^*-\beta_1)^2}{\sqrt{\alpha\beta}}t + \frac{1}{2}\log t + \log\frac{2\sqrt{\pi}(\beta_1^*-\beta_1)}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}} & \text{if } c \gg 1, \\ -\log(2c^2) = -\log t - \log\frac{2(\beta_1^*-\beta_1)^2}{\sqrt{\alpha\beta}} & \text{if } -c \gg 1. \end{cases} \tag{53}$$

  可以验证，(51)与(53)结合后会与(43)或(47)相吻合（取决于$\beta_1-\beta_1^*$的符号），这意味着对任一表达式进行小 $\beta_1-\beta_1^*$展开，得到的首项结果相同。可以看出，交叉函数 Ψ_1 与拉动前沿向推动前沿转变时行波问题中的交叉函数相同，见 [21]中的(18)。

4 实数轴上的Fleming-Viot过程

在实半轴上，Fleming-Viot过程由一组 N 相互独立、漂移方向指向原点的布朗运动构成。当一个粒子触及原点时，它会被移至其他 $N-1$ 粒子之一所在的位置。

在流体力学极限下，系统由粒子密度 $u(x,\ t)$ 描述，其中 $x \geq 0$，且 $u(0,\ t) = 0$ 和 $\int u(x,\ t)\,\mathrm{d}x = 1$，其中

$$\partial_t u = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 u + \mu\partial_x u + \tfrac{1}{2}\partial_x u(0,t)\,u. \tag{54}$$

事实上，在等式右侧，第一项 $\frac{1}{2}\partial_x^2 u$ 表示扩散，第二项 $\mu\partial_x u$ 表示朝向原点的漂移，最后一项是增长项，其速率 $\frac{1}{2}\partial_x u(0,\ t)$ 等于在原点被吸收的粒子通量。

现在考虑半轴上的单个布朗运动，它具有相同的漂移，并在原点处被吸收。令 $v(x,\ t)\,\mathrm{d}x$ 表示该布朗运动截至时间 t 从未到达原点，且在时间 t 位于 $\mathrm{d}x$ 的概率。那么

$$\partial_t v = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 v + \mu\partial_x v, \qquad \text{with } v(0,t) = 0. \tag{55}$$

令 e^{-q_t} 表示该布朗运动截至时间 t 从未到达原点的概率，

$$e^{-q_t} = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, v(x,t). \tag{56}$$

由式 (55) 可得

$$\partial_t q_t = e^{q_t}\frac{1}{2}\partial_x v(0,t), \tag{57}$$

接着容易验证，布朗运动在时间 t 时位于 x 且此前从未到达原点的概率密度 $e^{q_t}v(x,\ t)$ 满足式 (54)。那么，如果 $u(x,\ 0) = v(x,\ 0)$，则有

$$u(x,t) = e^{q_t}v(x,t). \tag{58}$$

由式 (57)，被吸收的质量通量为 $\partial_t q_t = \frac{1}{2}\partial_x u(0,\ t)$，由此可得，正如第 2 节所述，$q_t$ 是截至时间 t被吸收的粒子总质量。（在 $N \to \infty$ 极限下，我们将粒子数除以 N称为“质量”。）

方程 (54)、(55)、(56) 和 (58) 应分别与第 2 节的方程 (1)（或 (6)）、(2)、(3) 和 (5) 相比较。事实上，取 α 和 β 为如下形式，就可以从第 2 节的格点版本得到本节的连续空间版本

$$\alpha = \frac{1-\mu\epsilon}{2}, \qquad \beta = \frac{1+\mu\epsilon}{2}. \tag{59}$$

然后，通过对空间和时间进行缩放，我们将 $v_j(t)$ 和 $u_j(t)$ 与新函数 $u(x,\ t)$ 和$v(x,\ t)$ 按照以下方式关联起来:

$$v_j(t) = \epsilon v(j\epsilon, t\epsilon^2), \qquad u_j(t) = \epsilon u(j\epsilon, t\epsilon^2), \tag{60}$$

在 $\epsilon \to 0$ 极限下，我们由 (6) 和 (2) 得到 (54) 和 (55)。

4.1 稳态解

在 (54) 的稳态解中，粒子的质量以恒定速率被吸收

$$q_t = \kappa t \qquad \text{with } \kappa = \tfrac{1}{2}\partial_x u(0,t), \tag{61}$$

且 u 是 $\frac{1}{2}\partial_x^2 u + \mu\partial_x u + \kappa u = 0$ 的解，其中 $u(0,\ t) = 0$。容易发现，解为

$$u(x) = \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2-2\kappa}}\left[e^{-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-2\kappa}\right)x} - e^{-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-2\kappa}\right)x}\right] \qquad \text{if } 0 < \kappa < \kappa_c = \frac{\mu^2}{2}, \tag{62}$$

$$u(x) = \mu^2 x e^{-\mu x} \qquad \text{if } \kappa = \kappa_c. \tag{63}$$

如果 $\kappa \leq 0$ 或 $\kappa > \kappa_c$，则不存在正解。

4.2 任意初始条件下的大时间渐近

与第 2 节一样，我们将线性方程 (55) 的解写作

$$v(x,t)=\int_0^\infty \mathrm{d}y\,\pi(x,y,t)u(y,0), \tag{64}$$

其中 $\pi(x,y,t)$ 是从y到 x、在 0 处吸收的带漂移扩散过程的转移概率密度，也就是说，$\pi(x,y,t)\,\mathrm{d}x$ 表示该扩散过程从 y 出发，在时间 t 之前未被吸收且在时间 t处于 $\mathrm{d}x$ 中的概率。它是满足初始条件$\pi(x,y,0)=\delta(x-y)$ 的方程 (55) 的解。经典的镜像法给出

$$\pi(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(x+\mu t-y)^2}{2t}}-e^{2\mu y-\frac{(x+\mu t+y)^2}{2t}}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x-\frac{x^2}{2t}}\sinh\frac{xy}{t}e^{\mu y-\frac{y^2}{2t}}. \tag{65}$$

也可以利用缩放 (60) 和 $\pi_{i,j}(t)$ 的表达式 (17) 得到这个表达式。根据显式表达式 (64)、(65)、(56) 和 (58)，可以提取 $v(x,t)$、$u(x,t)$ 和 q_t 的大时间渐近，并分析它们对初始条件$u(y,0)$ 衰减情况的依赖。当 t 较大，且 $x=\mathcal{O}(\sqrt{t})$ 和 y 为 1 量级时，由 (65) 得到

$$\pi(x,y,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}xe^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x-\frac{x^2}{2t}}e^{\mu y}\left(y+\frac{x^2y^3}{6t^2}-\frac{y^3}{2t}+o\Big(\frac{1}{t}\Big)\right). \tag{66}$$

Let

$$Y_p=\int_0^\infty \mathrm{d}y\,y^p e^{\mu y}u(y,0). \tag{67}$$

- 若 $u(y,0)$ 衰减得足够快，使得 $Y_1<\infty$，则由（64）和（66）可得

$$v(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}xe^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x-\frac{x^2}{2t}}\big(Y_1+o(1)\big). \tag{68}$$

  此外，若 $Y_3<\infty$，则 $o(1)$ 实际上是 $Y_3\big(\frac{x^2}{6t^2}-\frac{1}{2t}\big)+o\big(\frac{1}{t}\big)$。（回想一下，我们假设 $x=\mathcal{O}\big(\sqrt{t}\big)$。）对 x 上的（68）积分，得到 e^{-q_t}，可得

$$q_t=\frac{\mu^2}{2}t+\frac{3}{2}\ln t+\ln\frac{\mu^2\sqrt{\pi}}{Y_1\sqrt{2}}+o(1), \tag{69}$$

