arXiv:2601.16075v1 [math.OA] 22 Jan 2026

谱胚的超刚性猜想

Marcel Scherer

摘要

我们证明，如果 K 是一个极点集为闭集的紧致谱体，那么 K 上连续仿射函数构成的算子系统在 C^*-代数 $C(\mathrm{ex}(K))$ 中是超刚性的。

1 引言

算子系统 *operator system* S 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的一个含幺、 $*$-闭子空间。含幺完全正映射，简称**酉完全正**。映射， $\phi: S \to \mathcal{B}(H)$，其中 H 是一个希尔伯特空间；如果 ϕ 到 $C^*(S)$ 的每个酉完全正扩张都是一个 $*$-同态，则称其具有**唯一扩张性质** （u.e.p.）。注意，根据 Arveson 扩张定理（见 [8]）， S 上的每个酉完全正映射都至少存在一个到 $C^*(S)$ 的酉完全正扩张。
唯一扩张性质的研究成果颇丰，本文将研究**超刚性算子系统**，即满足以下条件的可分算子系统：对于每个定义在 $C^*(S)$ 上的幺正 $*$-同态 π，其限制 $\pi|_S$ 都具有唯一扩张性质。Arveson 在 [1], 中引入了这类算子系统。不过请注意，Arveson 最初的定义是用逼近论的术语表述的，而其与上述表述的等价性已在 [1] 中得到证明。

要证明超刚性往往颇为微妙，因为必须控制 $C^*(S)$ 的所有 $*$-表示。Arveson 超刚性猜想或可解决这一问题：

猜想（超刚性猜想）。**可分算子系统 S 超刚性，当且仅当 $C^*(S)$ 的每个不可约表示在 S 上的限制都具有唯一扩张性质。**

下文中，如果每个不可约表示从 $C^*(S)$到 S 的限制都具有唯一扩张性质，则称算子系统 S 满足该猜想，此时 S 具有超刚性。

最近的研究表明，该猜想在所述的一般性范围内并不成立，参见 [3, 2, 12, 5], 。不过，令人稍感欣慰的是，目前已知的所有反例都有一个共同特点： $C^*(S)$ 是非交换的。这促使我们将注意力限制在交换 C^*-代数中的算子系统上，这类系统也称为

2020数学主题分类。主分类 46L05、46L07；次分类 52A41。关键词和短语。算子系统、超刚性猜想、含单位完全正、交换 C^*-代数、凸集、仿射函数、谱胚。

函数系统。
本文并非首篇采用这一观点的论文。我们简要回顾交换 C^*-代数中超刚性算子系统的现有结果，并着重说明在这一框架下开展研究的一些优势。

首先，若 $C^*(S)$ 是交换的，则可将其识别为某个紧豪斯多夫空间 X 上的 $C(X)$，因此 $C^*(S)$ 的每个不可约表示都是一个求值映射

$$e_x : C(X) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(x),\ x \in X.$$

其次，令

$$K = \{\phi : S \to \mathbb{C};\ \phi \text{ is a state}\}.$$

则 K 是一个紧凸集，我们可以考察 $A(K)$，即 K 上连续仿射函数构成的空间。记 K 的极点集为 $\mathrm{ex}(K)$，我们将 $A(K)$ 视为 $C(\mathrm{ex}(K))$ 的一个子空间，从而使其成为一个算子系统。典范映射

$$S \to A(K), s \mapsto [\phi \mapsto \phi(s)]$$

是一个具有稠密像的含幺完全等距映射。这样，关于 S 超刚性的问题便可转化为关于函数系统 $A(K)$ 的问题。

命题。 S 在其 C^*-包络 $C_e^*(S)$ 中超刚性，当且仅当 $A(K)$ 在 $C(\mathrm{ex}(K))$ 中超刚性。

由于算子系统的 C^* 包络在本命题之外不会再用到，我们不作进一步详述。对我们的目的而言，只需注意：若 S 在 $C^*(S)$ 中是超刚性的，那么 $C^*(S) = C_e^*(S)$。

这一新视角将超刚性与经典凸几何概念联系起来，例如：

命题。 $C(\mathrm{ex}(K))$ 的每个不可约表示在 $A(K)$ 上的限制具有唯一扩张性质，当且仅当 $\mathrm{ex}(K) = \overline{\mathrm{ex}(K)}$。

例如， [6], 利用这一视角将经典 Choquet 序推广为膨胀序；而在 [11], 中则证明了，对每个紧凸集 $K \subset \mathbb{R}^2$， $A(K)$ 在 $C(\mathrm{ex}(K))$ 中都是超刚性的（在这种情况下，$\mathrm{ex}(K)$ 自动是闭集）。

