arXiv:2601.16059v1 [math.AT] 22 Jan 2026

双变量拓扑复杂度：协调运动规划的框架

J.M. GARCÍA-CALCINES 和 J.A. VILCHES

摘要。我们引入了拓扑复杂度的双变量版本 TC(f， g)，它与两个连续映射 $f\colon X \to Z$ 和 $g\colon Y \to Z$相关。该不变量衡量了在 X 和 Y中，通过共享目标空间 Z协调轨迹所需的最少连续运动规划规则数量。当$f = g = \mathrm{id}_X$ 时，它还原为 Farber 的经典拓扑复杂度；当其中一个映射为恒等映射时，则还原为 Pavešić 基于映射的不变量。

我们建立了关于 TC(f， g) 的结构理论，包括对称性、乘积不等式、稳定性性质，以及一项协作原理：当其中一个映射是纤维化时，同步的复杂度由另一个映射控制。我们还引入了 Scott 型的同伦不变双变量复杂度 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$，其通过同伦距离定义，并研究了它与严格不变量之间的关系。

具体实例揭示了经典情形中没有对应物的刚性现象，包括 TC(f， g) 与 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 之间存在严格差距，以及同步变得不可能的情形。在严格设定和同伦不变设定中，上同调估计都提供了可计算的障碍。

引言

拓扑复杂度这一概念由 Farber 于 21 世纪初提出 [3, 4], ，旨在量化在构形空间中进行运动规划所需的最少连续规则数。对于一个拓扑空间 X，不变量$\mathrm{TC}(X)$用于衡量如何以算法方式为 X 中的任意点对指定路径，其过程可能有多复杂。自提出以来，这一不变量已成为应用拓扑学和纯粹拓扑学的核心概念，其关联领域从机器人学到同伦论。

后来，拓扑复杂度的适用范围得到扩展。特别是，Pavešić 在 [14] 定义了映射 $f\colon X \to Z$ 的拓扑复杂度，从而刻画了运动规划不仅取决于 X 的内部结构，也取决于外部任务空间 Z的情形。随后，Scott 在 [15] 引入了另一种推广，记作 TC(f)。尽管 Scott 并未以同伦距离来表述其定义，但借助 Macías–Virgós 和 Mosquera–Lois 后来在 [10]引入的概念，可以在这一框架下重新诠释它。这种重新诠释阐明了 Scott 的不变量在更广泛框架中的定位，后文将进一步展开。Murillo 和 Wu 后来研究了相关的重合型不变量 [12], ；这些不变量出于不同的概念动机，但在单变量情形下导出的数值不变量与 Scott 的一致。

然而，在许多实际和理论场景中，多个子系统会通过共享的陪域进行交互。以机器人代理、分布式传感器或并行计算过程为例：每个子系统都有自己的构形空间，但必须通过一个公共目标空间进行协调。这类情形促使我们引入与两个连续映射 $f\colon X \to Z$ 和 $g\colon Y \to Z$相关联的双变量拓扑复杂度 ，记作 TC(f, g)。给定一对输入 $(x, y) \in X \times Y$，一条局部的 (f, g)–运动规划规则会生成两条路径 $\alpha \in X^I$ 和 $\beta \in Y^I$，满足 $\alpha(0) = x$ 和 $\beta(1) = y$，且它们的像在

于 Z 中同步，即 $f\circ\alpha = g\circ\beta$。我们不预先假设 (x, y) 满足任何相容性条件；该不变量计量覆盖$X \times Y$所需的这类连续局部规则的最小数量（若不存在有限覆盖，则设为无穷大）。从概念上讲，这将运动规划问题从单个系统扩展到受公共任务空间约束的两个独立智能体之间的协调，并要求沿整条路径实现同步，而不只是端点同步。

从理论视角来看，这一构造统一并推广了现有的不变量。当 $f = g = \mathrm{id}_X$ 时，可以得到 Farber 的原始不变量 TC(X)。当其中一个映射是 Z 上的恒等映射时，该不变量便特化为 Pavešić 提出的基于映射的框架。因此，双变量版本处于这些方法的交汇处，同时开辟了新的研究领域：它能够反映不同构型空间之间的相互作用，并且既有严格表述，也有同伦不变表述。从这个意义上说，TC(f, g) 可视为一个数值指标，用以衡量通过公共目标空间使两个系统同步所需付出的代价；它拓展了截面范畴和拉回的经典同伦框架。

尽管双变量不变量 TC(f, g) 可以被理解为同步代价的度量，但需要强调的是，它在形式上量化的是协调 X 和 Y 中轨迹所需的最少连续局部规则数，其中这些轨迹在经过 f 和 g 映射后，于 Z 中重合。特别是，它衡量的是这类同步路径提升空间的拓扑复杂度，而非任何特定模型中的物理代价。例如，当 $g = \mathrm{id}_Z$ 时，该不变量特化为 Pavešić 的基于映射的框架，这表明一个子系统（$Y = Z$）只是重现另一个子系统的轨迹。因此，双变量框架刻画了协调所受的拓扑约束，而这些约束可能反映应用情境中的同步难题。

潜在应用范围十分广泛。例如，分布式计算中，不同进程必须就共同输出达成一致；又如外骨骼或无人机群等多组件机械系统，则要求各子系统之间协调一致。

除了这些一般领域，以下两个示例场景有助于说明双变量不变量的作用：

- **机器人学（无人机—机械臂协同）**。一架无人机（X）负责运送一个部件，同时机械臂（Y）在共享工作空间（Z）中固定一个支撑件。映射 f, g 分别表示部件的放置位置和支撑件的位置。同步的运动规划要求轨迹在 Z 中始终保持兼容，这体现了协调两台设备的难点：它们的动作必须始终相互配合。

- **传感器融合（相机—激光雷达）**。相机（Y）和激光雷达（X）在共同的特征空间（Z）中生成数据。如果它们的视场没有重叠，同步就不可能实现，这凸显了严格不变量的刚性。相反，如果它们的视场存在重叠，但其中一个传感器受到畸变影响，严格版本仍可能失效，而同伦不变版本 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$则保持有限。这体现了精确标定（严格意义上）与容错融合（同伦意义上）之间的区别。

这些例子展示了双变量框架如何在现实场景中建模合作与同步，同时也留下了此类效应发生的精确数学机制这一问题尚待解决。它们为下文将要阐述的抽象性质提供了具体的叙事对应。

本文引入不变量 TC(f， g)，确立其首批结构性质，并将其与同伦不变对应物 TC_H(f， g)进行比较。我们特别关注其中一个映射为纤维化的情形，以及由 $H^*(X)$、 $H^*(Y)$ 和 $H^*(Z)$ 的结构导出的上同调下界。我们还将介绍一些展示新颖现象的例子，这些现象在经典情形中没有对应物，从而凸显双变量框架的丰富性。

本文的结果分为两个密切相关、但在概念上有所区别的层面：严格的双变量理论通过共同的目标空间衡量精确同步；Scott 型同伦不变量理论则对严格框架作出灵活且可计算的放宽。

在严格理论方面，我们首先引入不变量 TC(f， g)，并分析其基本几何特征。特别地，我们研究可同步映射对的概念，并证明即使映射的像相交，同步也可能无法实现。这引出了真正的双变量刚性现象，包括出现无穷大取值以及缺乏同伦不变性；这些现象在经典或单变量情形中都没有对应物。

随后，我们建立 TC(f， g) 的结构理论，其中包括对称性、前复合与后复合下的性质、乘积不等式、稳定性结果，以及若干将 TC(f， g) 与目标空间的拓扑复杂度联系起来的界限。这方面的一个核心结果是协作原理：当其中一个映射是纤维化时，同步的复杂度由另一个映射控制。该原理揭示了一个子系统如何吸收协调成本，并将双变量不变量置于更广泛的截面范畴与映射的拓扑复杂度框架之中。

为补充严格理论，我们引入一种 Scott 型的同伦不变双变量拓扑复杂度 TC_H(f， g)。该不变量以同伦距离定义，并为 TC(f， g) 提供一个稳健的下界。我们研究它的基本性质、与同伦距离的关系以及若干可计算的界，并着重说明与严格不变量相比，它的灵活性与局限性。

对 TC_H(f， g) 与 TC(f， g) 进行系统比较，揭示了一个刚性层级。在有利的情形下，例如映射为纤维化时，这两个不变量相等。然而一般而言，它们可能存在显著差异，表现为严格的间隙，反映了相较于同伦相容性，强制实现精确同步所需付出的代价。

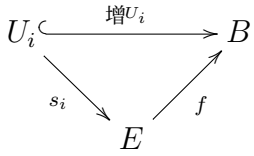
最后，我们为 TC(f， g) 和 TC_H(f， g) 建立上同调估计，将经典的零因子技巧推广到双变量情形，并给出可计算的同步障碍。

本文结构如下。第 1 节回顾截面不变量所需的背景知识。第 2 节介绍 Pavešić 型双变量拓扑复杂度及其基本性质。第 3 节为 TC(f， g) 推导上同调估计。第 4 节专门讨论其中一个映射为纤维化的情形，并以协作原理收尾。第 5 节介绍 Scott 型同伦不变拓扑复杂度 TC_H(f， g)。第 6 节和第 7 节比较严格理论与同伦不变理论，并将 TC_H(f， g) 与同伦距离联系起来。第 8 节为 TC_H(f， g) 建立进一步的界。最后，我们讨论未来的研究方向并展望后续工作。

1. 预备知识

本文中，我们始终假设所考虑的所有映射都是连续的。本节回顾截面不变量的基本概念，这些概念将构成我们后续构造的基础。设 $f\colon E \to B$ 是一个连续映射。 f 的截面范畴或施瓦茨属记作 secat(f)，它是满足以下条件的最小整数 k（或无穷大）： B 有一个开覆盖 $B = U_0 \cup \cdots \cup U_k$

其上存在连续映射 $s_i\colon U_i \to E$，满足 $f \circ s_i \simeq \mathrm{inc}_{U_i}$:



换言之，每个 U_i 都存在一个 f 的局部同伦截面。（标准）截面数对于 f，在此记作 $\mathrm{sec}(f)$，其定义方式相同，但要求严格局部截面，即 $f \circ s_i = \text{增}_{U_i}$。显然，始终有 $\mathrm{secat}(f) \leq \mathrm{sec}(f)$，并且只要 f 是一个纤维化 [16]，这两个不变量就相等。

Pavešić 在 [14] 中用于定义映射的拓扑复杂度的第三种变体，是滤过截面数 $\mathrm{sec}^*(f)$。它是满足以下条件的最小整数 k：存在一个开子集的递增过滤

$$\emptyset = U_{-1} \subseteq U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_k = B,$$

使得每个差集 $U_i \setminus U_{i-1}$ 都存在 f 的严格局部截面。始终有 $\mathrm{sec}^*(f) \leq \mathrm{sec}(f)$。提出这一定义的动机是，对于具有奇点的映射，采用开覆盖的定义可能会变为无穷大，而滤过定义通常会得到有限的不变量。另一方面，当 f 是绝对邻域收缩（ANR）之间的纤维化时，这三个不变量都相等 [14]。

本文将始终采用截面数 $\mathrm{sec}(f)$，而不采用 Pavešić 在其单变量拓扑复杂度定义中使用的过滤数 $\mathrm{sec}^*(f)$。这一选择是经过深思熟虑的，原因有几方面。首先，$\mathrm{sec}(f)$ 的表述最接近 Schwarz 的经典不变量、Farber 对拓扑复杂度的定义以及 Lusternik–Schnirelmann 范畴；这些概念传统上都用开覆盖而非过滤来表述。其次，在双变情形中，未过滤的定义通常能使证明更加清晰，而过滤则会额外增加一层限制，却未能为我们的目的带来明显优势。第三，我们在此关注的并非如何处理映射的奇异行为（过滤版本在这方面很有用），而是凸显双变框架中特有的结构现象；严格的非过滤表述更能捕捉这些现象。我们强调，对于纤维化——它们构成了许多主要示例——这种区别并不存在，因为总有 $\mathrm{secat}(f) = \mathrm{sec}(f)$。此外，如果所涉及的空间是 ANR，那么 $\mathrm{sec}^*(f) = \mathrm{sec}(f)$ 也成立，因此在这种情形下，三个不变量彼此相同。

注 1.1。也可以使用滤过不变量截面范畴$^*(f)$来发展双变理论，而不使用截面范畴(f)。这样，大多数基本结果都可以得到相应的平行表述，从而形成一个形式上类似的理论。我们将这一替代方法留给感兴趣的读者。

为便于后文使用，我们先回顾一些将在本文中反复出现的经典概念：

- 空间 X的*Lusternik–Schnirelmann* 范畴 记作 $\mathrm{cat}(X)$，它是满足以下条件的最小整数k：X 可被 $k+1$ 个开子集覆盖，且每个开子集在X中都可缩。当 X 道路连通时，这个不变量还可用截面范畴等价地描述：它等于基点路径纤维化的截面范畴

$$p : PX \longrightarrow X, \qquad p(\gamma) = \gamma(1)$$

其中 PX 表示从基点出发的 X 中的路径空间。4

• 给定一个连续映射 $f\colon X \to Y$， f的范畴记作 cat(f)，它是满足以下条件的最小整数 k： X 可以被 $k+1$ 个开子集覆盖，且在这些开子集上， f 的限制是零伦的。

• 该空间的拓扑复杂度 X 在 Farber 的意义下 [3],记为$\mathrm{TC}(X)$，是自由路径纤维化的截面范畴

$$\pi_X : X^I \longrightarrow X \times X, \qquad \pi_X(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)),$$

其中 X^I 是 p^{路径空}p间 X。

• 按照 Pavešić 的定义， [14], 映射的拓扑复杂度 f： $X \to Y$，记为 TC(f)，定义为该映射的滤过截面数

$$\pi_f : X^I \longrightarrow X \times Y,$$

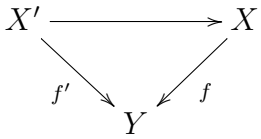
其中 $\pi_f(\alpha)$ =(α(0) f(α(1)))。

备注 1.2。 在 *Pavešić* 的原始定义中，不变量 $\mathrm{TC}(f)$ 基于滤过截面数 sec^*。然而，在本文中，为简便起见，同时由于非滤过版本 sec 更适合双变情形的结构性方面，我们在记作 $\mathrm{TC}(f)$时将采用非滤过版本。

约定。 在全文中，我们假定读者熟悉这些不变量及其基本性质；有关内容在此不再详述。标准参考文献包括 Farber 关于拓扑复杂度的奠基性论文 [3], 、Cornea–Lupton–Oprea–Tanré 的专著 [1], 以及 Pavešić 关于映射的拓扑复杂度的研究 [14]。我们将重点关注双变情形中出现的新现象。

在回顾了这些概念并确定了我们的约定之后，现在我们转向一些将在下文中反复使用的基本性质。它们描述了 secat 和 sec 在（同伦）交换图、拉回和等价下的行为。接下来的三个论述为之后发展的构造提供了一个便利的工具集。前两个结果的证明是直接且众所周知的。最后一个论述见于 [8]（另见 [7] 和 [9]）。我们从最简单的情形开始：比较交换三角形或同伦交换三角形中的截面不变量。