  并且，仍有 $x=\mathcal{O}(\sqrt{t})$，

$$u(x,t)=\mu^2xe^{-\mu x-\frac{x^2}{2t}}\big(1+o(1)\big). \tag{70}$$

  特别地，若 $x=o\big(\sqrt{t}\big)$，则 $u(x,t)$ 收敛到临界稳态解（63）。若$Y_3<\infty$，则（69）中的 $o(1)$ 实际上是 $\frac{1}{2t}\big(\frac{6}{\mu^2}+\frac{Y_3}{Y_1}\big)+o\big(\frac{1}{t}\big)$。对于衰减得足够快的初始条件，不存在 $1/\sqrt{t}$ 项。

- 如果当 y较大时，

$$u(y,0)\simeq Ay^\nu e^{-\mu y}\qquad \text{with } \nu>-2, \tag{71}$$

  然后由（65）可得

$$\begin{aligned}
v(x,t)&\simeq A\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x-\frac{x^2}{2t}}\int_0^\infty \mathrm{d}y\,y^\nu\sinh\frac{xy}{t}e^{-\frac{y^2}{2t}}.\\
&\simeq A\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}xe^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x}\int_0^\infty \mathrm{d}y\,y^{\nu+1}e^{-\frac{y^2}{2t}} \qquad \text{if } x=\mathcal{O}(1)\\
&\simeq A\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}xe^{-\frac{\mu^2}{2}t-\mu x}2^{\frac{\nu}{2}}t^{1+\frac{\nu}{2}}\Gamma\Big[1+\frac{\nu}{2}\Big] \qquad \text{if } x=\mathcal{O}(1)
\end{aligned} \tag{72}$$

在长时间极限下可得

$$q_t \simeq \frac{\mu^2}{2}t + \frac{1-\nu}{2}\ln t + \ln\left[\frac{\mu^2\sqrt{\pi}}{A\,2^{\frac{\nu+1}{2}}\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\right], \tag{73}$$

且对于 $x = \mathcal{O}(\sqrt{t})$,

$$u(x,t) \simeq \mu^2 e^{-\mu x}\sqrt{\frac{t}{2}}H_\nu\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right) \tag{74}$$

with

$$H_\nu(z) = \frac{2e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty \mathrm{d}w\, w^\nu e^{-w^2}\ \sinh(zw). \tag{75}$$

H_ν 是一个满足.....的超几何函数。

$$2H_\nu'' + xH_\nu' - \nu H_\nu = 0, \qquad H_\nu(0) = 0, \qquad H_\nu'(0) = 1 \tag{76}$$

若 $x = o(\sqrt{t})$，则 (74) 就是临界稳态 (63)。注意，对于较大的 z，$H_\nu(z) \simeq 2\sqrt{\pi}z^\nu/\Gamma(1+\frac{\nu}{2})$；并且对于某些取值的 ν，它可以写成更简单的表达式（例如 $H_1 = z$、$H_3 = z + z^3/6$）。标度函数 H_ν 与 Fisher-KPP 方程中对应的标度函数完全相同：[15]的 $H_\nu = G_{1-\frac{\nu}{2}}$。

- 若对于较大的 y

$$u(y,0) \simeq Ae^{-\gamma y}, \qquad \text{with } \gamma < \mu, \tag{77}$$

当 t 较大时，得到

$$v(x,t) \simeq Ae^{-\frac{2\mu-\gamma}{2}\gamma t}\left[e^{-\gamma x} - e^{-(2\mu-\gamma)x}\right]. \tag{78}$$

and

$$q_t = \frac{2\mu-\gamma}{2}\gamma t + \ln\left[\frac{\gamma(2\mu-\gamma)}{2A(\mu-\gamma)}\right], \qquad u(x,t) = \frac{\gamma(2\mu-\gamma)}{2(\mu-\gamma)}\left[e^{-\gamma x} - e^{-(2\mu-\gamma)x}\right]. \tag{79}$$

可恢复对应于 $\kappa = \frac{2\mu-\gamma}{2}\gamma$ 的非临界稳态 (62)。

在所有情况下，各种渐近行为都与 Fisher-KPP [14] 中的情况非常相似。

5 实数轴上的拉曳-推动转变

在晶格上，我们通过降低粒子从 1 跳到 0 的速率，得到了行波推动-拉动转变的一个类似现象。其他位置的动力学保持不变。现在我们写出晶格方程 (31) 在连续介质中的形式。

$x > 0$ 的流体力学方程 (54) 仍然成立，但最后一项中的增长率不再由 $\frac{1}{2}\partial_x u(0,\ t)$ 给出。一般地，我们写作

$$\partial_t u = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 u + \mu\partial_x u + \partial_t q_t\, u \quad \text{for } x > 0, \tag{80}$$

其中，如通常一样，q_t 是截至时间 t 被吸收的总质量。

$\beta_1 < \beta$ 在晶格上的作用是减缓原点处粒子的吸收。在连续版本中，这会使原点处的粒子密度非零。因此，吸收率与该密度成正比：

$$\partial_t q_t = au(0,t) \qquad \text{with } u(0,t) > 0, \tag{81}$$

其中 $a > 0$ 是某个参数。施加归一化条件后，$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, u(x,t) = 1$ 我们由 (80) 得到以下边界条件：

$$\frac{1}{2}\partial_x u(0,t) = (a-\mu)u(0,t). \tag{82}$$

方程 (80)、(81)、(82) 定义了我们的连续介质模型。按照惯例写作 $u(x,t) = e^{q_t} v(x,t)$，我们得到

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\partial_x^2 v + \mu \partial_x v \quad \text{for } x > 0, \qquad \frac{1}{2}\partial_x v(0,t) = (a-\mu) v(0,t). \tag{83}$$

$j = 1$ 的 (83) 中的边界条件可由 (29) 在标度极限 (60) 下得到，即 即 $\partial_t v_1 = \beta v_2 - (\alpha + \beta_1) v_1$，其中使用了 (59) 和 $\beta_1 = a\epsilon$。

按通常方式写成

$$v(x,t) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \pi(x,y,t) u(y,0), \tag{84}$$

可得 (82)、(83) 的解为

$$\pi(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(x-y) - \frac{x^2+y^2}{2t}} \left[e^{\frac{xy}{t}} + e^{-\frac{xy}{t}} - 2b e^{-\frac{xy}{t}} \int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{-(b + \frac{x+y}{t})z - \frac{z^2}{2t}} \right] \tag{85}$$

其中

$$b = 2a - \mu. \tag{86}$$

（注意，在标度极限下，$b = 2(\beta_1 - \beta_1^*)/\epsilon$。）可以直接验证，$\pi(x,\ y,\ t)$ 满足 (82)、(83)，且 $\pi(x,\ y,\ 0) = \delta(x-y)$；还可以将 (85) 作为 (33) 的标度极限得到。附录A给出了 (85) 的另一种推导：将 $v(x,\ t)$ 解释为具有漂移 $-\mu$（由于 $\mu > 0$，漂移朝向原点）、在原点处反射的布朗运动的概率密度，并且其吸收取决于在原点处停留的局部时。

由于 $t \to \infty$，式（85）中的积分值强烈依赖于 b的符号。当x 和 y 为1阶时，我们得到:

- 如果 $b > 0$，那么该积分主要由1阶的 z 决定，从而得到

$$\pi(x,y,t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(x-y)} \left[xy + \frac{x+y}{b} + \frac{1}{b^2} + \mathcal{O}(1/t) \right]. \tag{87}$$

这就是式（39）的标度极限。

- 如果 $b = 0$，那么

$$\pi(x,y,t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(x-y)} \Big[1 + \mathcal{O}(1/t) \Big]. \tag{88}$$

这就是当 $c = 0$时式（49）的标度极限。

- 如果 $b < 0$，那么该积分主要由 $z = -bt - x - y$决定。应用鞍点法，忽略指数小量后得到

$$\pi(x,y,t) \simeq -2b e^{\frac{b^2-\mu^2}{2}t + (b-\mu)x + (b+\mu)y}. \tag{89}$$

O这样，我们便可以直接在连续介质中恢复第 3.