关于交换 C^*-代数的更多例子见 [9]: 若 $f \in C(X)$ 分离 X 中的点，且 $p, q, r \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $p \neq q$ 和 $p + q < 2r$，那么由其生成的算子系统

$$\{|f|^{2r}, \bar{f}^p f^q\}$$

在 $C(X)$中是超刚性的。
超刚性例子的另一个一般来源是乘法域：对于 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的酉完全正 ϕ，集合

$$\{x \in \mathcal{A};\ \phi(x^*)\phi(x) = \phi(x^*x) \text{ and } \phi(x)\phi(x^*) = \phi(xx^*)\}$$

是一个 C^*-代数（见 [8]）。因此，如果 $\mathcal{A}$ 由 $x_1, \ldots, x_n$生成，那么由其生成的算子系统

$$\{x_i;\ 1 \le i \le n\} \cup \{x_i^* x_i;\ 1 \le i \le n\} \cup \{x_i x_i^*;\ 1 \le i \le n\}$$

在 $\mathcal{A}$ 中是超刚性的。对这一观察的变体可以重现 [1] 中的基本例子，并且例如可以得出 $A(\mathbb{B}_d)$ 在 $C(S^{d-1})$ 中的超刚性，其中 $\mathbb{B}_d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，而 S^{d-1} 是球面。

我们以两点观察，结束对交换 C^*-代数中已知超刚性算子系统例子的列举。首先，如果 X 可数，那么 $C(X)$ 中的每个算子系统都满足 [1] 的猜想。其次，如果 S 在 $C^*(S)$ 中是超-˜ ˜刚性的，那么 $C^*(S)$ 中满足 $S \subset S$ 的每个算子系统 S 也都是超刚性的。

本文将谱胚加入到能够产生超刚性函数系统的凸集之列。回顾一下，谱胚是如下形式的集合:

$$\left\{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k;\ Q(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{k} z_i A_i \ge 0\right\},$$

其中 $A_0, A_1, \ldots, A_k$ 是自伴矩阵。这样的集合不一定是紧的，因此本文中我们始终假设其具有紧致性。以下定理即为定理 3.7。

定理。设 K 是一个紧致谱体，且 $\mathrm{ex}(K)$ 是闭的。则 $A(K)$ 在 $C(\mathrm{ex}(K))$ 中是超刚性的。

证明通过从与定义铅笔 $Q(\cdot)$ 相关联的半正定核，构造 $M_n(A(K))$ 中的正元素，即条目属于 $A(K)$ 的 $n \times n$ 矩阵来进行。具体而言，在 ∂K 的适当子集上，我们选取一个归一化映射 γ，使得 $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$，并利用它构造如下形式的核

$$(\omega, z) \mapsto \gamma(z)^* Q(x) \gamma(\omega), \qquad x \in K,$$

见第 3 节。由这些核，我们得到正元素 $A(\cdot) \in M_n(A(K))$。随后，一个关键步骤是通过 Hadamard 积估计来控制特征矩阵

$$(\chi_V)_{1 \le i,j \le n} \le A(\cdot) \circ B,$$

其中，V 是 ∂K 的一个适当子集，而 B 是利用 [10] 构造的正矩阵，并具有定量的 Perron-Frobenius 界。所需的 Perron 特征值/特征向量估计，以及有关该理论的必要背景，见下面的第 2 节。

2 Perron 特征值与特征向量

设 $A \in M_n$ 是一个元素严格为正的矩阵。根据 Perron-Frobenius 定理，谱半径

$$\rho(A) = \max\{|\mu|;\ \mu \in \sigma(A)\}$$

是 A 的一个单重特征值，并且存在唯一的归一化特征向量 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，即归一化 *Perron* 特征向量，满足对所有i都有 $x_i>0$。我们称 $\rho(A)$ 为 A 的*Perron* 特征值。特别地，如果 A 是自伴的，那么 $\rho(A)=\|A\|$。

为了证明主定理，我们需要关于 Perron 特征值以及归一化 Perron 特征向量各元素的以下界。

引理 2.1. 设 $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ 为自伴且具有严格正的元素，并假设存在常数 $0<c\le b$ 使得

$$c\le a_{i,j}\le b,\qquad 1\le i,j\le n.$$

设 x 为归一化 *Perron* 特征向量，λ 为 A的 *Perron* 特征值。那么，对于所有 $1\le i\le n$,

$$\tfrac{c}{b\sqrt{n}}\le x_i\le\tfrac{b}{c\sqrt{n}},$$

and

$$nc\le\lambda.$$

特别地，对于所有 $1\le i,j\le n$,

$$\tfrac{c^3}{b^2}\le\langle\lambda xx^*e_i,e_j\rangle$$

对于所有 $1\le i,j\le n$。

证明. 采用上述记号，令 $x_l=\min_j\{x_j\}$ 且 $x_k=\max_j\{x_j\}$。由于$Ax=\lambda x$ 且 $c\le a_{k,\,i}\le b$，我们有