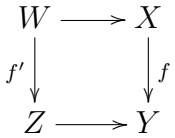
命题 1.3. 考虑以下图表



(1) 如果该图表是同伦交换的，那么 截面范畴(f) $\leq$截面范畴($f_\prime$)。*(2)* 如果该图表是严格交换的，那么 截面范畴(f) $\leq$截面范畴($f_\prime$) （并且 截面范畴(f) $\leq$截面范畴($f_\prime$)）。

接下来，我们记录截面不变量关于拉回的性质。在后续章节中处理纤维化构造时，这一性质至关重要。

命题 1.4. 设



是一个拉回。因此 secat(f') $\leq$secat(f) 且 sec($f_\prime$) $\leq$sec(f)。

我们还给出一个稍复杂的陈述，其中涉及一个交换方图，它描述了截面不变量在纵向和横向映射之间的关系。该结果将使我们能够通过同伦等价和同胚传递估计。

命题 1.5. 考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow[\psi]{} & Y \end{array}$$

(1) 若该图表在同伦意义下交换，则

$$(\operatorname{secat}(f')+1)\cdot(\operatorname{secat}(\psi)+1)\geq \operatorname{secat}(f)+1.$$

此外，若 φ和 ψ是同伦等价，则 截面范畴(f) =截面范畴(f')。

(2) 若该图表严格交换，则

$$(\operatorname{sec}(f')+1)\cdot(\operatorname{sec}(\psi)+1)\geq \operatorname{sec}(f)+1.$$

此外，若 φ和 ψ是同胚，则 $\operatorname{sec}(f)$ =$\operatorname{sec}(f')$ （且 截面范畴(f) =截面范畴(f')）。

2. 双变量拓扑复杂度：定义与首批性质

拓扑复杂度最初由 Farber 提出，用于刻画单个构形空间上运动规划算法内在的不连续性。后来，Pavešić 将这一思想扩展到单个映射 f： $X \to Z$的情形，并用严格截面不变量定义映射的拓扑复杂度。本节旨在更进一步，考察具有公共陪域的两个映射的同步行为。这引出了*Pavešić* 型双变量拓扑复杂度 这一概念；在不会引起歧义时，简称为双变量拓扑复杂度 。它量化了协调两个动力学受共享目标空间约束的系统所需的最少局部数据量。在这一框架下，相应的运动规划问题涉及成对的路径，这些路径必须通过映射到公共基空间的过程保持同步。

考虑一个映射余跨 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$。双变量运动规划问题 是指构造一种算法：输入一对点 $(x,\ y) \in X \times Y$，输出一对连续路径 $\alpha \in X^I, \beta \in Y^I$，满足以下条件：

$$f\circ\alpha = g\circ\beta,\quad \alpha(0)=x,\quad \beta(1)=y.$$

让我们用另一种方式来介绍这一构造。

定义 2.1。 给定映射 f 和 g的拉回，

$$\Delta_{f,g} := \{(x,y)\in X\times Y \mid f(x)=g(y)\}.$$

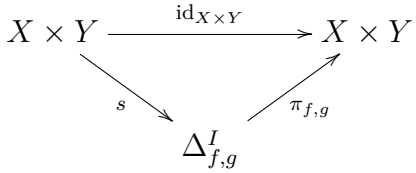
一对路径 $(\alpha,\beta) \in X^I \times Y^I$是$(f,g)$-同步的，当且仅当 $f\circ\ \alpha = g\circ\ \beta$。因此，相应的路径空间记作 $\Delta^I_{f,g}$:

$$\Delta^I_{f,g} = \{(\alpha,\beta)\in X^I\times Y^I \mid f\circ\alpha = g\circ\beta\},$$

并引入(f,g)-端点评价映射

$$\pi_{f,g}:\Delta^I_{f,g}\to X\times Y,\quad \pi_{f,g}(\alpha,\beta)=(\alpha(0),\beta(1)).$$

对于(f,g)，双变量运动规划算法是映射 $\pi_{f,g}$ 的一个（不一定连续的）截面$s: X\times Y\to \Delta^I_{f,g}$，即 $\pi_{f,g}\circ\ s=\mathrm{id}_{X\times Y}.$。这种情形可用以下交换图表示：



下一个结果阐明了$\pi_{f,\ g}$存在全局连续截面与 f 和 g 在同伦意义下平凡之间的关系。

命题 2.2。 如果存在一个全局连续的双变量运动规划算法 $s: X\times Y\to \Delta^I_{f,\ g}$，那么映射 f 和 g 必定都是零伦的。

证明。若 $s=(s_1,s_2)$，则 $s_1(x,y)\in X^I, s_2(x,y)\in Y^I$满足 $f\circ s_1(x,y)=g\circ s_2(x,y)$，且对所有$(x,y)\in X\times Y.$，$s_1(x,y)(0)=x, s_2(x,y)(1)=y_0$。现在，固定一点 $y_0\in Y$，并考虑同伦 $H:X\times I\to Z$，定义如下

$$H(x,t):=f(s_1(x,y_0)(t)).$$

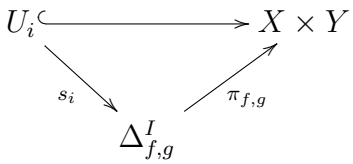
于是，$H(x,\ 0)=f(x)$，且 $H(x,\ 1)=g(y_0)$，由此证明 f是零伦的。同理，g也是零伦的。□

由于在大多数应用中，映射 f 和 g 并非零伦的，我们因此需要考虑映射对的双变量拓扑复杂度这一关键概念。

定义 2.3。 设 $X\xrightarrow{f} Z\xleftarrow{g} Y$ 为连续映射。映射对 (f,g) 的双变量拓扑复杂度定义为映射 $\pi_{f,g}$ 的截面数：

$$\mathrm{TC}(f,g):=\mathrm{sec}(\pi_{f,g}).$$

换言之，$\mathrm{TC}(f,g)$ 是满足以下条件的最小整数 $n\geq 0$：$X\times Y$ 可以被 $n+1$ 个开集 $\{U_i\}_{i=0}^n$ 覆盖，并且在每个开集上都存在 $\pi_{f,g}$ 的严格局部截面 $s_i: U_i\to \Delta^I_{f,g}$：



如果不存在这样的有限覆盖，则令 $\mathrm{TC}(f,g)=\infty$。

需要特别指出的是，条件 $f\circ\alpha=g\circ\beta$ 意味着，路径 α（位于 X 中）和路径 β（位于 Y 中）在目标空间 Z中始终保持完全同步地演化：对于每个参数 $t\in I$，它们的像都重合，即 $f(\alpha(t))=g(\beta(t))$。形式上，t 只是路径参数，但自然可以将其解释为“时间”变量。在这个意义下，$\mathrm{TC}(f,g)$ 量化了在目标空间中强制实现轨迹的严格同步的复杂度。

显然，$\mathrm{TC}(id_X,id_X)=\mathrm{TC}(X)$ 是经典拓扑复杂度。此外，注意到 $\pi_{f,g}$ 一般而言并不是 Hurewicz 纤维化。因此，它的截面数可能与截面范畴不同。特别地，$\mathrm{TC}(f,g)$ 通常不是同伦不变量。

注 2.4。 命题 2.2 表明 拓扑复杂度$(f,g)=0$ 意味着 f 和 g 都是零伦的。然而，反过来一般并不成立。例如，假设 $f=c_z$ 和 $g=c_{z'}$ 是常值映射

分别取两个不同点 $z, z' \in Z$。在这种情况下，拉回 $\Delta_{f,g}$ 是空的，因此映射 $\pi_{f,g}$ 没有局部截面，故 拓扑复杂度$(f, g) = \infty$。

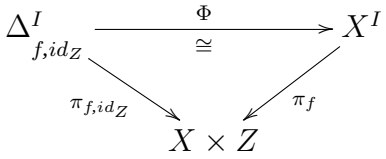
这个例子还表明，拓扑复杂度(f, g) 不是同伦不变量。事实上，如果 Z 路径连通，那么 $g = c_{z'}$ 与 $g' = c_z$同伦。在这种情况下，$\Delta_{f,g'} = X \times Y$，并且 $\pi_{f,g'}$ 存在一个全局截面，由常值路径 $\alpha(t) \equiv x, \beta(t) \equiv y$给出。因此，拓扑复杂度$(f, g') = 0$，而 拓扑复杂度$(f, g) = \infty$。因此，将 g 替换为与其同伦的映射，可能会彻底改变这个不变量的取值。

现在我们来验证，双变量拓扑复杂度确实是 Pavesic 的[14] 映射的拓扑复杂度的一种推广。

命题 2.5。 设 $f\colon X \to Z$ 是一个连续映射。则

$$\mathrm{TC}(f) = \mathrm{TC}(f, id_Z).$$

证明。 存在 $\Phi : \Delta^I_{f,id_Z} = \{(\alpha, \beta) \in X^I \times Z^I \mid f \circ \alpha = \beta\} \to X^I$ 一个显然的同胚，由 $\Phi(\alpha, \beta) := \alpha.$ 给出。此外，这个同胚符合以下交换三角形:



因此，由命题1.5(2)，可得 TC(f) =sec(π_f) =sec$(\pi_{\mathrm{f,\ id_Z}})$ =TC$(f,\ id_Z)$。

□

在实际场景中，必须将注意力限制在能够实际同步的一对映射上。我们来形式化这一概念。

定义 2.6。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余跨。若对于任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$，都存在路径 $\alpha\colon\ I \to X$ 和 $\beta\colon\ I \to Y$，使得映射对 (α, β) 是 (f, g)- 同步的，则映射对 (f, g) 是可同步的，并且

$$\alpha(0) = x, \qquad \beta(1) = y.$$

换言之， X 中的任意初始构型和 Y 中的任意最终构型，都可以通过协调运动相连；这些运动经 f 和 g 映射后的像在 Z 中始终完全匹配。

下面的刻画显而易见:

引理 2.7. 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个映射余跨。那么，(f, g) 是可同步的，当且仅当映射 $\pi_{f,g}$ 是满射。

因此，如果一对 (f, g) 不可同步，那么相应的双变量拓扑复杂度 TC(f, g) 必然是无穷大。

例 2.8. 下面给出一些可同步对和不可同步对的示例:

(1) 设 $f\colon X \to Z$ 是连续满射，且 X 道路连通。那么，配对 (f, id_Z)总是可同步的。事实上，给定 $x \in X$ 和 $z \in Z$，取一条路径 $\alpha : I \to X$，使得$\alpha(0) = x$ 且 $\alpha(1) \in f^{-1}(z) \neq \emptyset$。令 $\beta := f \circ \alpha$，则有 $f \circ \alpha = \mathrm{id}_Z \circ \beta$，且$\alpha(0) = x$ 和 $\beta(1) = z$。

(2) 考虑映射 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，其中 f 是满射， X 是道路连通的，且 g 是满射纤维化。那么(f, g) 可同步。事实上，给定 $x \in X$ 和 $y \in Y$，取$x' \in X$，使得 $f(x') = g(y)$。由路径连通性可知，存在一条路径 $\alpha: I \to X$，使得$\alpha(0) = x$ 且 $\alpha(1) = x'$。由于 g 是纤维化，我们可以将 $f \circ \alpha$ 提升为一条路径 $\beta: I \to Y$，使得$\beta(1) = y$ 位于图中

$$\begin{array}{ccc} & & (Y, y) \\ & \overset{\beta}{\nearrow} & \downarrow g \\ (I, 1) & \xrightarrow[f\circ\alpha]{} & (Z, g(y)). \end{array}$$

因此 $f \circ \alpha = g \circ \beta$，其中 $\alpha(0) = x$ 且 $\beta(1) = y$。

(3) 当(f, g) 不可同步时，会出现一种平凡情形： $f(X) \cap g(Y) = \emptyset$。在这种情况下，拉回 $\Delta_{f,g}$ 为空，因此无法满足同步性条件。因此，$\mathrm{TC}(f, g) = \infty$。

(4) 令 $Z = S^1 \vee S^1$ 为以 $*$ 为公共基点的两个圆的楔和。取 $X = Y = S^1$，并定义 f, g: $S^1 \to Z$ 为分别映入第一个圆和第二个圆的包含映射。于是 $f(X) \cap g(Y) = \{*\} \neq \emptyset$。然而，$(f, g)$ 不可同步。取满足$f(x) \neq *$ 的 $x \in X$，以及满足 $g(y) \neq *$的 $y \in Y$。若存在路径 $\alpha: I \to X$ 和 $\beta: I \to Y$，满足 $\alpha(0) = x, \beta(1) = y$ 且 $f \circ \alpha = g \circ \beta$，那么它们的公共像将包含于$f(X) \cap g(Y) = \{*\}$，这将迫使 $f(x) = *$，产生矛盾。因此，(f, g) 不可同步，进而 $\mathrm{TC}(f, g) = \infty$.

更一般地，可同步性可以通过经由公共子空间的分解继承：

命题 2.9。 设 $i: W \hookrightarrow Z$ 是路径连通子空间的包含映射。假设

$$f = i \circ f': X \longrightarrow Z, \qquad g = i \circ g': Y \longrightarrow Z$$

存在某些映射 $f\prime: X \to W$和 $g': Y \to W$。若映射对 (f', g') 可同步，则映射对(f, g) 可同步。

证明。 根据假设，对每个 $x \in X$和 $y \in Y$，都存在路径 $\alpha: I \to X$和 $\beta: I \to Y$，使得 $f' \circ \alpha, g' \circ \beta, \alpha(0) = x, \beta(1) = y.$。与包含映射 $i: W \hookrightarrow Z$复合，得到

$$f \circ \alpha = (i \circ f') \circ \alpha = i \circ (f' \circ \alpha) = i \circ (g' \circ \beta) = (i \circ g') \circ \beta = g \circ \beta,$$

其中 $\alpha(0) = x$ 且 $\beta(1) = y$。因此，(f, g) 在 Z 中可同步。 □

推论 2.10。 沿用命题 2.9中的记号，假设 W 是路径连通的。那么，在以下每种情况下，映射对 (f, g) 均可同步：

(a) f'是满射， g'是纤维化（例如覆盖映射）。 *(b)* g' 是满射，f' 是纤维化。

证明。 只需使用上面的命题 2.9 和例 2.8 （2）。 □

注2.11。 该判据可以得到这样的可同步对： f 和 g 都不是满射，也都不是到 Z上的纤维化；只需将它们分解为经过某个公共子空间 W 的映射，并在该子空间中建立可同步性即可。

例如，令 $Z = \mathbb{C}$、 $W = S^1 \subset \mathbb{C}$，并通过 $S^1 \to Z$定义 f、g： $f(z) = z^2$、 $g(z) = -z^2$。记 $f = i \circ q$ 和 $g = i \circ (\mu_{-1} \circ q)$，其中 q： $S^1 \to S^1$ 为二重覆盖，且 $\mu_{-1}(z) = -z$，则根据覆盖的路径提升性质，$(q, \mu_{-1} \circ q)$ 在 W 中是可同步的。命题 2.9 进而表明，(f, g) 在 Z 中是可同步的。