6 截止预测

迄今为止，本文的所有结果都涉及 $N \to \infty$ 极限下的 Fleming-Viot 问题。对于较大但有限的 N，粒子密度和吸收粒子数的重标度值Q_t/N 会发生波动。试图量化这些有限尺寸效应是一项困难的问题，其性质与理解噪声对含噪 Fisher-KPP 方程或 N-BBM 的影响相同。

本节将截断近似 [15], 应用于 Flemming-Viot 问题。已知该近似能给出噪声 Fisher-KPP 前沿或 N-BBM [40, 9] 速度的正确主导大 N 修正。与行波的情形一样，我们将看到，这些修正

在拉动情形下为 $(\ln\ N)^{-2}$ 量级，在推动情形下为 $N^{-\gamma}$ 量级，其中 $0<\gamma<1$，而在临界区间 [21] 则由相同的交叉函数描述。

当 $N=\infty$ 时，Flemming-Viot 问题有无穷多个稳态；这些稳态中的粒子密度是满足 $\partial_t u_j=0$ 的方程 (31) 的解：

$$\alpha u_{j-1}+\beta u_{j+1}-(\alpha+\beta_j)u_j=-\kappa u_j,\qquad \sum_j u_j=1,\qquad \text{with } \kappa=\beta_1 u_1, \tag{90}$$

其中，κ 是粒子被吸收的速率。回想一下，对于 $j=1$，$\beta_j=\beta_1$；而对于$j>1$，$\beta_j=\beta$。在第 3 节中，我们已经看到，$N=\infty$ 临界稳态（即具有最大通量的稳态）为

$$u_j=C\Big[(\beta_1-\beta_1^*)j-\beta_1+\beta\Big]z_c^j \qquad \kappa=\kappa_c \qquad \text{if } \beta_1>\beta_1^* \text{ (pulled case)}, \tag{91}$$

$$u_j=\tilde{C}z_1^j \qquad \kappa=\kappa_1 \qquad \text{if } \beta_1<\beta_1^* \text{ (pushed case)}, \tag{92}$$

with

$$\beta_1^*=\beta-\sqrt{\alpha\beta},\quad z_c=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},\qquad \kappa_c=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta},\quad C=\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{\alpha\beta_1},$$
$$z_1=\frac{\alpha}{\beta-\beta_1},\quad \kappa_1=\beta_1-\frac{\alpha\beta_1}{\beta-\beta_1},\qquad \tilde{C}=\frac{\beta-\beta_1-\alpha}{\alpha}. \tag{93}$$

（见 (36)、(42)、(43)、(46)、(47)。表达式 (91) 和 (92) 在 $\beta_1=\beta_1^*$ 处相同。）

当 N 很大但有限时，稳态下的粒子经验密度接近 (91) 或 (92)，具体取决于 β_1。然而，当 N 有限时，总会存在一个最右侧粒子，其位置通常为 L，即 (91) 或 (92) 达到 $1/N$ 的位置：

$$L=\begin{cases}\dfrac{\ln N}{-\ln z_c}+o(\ln N)=\dfrac{2\ln N}{\ln(\beta/\alpha)}+o(\ln N) & \text{if } \beta_1>\beta_1^* \text{ (pulled case)},\\[2ex] \dfrac{\ln N}{-\ln z_1}+o(\ln N)=o\dfrac{\ln N}{\ln\frac{\beta-\beta_1}{\alpha}}+o(\ln N) & \text{if } \beta_1<\beta_1^* \text{ (pushed case)},\end{cases} \tag{94}$$

针对 Fisher-KPP 前沿提出的截断理论猜想，对于较大但有限的 N，当 $j\le L$ 时，稳态的典型形状由在 $j=L$ 处消失的稳态（方程 (90) 的解）给出。此外，当$u_L=0$ 时，与该稳态对应的速率 κ，在主导修正的精度范围内，与 Flemming-Viot 过程中当 N 较大时粒子被吸收的速率一致。（第 3 节中当我们有 $N=\infty$ 时，没有考虑这些稳态，因为它们会改变符号。）请注意，截断理论是一种确定性近似 [15, 32, 23], ，它导出了粒子的确定性通量 κ。

除 (91) 外，方程 (90) 的所有解均具有以下形式

$$u_j=A(z)z^j+B(z)\Big(\frac{\alpha}{\beta z}\Big)^j \quad \text{for } j\ge 1 \qquad \text{with } \kappa=\alpha+\beta-\frac{\alpha}{z}-\beta z, \tag{95}$$

其中 $\frac{\alpha}{\beta}<|z|<1$（因此，当 $j\to\infty$ 时，$u_j\to 0$），并且 $A(z)$ 和 $B(z)$ 依赖于 α、β 和 β_1，使得 u_j 经过归一化，且方程 (90) 在 $j=1$ 时成立。例如，当 $z=z_1$ 时，可以验证 $B(z_1)=0$，从而得到 (92)。

现在，我们通过识别拉动情形、推动情形、临界情形以及整个临界区间中在位置 L（由（94）给出）处消失的稳态（即方程（90）的解），来推导截断近似的预测。

6.1 拉动情形

在拉动情形下，有 $\beta>\beta_1>\beta_1^*$。稳态 (91) 可通过令 $z\to z_c$，从 (95) 取得。将 $z=z_c e^{\epsilon}$ 写出，并在 (95) 中令 $\epsilon\to 0$，我们看到，为了

恢复 (91)，必须有

$$A(z_c e^{\epsilon}) + B(z_c e^{\epsilon}) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} C(\beta - \beta_1), \qquad \epsilon\big[A(z_c e^{\epsilon}) - B(z_c e^{\epsilon})\big] \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} C(\beta_1 - \beta_1^*). \tag{96}$$

当 $0 < \epsilon \ll 1$ 因此我们得到，$z = z_c e^{\epsilon}$ 的稳态近似等于

$$\begin{aligned} u_j &= A(z_c e^{\epsilon}) z_c^j e^{\epsilon j} + B(z_c e^{\epsilon}) z_c^j e^{-\epsilon j} \\ &\simeq C\left[(\beta - \beta_1)\frac{e^{\epsilon j} + e^{-\epsilon j}}{2} + (\beta_1 - \beta_1^*)\frac{e^{\epsilon j} - e^{-\epsilon j}}{2\epsilon}\right] z_c^j \end{aligned} \tag{97}$$

（假设 ϵ 很小，但 ϵj 可能并不小。）

当 ϵ 为实数时，该式不会消失；但若取 $\epsilon = \frac{i\pi}{\ell}$（其中 $\ell \gg 1$），则得到

$$u_j = C\left[(\beta_1 - \beta_1^*)\tfrac{\ell}{\pi}\sin\tfrac{\pi j}{\ell} + (\beta - \beta_1)\cos\tfrac{\pi j}{\ell}\right] z_c^j, \tag{98}$$

它在 $j \simeq \ell - \frac{\beta - \beta_1}{\beta_1 - \beta_1^*}$ 处为零。相应的吸收率等于

$$\kappa = \alpha + \beta - \frac{\alpha}{z_c e^{\frac{i\pi}{\ell}}} - \beta z_c e^{\frac{i\pi}{\ell}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}\,\cos\frac{\pi}{\ell} \simeq \kappa_c + \sqrt{\alpha\beta}\frac{\pi^2}{\ell^2}. \tag{99}$$

写 g 的首阶近似为 $L \simeq \ell$，并利用 $L \simeq (\ln N)/|\ln z_c|$，见式（94），最终得到

$$\kappa - \kappa_c \simeq \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\pi^2}{L^2} \simeq \frac{\pi^2\sqrt{\alpha\beta}\,\ln(\beta/\alpha)^2}{4(\ln N)^2} \qquad \text{(pulled case)}. \tag{100}$$