$$\lambda x_k=\sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i\le b\|x\|_1$$

and

$$\lambda x_l=\sum_{i=1}^n a_{l,i}x_i\ge c\|x\|_1.$$

因此,

$$\lambda x_k\le b\|x\|_1=\tfrac{b}{c}c\|x\|_1\le\tfrac{b}{c}\lambda x_l,$$

所以 $x_k\le\frac{b}{c}x_l$。利用 $\|x\|_2=1$，我们得到

$$\tfrac{nc^2}{b^2}x_k^2\le nx_l^2\le 1\le nx_k^2\le\tfrac{nb^2}{c^2}x_l^2,$$

从而

$$\tfrac{c}{b\sqrt{n}}\le x_l\le x_k\le\tfrac{b}{c\sqrt{n}}.$$

对于特征值的界，令 $\mathbf{1}=(1,\dots\dots,1)^T$。由于 $A\mathbf{1}$ 的每个元素都至少为nc，因此我们有

$$\|A\mathbf{1}\|_2\ge nc\|\mathbf{1}\|_2,$$

因此

$$nc\le\tfrac{\|A\mathbf{1}\|_2}{\|\mathbf{1}\|_2}\le\|A\|=\lambda.$$

最后，$\langle\lambda xx^*e_i,\ e_j\rangle=\lambda x_ix_j\ge(nc)\left(\frac{c}{b\sqrt{n}}\right)=\frac{c^3}{b^2}$。

□

3 谱胚

令 Sym_m 为实对称 $m \times m$ 矩阵的集合，并令 $\mathrm{Sym}_m^+ \subset \mathrm{Sym}_m$ 为半正定矩阵锥。给定自伴矩阵A_0，……，A_k，属于 M_m，映射

$$Q : \mathbb{R}^k \to M_m, (z_1, \ldots, z_k) \mapsto A_0 + \sum_{i=1}^{k} z_i A_i$$

称为矩阵铅笔，而集合

$$K = \{z \in \mathbb{R}^k;\ Q(z) \geq 0\}$$

称为谱胚。若矩阵 $A_0, \ldots, A_k$ 属于对称矩阵空间 Sym_m，则铅笔 Q称为对称铅笔。显然， K 是凸且闭的，但不一定是紧的或非空的。由于这些情形与超刚性无关，本文将始终假设 K 是紧且非空的。

众所周知，对每个谱胚 K，都存在一个对称铅笔 $\tilde{Q}$，使得

$$K = \{z \in \mathbb{R}^k;\ \tilde{Q}(z) \geq 0\}.$$

事实上，设 $A_0, \ldots, A_k$ 为自伴矩阵，且 Q 如上所述。令 $A_i = X_i + iY_i$满足 $X_i = \mathrm{Re}(A_i)$ 和 $Y_i = \mathrm{Im}(A_i)$（逐项取实部和虚部），于是 $X_i, Y_i \in M_m(\mathbb{R})$。定义对称铅笔

$$\tilde{Q}(z) = \begin{pmatrix} X_0 & -Y_0 \\ Y_0 & X_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{k} z_i \begin{pmatrix} X_i & -Y_i \\ Y_i & X_i \end{pmatrix}.$$

那么， $Q(z) \geq 0$ 当且仅当 $Q(z) \geq 0$，因此

$$K = \{z \in \mathbb{R}^k;\ Q(z) \geq 0\} = \{z \in \mathbb{R}^k;\ \tilde{Q}(z) \geq 0\}.$$

因此，在本文余下部分中，我们可以并且将假设铅笔 Q是对称的。

由于严格正定矩阵构成的锥是开集，我们有

$$\ker(Q(z)) \neq \{0\}$$

对所有 $z \in \partial K$均成立。因此存在一个（不一定连续的）映射

$$\gamma : \partial K \to \{z \in \mathbb{R}^m;\ \|z\|_2 = 1\}$$

使得对所有 $z \in \partial K$， $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$。对于 $z \in \mathbb{R}^k$，定义

$$k_z^\gamma : \partial K \times \partial K \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \gamma(y)^* Q(z) \gamma(x).$$

不难验证，对于每个 $z \in K$， k_z^γ 核都是半正定的。因此，给定 $t_1, \ldots, t_n \in \partial K$，映射

$$A : K \to M_n, z \mapsto (k_z^\gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n},$$