现在我们给出一个具体例子，说明如何计算二元拓扑复杂度。

例 2.12. 设 f、g：$S^1 \to \mathbb{C}$ 由 $f(z) = z^2$ 以及 $g(z) = -z^2$ 定义，其中对所有 $z \in S^1$均成立。则有 $TC(f,g) = 1$。事实上，一对路径 $(\alpha,\beta) \in \Delta^I_{f、g}$必须满足 $\alpha(t)^2 = -\beta(t)^2$,，因此，$\alpha(t)/\beta(t) \in \{-i,i\}$ 对所有 $t \in I$均成立。由 I 的连续性和连通性可知，商 $\alpha(t)/\beta(t)$ 为常数，因此，要么对所有 t都有 $\alpha(t) = i\beta(t)$，要么对所有 t都有 $\alpha(t) = -i\beta(t)$。 *consequently,*$\Delta^I_{f,g}$ 分裂为两个路径连通分支，

$$\Delta^I_{f,g} = E_+ \sqcup E_-,$$

分别为 $E_+ = \{(\alpha,\beta) \in (S^1)^I \times (S^1)^I \mid \alpha = i\beta\}$ 和 $E_- = \{(\alpha,\beta) \in (S^1)^I \times (S^1)^I \mid \alpha = -i\beta\}$。对于每个分支，我们得到一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} (S^1)^I & \xrightarrow[\cong]{\Phi_\pm} & E_\pm \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{S^1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{f,g}|_{E_\pm}} \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow[\cong]{\psi_\pm} & S^1 \times S^1 \end{array}$$

其中 π_{S^1}表示标准路径纤维化，$\Phi_+(\beta) = (i\beta,\beta)$，$\Phi_-(\beta) = (-i\beta,\beta)$，以及$\psi_\pm(u,v) = (\pm iu, v)$。水平映射都是同胚，因此

$$\mathrm{sec}(\pi_{f,g}|_{E_\pm}) = \mathrm{sec}(\pi_{S^1}) = \mathrm{TC}(S^1) = 1.$$

首先，我们证明$\mathrm{TC}(f,g) \geq 1$。反设$\mathrm{TC}(f,g) = 0$。那么$\pi_{f,g}$将存在一个全局严格截面 σ：$S^1 \times S^1 \to \Delta^I_{f,g}$。由于 $S^1 \times S^1$ 是道路连通的，σ 的像将完全包含在某个连通分支中，记作 E_+ 或 E_-。这意味着$\mathrm{sec}(\pi_{f,g}|_{E_\pm}) = 0$，即$\mathrm{TC}(S^1) = 0$，矛盾。因此$\mathrm{TC}(f,g) \geq 1$。

为证明$\mathrm{TC}(f,g) \leq 1$，我们在 $S^1 \times S^1$的一个由两个集合构成的开覆盖上构造局部严格截面。考虑以下开子集：

$$U_+ := \{(u,v) \in S^1 \times S^1 \mid -\frac{v}{iu} \neq 1\};\quad U_- := \{(u,v) \in S^1 \times S^1 \mid \frac{v}{iu} \neq 1\}$$

由于每个点(u,v) 至少属于这些集合中的一个，因此我们有 $U_+ \cup U_- = S^1 \times S^1$. 选择辐角的连续分支$\mathrm{Arg}_1$：$S^1 \setminus \{1\} \to (0,2\pi)$，并定义

$$\theta(u,v) := \mathrm{Arg}_1(-\frac{v}{iu}),\ \textit{for all}\ (u,v) \in U_+,$$

and

$$\begin{cases} s_2(u,v)(t) := -i\,u\,e^{\,i\,\theta(u,v)\,t}, \\ s_1(u,v)(t) := i\,s_2(u,v)(t) = u\,e^{\,i\,\theta(u,v)\,t}. \end{cases}$$

那么 $s = (s_1,s_2) : U_+ \to E_+ \subseteq \Delta^I_{f,g}$是 $\pi_{f,g}$的一个严格局部截面。类似地，对所有$(u,v) \in U_-$，定义 $\theta'(u,v) := \mathrm{Arg}_1(\frac{v}{iu})$，并且

$$\begin{cases} s'_2(u,v)(t) := i\,ue^{\,i\,\theta'(u,v)\,t}, \\ s'_1(u,v)(t) := -i\,s'_2(u,v)(t) = u\,e^{\,i\,\theta'(u,v)\,t}. \end{cases}$$

因此 $s' = (s'_1,s'_2) : U_- \to E_- \subseteq \Delta^I_{f,g}$ 是 $\pi_{f,g}$的另一个严格局部截面。我们得出$\mathrm{TC}(f,g) = 1$。

我们的第一个结构性质表明，双变量拓扑复杂度关于其两个参数对称。

命题 2.13。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个映射余跨。则有

$$\mathrm{TC}(f,g) = \mathrm{TC}(g,f).$$

证明。 我们只需考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I_{f,g} & \xrightarrow[\cong]{T} & \Delta^I_{g,f} \\ {\scriptstyle \pi_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{g,f}} \\ X \times Y & \xrightarrow[t]{\cong} & Y \times X \end{array}$$

其中，同胚 T 和 t 分别定义为 $T(\alpha,\beta) := (\beta,\bar{\alpha})$ 和 $t(x,y) := (y,x)$。 这里， $\bar{\alpha}$ 和 β 表示 α 和 β. 的逆路径。因此，利用命题 1.5，我们得到

$$\mathrm{TC}(f,g) = \mathrm{sec}(\pi_{f,g}) = \mathrm{sec}(\pi_{g,f}) = \mathrm{TC}(g,f)$$

□

我们的第二个结果为具有公共目标空间的一般映射建立了一个有趣的不等式。

命题 2.14。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个映射余跨。以下不等式成立 .

$$(\mathrm{TC}(f,g)+1)\cdot(\mathrm{sec}(f\times g)+1) \geq \mathrm{TC}(Z)+1.$$

证明。 我们考虑以下严格交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I_{f,g} & \xrightarrow{\rho} & Z^I \\ {\scriptstyle \pi_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} \\ X \times Y & \xrightarrow[f\times g]{} & Z \times Z \end{array}$$

其中 $\rho(\alpha, \beta) := f \circ \alpha (= g \circ \beta)$。，对所有 $(\alpha, \beta) \in \Delta^I_{f,\, g}$. 利用 [8, 命题 2.3 (b)], 可得

$$(\mathrm{sec}(\pi_{f,g})+1)\cdot(\mathrm{sec}(f\times g)+1) \geq \mathrm{sec}(\pi_Z)+1.$$

因此， 根据 $\mathrm{TC}(f, g)$ 和 $\mathrm{TC}(Z)$ 的定义，可得所需的不等式 s.

□

推论 2.15。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余跨，其中 f 和 g 存在严格全局截面。则

$$\mathrm{TC}(f,g) \geq \mathrm{TC}(Z).$$

证明。 由于 f 和 g 存在全局截面，因此 $f \times g$ 也存在全局截面，从而 $\mathrm{sec}(f \times g) = 0$。现在，结合前一个命题，即可得出结论。□

考虑映射的乘积时，双变量拓扑复杂度还展现出另一个有趣的结构特征。以下结果证明于 [16,命题 22，第 84]页。我们认同，按照定义，正规空间必须是豪斯多夫空间。

命题 2.16。 设 $f\colon X \to Y$ 和 $f'\colon X' \to Y'$ 为连续映射，并假设 $Y \times Y'$ 是正规的。那么

$$\mathrm{sec}(f \times f') \leq \mathrm{sec}(f) + \mathrm{sec}(f').$$

推论 2.17。 设 $Z \times Z$ 是正规空间（例如，当 Z 可度量化时），并设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余扇。那么

$$(\mathrm{TC}(f,g)+1)\cdot(\mathrm{sec}(f)+\mathrm{sec}(g)+1) \geq \mathrm{TC}(Z)+1.$$

此外，若 g 存在全局截面，则

$$(\mathrm{TC}(f,g)+1)\cdot(\mathrm{sec}(f)+1) \geq \mathrm{TC}(Z)+1,$$

若 f 存在全局截面，情况也类似。

证明。 只需考察命题 2.14 和命题 2.16。

□

利用上文的命题2.16 ，我们还可得到双变量拓扑复杂度的次可加性。

定理 2.18。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$和 $X' \xrightarrow{f'} Z' \xleftarrow{g'} Y'$ 是连续映射的余扇，并假设乘积 $X \times Y \times X' \times Y'$是正规的（例如，当这些空间可度量化时）。那么

$$\mathrm{TC}(f \times f',\, g \times g') \;\leq\; \mathrm{TC}(f,g) + \mathrm{TC}(f',g').$$

证明。 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I_{f\times f', g\times g'} & \xrightarrow[\cong]{T} & \Delta^I_{f,g} \times \Delta^I_{f',g'} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{f\times f', g\times g'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{f,g}\times\pi_{f',g'}} \\ X \times X' \times Y \times Y' & \xrightarrow[t]{\cong} & X \times Y \times X' \times Y' \end{array}$$

借助同胚 $T\big((\alpha,\alpha'),\ (\beta,\beta')\big) = \big((\alpha,\beta),\ (\alpha',\beta')\big)$，以及 $t(x,x',y,y') = (x,y,x',y')$。因此

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}(f \times f',\, g \times g') &= \mathrm{sec}(\pi_{f\times f', g\times g'}) \\ &= \mathrm{sec}(\pi_{f,g} \times \pi_{f',g'}) \\ &\leq \mathrm{sec}(\pi_{f,g}) + \mathrm{sec}(\pi_{f',g'}) \\ &= \mathrm{TC}(f,g) + \mathrm{TC}(f',g'), \end{aligned}$$

根据命题1.5(2) 和命题 2.16。 □

接下来的结果表明，映射对的拓扑复杂度是其对应乘积映射对的拓扑复杂度的下界。

命题 2.19 (因子给出的下界)。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 和 $X' \xrightarrow{f'} Z' \xleftarrow{g'} Y'$ 是连续映射的余扇。则

$$\max\{\mathrm{TC}(f,g),\, \mathrm{TC}(f',g')\} \;\leq\; \mathrm{TC}(f \times f',\, g \times g').$$

证明。 考虑严格交换图

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I_{f\times f', g\times g'} & \xrightarrow{\varphi} & \Delta^I_{f,g} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{f\times f', g\times g'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{f,g}} \\ X \times X' \times Y \times Y' & \xrightarrow[\psi]{} & X \times Y \end{array}$$

其中 $\varphi((\alpha,\ \alpha'),\ (\beta,\ \beta')) := (\alpha,\ \beta)$ 以及 $\psi(x,\ x',\ y,\ y') = (x,\ y)$，分别成立。选取点 $x'_0 \in X'$ 和 $y'_0 \in Y'$，并定义 ψ 的一个全局截面如下

$$\iota : X \times Y \to X \times X' \times Y \times Y', \qquad \iota(x,y) = (x, x'_0, y, y'_0).$$

这证明了 截面范畴$(\psi) = 0$. 根据命题 1.5 (2)，可得 拓扑复杂度$(f,g) \leq$拓扑复杂度$(f \times f', g \times g')$。

交换 (f,g) 和 (f',g') 的角色即可得到另一个不等式；取最大值便得到结论。□

推论 2.20。 在定理 *2.18*的假设下，有

$$\max\{\mathrm{TC}(f,g),\ \mathrm{TC}(f',g')\} \ \leq\ \mathrm{TC}(f \times f',\ g \times g') \ \leq\ \mathrm{TC}(f,g) + \mathrm{TC}(f',g').$$

Co论 2.21。 在定理 *2.18*的假设下，若进一步有 拓扑复杂度$(f',g') = 0$，则 n

$$\mathrm{TC}(f \times f',\ g \times g') = \mathrm{TC}(f,g).$$

证明。 根据命题 2.19，拓扑复杂度$(f,g) \leq$拓扑复杂度$(f \times f',\ g \times g')$。根据定理 2.18，拓扑复杂度$(f \times f',\ g \times g') \leq$拓扑复杂度$(f,g)$ +拓扑复杂度(f',g') =拓扑复杂度(f,g)。因此等式成立。□

推论 2.22. 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是由连续映射构成的余扇，K 是任意拓扑空间。假设 $X \times Y \times K \times K$ 是正规的（例如，当 X、Y和 K 均可度量化时）。那么

$$\mathrm{TC}(f \times \mathrm{id}_K,\ g \times \mathrm{id}_K) \ \leq\ \mathrm{TC}(f,g) \ +\ \mathrm{TC}(K).$$

此外，若 K可缩，则 $\mathrm{TC}(f \times \mathrm{id}_K,\ g \times \mathrm{id}_K) = \mathrm{TC}(f,g)$。

最后，我们考察一对 (f,g) 的复杂度在前复合与后复合下的表现。我们先讨论与一个映射进行后复合的影响。

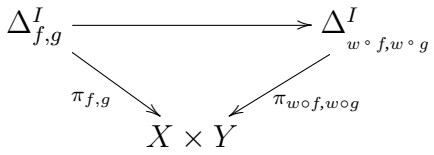
命题 2.23. 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是由映射构成的余扇，$w :\ Z \to Z'$ 是任意映射。那么

$$\mathrm{TC}(w \circ f, w \circ g) \leq \mathrm{TC}(f,g).$$

此外，若存在映射 $r\colon Z' \to Z$，使得 $r \circ w \circ f = f$且 $r \circ w \circ g = g$（例如，若 $r \circ w = \mathrm{id}_Z$），则

$$\mathrm{TC}(w \circ f, w \circ g) = \mathrm{TC}(f,g).$$

证明。 每一对 $(\alpha,\beta) \in \Delta^I_{f,g}$ 也属于 $\Delta^I_{w\circ f, w\circ g}$，因此存在一个典范映射 $\Delta^I_{f,g} \to \Delta^I_{w\circ f, w\circ g}$，使下图交换：

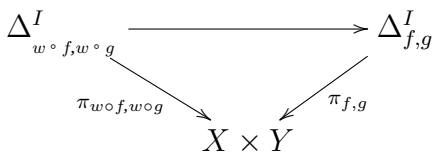


因此，由命题 1.3，拓扑复杂度$(w \circ f, w \circ g)$ =截面范畴$(\pi_{w\circ f, w\circ g})$ ≤截面范畴$(\pi_{f,g})$ =拓扑复杂度(f,g)。

现在假设存在 $r\colon Z' \to Z$，满足 $r \circ w \circ f = f$ 且 $r \circ w \circ g = g$。若 $(\alpha,\beta) \in \Delta^I_{w\circ f, w\circ g}$，则 $w \circ f \circ \alpha = w \circ g \circ \beta$，于是

$$f \circ \alpha = r \circ w \circ f \circ \alpha = r \circ w \circ g \circ \beta = g \circ \beta.$$

因此，存在一个典范映射 $\Delta^I_{w\circ f, w\circ g} \to \Delta^I_{f,g}$，使其嵌入交换图中



因此，再次应用命题 1.3 可得，拓扑复杂度(f,g) $\leq$ 拓扑复杂度$(w\circ f, w\circ g)$。□

接下来我们分析前复合的影响。在这种情况下，不变量的行为取决于用于前复合的映射的性质。

命题 2.24。设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个映射余跨，且设 $u\colon X'\to X$、$v\colon Y'\to Y$ 为映射。