6.2 临界情形

当 $\beta_1 = \beta_1^*$ 时，式（98）变为

$$u_j = C\sqrt{\alpha\beta}\cos\tfrac{\pi j}{\ell}. \tag{101}$$

该稳态在 $j = \ell/2$ 处消失。因此，必须取 $\ell = 2L$，由此可得，吸收率的修正项比拉动情形小四倍：

$$\kappa - \kappa_c \simeq \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\pi^2}{4L^2} \simeq \frac{\pi^2\sqrt{\alpha\beta}\,\ln(\beta/\alpha)^2}{16(\ln N)^2} \qquad \text{(critical case)}. \tag{102}$$

6.3 推动情形

在推动情形下，有

$$\beta > \beta_1^* > \beta_1. \tag{103}$$

我们寻找一个接近（92）的解。利用（95）中的 $z = z_1$ 并与（92）比较，我们看到B（z_1）$= 0$。现在在（95）中利用 $z = z_1 e^{\epsilon}$ 以及 $\epsilon \ll 1$，我们得到

$$\begin{aligned} u_j &= A(z_1 e^{\epsilon})(z_1 e^{\epsilon})^j + B(z_1 e^{\epsilon})\Big(\frac{\alpha e^{-\epsilon}}{\beta z_1}\Big)^j \\ &\simeq A(z_1)\left[z_1^j + z_1\epsilon\frac{B'(z_1)}{A(z_1)}\Big(\frac{\alpha}{\beta z_1}\Big)^j\right]. \end{aligned} \tag{104}$$

我们略带预见性地使用了 $\epsilon j \ll 1$；正如我们现在将看到的，ϵj 至多为 $N^{-\gamma}\ln N$的量级，其中某个 $\gamma > 0$。

我们已经在式（34）中隐式地计算了 $B(z)/A(z)$：

$$\frac{B(z)}{A(z)} = -\frac{\beta z}{\alpha}\,\frac{\alpha + (\beta_1 - \beta)z}{\beta_1 + \beta(z-1)}. \tag{105}$$

结合式（93），由此可得

$$\frac{B'(z_1)}{A(z_1)} = -\frac{\beta z_1}{\alpha}\,\frac{\beta_1-\beta}{\beta_1+\beta(z_1-1)} = \frac{\beta}{\beta z_1 - \frac{\alpha}{z_1}}. \tag{106}$$

写出稳态 (104) 在 $j = L = \ln_- {}^{N}_{\ln z_1}$ 时消失，可得 ——

$$\epsilon = \Big(\frac{\alpha}{\beta z_1^2}-1\Big)\Big(\frac{\beta z_1^2}{\alpha}\Big)^{\frac{\ln N}{-\ln z_1}} = \Big(\frac{\alpha}{\beta z_1^2}-1\Big)N^{-\gamma} \quad \text{with } \gamma = \frac{\ln\frac{\beta z_1^2}{\alpha}}{\ln z_1}. \tag{107}$$

容易验证 $0<\gamma<1$。此时吸收率为

$$\kappa = \alpha+\beta-\frac{\alpha}{z_1 e^{\epsilon}} - \beta z_1 e^{\epsilon} \simeq \kappa_1 + \Big(\frac{\alpha}{z_1}-\beta z_1\Big)\epsilon. \tag{108}$$

最后，

$$\kappa - \kappa_1 \simeq \beta z_1\Big(\frac{\alpha}{\beta z_1^2}-1\Big)^2 N^{-\gamma} \qquad \text{(pushed case)} \tag{109}$$

其中 γ 由 (107) 给出。与拉回情形或临界情形相比，修正项小得多 [32, 8, 7]。

有趣的是，可以考虑“轻微推动情形”，此时

$$\beta_1 = \beta_1^* - \delta\sqrt{\alpha\beta}, \qquad 0<\delta\ll 1. \tag{110}$$

在这一参数范围内，我们有 $z_1 \simeq z_c$，且 γ 接近 0。更准确地说，在主阶上，

$$z_1 \simeq z_c(1-\delta), \qquad \gamma \simeq \frac{2\delta}{|\ln z_c|} \tag{111}$$

and

$$\kappa-\kappa_1 \simeq 4\sqrt{\alpha\beta}\,\delta^2 N^{-\frac{2\delta}{|\ln z_c|}} \simeq 4\sqrt{\alpha\beta}\,\delta^2 e^{-2\delta L}. \tag{112}$$

6.4 临界区间

现在我们考虑交叉区间，其中

$$\beta_1 = \beta_1^* - \frac{c}{L}\sqrt{\alpha\beta} \tag{113}$$

对于某个常数 c，其中 $L = \ln N/(-\ln z_c)$ 如 (94) 中所示。（在此区间内，有 $z_1 \simeq z_c$。）我们将稳态 (98) 改写为某个待确定的 ℓ 值，并使用由下式定义的量 x 和 χ

$$j = xL, \qquad \chi = \frac{\pi L}{\ell}. \tag{114}$$

然后，利用 $\beta-\beta_1 \simeq \beta-\beta_1^* = \sqrt{\alpha\beta}$，我们得到

$$u_{j=xL} = C\sqrt{\alpha\beta}\Big[-\frac{c}{\chi}\sin(x\chi)+\cos(x\chi)\Big]. \tag{115}$$

对于每个 c 值，我们必须选择 χ，使得 (115) 对于 $0\le x<1$ 为正，并且对于 $x=1$ 为零。这意味着 χ 必须是下式的解

$$\chi = c\tan\chi \tag{116}$$

然后，已知 χ，我们利用（99）得到 ℓ以及吸收速率的修正。

$$\kappa-\kappa_c \simeq \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\pi^2}{\ell^2} \simeq \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\chi^2}{L^2}. \tag{117}$$

Wh在 $c \to -\infty$下，我们得到 $\chi \to \pi^-$ ，并恢复拉动情形的修正（100）。

当 $c = 0$ 时，我们有 $\chi = \frac{\pi}{2}$，并得到临界情形的修正项 (102)。

随着 c 增大，χ 减小，直到 $c = 1$ 且 $\chi = 0$ 的点。此时，前沿为 $u_{j=xL} = C\sqrt{\alpha\beta}\,(1-x)$ ，吸收速率的主导修正为零（$\kappa = \kappa_c$）。

对于 $c > 1$，我们需要取 χ 为纯虚数，因此 ℓ 也是虚数。将 (115) 和 (116) 中的 $\chi = i\tilde{\chi}$ 写成 $\tilde{\chi}$ 为实数的形式，我们得到

$$u_{j=xL} = C\sqrt{\alpha\beta}\left[\frac{c}{\tilde{\chi}}\sinh(x\tilde{\chi}) + \cosh(x\tilde{\chi})\right], \qquad \tilde{\chi} = c\tanh\tilde{\chi}. \tag{118}$$

当 c 变成一个很大的正数时，可得 $\tilde{\chi} \simeq c\,(1 - 2e^{-2c})$ ，而由 (117) 得到的吸收速率修正为

$$\kappa - \kappa_c \simeq -\sqrt{\alpha\beta}\,\frac{c^2}{L^2}(1 - 4e^{-2c}). \tag{119}$$

但按照 (110) 的记号，$c/L = -\left(\beta_1 - \beta_1^*\right)/\sqrt{\alpha\beta} = \delta$，因此在 $c \to \infty$ 极限下，我们有

$$\kappa - \kappa_c \simeq -\sqrt{\alpha\beta}\,\delta^2(1 - 4e^{-2\delta L}). \tag{120}$$

这就是（112），因为可以验证，在首阶近似下，$\kappa_1 \simeq \kappa_c - \sqrt{\alpha\beta}\,\delta^2$。