是一个连续仿射函数，对于所有 $z \in K$，都有 $A(z) \geq 0$ 。此外，如果x, $y \in \partial K$，那么

$$k_x^\gamma(x,y) = 0 \qquad \text{and} \qquad k_y^\gamma(x,y) = 0.$$

不过，就我们的目的而言，需要 γ 连续，但一般来说，不能指望在整个 ∂K 上找到连续的选择。因此，我们按照核的维数对边界进行分解。令

$$K_i = \{z \in \partial K;\ \dim\ker(Q(z)) = i\}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

于是， $\partial K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ 与集合 K_i 两两不交。注意，若 $K_m \neq \emptyset$ 且 $z \in K_m$, 则 $Q(z) = 0$, 因此对每个 $\omega \in K$ 和每个 $t \leq 1$,

$$Q(\omega + t(z-\omega)) = A_0 + \sum_{i=1}^{k} (\omega_i + t(z_i - \omega_i))A_i = Q(\omega) - tQ(\omega) = (1-t)Q(\omega) \geq 0$$

因此，对所有 $t \leq 1$， $\omega + t(z-\omega) \in K$，而 K 的紧致性迫使 $K = \{z\}$。

引理 3.1. 对于 $x \in \mathrm{ex}(K)$，令 $P \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 为投影到$\ker(Q(x))$上的投影。则

$$\{x\} = K \cap \{z \in \mathbb{R}^k;\ PQ(z)P = 0\}.$$

证明。 固定 $x \in \mathrm{ex}(K)$，并令 P 为投影到 $\ker(Q(x))$ 上的投影。令

$$F_x = \{z \in K;\ PQ(z)P = 0\}.$$

由于对 $z \in K$ 有 $Q(z) \geq 0$，我们得到

$$F_x = \{z \in K;\ PQ(z)P = 0\} = \{z \in K;\ \ker(Q(x)) \subset \ker(Q(z))\}.$$

接下来证明 F_x 是 K的一个面。设 z_1， $z_2 \in K$， $\omega \in F_x$， $s \in (0, 1)$，使得 $\omega = sz_1 + (1-s)z_2 \in F_x$。 然后，利用 $Q(\cdot)$ 是仿射的这一点，

$$0 = PQ(\omega)P = sPQ(z_1)P + (1-s)PQ(z_2)P.$$

两个加项均为半正定，因此每一项都必须为 0，即 z_1， $z_2 \in F_x$。 因此 F_x 是 K的一个面。

Let

$$C = A_0 + \mathrm{span}\{A_1, \ldots, A_k\},$$

Sym^m 的一个仿射子空间，并定义

$$L : K \to \mathrm{Sym}_m^+, z \mapsto Q(z).$$

那么 L 是仿射的，且 $L(K) = \mathrm{Sym}_m^+ \cap C$。此外， L 是单射（这可由 K 是紧的这一假设推出）。

由于 L 是从 K 到 $L(K)$ 的仿射双射，它将面映射为面，并保持最小面不变。特别地， $L(F_x)$ 是 $L(K)$ 的一个面，并且

$$L(\mathrm{face}_K(x)) = \mathrm{face}_{L(K)}(Q(x)),$$

其中，$\mathrm{face}_X(Y)$ 表示包含 Y 的 X 的最小面。
众所周知（参见 [7, 命题10.1.2]），Sym_+^m 的所有面都具有以下形式

$$\{A \in \mathrm{Sym}_m^+;\ U \subset \ker(A)\}$$

对于某个子空间 $U \subset \mathbb{R}^m$。因此

$$\mathrm{face}_{\mathrm{Sym}_m^+}(Q(x)) = \{A \in \mathrm{Sym}_m^+;\ \ker(Q(x)) \subset \ker(A)\}.$$

由 [14,命题 1],

$$\mathrm{face}_{\mathrm{Sym}_m^+ \cap C}(Q(x)) = \mathrm{face}_{\mathrm{Sym}_m^+}(Q(x)) \cap C.$$

由于 $\mathrm{Sym}_m^+ \cap C = L(K)$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{face}_{L(K)}(Q(x)) &= \mathrm{face}_{\mathrm{Sym}_m^+}(Q(x)) \cap C = \{A \in \mathrm{Sym}_m^+;\ \ker(Q(x)) \subset \ker(A)\} \cap C \\ &= \{A \in L(K);\ \ker(Q(x)) \subset \ker(A)\} \\ &= L(\{z \in K;\ \ker(Q(x)) \subset \ker(Q(z))\}) = L(F_x).\end{aligned}$$

因此,

$$L(\mathrm{face}_K(x)) = \mathrm{face}_{L(K)}(Q(x)) = L(F_x).$$

由 L 的单射性可得 $\mathrm{face}_K(x) = F_x$。由于 x 是 K 的一个极点，因此 $\mathrm{face}_K(x) = \{x\}$，进而 $F_x = \{x\}$，证毕。 □