(1) 以下不等式成立：

$$(\mathrm{TC}(f\circ u, g\circ v)+1)\cdot(\mathrm{sec}(u\times v)+1)\geq \mathrm{TC}(f,g)+1.$$

因此，如果 u 和 v 具有严格截面，则 拓扑复杂度(f, g) $\leq$ 拓扑复杂度$(f\circ u, g\circ v)$。

(2) 如果 u 和 v 是纤维化，则 拓扑复杂度$(f\circ u, g\circ v)$ $\leq$ 拓扑复杂度(f, g)。

(3) 如果 u 和 v 是具有（同伦）截面的纤维化，则 拓扑复杂度$(f\circ u, g\circ v)$ $=$ 拓扑复杂度(f, g)。

证明。(1) 我们考虑以下严格交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I_{f\circ u, g\circ v} & \xrightarrow{\varphi} & \Delta^I_{f,g} \\ {\scriptstyle \pi_{f\circ u, g\circ v}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{f,g}} \\ X'\times Y' & \xrightarrow[u\times v]{} & X\times Y \end{array}$$

其中 $\varphi(\alpha,\beta) := (u\circ\alpha, v\circ\beta)$，对所有 $(\alpha,\beta)\in \Delta^I_{f\circ u, g\circ v}$。应用命题 1.5 (2) 可得该不等式。证明的其余部分显然。

(2) 假设 u 和 v 是纤维化。设 $U\subseteq X\times Y$ 是一个开子集，并带有一个严格局部截面

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & X\times Y \\ & {\scriptstyle \sigma=(\sigma_1,\sigma_2)}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \pi_{f,g}} & \\ & \Delta^I_{f,g} & \end{array}$$

定义 $V := (u\times v)^{-1}(U) \subseteq X'\times Y'$。考虑由实线箭头构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} V\times\{0\} & \xrightarrow{h} & X'\times Y' \\ \downarrow & \overset{\widetilde{H}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle u\times v} \\ V\times I & \xrightarrow[H]{} & X\times Y \end{array}$$

其中 $h(x',\ y',\ 0) = (x',\ y')$，并且

$$H(x',y',t) = (\sigma_1(u(x'),v(y'))(t),\ \sigma_2(u(x'),v(y'))(1-t)).$$

由于 $u\times v$ 是一种纤维化，同伦提升性质给出了一个提升 $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_1,\ \widetilde{H}_2)$。定义

$$\widetilde{\sigma}_1(x',y')(t) := \widetilde{H}_1(x',y',t),\quad \widetilde{\sigma}_2(x',y')(t) := \widetilde{H}_2(x',y',1-t).$$

于是 $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{\sigma}_1,\ \widetilde{\sigma}_2)\colon V\to \Delta^I_{f\circ u,\ g\circ v}$ 是 $\pi_{f\circ u,\ g\circ v}$ 的严格局部截面，从而证明了该不等式。(3) 如果 u 和 v 是允许同伦截面的纤维化，则 (1) 和 (2) 中的不等式结合起来即可得到所声称的等式。□

3. TC(f, g) 的上同调估计

为了获得对任意连续映射对均有效的一般下界，我们现在转向上同调方法。在本节中，我们发展经典零因子杯长方法的双变量类比，从而对 TC(f, g) 给出一种系统性估计；该估计不需要任何额外假设，并推广了 Farber 的拓扑复杂度的标准上同调下界。

注意到，一般而言，TC(f, g) $=$ sec($\pi_{f,g}$) $\geq$ secat($\pi_{f,g}$)，因此我们得到自然的上同调下界：

$$\operatorname{nil}\operatorname{Ker}(\pi_{f,g}^*) \leq \mathrm{TC}(f,g)$$

也可以改用包含映射 $inc : \Delta_{f,g} \hookrightarrow X \times Y$，并考虑 nilKer($inc^*$)。不过，我们感兴趣的是一种更易处理的估计，即使这会牺牲一些精确性。给定一个映射余跨 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，我们来考虑零因子理想 I_Z

$$\mathrm{I}_Z := \operatorname{Ker}(\Delta_Z^*) \subseteq H^*(Z \times Z)$$

其中 $\Delta_Z : Z \to Z \times Z$ 表示对角映射。再考虑由乘积映射 $f \times g : X \times Y \to Z \times Z$ 在上同调中诱导的同态 $(f \times g)^*$。然后我们定义像

$$\mathrm{I}_{f,g} := (f \times g)^*(I_Z)$$

一般而言，这不是 $H^*(X \times Y)$ 的理想。然而，可以看出 $\mathrm{I}_{f,g}$ 包含于 Ker($\pi_{f,g}^*$)。为了证明这一点，取以下由空间和映射构成的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_{f,g}^I & \xrightarrow{\rho} & Z^I & \xleftarrow[\simeq]{c} & Z \\
{\scriptstyle \pi_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} & \swarrow{\scriptstyle \Delta_Z} & \\
X \times Y & \xrightarrow[f\times g]{} & Z \times Z & &
\end{array}$$

其中，ρ 定义为 $\rho(\alpha, \beta) := f \circ \alpha (= g \circ \beta)$。该图在上同调中诱导出另一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^*(Z \times Z) & \xrightarrow{(f\times g)^*} & H^*(X \times Y) \\
 & {\scriptstyle \Delta_Z^*}\swarrow & {\scriptstyle \pi_Z^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{f,g}^*} \\
H^*(Z) & \xleftarrow[c^*]{\cong} & H^*(Z^I) & \xrightarrow[\rho^*]{} & H^*(\Delta_{f,g}^I)
\end{array}$$

这证明了 $\mathrm{I}_{f,\,g} = (f \times g)^*(\mathrm{I}_Z) \subseteq$ 核($\pi_{f,\,g}^*$)。

我们将 l。c。p。($\mathrm{I}_{f,\,g}$) 定义为满足以下条件的最小整数 k：$\mathrm{I}_{f,\,g}$ 中任意元素的乘积 $u_0 \smile \cdots \smile u_k$ 在 $H^*(X \times Y)$ 中均为零（此处，$l.c.p.$ 表示杯积的长度）。由于 $\mathrm{I}_{f,\,g} \subseteq$ 核 ($\pi_{f,\,g}^*$)，因此有 l。c。p。($\mathrm{I}_{f,\,g}$) $\leq$ 幂零 核($\pi_{f,\,g}^*$)。

上述推理可以概括为以下结果：

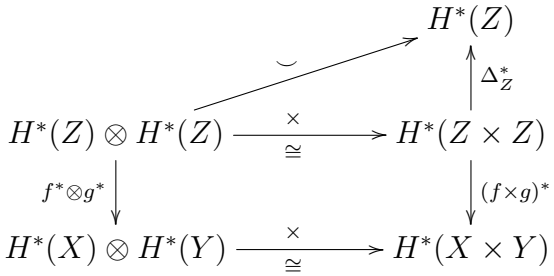
定理 3.1。对于任意连续映射的余扇 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 以及任意乘法上同调理论 H^*，我们有如下估计

$$\mathrm{l.c.p.}\,(\mathrm{I}_{f,g}) \leq \mathrm{TC}(f,g).$$

备注 3.2。 与零因子理想的经典情形不同，子集 $I_{f,\,g}$ 不一定是 $H^*(X\times Y)$的理想。因此，幂零性的概念不适用于此情形。然而，对于任意子集，杯积的长度都有明确的定义，并给出了适当的上同调估计。

为便于实际应用，我们使用系数取自域$\mathbb{K}$的奇异上同调。根据 Künneth定理，存在一个分次 $\mathbb{K}$-代数的自然同构 $H^*(Z\times Z)\ \cong\ H^*(Z)\ \otimes H^*(Z)$，它由交叉积 $a\otimes b\mapsto pr_1^*(a)\ \smile\ pr_2^*(b)$ 诱导。在此识别下，映射 $\Delta_Z^*\colon\ H^*(Z\times Z)\ \to\ H^*(Z)$ 与杯积$\smile\colon\ H^*(Z)\ \otimes H^*(Z)\ \to H^*(Z)$ 一致，因此 $I_Z=\ker(\Delta_Z^*)\ =\langle\ u\otimes 1-1\otimes u\mid u\in H^*(Z)\ \rangle$。

对于连续映射 $f\colon\ X\to Z$ 和 $\ g\colon\ Y\to Z$，交叉积的自然性给出如下交换图



因此 $I_{f,\,g}=(f\times g)^*(I_Z)\ =(f^*\otimes g^*)(I_Z)\ \subseteq H^*(X)\ \otimes H^*(Y)$。特别地，生成元 $u\otimes 1-1\otimes u$ 的像为 $\ f^*(u)\ \otimes 1-1\otimes g^*(u)$，它们生成 $I_{f,\,g}$。

注 3.3。 I_Z 的元素并非全都严格具有 $\ u\otimes 1-1\otimes u$ 的形式。这些元素生成该理想，因此更复杂的项（例如，当 $\ u\smile u=0$ 时的 $\ u\otimes u$）可以写成它们的乘积或线性组合。

例 3.4 （度数 2 和 3 在 2-球面上）。 在域 $\ \mathbb{K}$ 上进行讨论，其中 特征 $\ \mathbb{K}=0$（例如，有理数域 $\mathbb{Q}$）。设 $\ X=Y=Z=S^2$，并选取连续映射f、$\ g\colon\ \ S^2\to S^2$，其度数分别为 2 和 3。

将 $\ H^*(S^2)\ =\langle u\rangle$ 写作 $\ |u|=2$ 和 $\ u^2=0$。在 ***Künneth***同构 $\ H^*(Z\times Z)\ \cong H^*(Z)\ \otimes H^*(Z)$ 下，零因子理想由 $\ u\otimes 1-1\otimes u$ 生成，因此

$$I_{f,g}=(f^*\otimes g^*)(I_Z)=\Big\langle A\Big\rangle,\qquad A:=f^*(u)\otimes 1-1\otimes g^*(u)=2u\otimes 1-1\otimes 3u.$$

于是 $\ A\neq 0$，并且根据 ***Koszul*** 规则，

$$A^2=(2u\otimes 1-1\otimes 3u)^2=-(2u\otimes 1)(1\otimes 3u)-(1\otimes 3u)(2u\otimes 1)=-12\,u\otimes u\neq 0,$$

而由于维数原因，$\ A^3=0$。因此 $\operatorname{l.c.p.}\Big(I_{f,g}\Big)=2$，进而 $\operatorname{TC}(f,g)\ \geq 2.$

例 3.5 (在 5维环面上混合不同幂次)。 在特征为 $\ \mathbb{K}\ $ 的0域上（例如 $\ \mathbb{Q}$）进行讨论。令 $\ Z=X=Y=T^5=(S^1)^5$，并将 $\ H^*(T^5)\ =\Lambda(u_1,\ldots,u_5)$ 写作，其中 $\ |u_i|=1$、$u_i\smile u_i=0$ 和 $\ u_1\smile\cdots\smile u_5$ 生成 $\ H^5(T^5)$。

按坐标定义连续映射:

$$f(z_1,\ldots,z_5)=(z_1^2,\,z_2^3,\,z_3^2,\,z_4^4,\,z_5),\qquad g(z_1,\ldots,z_5)=(z_1,\,z_2^2,\,z_3^3,\,z_4,\,z_5^4).$$

于是 $\ f^*(u_1)\ =2u_1$, $f^*(u_2)\ =3u_2$, $f^*(u_3)\ =2u_3$, $f^*(u_4)\ =4u_4$, $f^*(u_5)\ =u_5$，以及 $\ g^*(u_1)\ =u_1$,$g^*(u_2)\ =2u_2$, $g^*(u_3)\ =3u_3$, $g^*(u_4)\ =u_4$, $g^*(u_5)\ =4u_5$。在 $\ H^*(Z\times Z)\ \cong H^*(Z)\ \otimes H^*(Z)$ 下，零因子理想由 $\ u_i\otimes 1-1\otimes u_i\ (i=1,\ldots,5)$ 生成。因此

$$I_{f,g}=(f^*\otimes g^*)(I_Z)=\Big\langle\bar u_1,\ldots,\bar u_5\Big\rangle,\qquad \bar u_i:=f^*(u_i)\otimes 1-1\otimes g^*(u_i).$$

考虑 5 重乘积 $\bar{u}_1 \smile \cdots \smile \bar{u}_5$。按照 Koszul 规则展开后，其在 $H^5(Z) \otimes H^0(Z)$ 中的分量为 $(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1)(u_1 \smile \cdots \smile u_5) \otimes 1 = 48(u_1 \smile \cdots \smile u_5) \otimes 1$，而在 $H^0(Z) \otimes H^5(Z)$ 中的分量为 $\pm(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4)\, 1 \otimes (u_1 \smile \cdots \smile u_5) = \pm 24\, 1 \otimes (u_1 \smile \cdots \smile u_5)$。由于这两个系数在特征零下都非零，因此有 $\bar{u}_1 \smile \cdots \smile \bar{u}_5 \neq 0$。

另一方面，任意 $\bar{u}_i$ 的6重乘积都为零：展开 $\bar{u}_{i_1} \smile \cdots \smile \bar{u}_{i_6}$时，每一项都是张量$(\alpha) \otimes (\beta)$，其中 α （分别是 β）是若干个 u_j 的杯积；由于只有五个次数为1 的生成元， α 或 β 必有一个指标重复，因此等于0。因此，$\mathrm{l.c.p.}\left(I_{f,g}\right) = 5$且拓扑复杂度$(f, g) \geq 5.$

4. 一个映射是纤维化的情形：协作原理

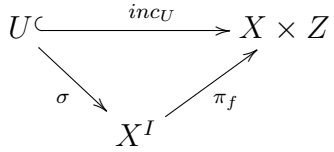
双变量不变量的一个显著特点是，一侧存在纤维化时，可以简化同步问题。直观而言，纤维化 g： $Y \to Z$ 提供了一种系统化的同伦提升方法，因此可以将部分运动规划任务转交给提升过程。以下重要结果对此效应作出了精确说明。

定理 4.1 (协作原理**)**。 设 $f\colon X \to Z$ 是连续映射，且 $g\colon Y \to Z$ 是满射 *Hurewicz* 纤维化。那么

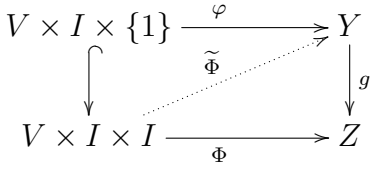
$$\mathrm{TC}(f, g) \leq \mathrm{TC}(f).$$

特别地，只要 拓扑复杂度(f) 有限，拓扑复杂度(f, g)也有限。

证明。 设开子集 $U \subseteq X \times Z$ 连同 π_f : 的一个严格局部截面



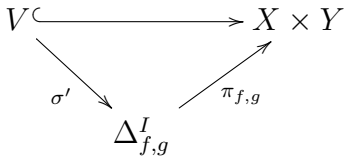
这意味着，对于所有 $(x, z) \in U$， $\sigma(x, z)(0) = x$且 $f(\sigma(x, z)(1)) = z$。 我们将$V := (id_X \times g)^{-1}(U)$ 和 $\sigma_1\colon V \to X^I$定义为 $\sigma_1(x, y) := \sigma(x, g(y))$。 由于 g是纤维化，我们~可以在下列交换图中取一个提升 Φ :