图1展示了 $\chi^2 = -\tilde{\chi}^2$ 随 c的变化。

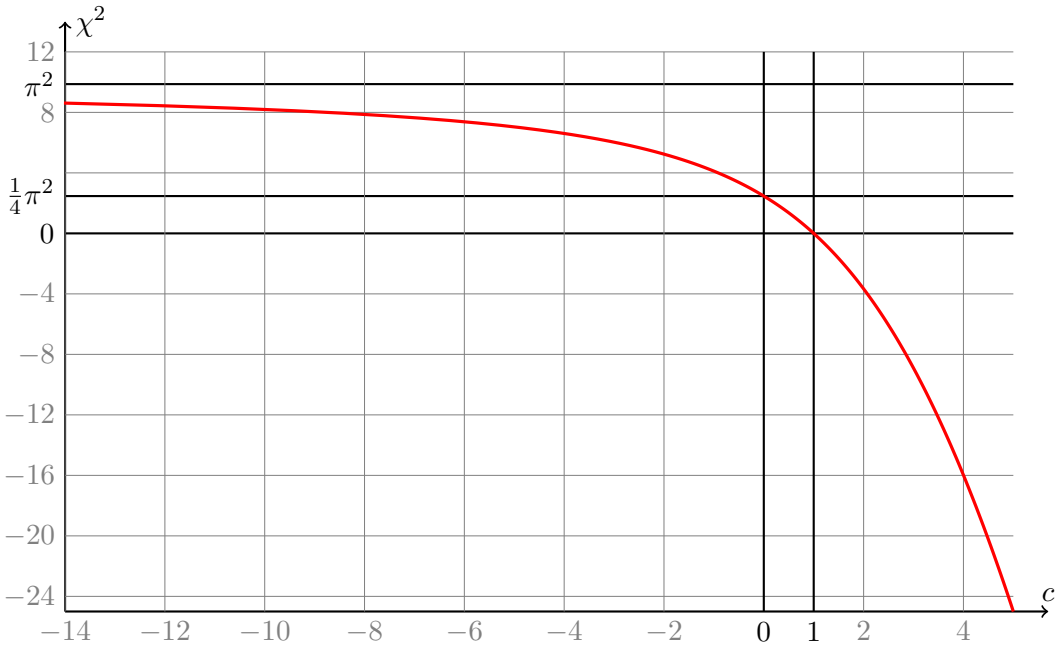


图1 ： χ^2 随 c的变化。吸收率的修正由（117）给出

7 结论

在 $N \to \infty$ 极限下，正整数上的 Flemming-Viot 问题中的粒子密度满足 (6)。本文得到了任意初始条件下该密度在有限 t 时的精确表达式，见第2.2节，并研究了其长时间渐近行为。令 $q_t = \lim_{N\to\infty}\langle Q_t\rangle/N$，其中 Q_t 表示 t 时间之前被吸收的粒子数。在 N 粒子系统中，我们发现 q_t ，而行波问题中前沿的位置随时间和初始条件的变化方式与之非常相似；尤其是，Flemming-Viot

问题在初始条件衰减足够快时，对 q_t 有一个 $\frac{3}{2}\ln t$ 修正，这与行波前沿位置中的 Bramson 位移类似。然而，与行波不同，并不存在 $1/\sqrt{t}$ 或 $(\ln t)/t$ 高阶修正。

通过改变粒子从最左侧格点跳到吸收点的速率 β_1，仍然可以得到密度的精确表达式；并且可以观察到，当 β_1 越过临界值 β_1^* 时会发生转变，见第 3 节。在这里，q_t 的长期行为同样与经历拉曳-推动转变的前沿位置的长期行为非常相似。

我们所有的结果都可以推广到连续介质中的半直线 Flemming-Viot 问题，见第 4 节和第 5 节。特别是，通过改变布朗运动在原点被吸收的方式，可以得到拉曳-推动转变。

当 N 很大但有限时，我们利用截断近似预测，渐近平均吸收率 $\lim_{t\to\infty}\langle Q_t\rangle/(Nt)$ 大于 $\lim_{t\to\infty} q_t/t$（在 $N\to\infty$ 时得到的值）；修正项在“拉曳”情形下为 $(\ln N)^{-2}$ 阶，而在“推动”情形下，对于某些 $\gamma\in(0,1)$，修正项为 $N^{-\gamma}$ 阶，见第 6 节。这些修正与含有 N 个粒子的行波随机版本中速度的修正性质相同，例如 N-BBM。它们是利用同一种截断理论得到的。

进行模拟以检验这些截断预测，并将针对噪声 Fisher-KPP 或 N-BBM[40, 9] 得出的证明推广到 Flemming-Viot 问题，将会很有意思。探索 Q_t/N 在较大但有限的 N 下的统计性质也很有意思。特别是，如果与行波的类比仍然成立，那么人们可能会预期 Q_t/N 的方差为 $(\ln N)^{-3}\,t$ 量级。还可以尝试理解 Flemming-Viot 中的谱系，并将其与 N-BBM [18, 17] 中的谱系进行比较。

另一个问题是，看看 Q_t/N 的大偏差是否与噪声 Fisher-KPP 或 N-BBM [25, 37, 39, 38, 22] 中位置的大偏差相似。对此，我们提及，我们已经能够得到与 Q_t/N 的大偏差函数某个特定取值相关的精确表达式；令

$$V_j(t)=\frac{1}{N}\Big\langle n_j(t)\Big(1-\frac{1}{N}\Big)^{Q_t}\Big\rangle,\qquad S(t)=\Big\langle\Big(1-\frac{1}{N}\Big)^{Q_t}\Big\rangle, \tag{121}$$

其中，$n_j(t)$表示在 Flemming-Viot 系统中，格点 j 在时间 t 的粒子数，系统包含 N个粒子。假设初始条件中，N 个粒子按照某个$v_j(0)$相互独立地分布，我们可以证明（见附录 B），$V_j(t)$ 的演化满足与$v_j(t)$相同的方程 (B1)，且初始条件相同。因此

$$V_j(t)=v_j(t),\qquad S(t)=e^{-q_t}, \tag{122}$$

对于任意 $t>0$ 和任意 $N\geq 2$。因此，如果初始条件在无穷远处衰减得足够快（例如，若 N 个粒子从同一位置 i_0出发，即$v_j(0)=\delta_{j,\,i_0}$），则对任意 $N\geq 2$，当 $t\to\infty$ 时有：

$$-\ln\Big\langle\Big(1-\frac{1}{N}\Big)^{Q_t}\Big\rangle\sim\kappa_c t, \tag{123}$$

其中，κ_c 是式 (14) 给出的临界吸收速率。值得注意的是，(123) 不依赖于 N，而吸收率 $\kappa_N=\lim_{t\to\infty}\langle Q_t\rangle/(Nt)$则依赖于它。

我们感谢 Pablo Ferrari 和 Baruch Meerson 在本研究早期阶段进行的有益讨论。

带漂移、吸收和反射的布朗运动

方程（83）描述了在带有漂移 $-\mu$ with $\mu>0$ 的正半轴上某个布朗运动的概率密度 $v(x,\,t)$ 的演化（因此该布朗运动趋向于

原点）在时间 t 的 x：

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\partial_x^2 v + \mu \partial_x v \quad \text{for } x > 0, \qquad \frac{1}{2}\partial_x v(0,t) = (a-\mu)v(0,t). \tag{A1}$$