接下来我们证明，每个 K_i 在 $\mathbb{R}^k$中都是局部闭的，即它是 $\mathbb{R}^k$的一个闭子集与一个开子集的交集。

引理 3.2. 对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，集合

$$K_i = \{z \in \partial K;\ \dim\ker(Q(z)) = i\}$$

在 $\mathbb{R}^k$中是局部闭的。特别地，对每个 $x \in K_i$，存在一个闭集$F \subset \mathbb{R}^k$ 使得 $x \in F \subset K_i$，并且存在 x 的一个邻域 U 使得$U \cap K_i \subset F$。

证明。对于 $j = 1, \ldots, m$ 集合

$$E_j = \bigcup_{n=j}^{m} K_n = \{z \in \partial K;\ \dim\ker(Q(z)) \geq j\}.$$

由于 $Q(\cdot)$是连续的，且 ∂K 是闭集，因此每个 E_j 都是闭集。因此 K_i 是一个开集与一个闭集的交集:

$$K_i = E_i \cap (\mathbb{R}^k \setminus E_{i+1}),$$

这意味着 K_i 是局部闭的。
对于附加的断言，固定 $x \in K_i$，并令 $\epsilon > 0$ 满足 $B_\epsilon(x) \subset (\mathbb{R}^k \setminus E_{i+1})$。设

$$F = E_i \cap \overline{B_{\epsilon/2}(x)}.$$

那么 F 在 $\mathbb{R}^k$ 中是闭的，并且

$$F \subset E_i \cap (\mathbb{R}^k \setminus E_{i+1}) = K_i.$$

此外，

$$B_{\epsilon/2}(x) \cap K_i \subset F.$$

□

引理 3.3. 对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}, x \in K_i \cap \mathrm{ex}(K)$ 和 $y \in K \setminus \{x\}$，存在一个开集 $U \subset \mathbb{R}^k$，满足 $x \in U$，并且存在一个连续映射 $\gamma\colon U \cap K_i \to \mathbb{R}^m$，使得

(i) $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$ *for all* $z \in U \cap K_i$,

(ii) $\|\gamma(z)\|_2 = 1$ 对所有 $z \in U \cap K_i$ 均成立,

(iii) $0 < \langle Q(y)\gamma(z), \gamma(\omega)\rangle$ *for all* $\omega, z \in U \cap K_i$.

证明。我们知道，若 $K_m \neq \emptyset$，则对于某个 $z \in \mathbb{R}^k$ 有 $K = \{z\}$，此时无需证明。因此我们可以假设 $K_m = \emptyset$。

固定 $i \in \{1, \dots, m-1\}$，并令 $x \in K_i \cap \mathrm{ex}(K)$。记 $Q(z)$ 的特征值为 $\lambda_1(z) \leq \cdots \leq \lambda_m(z)$。由于 $Q(\cdot)$ 是连续且对称的，函数$z \mapsto \lambda_k(z)$ 连续，见 [13, 第 1.3 节。3]。因为 $x \in K_i$ 且 $Q(x) \geq 0$，所以我们有

$$\lambda_1(x) = \cdots = \lambda_i(x) = 0, \qquad \lambda_{i+1}(x) > 0.$$

选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varepsilon < \lambda_{i+1}(x)$。由连续性可知，存在 x 的一个开邻域U_0，使得对所有 $z \in U_0$ 都有

$$|\lambda_i(z)| < \varepsilon \quad \text{and} \quad \lambda_{i+1}(z) > \varepsilon.$$

特别地，对于每个$z \in U_0$，0 都与 $Q(z)$ 的其余谱分离。因此，黎斯谱投影

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varepsilon} (wI - Q(z))^{-1}\, dw$$

有定义，且关于 $z \in U_0 \cap K_i$连续。此外，对于 $z \in U_0 \cap K_i$，有

$$\operatorname{im} P(z) = \ker(Q(z)), \qquad \operatorname{rank} P(z) = i,$$

因为在此情形下， $Q(z)$ 在圆盘 $B_\epsilon(0)$ 内唯一的特征值是 0，其重数为 i。

设 P 为投影到 $\ker(Q(x))$ 上的投影。根据引理 3.1，有 $PQ(y)P \neq 0$。因此存在一个 $0 \neq v \in \ker(Q(x))$，使得

$$0 < \langle Q(y)v, v\rangle.$$

定义

$$g(z) = P(z)v, \qquad z \in U_0.$$

则 g 连续，且 $g(x) = P(x)v = v \neq 0$。因此，存在 x 的一个开邻域 $U \subset U_0$，使得对于所有 $z \in U$，$g(z) \neq 0$，并且