其中， φ和 Φ 分别定义为 $\varphi(x, y, t, 1) := y$ 和 $\Phi(x, y, t, s) := f(\sigma_1(x, y)(s))$，我们定义

$$\sigma_2 : V \to Y^I$$

~作为 $\sigma_2(x, y)(s) := \Phi(x, y, 1, s)$。然后，很容易验证，对于所有 $(x, y) \in V$，数对 $(\sigma_1(x, y)\ \sigma_2(x, y))$ 都是 (f, g)-同步的，也就是说，对于所有$s \in I$ 和 $(x, y) \in V.$， $f(\sigma_1(x, y)(s)) = g(\sigma_2(x, y)(s))$。此外， $\sigma_1(x, y)(0) = x$ ，且 $\sigma_2(x, y)(1) = y.$ 。换言之，$\sigma' = (\sigma_1, \sigma_2) : V \to \Delta^I_{f,g}$ 定义了一个$\pi_{f,g}$ 的严格局部截面:



将此过程重复应用于 $X \times Z$ 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^n$，使得 $\mathrm{TC}(f) = n$，我们得到 $X \times Y$ 的一个开覆盖 $\{V_i\}_{i=0}^n$，从而证明 $\mathrm{TC}(f,g) \leq n = \mathrm{TC}(f)$. □

注 4.2. 协作原理也可以作为命题 *2.24(2)* 的一个特例得出，该命题描述了双变量拓扑复杂度在经纤维化前复合后的行为。事实上，若 g 是纤维化，则命题 *2.24(2)* 给出

$$\mathrm{TC}(f,g) = \mathrm{TC}(f \circ \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Z \circ g) \leq \mathrm{TC}(f, \mathrm{id}_Z) = \mathrm{TC}(f).$$

我们选择对定理 *4.1* 给出直接证明，因为这凸显了协作现象背后的几何机制。

固定一个纤维化 $g\colon Y \to Z$。在此情形下，双变量拓扑复杂度 $\mathrm{TC}(f,\ g)$ 定义了一个关于 f、相对于 g 的不变量，我们记作 $\mathrm{TC}_g(f)$。与 Pavešić 的一元不变量 $\mathrm{TC}(f)$ 相比，这个相对版本在技术上更简单：其定义所需的约束较少，而且纤维化的存在使严格截面的构造更加直观。

现在我们记录算子 TC_g 在存在全局截面时的一项重要刚性性质。

命题 4.3. 设 $g\colon Y \to Z$ 是一个存在全局截面的纤维化。那么，对每个映射$f\colon\ X \to Z$，均有

$$\mathrm{TC}_g(f) = \mathrm{TC}(f).$$

证明。 该等式直接由命题 2.24(3) 得出。 □

注 4.4。 这一结果表明，当 g 施加的同步约束是平凡的时，相对不变量 拓扑复杂度$_g$ 会退化为 *Pavešić* 的经典拓扑复杂度。从这个意义上说，双变量框架仅能检测真正非平凡的协调现象。

下面的例子表明，当纤维化 g 没有全局截面时，这种退化现象一般并不成立。

例 4.5。 考虑 $f = \mathrm{pr}_1\colon\ S^2 \times S^1 \to S^2$典范投影以及 $g = p\colon\ PS^2 \to S^2$基点路径纤维化。利用命题 *6.3(3)* 和 [15, 推论 4.16(1)、推论 4.9]，，我们得到拓扑复杂度(f) = 拓扑复杂度$(S^2) = 2$ 以及 拓扑复杂度$(g) = 1$。因此，由命题 *8.1* 可得

$$\mathrm{TC}_g(f) = \mathrm{TC}(f,g) \leq 1 < 2 = \mathrm{TC}(f).$$

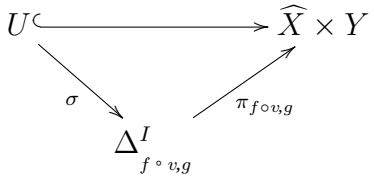
现在我们证明，对于纤维化 $g\colon Y \to Z$，算子 拓扑复杂度$_g$ 在逐纤维同伦等价下是不变的。为此，我们先分析映射的前复合如何影响（f，g）的复杂度。参见[13, 定理 3.5]。

命题 4.6。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个映射余跨，其中 g 是纤维化，并考虑一个$\widehat{\ }$映射 $v\colon\ X \to X$.

(1) 如果 v 承认一个同伦截面，则 $\mathrm{TC}_g(f) \leq \mathrm{TC}_g(f \circ v)$。 *(2)* 如果 v 承认一个同伦截面 $u\colon\ X \to \widehat{X}$，使得 $f \circ v \circ u = f$，则 $\mathrm{TC}_g(f \circ v) \leq \mathrm{TC}_g(f)$。 *(3)* 如果 v 承认一个同伦截面 u，使得 $f \circ v \circ u \simeq f$，且 $f \circ v$ 是一个纤维化，则 $\mathrm{TC}_g(f \circ v) \leq \mathrm{TC}_g(f)$。

证明。

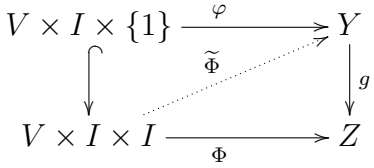
(1) 取开子集 $U \subseteq \widehat{X} \times Y$，并取其上的严格局部截面 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : U \to \Delta^I_{f\circ v,g}$of $\pi_{f\circ v,g}$：



现在考虑 $u : X \to \widehat{X}$，它是 v 的一个同伦截面，并取 $H : X \times I \to X$，它是一个同伦，满足 $H : v \circ u \simeq id_X$.。定义 $V := (u \times id_Y)^{-1}(U) \subseteq X \times Y$以及 $\sigma_1' : V \to X^I$为

$$\sigma_1'(x,y)(t) = \begin{cases} H(x, 1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(\sigma_1(u(x), y)(2t-1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

利用同伦提升性质，我们在下图中取一个提升

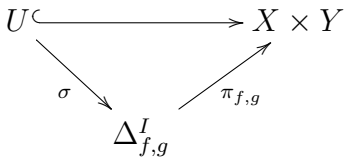


其中 φ 和 Φ 分别定义为 $\varphi(x,y,t,1) := y$ 以及 $\Phi(x,y,t,s) := f(\sigma_1'(x,y)(s))$。~定义 $\sigma_2' : V \to Y^I$为 $\sigma_2'(x,y)(s) := \Phi(x,y,1,s)$，得到

$$\sigma' = (\sigma_1', \sigma_2') : V \to \Delta^I_{f,g}$$

$\pi_{f,g}$. 将此过程重复应用于开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^n$，它覆盖 $\widehat{X} \times Y$并满足 TC$_g(f \circ v) = n$，我们便得到一个开覆盖 $\{V_i\}_{i=0}^n$，它覆盖 $X \times Y$，从而证明 TC$_g(f) \le n$.

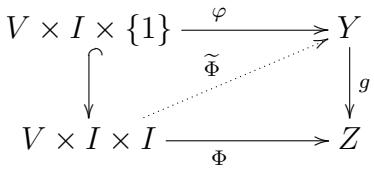
(2) 类似地，设 $U \subseteq X \times Y$ 是一个开子集，并配有一个严格局部截面 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$，它是 $\pi_{f,g}$ 的局部截面：



我们定义 $V := (v \times id_Y)^{-1}(U) \subseteq \widehat{X} \times Y$，并将 $\tilde{\sigma}_1' : V \to X^I$ 定义为 $\tilde{\sigma}_1'(\hat{x}, y) := \sigma_1(v(\hat{x}), y)$。现在，若我们显式给出一个同伦 $H : u \circ v \simeq id_{\widehat{X}}$，则可以定义一个映射 $\sigma_1' : V \to \widehat{X^I}$，其定义如下：

$$\sigma_1'(\hat{x}, y)(t) := \begin{cases} H(\hat{x}, 1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ u(\sigma_1(v(\hat{x}), y)(2t-1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

再次利用 g 的同伦提升性质，我们取一个提升



其中 $\varphi(\hat{x}, y, t, 1)$:且 $(\hat{}, y, t, s) := f(v(\sigma_1'(\hat{x}, y)(s)))$。那么

$$\sigma_2' : V \to Y^I$$

定义为 $\sigma_2'(\hat{}x,\ y)(s) := \widetilde{\Phi}(\hat{}x,\ y,\ 1,\ s)$，给出一个严格局部截面 $\sigma' = (\sigma_1',\ \sigma_2') : V \to \Delta^I_{f\circ v,\ g}$，属于 $\pi_{f\circ v,\ g\cdot}$。这给出拓扑复杂度$_g(f\circ v) \leq$ 拓扑复杂度$_g(f)$。

(3) 如果 $f\circ v$ 是纤维化，且 $f\circ v\circ u \simeq f,$ 那么根据同伦提升性质，存在 $u' \simeq u$，使得 $f\circ v\circ u' = f.$。由于 $v\circ u' \simeq id_X$，我们可以考虑情形 (2) 以得到结果。□

使用类似的技巧还可以证明以下结果：

命题 4.7。设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余扇，其中 g 是纤维化。如果 $v : \widehat{X} \to X$ 是纤维化，那么 拓扑复杂度 $_g(f\circ\ v) \leq$ 拓扑复杂度 $_g(f)$。

推论 4.8。如果 $v : \widehat{X} \to X$ 是变形收缩，那么对于任意映射 $f : X \to Z$ 以及任意纤维化 $g : X \to Z.$，有 拓扑复杂度$_g(f)$ = 拓扑复杂度$_g(f\circ\ v)$。

证明。设 $u : X \to \widehat{X}$ 是一个映射，使得 $v\circ u = id_X$（因此 u 必然是一个嵌入）且 $u\circ v \simeq id_{\widehat{X}}$。于是，根据命题 4.6，我们有 TC$_g(f)$ ≤TC$_g(f\circ\ v)$，并且 TC$_g(f\circ\ v)$ ≤TC$_g(f)$.

□

推论 4.9。设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为映射余跨，其中 g 是纤维化。若 f 具有同伦截面，则 拓扑复杂度$_g$（f） ≥拓扑复杂度（g）。此外，若 f是纤维化，则 拓扑复杂度$_g$（f） =拓扑复杂度（g）。

证明。根据命题 4.6（1），有 拓扑复杂度（g） =拓扑复杂度（$id_Z,\ g$） ≤拓扑复杂度（$id_Z\circ f,\ g$） =拓扑复杂度$_g$（f）。

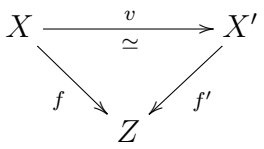
若 f是纤维化，则定理 4.1（协作原理）成立，并且有 拓扑复杂度$_g$（f） =拓扑复杂度（$f,\ g$） ≤ 拓扑复杂度（g）。□

最后，我们用以下重要结果结束本节：

定理 4.10。设 $g :\ Y \to Z$ 为纤维化。则算子 拓扑复杂度$_g$ 在逐纤维同伦等价下是不变量。换言之，若 $f :\ X \to Z$ 和 $f' :\ X' \to Z$ 是逐纤维同伦等价的映射，则有

$$\mathrm{TC}_g(f) = \mathrm{TC}_g(f').$$

证明。考虑 $v :\ X \to X'$ 一个纤维同伦等价，它将 f 映到 f'：



于是，根据命题4.6 (1)，

$$\mathrm{TC}_g(f) = \mathrm{TC}_g(f'\circ v) \geq \mathrm{TC}_g(f').$$

类似地，取 v的一个纤维逐点同伦逆，我们得到 TC$_g(f')$ ≥TC$_g(f)$，证毕。□

5. SCOTT 型双变量拓扑复杂度

在本文这一阶段，我们研究了一种双变量拓扑复杂度（Pavešić 型），它衡量协调两个动力学受共享目标空间支配的系统所需的最少局部信息。然而，尽管这一概念本身颇有意义，但它相当僵化，并非同伦不变量，正如备注2.4所示。因此，它可能难以处理和计算。

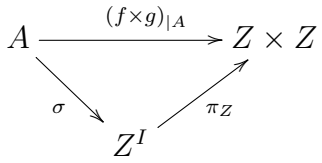
本节将介绍一种用于双变量拓扑复杂度的同伦不变方法，称为斯科特型不变量。该方法更加灵活，且便于计算

。这一构造为严格双变量拓扑复杂度提供了一个自然下界。它的重要性主要体现在两个方面：首先，如果 f 和 g 都是纤维化（即使是按 Dold 的意义），那么它就与严格版本相同；其次，由于它是通过同伦截面而非严格截面来定义的，因此更加灵活，也更便于计算。下面我们将给出其定义，先从 (f, g)-截面子集的概念开始。

定义 5.1。 给定 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$一个连续映射的余扇。若存在映射 $\sigma: A \to Z^I$，使得 $(f \times g)_{|A} = \pi_Z \circ \sigma$，其中 π_Z 是 Z中的通常路径纤维化，则称 $A \subseteq X \times Y$, A 为 (f, g)-截面范畴的。因此，给定 $(x, y) \in A$，可得

$$(f \times g)_{|A}(x, y) = (f(x), g(y)) = (\pi_Z \circ \sigma)(x, y) = (\sigma(x, y)(0), \sigma(x, y)(1)).$$

这一情形可由下图表示：



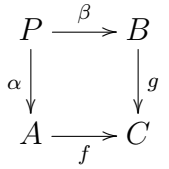
在上述条件下，σ 称为 (f, g)-运动规划器。

前面的定义引出了本节的主要概念。

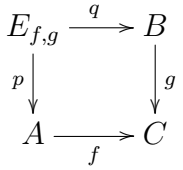
定义 5.2。 给定 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 连续映射，f与 g的同伦双变量拓扑复杂度记为 $TC_H(f, g)$，其定义为满足以下条件的最小 $k \in \mathbb{N}$：$X \times Y$可被 $k+1$ (f, g)-截面范畴开子集 U_0，……，U_k覆盖。若不存在这样的 k，则令 $TC_H(f, g) := \infty$.