这一不寻常边界条件的含义是：布朗运动在原点发生反射，而在原点时还有一定概率被吸收，该概率与 a 成正比。在本附录中，我们尝试解释这一说法。

首先，与其认为布朗运动被限制在正半轴上并在原点发生反射，我们更愿意将其视为在整个半轴 B_t 上运动的布朗运动，其漂移为 $-\mu$（当 $B_t > 0$ 时），而当 $B_t < 0$ 时为 $+\mu$。然后，令 $\tilde{v}(x,\ t)$ 表示该布朗运动的概率密度，并假设 $\tilde{v}(x,\ 0) = v(x,\ 0)$ 的支撑集位于正半轴上，则对于$x > 0$:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + \tilde{v}(-x,t). \tag{A2}$$

现在我们关注 $\tilde{v}(x,\ t)$。作为一种在原点处被吸收的扩散过程，它必须满足带有汇项的质量连续性方程，该汇项与 $\delta(x)$ 成正比。

$$\partial_t \tilde{v} + \partial_x j = -2a\delta(x), \tag{A3}$$

其中，系数 $2a$ 最终将证明是恢复 (A1) 所需的正确系数；而 j 是概率流，与 $\tilde{v}$ 的关系遵循包含朝向原点漂移项的菲克定律:

$$j = -\frac{1}{2}\partial_x \tilde{v} - \mu\,\mathrm{sign}(x)\tilde{v}. \tag{A4}$$

将 (A4) 代入 (A3)，并利用 $\partial_x \mathrm{sign}(x) = 2\delta(x)$，我们得到 $\tilde{v}$ 是下式的解:

$$\partial_t \tilde{v} = \frac{1}{2}\partial_x^2 \tilde{v} + \mu\,\mathrm{sign}(x)\partial_x \tilde{v} + 2(\mu - a)\delta(x)\tilde{v}. \tag{A5}$$

在此方程中，对于任意 $x \neq 0$，$\tilde{v}$ 关于 x 二阶可微。此外，$\tilde{v}$ 在 $x = 0$ 处连续，并且对 $-\epsilon$ 到 $+\epsilon$ 进行形式积分，再取 $\epsilon \to 0$，可得$0 = \frac{1}{2}\big[\partial_x \tilde{v}(0^+,\ t) - \partial_x \tilde{v}(0^-,\ t)\big] + 2(\mu - a)\tilde{v}(0,\ t)$。利用(A2)，这与 (A1) 中的边界条件相同。

(A5) 的解通常可通过如下写法得到:

$$\tilde{v}(x,t) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \tilde{\pi}(x,y,t) v(y,0), \tag{A6}$$

其中，$\tilde{\pi}(x,\ y,\ t)$ 与 $\tilde{v}$ 满足相同的方程 (A5)，其初始条件为 $\tilde{\pi}(x,\ y,\ t) = \delta(x-y)$。为求出 $\tilde{\pi}(x,\ y,\ t)$ 的显式表达式，进行如下变换很有帮助:

$$\tilde{\pi}(x,y,t) = e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(|x|-|y|)}\psi(x,y,t) \tag{A7}$$

Then

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{\pi} &= e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(|x|-|y|)}\big[-\mu\,\mathrm{sign}(x)\psi + \partial_x \psi\big], \\ \partial_x^2 \tilde{\pi} &= e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu(|x|-|y|)}\big[\big(\mu^2 - 2\mu\delta(x)\big)\psi - 2\mu\,\mathrm{sign}(x)\partial_x \psi + \partial_x^2 \psi\big] \end{aligned} \tag{A8}$$

并且我们得到，ψ 是以下方程的解

$$\partial_t \psi = \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi - b\delta(x)\psi, \qquad \psi(x,y,0) = \delta(x-y), \qquad \text{with } b = 2a - \mu. \tag{A9}$$

对于概率论读者，方程 (A9) 的解可以利用费曼-卡茨公式写成关于布朗运动的期望值:

$$\psi(x,y,t)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}_y\big[\mathbb{1}_{\{B_t \in \mathrm{d}x\}} e^{-b\int_0^t \mathrm{d}s\,\delta(B_s)}\big] = \mathbb{E}_y\big[\mathbb{1}_{\{B_t \in \mathrm{d}x\}} e^{-b\ell_t}\big], \tag{A10}$$

其中，在 $\mathbb{E}_y$ 下， $B_{s;s\geq 0}$ 是一个从 y 出发的标准无漂移布朗运动，而 ℓ_t 是 B 在 0 处停留的局部时。期望值 (A10) 见 [12, 1。1.3.7]:

$$\psi(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}-bR\big(|x|+|y|,t\big), \tag{A11}$$

with

$$R(X,t)=\frac{1}{2}e^{\frac{b^2t}{2}+bX}\operatorname{erfc}\left(\frac{b\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{X}{\sqrt{2t}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{-bz}e^{-\frac{(z+X)^2}{2t}}. \tag{A12}$$

也可以直接利用 (A12) 的第二种形式验证 (A11) 确实是 (A9) 的解。然后，令 $\pi(x,\ y,\ t)=\tilde{\pi}(x,\ y,\ t)+\tilde{\pi}(-x,\ y,\ t)$，利用 (A7)、(A11) 和 (A12) 可重新得到 (85)。

B 精确关系式 (122) 的推导

在本附录中，我们推导 (122)。事实上，对于任意跳跃率的任意图上的 Flemming-Viot 过程，这个关系式都成立。

我们考虑一个在任意图上跳跃的粒子：将图的节点标记为$i=0,\ 1、2、\ldots\ldots$，并将 $r_{i\to j}$ 记作从格点 i 跳到格点 j的跳跃率。格点 0 为吸收态，这意味着对所有 $j,\ r_{0\to j}=0$。我们对所有 i设定 $r_{i\to i}=0$。

令 $v_j(t)$ 表示单个粒子在时间 t 位于格点 j 的概率。则有

$$\partial_t v_j=\sum_i\big[r_{i\to j}v_i-r_{j\to i}v_j\big]. \tag{B1}$$

与 (3) 中一样，我们用 e^{-q_t} 表示粒子尚未在格点 0 被吸收的概率，用 $u_j(t)$ 表示在粒子尚未被吸收的条件下，它位于格点 $j>0$ 的概率：

$$e^{-q_t}=\sum_{j>0}v_j(t),\qquad u_j(t)=e^{q_t}v_j(t). \tag{B2}$$

我们在该图上构造一个 Flemming-Viot 过程。现在有 N 个粒子，仍以相同的速率跳跃。每当一个粒子到达 0 时，它便立即被移至其余 $N-1$ 个粒子中的一个所在的位置。我们用 $n_j(t)$ 表示时间 t 位于格点 $j>0$ 的粒子数，用 Q_t 表示截至时间 t 的吸收次数（或跳跃次数）。假设初始时， N 个粒子相互独立地按照某个初始密度 $u_i(0)=v_i(0)$ 分布。那么，在大 N 极限下，对于任意固定的 t，有：

$$\frac{n_j(t)}{N}\simeq u_j(t),\qquad \frac{Q_t}{N}\simeq q_t. \tag{B3}$$

当 N 有限时，可以写出关于 $\langle n_j(t)\rangle$ 的演化方程，但其中涉及两点关联 $\langle n_i(t)n_j(t)\rangle$，如 (1) 中所示。然而，正如我们现在要证明的，对于选取适当的常数 A，可以写出关于 $\langle n_j(t)A^{Q_t}\rangle$ 的封闭方程。

我们给每个粒子分配一个标签 $a=1、2、\ldots\ldots、N$，并令 $X_j^{(a)}(t)$ 在粒子 a 于时间 t位于位置 j 时取值为 1，否则取值为 0。对于任意 A，有：

$$A^{Q_{t+\mathrm{d}t}}X_j^{(a)}(t+\mathrm{d}t)=\begin{cases}A^{Q_t} & \text{proba. } X_j^{(a)}\big(1-\sum_{i>0}r_{j\to i}\,\mathrm{d}t-\sum_i n_i r_{i\to 0}\,\mathrm{d}t\big)\\ & \qquad +\sum_i r_{i\to j}X_i^{(a)}\,\mathrm{d}t,\\ A^{Q_t+1} & \text{proba. } \sum_i r_{i\to 0}X_i^{(a)}\frac{n_j-\delta_i^j}{N-1}\,\mathrm{d}t,\\ & \qquad +X_j^{(a)}\sum_i(n_i-\delta_i^j)r_{i\to 0}\,\mathrm{d}t\\ 0 & \text{proba. everything else.}\end{cases} \tag{B4}$$