$$0 < \langle Q(y)g(z), g(\omega)\rangle \qquad (z, \omega \in U),$$

由 g 的连续性。
最后，对于 $z \in U \cap K_i$，令

$$\gamma(z) = \tfrac{g(z)}{\|g(z)\|_2}.$$

则 γ 在 $U \cap K_i$ 上连续，满足 $\|\gamma(z)\|_2 = 1$，并且由于对于 $z \in U \cap K_i$，$g(z) \in \mathrm{im}P(z) = \ker(Q(z))$，我们得到 $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$。此外，对于所有 z，$\omega \in U \cap K_i$，

$$\langle Q(y)\gamma(z), \gamma(\omega)\rangle = \frac{\langle Q(y)g(z), g(\omega)\rangle}{\|g(z)\|_2 \|g(\omega)\|_2} > 0$$

□

引理 3.4。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}, x \in K_i \cap \mathrm{ex}(K)$ 和 $y \in K \setminus \{x\}$，存在一个子集 $F \subset K_i$，它在 $\mathbb{R}^k$ 中是闭的；并且存在 U 的一个邻域 U，使得 $U \cap K_i \subset F$，以及一个连续映射 $\gamma : F \to \mathbb{R}^m$，使得
(1) $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$ 对所有 $z \in F$
都成立，*(2)* $\|\gamma(z)\|_2 = 1$ 对所有
$z \in F$ 都成立，*(3)* $0 < \inf_{\omega,\ z \in F} k_y^\gamma(\omega,$
$z)$。
证明。令 U 和 γ： $U \cap K_i \to \mathbb{R}^m$ 如引理 3.3 中所述。选择 $\epsilon > 0$ 使得 $B_\epsilon(x) \subset U$。

根据引理 3.2，存在一个闭集 $\tilde{F} \subset \mathbb{R}^k$ 以及 x 的一个邻域 $\tilde{U}$，使得 $\tilde{F} \subset K_i$ 和 $\tilde{U} \cap K_i \subset F$。
令 $F = \tilde{B}_\epsilon(x) \cap F$。那么 $\tilde{U} \cap B_\epsilon(x)$ 是 x的一个邻域，并且

$$(\tilde{U} \cap B_\epsilon(x) \cap K_i) \subset F.$$

此外，$\gamma|_F$ 定义良好、连续，并满足 (1) 和 (2)。对于 (3)，注意到 $F \subset U \cap K_i$，因此由引理 3.3 可得

$$k_y^\gamma(\omega, z) = \langle Q(y)\gamma(\omega), \gamma(z)\rangle > 0$$

对所有 ω，$z \in F$成立。映射 $(\omega,\ z) \mapsto k_y^\gamma(\omega,\ z)$ 是连续的，且 $F \times F$是紧集。因此，在 $F \times F$ 上的下确界可以取到且严格为正，即

$$\inf_{\omega, z \in F} k_y^\gamma(\omega, z) > 0.$$

□

设 H 为一个希尔伯特空间，$\pi : C(\mathrm{ex}(K)) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个含幺 $*$-同态。设 $A(K)$ 为 K 上的连续仿射函数，且 $\phi : C(\mathrm{ex}(K)) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个含幺完全正映射，使得对于所有 $f \in A(K)$，都有 $\pi(f) = \phi(f)$。对于 $F \subset \mathbb{R}^k$ 博雷尔，我们分别通过与 π 和 ϕ 对应的唯一正算子值测度来定义 $\pi(\chi_F)$ 和 $\phi(\chi_F)$。回想一下，我们假设谱胚 K 是紧的。

引理 3.5. 假设 $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$，并令 π 和 ϕ 如上所述。令 $F \subset \partial K$ 为闭集，并假设 $\gamma : F \to \mathbb{R}^m$ 连续，且 $\gamma(z) \in \ker(Q(z))$，并且对所有 $z \in F$，$\|\gamma(z)\|_2 = 1$。令 $y \in \mathrm{ex}(K) \setminus F$，使得

$$\inf_{\omega, z \in F} k_y^\gamma(\omega, z) > 0.$$

于是存在一个 U 邻域，使得 y 在 $\mathbb{R}^k$ 中

$$\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F) = 0.$$

证明。 证明分为五个步骤:
我们首先用有限多个集合 $F_1, \ldots, F_n$ 覆盖 F，使得对角值 $k_z^\gamma(x_i, x_i)$ 在这些集合上都一致地较小（步骤 1），并将这个有限集合上的核编码为矩阵值映射 $A(z) = (k_z^\gamma(x_i, x_j))_{1 \le i,j \le n}$（步骤 2）。
在步骤 3 中，我们利用既定假设和连续性，将 $A = A^+ + A^-$ 分解，其中负部 A^- 的范数较小。
接下来，我们通过与 $\mathrm{Int}(K)$ 中的一个点作适当的凸组合，选取一个 U 邻域（步骤 4）。