注 5.3. $TC_H(f, g)$ 也称为 *Scott* 型双变量拓扑复杂度。我们将看到，这确实是 *Pavešić* 型双变量拓扑复杂度的一种同伦方法。正如我们之前所指出的，这种方法在实际应用中更容易处理，也往往更便于进行显式计算。

首先，我们需要回顾一些关于同伦拉回的事实。回想 [11]，给定一个同伦交换方块



配备一个同伦 $H: f \circ \alpha \simeq g \circ \beta$，还存在另一个同伦交换方块



其中 $E_{f,g}$ 是由 $E_{f,g} = \{(a, b, \lambda) \in A \times B \times C^I;\ \lambda(0) = f(a) \quad \lambda(1) = g(b)\}$ 定义的空间，而 p, q 是投影的显然限制。此方块配备了由 $(a, b, \lambda, t) \mapsto \lambda(t)$ 给出的同伦 G。于是，存在一个映射（称为须状映射）$w: P \to E_{f,g}$，其定义为 $w(x) = (\alpha(x)\ \beta(x)\ H(x, -))$，并满足 $p \circ w = \alpha, q \circ w = \beta$ 和 $G \circ (w \times id) = H.$。若须状映射 w 是同伦等价，则第一个方块称为同伦拉回；第二个方块称为标准同伦

拉回 f 和 $g.$。众所周知，当 f 或 g 是纤维化时，它们的拓扑拉回（配备静态同伦）是同伦拉回。此外，拓扑拉回 $P_{f,\ g}$ 是 $E_{f,\ g}.$ 的强形变收缩

回到连续映射的余扇 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，我们可以考虑 f 和 g的标准同伦拉回，

$$E_{f,g} = \{(x, y, \lambda) \in X \times Y \times Z^I \mid \lambda(0) = f(x),\ \lambda(1) = g(y)\}.$$

这个空间也可以通过以下拉回图来描述：

$$\begin{array}{ccc} E_{f,g} & \xrightarrow{\overline{f\times g}} & Z^I \\ {\scriptstyle \theta_{f,g}=\overline{\pi}_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} \\ X \times Y & \xrightarrow[f\times g]{} & Z \times Z. \end{array}$$

请注意，为了强调映射 f 和 $g,$ 的作用，我们将把由此拉回中 π_Z 诱导的映射 $\theta_{f,\ g}$ 记为 π_Z。我们可以得到以下结果：

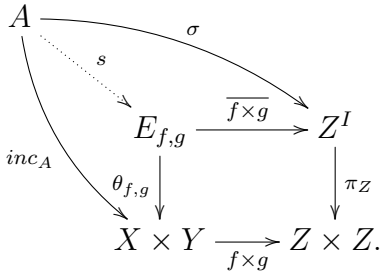
定理 5.4. 给定 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$一个连续映射的余扇，对于子集 $A \subseteq X \times Y$，以下各项等价：

(1) 存在一个局部截面 $s\colon A \longrightarrow E_{f,g}$，其定义域为 $\theta_{f,g}$.*(2)* 存在一个 *(f, g)*-运动规划器 $\sigma\colon A \longrightarrow Z^I$。*(3)* 映射 $(f \times g)_{|A}$ 可变形为 Δ_Z*(Z)*，其中 $\Delta_Z\colon Z \to Z \times Z$ 表示 $Z.$中的对角映射。*(4)* 存在映射 $h\colon A \longrightarrow Y$，使得 $(f \times g)_{|A}$ 同伦于 $(g \times g)$ ◦ Δ_Y ◦ h。*(5)* 存在映射 $\widehat{h}\colon A \longrightarrow X$，使得 $(f \times g)_{|A}$ 同伦于 $(f \times f)$ ◦ Δ_X ◦ $\widehat{h}$。

证明。 我们先来验证 (1) 推出 (2)。设 $s : A \longrightarrow E_{f,g}$ 是$\theta_{f,g}$的既有局部截面；于是$\theta_{f,g} \circ s = inc_A$。我们定义 $\sigma\colon A \longrightarrow Z^I$，由 $\sigma := (f \times g) \circ s$给出。于是，$\overline{\sigma}$是一个 (f, g)-运动规划器。事实上，考虑到定义$E_{f,g}$的拉回具有交换性，可得：

$$\pi_Z \circ \sigma = \pi_Z \circ (\overline{f \times g}) \circ s = (f \times g) \circ \theta_{f,g} \circ s = (f \times g) \circ inc_A = (f \times g)_{|A}.$$

对于 (2) 推出 (1)，设 $\sigma\colon A \longrightarrow Z^I$ 是一个 (f, g)-运动规划器。根据拉回的泛性质，



存在一个映射 $s : A \longrightarrow E_{f,g}$，满足 $(f \times g)\overline{\circ\ s} = \sigma$ 且 $\theta_{f,g} \circ\ s = inc_A$，由此可得 s是$\theta_{f,g}$的一个局部截面。

现在验证 (2) 蕴含 (3)：设 $\sigma\colon A \longrightarrow Z^I$ 是一个 (f, g)-运动规划器。我们定义同伦 $H\colon A \times I \longrightarrow Z \times Z$ 如下：$H(x, y, t) := (\sigma(x, y)(t)\ g(y))$。那么 $H(x, y, 0) = (\sigma(x, y)(0)\ g(y)) = (f(x)\ g(y)) = (f \times g)_{|A}(x, y)$，并且 $H(x, y, 1) = (\sigma(x, y)(1)\ g(y)) = (g(y)\ g(y)) \in \Delta_Z(Z)$。

为了证明 (3) 蕴含 (2)，考虑一个同伦 $H\colon A\times I\longrightarrow Z\times Z$，使得$H(x,y,0)=(f(x)\ g(y))$，并且 $H(x,y,1)\in\Delta_Z(Z)$，我们定义 $\sigma\colon A\longrightarrow Z^I$如下：

$$\sigma(x,y)(t)=\begin{cases}pr_1(H(x,y,2t)), & \text{if } 0\le t\le\frac{1}{2}\\ pr_2(H(x,y,2-2t)), & \text{if } \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

不难验证，σ 是一个（f，g）运动规划器。

对于 (2) 推出 (4)，取 (2)⇒ (3) 中定义的同伦 H；在那里我们验证了 $H(x,\ y,\ 1)=(g(y)\ g(y)$。我们注意到

$$(g(y),g(y)=(g\times g)(y,y)=((g\times g)\circ\Delta_Y\circ pr_2)(x,y),$$

其中 $pr_2\colon X\times Y\longrightarrow Y$ 是典范投影，而 $\Delta_Y\colon Y\longrightarrow Y\times Y$ 是 Y 上的对角映射。因此，取 $h=pr_2$，我们得出结论：H 是连接 $(f\times g)^{|A}$ 与复合 $(g\times g)\circ\Delta_Y\circ pr_2$. 的同伦

与前面的推理类似，为了证明 (2) 推出 (5)，我们可以取同伦 $G(x,\ y,\ t):=(\sigma(x,\ y)(t)\ f(x))$，它连接 $(f\times g)^{|A}$ 与 $(f\times f)\circ\Delta_X\circ pr_1$.

下面证明 (4) 蕴含 (3)：考虑映射 $h\colon A\longrightarrow Y$ satisfying that $(f\times g)^{|A}$ 与 $(g\times g)\circ\Delta_Y\circ h$ 同伦。则 $(g\circ\Delta_Y\circ h)(x,y)=(g(h(x,y))\ g(h(x,y)))\in\Delta_Z(Z)$。因此，$(g\times g)\circ\Delta_Y\circ h$ 可以变形为 $\Delta_Z(Z)$。

最后，证明 (5) 蕴含 (3) 的方法与证明 (4) 蕴含 (3) 类似。

□

映射 $\theta_{f,g}=\pi_{\overline{Z}}$是一个纤维化，因为它由上述拉回图中的路径纤维化 Π_Z 诱导而来。它使我们能够确立以下关键结果

推论 5.5. 给定两个连续映射 $f\colon X\to Z$ 和 $g\colon Y\to Z$，则

$$TC_H(f,g)=secat(\theta_{f,g})$$

证明. 只需考虑前一个定理中 (1) 与 (2) 的等价性。 □

因此，当 X、Y 和 Z 是 ANR 空间时，可以通过允许任意覆盖（不一定是开覆盖）来定义 TC_H 的广义版本：

命题 5.6。设 $X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$ 是 *ANR* 空间的一个余扇。那么，拓扑复杂度$_H(f,g)$ 是满足以下条件的最小整数 $k\in\mathbb{N}$（或无穷大）：$X\times Y$ 存在一个由 $k+1$ (f,g)-截面子集 U_0、……、U_k 构成的覆盖，且这些子集不一定是开集。

证明。这可由 [5,命题 5.10], 与上文的推论 5.5 直接得出，该推论表明 拓扑复杂度$_H(f,g)$ 与 J. González、M. Grant 和 L. Vandembroucq 意义下的相对截面范畴 截面范畴$^{f\times g}(\pi_Z)$ 相同 [6]。
□

还可以看出，TC_H 是对称的，因为映射 $f\times g$ 和 $g\times f$ 通过交换各因子的同胚 $X\times Y\cong Y\times X$ 相关联。此外，也很容易验证，对于每个空间 X.，$\mathrm{TC}_H(id_X,\ id_X)=\mathrm{TC}(X)$,

与 Pavešić 型双变量拓扑复杂度不同，这种方法的鲁棒性要强得多，正如下述结果所示：

推论 5.7. 设 $f,f'\colon X\to Z$和 $g,g'\colon Y\to Z$是连续映射，满足 $f\simeq f_{\prime}$和$g\simeq g'$。那么

$$\mathrm{TC}_H(f,g)=\mathrm{TC}_H(f',g').$$

证明。 由于 $f \simeq f'$和 $g \simeq g'$，可知 $f \times g \simeq f' \times g'$。由于 $\pi_Z \colon Z^I \to Z \times Z$是纤维化，沿 $f \times g$和 $f' \times g'$的 π_Z拉回逐纤维同伦等价（例如参见 [17, 第 2 章，第 8 节，定理 14]）。由于截面范畴在（逐纤维）同伦等价下是不变量，我们得出 $\mathrm{TC}_H(f, g) = \mathrm{TC}_H(f', g')$， 证毕。 □

6. 拓扑复杂度 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 与 $\mathrm{TC}(f,\ g)$ 的比较

在前几节中，我们介绍了双变量拓扑复杂度的两种不同表述：通过映射 $\pi_{f,\ g}$ 的真正截面定义的严格版本 $\mathrm{TC}(f,\ g)$，以及通过纤维化$\theta_{f,\ g}$ 的同伦截面定义的同伦不变版本 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$。尽管这两个不变量都衡量协调映射 f 和 g所需的代价，但它们的表现却大不相同：$\mathrm{TC}(f,\ g)$ 往往较为僵化，且可能取值为 ∞；而 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 则更灵活，但可能会丢失信息。因此，自然会想到要问这两个量之间有何关系。本节将建立它们之间的比较结果，特别指出，在有利的假设下（尤其是当 f 和 g 是纤维化时），二者相等；但一般情况下，它们也可能有很大差异。

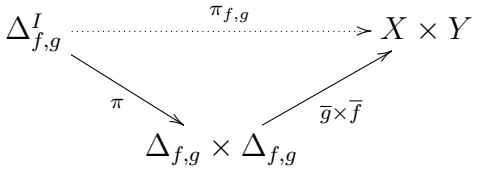
引理 6.1。 如果 f 和 g 是纤维化，那么 $\pi_{f,\ g}$ 也是纤维化，因此

$$\mathrm{TC}(f, g) = \mathrm{secat}(\pi_{f,g}).$$

证明。注意，若 $f \colon X \to Z$ 和 $g \colon Y \to Z$ 都是纤维化，则

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{f,g} & \xrightarrow{\overline{f}} & Y \\ {\scriptstyle \overline{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Z \end{array}$$

会诱导拉回映射 f 和 $\overline{g}$，而它们本身也是纤维化。因此，它们的乘积映射 $g \times f \colon \Delta_{f,\ g} \times \Delta_{f,\ g} \to X \times Y$也是纤维化。现在考虑典范路径纤维化 $\pi \colon \Delta^I_{f,\ g} \to \Delta_{f,\ g} \times \Delta_{f,\ g}$，它将路径 $\gamma = (\alpha,\ \beta)$ 映射到其端点 $(\gamma(0)\ \gamma(1))$。复合映射 $\pi_{f,\ g} = (g \times f) \circ \pi \colon \Delta^I_{f,\ g} \to X \times Y$也因此是纤维化。以下交换图概括了这一情形：



□

回想一下，*Dold* 纤维化（或弱纤维化）是满足弱覆盖同伦性质的映射 $p \colon E \to B$（详见 [2] ）。这类映射完全可由其与 Hurewicz 纤维化纤维同伦等价这一性质刻画。

我们有如下有趣的结果：

引理 6.2. 若 p 是 *Dold* 纤维化，则 截面范畴$(p) = \mathrm{secat}(p)$。

证明。 只需考虑命题 1.3(2)、命题 1.5(1)，以及 截面范畴 与secat 在 Hurewicz 纤维化这一类中一致这一事实。 □

此外，Dold 纤维化在拉回、乘积和复合下保持稳定。因此，引理 6.1 在 f 和 g 均为 Dold 纤维化时仍然成立。在研究拓扑复杂度时考虑 Dold 纤维化，主要动机之一是它们相比 Hurewicz 纤维化具有更大的灵活性。特别是，Dold 纤维化这一类足够广泛，能够包含某些并非 Hurewicz 纤维化的连续映射；这些映射通常因存在奇点或退化而不满足 Hurewicz 纤维化条件，却仍表现出良好的逐纤维同伦行为。因此，可以将截面范畴和拓扑复杂度的框架扩展到限制性更强的 Hurewicz 纤维化设定之外，这与 Pavešić 倡导的观点一致。

另一方面，如果 f 或 g 是纤维化，那么普通拉回 $\Delta_{f,g}$ 就是同伦拉回。因此，相关的须状映射 $w : \Delta_{f,g} \to E_{f,g}$ 是同伦等价。事实上，下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{f,g} & \xrightarrow[\simeq]{w} & E_{f,g} \\ & {\scriptstyle \mathrm{inc}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \theta_{f,g}} & \\ & X \times Y. & \end{array}$$

命题 6.3. 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是任意一个由连续映射构成的余扇。则 *(1)* 拓扑复杂度$_H(f,g)$ $\leq$拓扑复杂度(f,g);*(2)* 若 f 或 g 中至少一个是纤维化，则 拓扑复杂度$_H(f,g)$ $=$截面范畴$(\pi_{f,g})$;*(3)* 若 f 和 g 都是纤维化，则

$$\mathrm{TC}_H(f,g) \;=\; \mathrm{TC}(f,g).$$

证明。 为证明 (1)，考虑下列交换图

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{f,g}^I & \xleftarrow[\simeq]{c} & \Delta_{f,g} & \xrightarrow{w} & E_{f,g} \\ {\scriptstyle \pi_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle inc} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{f,g}} \\ X \times Y & = & X \times Y & = & X \times Y. \end{array}$$

这里，w 是须状映射，而 c 是一个映射，它将每个点 $(x,y) \in \Delta_{f,g}$ 映到 $(x,y)^{c(x,y)}$处的常值路径；这是一个同伦等价。因此，我们得到一串等式：

$$\mathrm{TC}_H(f,g) = \mathrm{secat}(\theta_{f,g}) \leq \mathrm{secat}(inc) = \mathrm{secat}(\pi_{f,g}) \leq \mathrm{sec}(\pi_{f,g}) = \mathrm{TC}(f,g).$$

现在验证（2）。如果其中一个映射是纤维化，那么 w 是同伦等价，并且可以直接看出 $\mathrm{TC}_H(f,\ g) = \mathrm{secat}(\pi_{f,\ g})$。

最后证明（3）。在这种情况下，须状映射也是同伦等价，并且根据引理 6.1，

$$\mathrm{TC}_H(f,g) = \mathrm{secat}(\theta_{f,g}) = \mathrm{secat}(inc) = \mathrm{secat}(\pi_{f,g}) = \mathrm{TC}(f,g).$$