（右侧所有的 n_i 和 $X_i^{(a)}$ 均取时间 t的值。第一种情况：要得到 A^{Q_t}，要么粒子 a已经位于 j，且保持不动，也没有其他粒子被吸收（第一行）；要么粒子 a 跳到 j （第二行）。第二种情况：要得到 $A^{Q_{t+1}}$，要么粒子 a 跳到 0 后被重新放置在 j，要么它原本就在 j，且另一个粒子跳到 0。）

我们将第一行中的 $\sum_{i>0} r_{j\to i}$ 项替换为 $\big(\sum_i r_{j\to i}\big) - r_{j\to 0}$。另外两项 $r_{j\to 0}$ 来自求和中的 δ_i^j。于是，我们得到，

$$\begin{aligned}\partial_t\langle A^{Q_t}X_j^{(a)}\rangle = \Big\langle A^{Q_t}\Big[&\sum_i\big(r_{i\to j}X_i^{(a)} - r_{j\to i}X_j^{(a)}\big) + r_{j\to 0}X_j^{(a)}\Big(1-\frac{AN}{N-1}\Big)\\ &+\sum_i r_{i\to 0}\Big(A\frac{X_i^{(a)}n_j}{N-1} + (A-1)X_j^{(a)}n_i\Big)\Big]\Big\rangle.\end{aligned} \tag{B5}$$

我们对 a求和，并使用 $n_j = \sum_a X_j^{(a)}$，

$$\begin{aligned}\partial_t\langle A^{Q_t}n_j\rangle &= \Big\langle A^{Q_t}\Big[\sum_i\big(r_{i\to j}n_i - r_{j\to i}n_j\big) + r_{j\to 0}n_j\Big(1-\frac{AN}{N-1}\Big)\\ &\qquad +\sum_i r_{i\to 0}\Big(A\frac{n_in_j}{N-1} + (A-1)n_jn_i\Big)\Big]\Big\rangle,\\ &= \Big\langle A^{Q_t}\Big[\sum_i\big(r_{i\to j}n_i - r_{j\to i}n_j\big) + \Big(\frac{AN}{N-1}-1\Big)\sum_i r_{i\to 0}n_j(n_i-\delta_i^j)\Big]\Big\rangle.\end{aligned} \tag{B6}$$

特别地，取 $A=1$ 可得第 2 节模型的 (1)。

现在令 $A = \frac{N-1}{N}$ 并定义——

$$V_j(t) = \Big\langle \frac{n_j(t)}{N}\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{Q_t}\Big\rangle. \tag{B7}$$

我们看到，$V_j(t)$ 满足与 $v_j(t)$ 相同的方程 (B1)。假设单个行走者的初始位置与 Flemming-Viot 模型中每个粒子的初始位置具有相同的分布，使得 $V_j(0) = v_j(0)$，则得到

$$V_j(t) = v_j(t), \tag{B8}$$

对于任意 t 和任意 $N\geq 2$。对 j 求和可得

$$\Big\langle\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{Q_t}\Big\rangle = e^{-q_t}. \tag{B9}$$

在第 2 节模型的特定情形下，截断理论预测，对于任意初始条件，$\langle Q_t\rangle/N$会随着较大的 N以速率 $\kappa_c + \frac{C}{(\ln N)^2}$增长。然而，(B9) 表明，$-\ln\langle e^{-a_N Q_t/N}\rangle$（当 $a_N = -N\ln(1-1/N) \simeq 1$ 时）会像 q_t一样以速率 κ增长，而该速率取决于初始条件。这是因为 (B9) 中的期望值由这样的稀有事件主导：在初始条件下，有一个粒子远离原点。

作为本附录的总结，我们指出，高阶关联之间还存在其他关系。例如，令

$$u_{jk} = \Big\langle\Big(\frac{N-1}{N+1}\Big)^{Q_t}\,\frac{n_jn_k - \delta_j^k n_j}{N(N-1)}\Big\rangle, \tag{B10}$$

经过一些代数运算后，可得 u_{jk} 是以下方程的解

$$\partial_t u_{jk} = \sum_i\Big(r_{i\to k}u_{ji} + r_{i\to j}u_{ik} - (r_{j\to i}+r_{k\to i})u_{jk}\Big) + \frac{2\delta_j^k}{N+1}\sum_i r_{i\to 0}u_{ij}. \tag{B11}$$

This 方程是封闭的，至少可以通过数值方法求解。然后便可得到

$$\sum_{j,k} u_{j,k} = \Big\langle\Big(\frac{N-1}{N+1}\Big)^{Q_t}\Big\rangle. \tag{B12}$$

参考文献

[1] J. An、C. Henderson 和 L. Ryzhik. “Burgers-FKPP方程的推前沿、拉前沿与推拉前沿”。载于：欧洲数学学会杂志 27.5 (2023), pp. 2073–2154. doi: 10.4171/jems/1407.[2] J. An、C. Henderson 和 L. Ryzhik. “定量陡峭度、半FKPP反应与推拉前沿”。载于：理性力学与分析文档 247.5 (2023). doi: 10.1007/s00205-023-01924-2.[3] A. Asselah、P. A. Ferrari 和 P. Groisman. “有限空间中的准平稳分布与Fleming-Viot过程”。载于：应用概率杂志 48.2 (2011), pp. 322–332. doi: 10.1239/jap/1308662630.[4] A. Asselah、P. A. Ferrari、P. Groisman 和 M. Jonckheere. “Fleming-Viot选择最小准平稳分布：Galton-Watson情形”。载于：亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊 52.2 (2016). doi: 10.1214/14-aihp635.[5] M. Avery、M. Holzer 和 A. Scheel. “推前沿到拉前沿的转变：延拓、速度标度与隐藏的单调性”。载于：非线性科学杂志 33.6 (2023). doi: 10.1007/s00332-023-09957-3.[6] E. Ben-Jacob、H. Brand、G. Dee、L. Kramer 和 J. Langer. “非线性耗散系统中的模式传播”。载于：《物理学*D*：非线性现象》 14.3 (1985), pp. 348–364. doi: 10.1016/0167-2789(85)90094-6.[7] R. D. Benguria 和 M. C. Depassier. “带截断的拉前沿速度”。载于：《物理评论*E*》 75.5 (2007). doi: 10.1103/physreve.75.051106.[8] R. D. Benguria、M. C. Depassier 和 V. Haikala. “截断对反应扩散方程中推前沿和双稳态前沿的影响”。载于：《物理评论*E*》 76.5 (2007). doi: 10.1103/ physreve.76.051101.[9] J. Bérard 和 J.-B. Gouéré. “直线上分枝-选择粒子系统的Brunet-Derrida行为”。载于：《数学物理通讯》 298.2 (2010), pp. 323–342. doi: 10.1007/s00220-010-1067-y.[10] J. Berestycki、É. Brunet 和 B. Derrida. “Fisher-KPP型前沿的精确解与精确渐近”。载于：物理学*A*：数学与理论 51.3 (2017), p. 035204. doi: 10.1088/1751-8121/aa899f.[11] J. Berestycki、É. Brunet、S. C. Harris 和 M. Roberts. “FKPP前沿线性模型中位置修正的消失”。载于：《数学物理通讯》349.3 (2016), pp. 857–893. doi: 10.1007/s00220-016-2790-9.[12] A. N. Borodin 和 P. Salminen. 《布朗运动手册——事实与公式》. Birkhäuser Basel, 2002. doi: 10.1007/978-3-0348-8163-0.[13] M. D. Bramson. “分枝布朗运动的最大位移”。载于：纯粹与应用数学通讯 31.5 (1978), pp. 531–581. doi: 10.1002/cpa. 3160310502.[14] M. D. Bramson.“Kolmogorov方程解向行波的收敛”。载于：美国数学会回忆录 44.285 (1983). doi: 10.1090/memo/ 0285.[15] É. Brunet 和 B. Derrida. “截断引起的前沿速度变化”。载于：《物理评论*E*》 56.3 (1997), pp. 2597–2604. doi: 10.1103/physreve.56.2597.[16] É. Brunet 和 B. Derrida. “Fisher-KPP类中的一个可精确求解的行波方程”。载于：《统计物理学杂志》 161.4 (2015), pp. 801–820. doi: 10.1007/s10955- 015-1350-6.