最后，在步骤 5 中，我们应用佩龙–弗罗贝尼乌斯理论，构造一个半正定矩阵 B，使得

$$(\chi_{U \cap K})_{1 \le i,j \le n} \le \frac{1}{1-s} B \circ A|_K.$$

应用 ϕ 并通过 $(\pi(\chi_{F_1}) \ldots, \pi(\chi_{F_n}))$ 进行压缩，可得如下形式的估计 $\|\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F)\| \le C\,\varepsilon$；令 $\varepsilon \to 0$，即可得到所需结论。

那么，我们先固定 $\epsilon > 0$。
步骤 1。沿用定理陈述中引入的记号，对 $x \in F$ 定义

$$U_x = \{z \in K;\ k_z^\gamma(x, x) < \epsilon\}.$$

由于 $z \mapsto k_z^\gamma(x, x) = \gamma(x)^* Q(z)\gamma(x)$ 连续，因此每个 U_x 都是 K 中的开集。此外，由于 $k_x^\gamma(x, x) = 0$ 对 $x \in F$ 成立，因此 $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$。由于 K 是紧集且 F 是闭集，F 也是紧集，因此存在 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

定义博雷尔集

$$F_1 = F \cap U_{x_1}, \qquad F_i = F \cap \left(U_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} U_{x_j} \right) \qquad 2 \le i \le n.$$

那么 $F_1, \ldots, F_n$ 是互不相交的博雷尔集，$F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ 并且

$$\sup_{z \in F_i} k_z^\gamma(x_i, x_i) \le \epsilon, \qquad 1 \le i \le n.$$

步骤 2。考虑仿射矩阵值映射

$$A : \mathbb{R}^k \to M_n, z \mapsto (k_z^\gamma(x_i, x_j))_{1\le i,j\le n}.$$

由于 $k_z^\gamma(\cdot,\ \cdot)$ 对所有 $z \in K$ 都是定义在 $F \times F$ 上的半正定核，因此限制 $A|_K$ 是 $M_n(A(K))$ 中的一个正元素。

步骤 3。根据假设，并且由于对所有 $z \in F$ 都有 $\|\gamma(z)\|_2 = 1$，

$$0 < \inf_{\omega,z\in F} k_y^\gamma(\omega, z) \le \sup_{\omega,z\in F} k_y^\gamma(\omega, z) \le \|Q(y)\| < \infty.$$

由 γ 的连续性和 F 的紧致性可知，存在 y 的一个邻域 V 以及数值 $0 < c \le b$，使得对所有 $z \in V$:

$$0 < c \le \inf_{\omega,x\in F} k_z^\gamma(\omega, x) \le \sup_{\omega,x\in F} k_z^\gamma(\omega, x) \le b < \infty.$$

由于 $Q(\cdot)$ 连续且 $Q(y) \ge 0$，因此对每个 $\alpha > 0$，都存在 y 的一个邻域 V_α，使得对所有 $z \in V_\alpha$:

$$\left\| \sum_{\lambda\in\sigma(Q(z)),\ \lambda<0} \lambda P_\lambda(z) \right\| < \alpha,$$

其中 $P_\lambda(z)$ 表示对应于 λ 的 $Q(z)$ 的谱投影。出于计算方面的原因，我们现在固定

$$\alpha := \tfrac{c^3}{16(b+c)^2}$$

并记为 $V = V_\alpha$。注意，由于 $\|\gamma(\cdot)\|_2 = 1$，对所有 $z \in V$ 和 $x,\ \omega \in F$，我们有:

$$\left| \gamma(\omega)^* \left[\sum_{\lambda\in\sigma(Q(z)),\lambda<0} \lambda P_\lambda(z) \right] \gamma(x) \right| \le \tfrac{c^3}{16(b+c)^2} = \alpha. \tag{1}$$

对于 $z \in V$，写出谱分解

$$X(z) = \sum_{\lambda\in\sigma(Q(z)),\lambda<0} \lambda P_\lambda(z), \qquad Y(z) = \sum_{\lambda\in\sigma(Q(z)),\lambda>0} \lambda P_\lambda(z),$$

使得 $X(z) \le 0 \le Y(z)$，且 $Q(z) = X(z) + Y(z)$。令 Γ_n: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{mn}$ 为等距映射

$$\Gamma_n(t_1, \dots, t_n) = (t_1\gamma(x_1), \dots, t_n\gamma(x_n)).$$

那么，对于 $z \in V$ 和（$\mathbf{1}$）$= (\mathbf{1})_{1\le i,j\le n}$,

$$\begin{aligned} A(z) &= (\gamma(x_j)^* Q(z) \gamma(x_i))_{1\le i,j\le n} = \Gamma_n^*[(\mathbf{1}) \otimes Q(z)]\Gamma_n \\ &= \Gamma_n^* \left[(\mathbf{1}) \otimes X(z)\right] \Gamma_n + \Gamma_n^* \left[(\mathbf{1}) \otimes Y(z)\right] \Gamma_n \\ &=: A^-(z) + A^+(z) \end{aligned}$$