□

注 6.4。 同样，上面的命题 *6.3* 对于考虑 *Dold* 纤维化而非纤维化的情形也成立。细节留给读者。

例 6.5. 不变量 拓扑复杂度(f,g) 和 拓扑复杂度$_H(f,g)$ 可能不同，甚至差异悬殊。下面列举一些不同情形，以说明这种现象：

(1) 设 $f = c_z : X \to Z$ 和 $g = c_{z'} : Y \to Z$ 是分别取不同点 $z \neq z'$ 为值的常值映射，且这些点属于 Z 的同一路径连通分支。正如注 *2.4* 中所述，此时定义严格不变量的拉回为空，因此拓扑复杂度$(f, g) = \infty$。相比之下，选取一条路径 $\gamma : [0,1] \to Z$，满足 $\gamma(0) = z$ 且 $\gamma(1) = z'$，便可得到一个连续的全局 (f, g)-运动规划器 σ: $X \times Y \to Z^I$，这表明拓扑复杂度$_H(f, g) = 0$。此例凸显了严格版本的僵化与同伦不变表述的灵活性之间的差异。

(2) 例 *2.12* 中出现了另一种标志性现象。对于映射 $f, g : S^1 \to \mathbb{C}$，由 $f(z) = z^2$ 和 $g(z) = -z^2$ 定义，我们证明了 $TC(f, g) = 1$。然而，由于 $\mathbb{C}$ 是凸集，对于每个 $(z, w) \in S^1 \times S^1$，都可以在 $f(z)$ 与 $g(w)$ 之间选取线性同伦。具体而言，一个全局的 (f, g)-运动规划器可定义为

$$\sigma(z, w)(t) = (1 - t)f(z) + tg(w) = (1 - t)z^2 - tw^2,$$

这表明 拓扑复杂度$_H(f, g) = 0$。

(3) 最后，包含映射 $\mathrm{inc}_1 : A_1 \hookrightarrow X$ 和 $\mathrm{inc}_2 : A_2 \hookrightarrow X$ 提供了一个“桥梁”示例。在这里，严格不变量恢复了经典拓扑复杂度，

$$\mathrm{TC}(\mathrm{inc}_1, \mathrm{inc}_2) = \begin{cases} \infty, & \text{if } A_1 \neq A_2 \\ \mathrm{TC}(A), & \text{if } A_1 = A_2 = A \end{cases}$$

而同伦版本则给出 *Farber* 意义下的相对复杂度 [4] *of* $A_1 \times A_2$ *in* X：

$$\mathrm{TC}_H(\mathrm{inc}_1, \mathrm{inc}_2) = \mathrm{TC}_X(A_1 \times A_2).$$

例如，对于 $\mathrm{inc}_1 = \mathrm{inc}_2 = inc : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$，严格不变量为 拓扑复杂度$(S^2) = 2$，而同伦版本则为零，拓扑复杂度$_H(\mathrm{inc}, \mathrm{inc}) = 0$，因为 $\mathbb{R}^3$ 是凸集。因此，这两个数值均有限，却编码着截然不同的信息： A 的内在复杂度与 X内部的环境代价。

总而言之，这些例子表明，拓扑复杂度(f, g) 和 拓扑复杂度$_H(f, g)$ 确实是不同的不变量，在理念和应用上彼此互补。

7. 拓扑复杂度$_H$ 与同伦距离的关系

这一同伦不变量的另一个显著特点是，它可以用 Macías-Virgós 和 Mosquera-Lois 的同伦距离来表示 [10]。给定一个连续映射组成的余扇 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，令$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ 和$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$表示典范投影。由于 $f \times g = (f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) : X \times Y \to Z \times Z$，由[10, 定理 2。7] 结合推论5.5 可得

$$\mathrm{TC}_H(f, g) = \mathrm{D}\Big(f \circ \mathrm{pr}_1,\ g \circ \mathrm{pr}_2\Big).$$

这样，同伦距离中的许多性质都可以转用于拓扑复杂度$_H$。。这里不打算列举所有这些性质，但可以举一个例子，它给出了同伦双变量拓扑复杂度中乘积的次可加性：

命题 7.1。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 和 $X' \xrightarrow{f} Z' \xleftarrow{g} Y'$ 是连续映射的余扇，且乘积 $X \times X' \times Y \times Y'$ 是正规的。则有

$$\mathrm{TC}_H(f \times f', g \times g') \leq \mathrm{TC}_H(f, g) + \mathrm{TC}_H(f', g').$$

证明。 只需考虑 [10, 定理 3.19] 以及公式 $\mathrm{TC}_H(f,\ g) = \mathrm{D}\Big(f \circ \mathrm{pr}_1,\ \ g \circ \mathrm{pr}_2\Big)$，其中 (f, g) 是任意的映射余扇。具体细节留给读者。□

将范围限制为映射 $X \to Z$（即具有公共定义域 X）时，我们得到同伦距离与同伦双变量拓扑复杂度之间的如下比较。更准确地说，我们证明，在相当温和的条件下，$\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 取值于闭区间 $[\mathrm{D}(f,\ g),\ \mathrm{D}(f,\ g)\ +\mathrm{TC}(X)],$，其长度为 $\mathrm{TC}(X)$。因此，$\mathrm{TC}(X)$ 为 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 偏离 $\mathrm{D}(f,\ g)$ 的可能程度提供了一个上界：

命题 7.2。设 $f, g\colon X \to Z$ 是映射。则

$$\mathrm{D}(f,g) \leq \mathrm{TC}_H(f,g).$$

此外，若 $X \times X$ 是正规的（例如，X 是可度量化的），则

$$\mathrm{D}(f,g) \leq \mathrm{TC}_H(f,g) \leq \mathrm{D}(f,g) + \mathrm{TC}(X).$$

证明。考虑以下连续的拉回方块

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(f,g) & \longrightarrow & E_{f,g} & \longrightarrow & Z^I \\ {\scriptstyle p_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} \\ X & \xrightarrow[\Delta_X]{} & X \times X & \xrightarrow[f\times g]{} & Z \times Z \end{array}$$

由于拉回的复合仍是拉回，且 $(f \times g) \circ \Delta_X = (f,g)$, 于是由 [10,定理 2.7] 可得 $\mathrm{D}(f,g)$ = 截面范畴 $(p_{f,g})$。由于截面范畴在拉回下不会增大（见命题 1.4），因此得到

$$\mathrm{D}(f,g) = \mathrm{secat}(p_{f,g}) \leq \mathrm{secat}(\theta_{f,g}) = \mathrm{TC}_H(f,g).$$

证明第二个结论时，结合使用 [10, 命题 3.16],中的三角不等式、[10, 命题 2.6] 以及同伦距离在前复合与后复合下的性质 [10, 命题 3.3 和命题 3.1]:

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}_H(f,g) &= \mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_1,\ g\circ \mathrm{pr}_2\Big) \\ &\leq \mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_1,\ f\circ \mathrm{pr}_2\Big) + \mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_2,\ g\circ \mathrm{pr}_2\Big) \\ &\leq \mathrm{D}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) + \mathrm{D}(f,g) \ = \ \mathrm{TC}(X) + \mathrm{D}(f,g). \end{aligned}$$

□

推论 7.3。设 $f, g\colon X \to Z$ 是连续映射，其中 $X \times X$ 是正规的。若 $f \simeq g$，则

$$\mathrm{TC}_H(f,g) \leq \mathrm{TC}(X).$$

注 7.4. 请注意，在上述推论中，我们重新得到结果 拓扑复杂度$_{Sc}(f)$ $\leq$ 拓扑复杂度(X)，其中拓扑复杂度$_{Sc}(f) :=$拓扑复杂度$_H(f, f)$ 表示按 *Scott* [15] 的意义定义的 f 的拓扑复杂度。

作为直接推论，当我们将范围限制为映射 $X \to Z$ 时，便得到拓扑复杂度的三角不等式$_H$。

命题 7.5. 设 $f, g, h\colon X \to Z$ 为映射，且 $X \times X$ 正规（例如，X 可度量化）。则

$$\mathrm{TC}_H(f,g) \leq \mathrm{TC}_H(f,h) + \mathrm{TC}_H(h,g).$$

证明. 根据同伦距离的三角不等式（见 [10,命题 3.16] ），

$$\mathrm{TC}_H(f,g) = \mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_1,\ g\circ \mathrm{pr}_2\Big) \leq \mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_1,\ h\circ \mathrm{pr}_1\Big) + \mathrm{D}\Big(h\circ \mathrm{pr}_1,\ g\circ \mathrm{pr}_2\Big).$$

由 [10,命题 3。3] 和命题7.2,

$$\mathrm{D}\Big(f\circ \mathrm{pr}_1,\ h\circ \mathrm{pr}_1\Big) \leq \mathrm{D}(f,h) \leq \mathrm{TC}_H(f,h),$$

且 $\mathrm{D}\big(h\circ \mathrm{pr}_1,\ \ g\circ \mathrm{pr}_2\big)=$拓扑复杂度$_H(h,\ \ g)$，由此证明了该结论。 □

然而，应该强调的是，$\mathrm{TC}_H(f,g)$ 并不是定义在具有固定定义域的映射$X\ \to\ Z$集合上的距离：一般而言，$\mathrm{TC}_H(f,f)\ \neq\ 0$。事实上，对于 $f\ =\mathrm{id}_X$，有 $\mathrm{TC}_H(\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)$ $=\mathrm{TC}(X)$，而且仅当 X可缩时该值才为零。实际上，正如我们此前所述，$\mathrm{TC}_H(f,f)$ 恰好等同于 Scott 的映射 [15]拓扑复杂度。

对于映射 $f\colon\ X\to Z$，我们采用如下记号

$$\mathrm{TC}_H(f):=\mathrm{TC}_H(f,id_Z).$$

注意，拓扑复杂度$_H(f)$与所谓的混合拓扑复杂度一致，该复杂度是 fScott 意义下的 [15]。根据命题6.3 ，它也可定义为

$$\mathrm{TC}_H(f)=\mathrm{secat}(\pi_f)$$

其中 $\pi_f\colon\ X^I\to X\times Z$是 Pavesic 映射，它定义了 $\mathrm{TC}(f)$。此外，$\mathrm{TC}_H(f)\ \leq$TC(f)。我们有以下推论：

推论 7.6。设 $f,g\colon\ \ X\to Z$是两个定义域相同的映射 X，且 $X\times X$是正规的。那么

$$\mathrm{TC}_H(f,g)\leq \mathrm{TC}_H(f)+\mathrm{TC}_H(g).$$

证明。 只需考虑 $h=id_Z$ 并应用三角不等式。 □

8. 拓扑复杂度 TC 的界$_H$

设 $X\ \xrightarrow{f}\ Z\ \xleftarrow{g}\ Y$为一个余扇，并令 $F\ =\ f\circ\mathrm{pr}_1$ 和 $G\ =\ g\circ\mathrm{pr}_2\colon\ X\times Y\ \to\ Z$，其中 pr_1,pr_2 是从 $X\times Y$到第一和第二因子的投影。回忆一下，$\mathrm{TC}_H(f,g)\ =\ D(F,G)$，其中 D 表示同伦距离。遵循 Macías-Virgós 和 Mosquera-Lois 的做法，定义

$$\mathcal{J}(F,G)\ =\ \mathrm{im}\Big(F^*-G^*:H^*(Z;R)\to H^*(X\times Y;R)\Big)\ \subseteq\ H^*(X\times Y;R).$$

他们的上同调定理 [10, 定理 5.2] 断言

$$\mathrm{l.c.p.}\,\mathcal{J}(F,G)\ \leq\ D(F,G)\ =\ \mathrm{TC}_H(f,g).$$

另一方面，严格双变量拓扑复杂度 $\mathrm{TC}(f,g)$ 存在一个由子模给出的上同调界

$$I_{f,g}\ =\ (f\times g)^*\Big(\ker\Delta_Z^*\Big)\ \subseteq\ H^*(X\times Y;R),$$

其中 $\Delta_Z\colon\ Z\ \to\ Z\times Z$ 是对角映射，而 $\pi_1,\pi_2\colon\ Z\times Z\ \to\ Z$ 是坐标投影。特别地，

$$\mathrm{l.c.p.}(I_{f,g})\ \leq\ \mathrm{TC}(f,g).$$

对于每个 $\alpha\in H^*(Z;R)$，我们有

$$(F,G)^*(\pi_1^*\alpha-\pi_2^*\alpha)\ =\ F^*\alpha-G^*\alpha\ \in\ \mathcal{J}(F,G).$$

此外，$\ker\Delta_Z^*$由形如 $\pi_1^*\alpha-\pi_2^*\alpha$的类的有限乘积的有限和生成（作为 $H^*(Z\times Z;\ R)$的 R–子模）。因此，$I_{f,g}\ =(f\ \times\ g)^*(\ker\ \Delta_Z^*)$是由$\mathcal{J}(F,G)$. 中元素的所有有限乘积生成的 R–子模。由于杯长下界只取决于非平凡乘积中因子的最大数量，因此可得

$$\mathrm{l.c.p.}\,\mathcal{J}(F,G)\ =\ \mathrm{l.c.p.}(I_{f,g}).$$

因此，由同伦版本和严格版本得到的上同调下界总是相同：

$$\text{l.c.p.}\,\mathcal{J}(F,G) \;=\; \text{l.c.p.}(I_{f,g}) \;\le\; \mathrm{TC}_H(f,g) \;\le\; \mathrm{TC}(f,g).$$

与严格的 Pavešić 版本类似，同伦情形也满足协作原理，但这里不需要任何纤维性假设。

命题 8.1. 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为映射余跨。那么

$$\mathrm{TC}_H(f,g) \le \min\{\mathrm{TC}_H(f),\, \mathrm{TC}_H(g)\}.$$

证明. 由于 $(f \times \mathrm{id}_Z) \circ (\mathrm{id}_X \times g) = f \times g$，取连续拉回可得

$$\begin{array}{ccccc} E_{f,g} & \longrightarrow & E_{f,\mathrm{id}_Z} & \longrightarrow & Z^I \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{f,\mathrm{id}_Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} \\ X \times Y & \xrightarrow[\mathrm{id}_X \times g]{} & X \times Z & \xrightarrow[f \times \mathrm{id}_Z]{} & Z \times Z \end{array}$$

因此，根据命题1.4

$$\mathrm{TC}_H(f,g) = \mathrm{secat}(\theta_{f,g}) \le \mathrm{secat}(\theta_{f,\mathrm{id}_Z}) = \mathrm{TC}_H(f,\mathrm{id}_Z) = \mathrm{TC}_H(f).$$

同理，$\mathrm{TC}_H(f,\ g) \le \mathrm{TC}_H(g)$。 □

注记 8.2. 在严格的 *Pavešić* 版本中，类似的不等式需要其中一条腿满足纤维性假设（例如 g 是一个纤维化），从而得到 $\mathrm{TC}(f,g) \le \mathrm{TC}(f)$。因此，同伦变体更加灵活。