[17] É. Brunet、B. Derrida、A. H. Mueller 和 S. Munier。《噪声行波：选择对谱系的影响》。载于：《欧洲物理快报》76.1 (2006)，第 1–7 页。doi: 10.1209/epl/ i2006-10224-4。[18] É. Brunet、B. Derrida、A. H. Mueller 和 S. Munier。《唯象理论：给出涨落拉动前沿位置的完整统计特性》。载于：《物理评论*E*》73，056126 (2006)。doi: 10.1103/PhysRevE.73.056126。[19] K. Burdzy、R. Hołyst 和 P. March。《Dirichlet 拉普拉斯算子的 Fleming-Viot粒子表示》。载于：《数学物理通讯》214.3 (2000)，第 679–703 页。doi: 10.1007/s002200000294。[20] N. Champagnat 和 D. Villemonais。《Fleming-Viot过程收敛至最小准平稳分布》。载于：《拉丁美洲概率与数理统计杂志》18.1 (2021)，第 1 页。doi: 10.30757/alea.v18-01。[21] B. Derrida。《拉动前沿与推动前沿转变处 Bramson 位移的交叉变化》。载于：《统计物理学杂志》190.3 (2023)。doi: 10.1007/s10955-023-03077- 8。[22] B. Derrida 和 Z. Shi。《存在选择或合并时分枝布朗运动的大偏差》。载于：《统计物理学杂志》163.6 (2016)，第 1285–1311 页。doi: 10.1007/s10955-016-1522-z。[23] F. Dumortier、N. Popović 和 T. J. Kaper。《带截断的 Fisher-Kolmogorov-Petrowskii-Piscounov 方程的临界波速》。载于：《非线性》20.4 (2007)，第 855–877 页。doi: 10.1088/0951-7715/20/4/004。[24] U. Ebert 和 W. van Saarloos。《前沿向不稳定态传播：匀速平移的拉动前沿的普适代数收敛》。载于：《物理学*D*：非线性现象》146.1-4 (2000)，第 1–99 页。doi: 10.1016/s0167-2789(00)00068-3。[25] V. Elgart 和 A. Kamenev。《反应扩散系统中的稀有事件统计》。载于：《物理评论*E*》70.4 (2004)。doi: 10.1103/physreve.70.041106。[26] P. Ferrari 和 N. Marić。《可数空间中的准平稳分布与 Fleming-Viot过程》。载于：《电子概率杂志》12 (2007)。doi: 10.1214/ejp.v12- 415。[27] R. A. Fisher。《有利基因的扩展波》。载于：《优生学年鉴》7.4 (1937)，第 355–369 页。doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x。[28] J. Garnier、T. Giletti、F. Hamel 和 L. Roques。《拉动前沿与推动前沿的内部动力学》。载于：《纯粹与应用数学杂志》98.4 (2012)，第 428–449 页。doi: 10.1016/j.matpur.2012.02.005。[29] C. Graham。《Fisher-KPP前沿的精确渐近》。载于：《非线性》32.6 (2019)，第 1967–1998 页。doi: 10.1088/1361-6544/aaffe8。[30] P. Groisman 和 M. Jonckheere。《前沿传播与准平稳分布：同一枚硬币的两面》。载于：《概率论与统计物理短期讲习录 *III*》。新加坡施普林格，2019，第 242–254 页。doi: 10.1007/978-981-15-0302-3_9。[31] K. P. Hadeler 和 F. Rothe。《非线性扩散方程中的行波前沿》。载于：《数学生物学杂志》2.3 (1975)，第 251–263 页。doi: 10.1007/bf00277154。[32] D. A. Kessler、Z. Ner 和 L. M. Sander。《前沿传播：前驱现象、截断与结构稳定性》。载于：《物理评论*E*》58.1 (1998)，第 107–114 页。doi: 10.1103/physreve. 58.107。[33] A. Kolmogorov、I. Petrovsky 和 N. Piscounov。《对物质量增长的扩散方程的研究及其在一个生物学问题中的应用》。载于：《莫斯科国立大学通报》，*A* 1.6 (1937)，第 1–25 页。doi: 10.1007/978-94-011-3030-1_38。

[34] N. Marić。《由随机游走驱动的 Fleming-Viot 粒子系统 $\mathbb{N}$》。载于：《统计物理学杂志》160.3 (2015)，第 548–560 页。doi: 10.1007/s10955-015-1275-0。[35] S. Martinez、P. Picco 和 J. San Martin。《带漂移布朗运动的准平稳分布的吸引域》。载于：应用概率进展30.2 (1998)，第 385–408 页。doi: 10.1239/aap/1035228075。[36] S. Martinez 和 J. San Martin。《带漂移布朗运动的准平稳分布及相关极限定律》。载于：应用概率杂志31.4 (1994)，第 911–920 页。doi: 10.2307/3215316。[37] B. Meerson 和 P. V. Sasorov。《拉动反应前沿的负速度涨落》。载于：《物理评论*E*》84.3 (2011)。doi: 10.1103/physreve.84.030101。[38] B. Meerson 和 P. V. Sasorov。《 N粒子分枝布朗运动前沿速度的负向大偏差》。载于：《物理评论*E*》110.6 (2024)。doi: 10.1103/physreve.110.064111。[39] B. Meerson、A. Vilenkin 和 P. V. Sasorov。《噪声入侵前沿宏观理论中涨落行进前沿解的出现》。载于：《物理评论*E*》87.1 (2013)。doi: 10.1103/physreve.87.012117。[40] C. Mueller、L. Mytnik 和 J. Quastel。《行波的小噪声渐近》。载于：马尔可夫过程及相关领域14.3 (2008)，第 333–342 页。网址：http://math-mprf. org/journal/articles/id1157/。[41] J. Nolen、J.-M. Roquejoffre 和 L. Ryzhik。《Fisher-KPP前沿的精细长时间渐近》。载于：当代数学通讯21.07 (2019)，第 1850072 页。doi: 10.1142/s0219199718500724。[42] W. van Saarloos。《前沿向不稳定态传播》。载于：物理学报告386.2-6 (2003)，第 29–222 页。doi: 10.1016/j.physrep.2003.08.001。[43] O. Tough。《恒定负漂移下正半轴上 Fleming-Viot 粒子系统的选择原理》。载于：欧洲数学学会杂志(2025)。doi: 10.4171/jems/1713。[44] E. A. Van Doorn。《生灭过程的准平稳分布及其向准平稳状态的收敛》。载于：应用概率进展23.4 (1991)，第 683–700 页。doi: 10.2307/1427670。[45] D. Villemonais。《求马尔可夫过程在未被杀死条件下分布的一般近似方法》。载于：*ESAIM*：概率与统计18 (2014)，第 441–467 页。doi: 10.1051/ps/2013045。[46] D. Villemonais。《生灭过程的最小准平稳分布近似》。载于：《电子概率杂志》20 (2015)。doi: 10.1214/ejp.v20-3482。