在讨论更精细的界之前，我们先将同伦双变量不变量置于熟悉的 LS 型量之间。一方面，$\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 不会小于各个映射 f 和 g的范畴，因此它如实反映了每个因子中已有的内在规划成本。另一方面，$\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 的上界是组合映射 $f \times g$ 的范畴，也不超过目标 Z的通常拓扑复杂度。这些估计将 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 限定在一个已充分理解的范围内，并将在后续计算与比较中反复作为基准。

命题 8.3。 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余跨。则以下不等式成立：

(1) 拓扑复杂度$_H(f,g) \le$拓扑复杂度(Z)。*(2)* 若 Z 道路连通，则

$$\max\{\mathrm{cat}(f), \mathrm{cat}(g)\} \le \mathrm{TC}_H(f,g) \le \mathrm{cat}(f \times g).$$

证明。 (1) 由命题1.4，显然有

$$\mathrm{TC}_H(f,g) = \mathrm{secat}(\theta_{f,g}) \le \mathrm{secat}(\pi_Z) = \mathrm{TC}(Z).$$

(2) 为了证明 $\mathrm{cat}(f) \le$拓扑复杂度$(f,\ g)$，设拓扑复杂度$_H(f,\ g) = n$，并考虑 $X \times Y$的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^n$，其对应的 $(f,\ g)$-运动规划器为 $\sigma_i \colon U_i \to Z^I$。固定一点 $y_0 \in Y$，定义 $V_i := \{x \in X : (x,\ y_0) \in U_i\}$，这是 X的一个开子集，并且有一个同伦

$$H_i : V_i \times I \to Z$$

给定为 $H_i(x,\ t) := \sigma_i(x,\ y_0)(t)$。于是有 $H_i(x,\ 0) = f(x)$ 和 $H_i(x,\ 1) = g(y_0)$，这证明了 $f_{|V_i}$是零伦的。因此，$\mathrm{cat}(f) \le$拓扑复杂度$_H(f,\ g)$。利用对称性可以类似地证明不等式 $\mathrm{cat}(g) \le \mathrm{TC}(f,\ g)$。

现在，假设 $\mathrm{cat}(f\times g)=n$，并考虑 $X\times Y$ 的一个开覆盖 $\{V_j\}_{j=0}^{n}$，使得每个限制映射 $(f\times g)|_{V_j}$ 都是零伦的。由于 Z 道路连通，对于一个固定元素 $z_0\in Z$，我们可以考虑同伦

$$F_j : V_j\times I\to Z\times Z$$

使得 $F_j(x,y,0)=(f(x)\ g(y))$ 且 $F_j(x,y,1)=(z_0,z_0)$，对所有 $(x,y)\in V_j$. 我们定义σ_j：$V_j\to Z^I$ 一个 (f,g)-运动规划器，定义为

$$\sigma_j(x,y)(t):=\begin{cases}\mathrm{pr}_1(F_j(x,y,2t)), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \mathrm{pr}_2(F_j(x,y,2-2t)), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

这证明了拓扑复杂度$_H(f,g)\le\mathrm{cat}(f\times g)$，由此得出结论。 □

推论 8.4。设 $X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$是一个余扇，其中 Z是一个道路连通空间。那么，拓扑复杂度$_H(f,g)=0$ 当且仅当 f 和 g 是零伦的。

证明。若拓扑复杂度$_H(f,g)=0$，则

$$\max\{\mathrm{cat}(f),\mathrm{cat}(g)\}\le \mathrm{TC}_H(f,g)=0,$$

因此 $\mathrm{cat}(f)=\mathrm{cat}(g)=0$，且 f 和 g 都是零伦的。

反之，若 f 和 g 是零伦的，则 $f\times g$ 也为零伦。因此拓扑复杂度$_H(f,g)\le\mathrm{cat}(f\times g)=0$，结论由此得证。□

推论 8.5。设 $X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$是一个余扇，其中 Z是道路连通空间。若 f是零伦的，则 拓扑复杂度$_H$（f,g）=cat（g）。类似地，若 g是零伦的，则 拓扑复杂度$_H$（f,g）=cat（f）。

证明。只需注意，若 f是零伦的，则 cat（f）$=0$ 且 cat（$f\times g$）$\le$ cat（g）。应用命题8.3 即可得到结论。当 g 是零伦的时，同理。□

接下来的结果确立了在前复合与后复合下 $\mathrm{TC}_H(f,\ g)$ 的行为 .

命题 8.6。设 $X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$是一个余扇。

(1) 若 $u\colon X'\to X$ 和 $v\colon Y'\to Y$ 是映射，则 $TC_H(f\circ\ u,g\circ\ v)\le TC_H(f,g)$。*(2)* 若 $w\colon Z\to Z'$ 是映射，则 $TC_H(w\circ\ f,w\circ\ g)\le TC_H(f,g)$。

证明。对于 (1)，考虑到 $(f\times g)\circ(u\times v)=(f\circ u)\times(g\circ v)$，我们得到以下连续拉回

$$\begin{array}{ccccc} E_{f\circ u,g\circ v} & \longrightarrow & E_{f,g} & \longrightarrow & Z^I \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{f\circ u,g\circ v}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} \\ X'\times Y' & \xrightarrow[u\times v]{} & X\times Y & \xrightarrow[f\times g]{} & Z\times Z \end{array}$$

因此，$\mathrm{TC}_H(f\circ\ u,g\circ\ v)=$截面范畴$(\theta_{f\circ u,g\circ v})\le$截面范畴$(\theta_{f,g})=\mathrm{TC}_H(f,g)$。

对于 (2)，只需注意到存在一个典范映射 $E_{f,g}\to E_{w\circ f,w\circ g}$，使下图中的三角形交换

$$\begin{array}{ccc} E_{f,g} & \longrightarrow & E_{w\circ f,w\circ g} \\ & {\scriptstyle \theta_{f,g}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \theta_{w\circ f,w\circ g}} & \\ & X\times Y & \end{array}$$

因此，根据命题1.3，拓扑复杂度$_H(w\circ\ f,w\circ\ g)=$截面范畴$(\theta_{w\circ f,w\circ g})\le$截面范畴$(\theta_{f,g})=$拓扑复杂度$_H(f,g)$. □

推论 **y8.7.** 设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个余扇。给定子空间 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$，我们有 e

$$\mathrm{TC}_H(f_{|A}, g_{|B}) \leq \mathrm{TC}_H(f, g)$$

证明。只需在 u 时应用命题 8.6 (1) A 、$\to X$ 和 v 时： B ，$\to Y$ 分别为包含映射。□

推论 **8.8**。设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 为一个余扇。若 f 和 g 具有右同伦逆，则：

$$\mathrm{TC}_H(f, g) = \mathrm{TC}(Z).$$

特别地，拓扑复杂度$_H(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ =拓扑复杂度(X)，其中$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$： $X \times X \to X$ 表示投影映射。

证明。若 f' 和 g' 分别表示 f 和 g的右同伦逆，则应用命题8.3和命题8.6(1)可得

$$\mathrm{TC}(Z) = \mathrm{TC}_H(id_Z, id_Z) = \mathrm{TC}_H(f \circ f', g \circ g') \leq \mathrm{TC}_H(f, g) \leq \mathrm{TC}(Z).$$

□

为总结我们的研究，我们考虑映射余扇 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$，其中 Z 是一个H-群。我们用 $\mu: Z \times Z \longrightarrow Z$ 表示乘法，用 $\nu: Z \longrightarrow Z$ 表示同伦逆。我们用 e 表示单位元，并将其选作基点。与这一结构相关，我们定义差映射 $\delta: Z \times Z \to Z$，其定义为 $\delta(x, y) := \mu(x, \nu(y))$，以及它与 $f \times g$ 的复合

$$\delta_{f,g} : X \times Y \to Z, \qquad \delta_{f,g}(x, y) = \mu\Big(f(x), \nu(g(y))\Big).$$

众所周知，拓扑复杂度(Z) $= \mathrm{cat}(Z)$ 因此，由命题8.3(1)，可得拓扑复杂度$_H(f, g) \leq \mathrm{cat}(Z)$。下一个定理给出了对拓扑复杂度$_H(f, g)$的更精确估计：

定理 8.9。设 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 是一个映射余扇，其中 Z 是一个道路连通的 H-群。则

$$\mathrm{TC}_H(f, g) = \mathrm{cat}(\delta_{f,g}).$$

证明。设拓扑复杂度$_H(f, g) = n$，并取 $\{U_i\}_{i=0}^n$ 为 $X \times Y$ 的一个开覆盖，其中包含 (f, g)-运动规划器

$$\sigma_i : U_i \to Z^I$$

根据 Z 的 H-群结构，我们取一个同伦 $F: Z \times I \to Z$，使得对于所有 $z \in Z.$， $F(z, 0) = \mu(z, \nu(z))$，且 $F(z, 1) = e$。然后定义 $G_i: U_i \times I \to Z$ 为

$$G_i(x, y, t) := \begin{cases} \mu(\sigma_i(x, y)(2t), \nu(g(y))), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(g(y), 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

T这个构造定义了一个零伦$\delta_{f,g}|U_i \simeq C_e$。因此，cat$(\delta_{f,g}) \leq n.$

反过来，假设 cat$(\delta_{f,g}) = n$ ，并取 $X \times Y$ 的一个开覆盖 $\{V_j\}_{j=0}^n$ ，以及零伦

$$F_j : V_j \times I \to Z$$

其中 $F_j(x, y, 0) = \delta_{f,g}(x, y) = \mu(f(x)\ \nu(g(y)))$，且对于所有 (x, y)， $F_j(x, y, 1) = e,$。结合同伦结合性与同伦逆性质，我们可以取一个同伦

$$L : Z \times Z \times I \to Z$$

使得 $L(z, z', 0) = \mu(\mu(z, \nu(z'))\ z')$ 且 $L(z, z', 1) = z,$对所有 $(z, z') \in Z \times Z.$ 此外，根据同伦单位性质，我们还可以取另一个同伦

$$M : Z \times I \to Z$$

满足 $M(z,0) = \mu(e,z)$ 且 $M(z,1) = z$, 对所有 $z \in Z$. 然后我们通过以下公式定义一个 (f,g)-运动规划 $\sigma_j : V_j \to Z^I$

$$\sigma_j(x,y)(t) := \begin{cases} L(f(x), g(y), 1-3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \mu(F_j(x,y,3t-1), g(y)), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ M(g(y), 3t-2), & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

因此，拓扑复杂度$_H(f,\ g) \le n$，证明至此完成。 □

注 8.10。如果假设 Z 仅为一个道路连通H-空间，并赋予其一个差映射 δ，则同样的结论仍然成立。这里指的是一个连续映射 $\delta :\ Z \times Z \to Z$，满足

$$\mu \circ (\mathrm{pr}_1, \delta) \simeq \mathrm{pr}_2 \qquad \textit{and} \qquad \delta \circ \Delta_Z \simeq C_e,$$

其中，μ 是 H-空间的乘法，$\Delta_Z :\ Z \to Z \times Z$ 表示对角映射，而 $C_e :\ Z \to Z$是取单位元 e为值的常值映射。

讨论与展望

本文提出了与映射对 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$相关的拓扑复杂度双变量版本。由此得到的不变量既推广了 Farber 的经典拓扑复杂度，也推广了 Pavešić 基于映射的表述，并为衡量通过公共目标空间同步两个系统所需的代价提供了一种系统方法。它自然地融入截面范畴和严格截面数的框架；本文的构造与证明均在这一框架下统一展开，而非借助过滤版本。

该不变量的基本结构已经确立：关于 f 和 g 的对称性、次可加性、相对于前复合与后复合的行为，以及与同伦不变版本 $\mathrm{TC}_H(f,g)$ 的比较。协作原理表明，纤维化的存在可以显著降低协调的复杂度。此外，还通过零因子理想的像获得了一个上同调下界，将经典的单变量拓扑复杂度方法推广了开来。

严格表述与同伦不变表述应被视为互补的两种形式。严格版本能够检测刚性的同步要求，并且取决于映射的具体代表；而同伦不变版本则提供一个同伦稳定的下界，并且在严格不变量不具有限性的假设下仍保持有限。二者的比较阐明了纤维化与同伦不变性在双变量情形中的作用。

除了本文确立的结果之外，还有若干有待探索的方向。一个自然的问题是进一步完善上同调估计，可能涉及由 $H^*(X)$、$H^*(Y)$ 和 $H^*(Z)$ 相互作用所产生的混合代数结构；另一个方向则是发展一种真正的双变量 Lusternik–Schnirelmann 范畴概念，使其与当前框架相兼容。从另一角度来看，双变量方法提示我们，可以将其推广到其他截面方法仍然适用的情形。尤其是，单纯变体需要满足额外的相容性条件，才能保留同步和截面障碍的解释，因此不能仅通过对连续理论作形式上的转换而得到。该方向的初步研究表明，会出现一些在同伦不变情形中不存在的现象。目前正在研究其中的一些进展，相关结果将另行报告。

参考文献

[1] O. Cornea、G. Lupton、J. Oprea 和 D. Tanré。*Lusternik-Schnirelmann* 范畴。《数学调查与专著》第103卷，美国数学学会，2003。[2] A. Dold。纤维化理论中的单位分解。《数学年刊》78（1963），223–255。[3] M. Farber。运动规划的拓扑复杂度。《离散与计算几何》29（2003），211–221。[4] M. Farber。《拓扑机器人学导论》，载于《苏黎世高等数学讲座》，欧洲数学学会，苏黎世，2008。[5] J.M. García-Calcines。重新审视相对截面范畴。《数学博览》42（2024），第5期，论文编号125590，共22页。[6] J. González、M. Grant、L. Vandembroucq。截面范畴的 Hopf 不变量及其在拓扑机器人学中的应用，《数学季刊》70（4）（2019），1209–1252。[7] C. A. Ipanaque-Zapata。无碰撞同步运动规划问题中的构形空间。博士论文，圣保罗大学，2022（葡萄牙语）。[8] C. A. Ipanaque-Zapata、F. A. Torres-Estrella。相对截面数与重合性质。《拓扑方法与非线性分析》，待刊（2025），DOI：10.12775/TMNA.2025.016。[9] C. A. Ipanaque-Zapata、J. González。映射的 Higuer 拓扑复杂度。《土耳其数学杂志》 47.6 （ 2023 ）： 1616–1642。[10] E. Macías-Virgós 、D. Mosquera-Lois。映射之间的同伦距离。《剑桥哲学学会数学学报》172（2022），第1期，73–93。[11] M. Mather。《同伦论中的拉回》。《加拿大数学杂志》28（2）（1976），225–263。[12] A. Murillo、J. Wu。工作映射的拓扑复杂度。《拓扑与分析杂志》13（2021），第1期，219–238。[13] P. Pavesic。运动学映射与操作复杂度的拓扑学家视角。《当代数学》702（2018），61–83。[14] P. Pavesic。映射的拓扑复杂度。《同调、同伦及其应用》21第2期（2019），107–130。[15] J. Scott。论映射的拓扑复杂度。《拓扑学及其应用》314（2022），论文编号108094。[16] A. Schwarz。纤维空间的属。美国数学学会译丛55（1966），49–140。[17] E. H. Spanier，代数拓扑，麦格劳-希尔，纽约，1966，xviii+528 页。（麦格劳-希尔高等数学丛书）。