~对于 $z \in V \cap V$，利用 k_z^γ 的界和式 (1)，我们对所有 i, j 得到：

$$\begin{aligned}(A^+(z))_{i,j} = (\Gamma_n^* [(\mathbf{1}) \otimes Y(z)] \Gamma_n)_{i,j} &= \gamma(x_j)^* Q(z) \gamma(x_i) - (\Gamma_n^* [(\mathbf{1}) \otimes X(z)] \Gamma_n)_{i,j} \\ &= k_z^\gamma(x_i, x_j) - \gamma(x_j)^* \left[\sum_{\lambda \in \sigma(Q(z)), \lambda < 0} \lambda P_\lambda \right] \gamma(x_i) \\ &\geq c - \alpha > 0,\end{aligned}$$

因为 $\alpha = \frac{c^3}{16(b+c)^2} \leq \frac{c}{2}$，同理

$$(A^+(z))_{i,j} = (\Gamma_n^* [(\mathbf{1}) \otimes Y(z)] \Gamma_n)_{i,j} \leq b + \alpha$$

因此，$A^+(z) = \Gamma_n^* [(\mathbf{1}) \otimes Y(\omega)] \Gamma_n$ 的各项均介于 $c - \alpha$ 和 $b + \alpha$之间，特别地，它们均严格为正，因此存在一个 Perron 特征值 λ_z 以及一个 $A^+(z)$的归一化特征向量 p_z；根据引理 2.1，它们满足

$$(\lambda_z p_z p_z^*)_{i,j} \geq \frac{(c-\alpha)^3}{(b+\alpha)^2} =: \tilde{c}. \tag{2}$$

由于 $\alpha \leq c/2$，我们有

$$\tilde{c} \geq \frac{(c/2)^3}{(b+c)^2} = \frac{c^3}{8(b+c)^2} = 2\alpha,$$

因此，结合等式 (1) 和等式 (2)，得到：

$$(\lambda_z p_z p_z^* + A^-(z))_{i,j} = (\lambda_z p_z p_z^* + \Gamma_n^* [(\mathbf{1}) \otimes X(z)] \Gamma_n)_{i,j} \geq \tilde{c} - \alpha \geq \alpha \tag{3}$$

~对所有 $z \in V \cap V$均成立。

~~步骤 4~~。令 $U = V \cap V$。选取 $\omega_1 \in U \cap \mathrm{Int}(K)$，这是可行的，因为根据假设，~Int(K) $\neq \emptyset$，且 U 是 y的一个邻域。由于 $y \in \partial K$，我们可以~选取 $\omega_2 \in U \setminus K$ 和 $s \in (0,1)$，使得

$$y = s\omega_1 + (1-s)\omega_2.$$

~选择 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(\omega_1) \subset \mathrm{Int}(K)$ 且 $B_\delta(y) \subset U$，并定义

$$U = \{s\omega + (1-s)\omega_2;\ \omega \in B_\delta(\omega_1)\} = y + sB_\delta(0) = B_{s\delta}(y) \subset \tilde{U}. \tag{4}$$

则 U 是 y的一个开邻域。

步骤 5。回顾一下，我们将 $A(\omega_2)$ 分解为（省略对 ω_2 的记号依赖）一个正算子 A^+ 和一个负算子 A^-。此外，A^+ 仅具有严格正的元素，并且存在一个 Perron 特征值 λ及其对应的归一化特征向量 p，使得对于所有 i, j:

$$\left(\lambda p p^* + A^-\right)_{i,j} \geq \alpha.$$

因此，$\lambda p p^* + A^-$ 具有严格正的元素，并且恰有一个严格正特征值，因为

$$\langle (\lambda p p^* + A^-)x, x \rangle \leq 0$$

对于所有 $x \perp p$ 都成立。因此，根据 [10, 定理 2，7], $\lambda pp^* + A^-$ 的 Hadamard逆 B 是半正定的。因此，对于所有 $z \in K$， $B \circ A(z) \geq 0$ 。此外，由于 $A^+ - \lambda pp^* \geq 0$ ，因此 $B \circ (A^+ - \lambda pp^*) \geq 0$,

$$(\mathbf{1}) = B \circ (\lambda pp^* + A^-) \leq B \circ (A^+ + A^-) = B \circ A(\omega_2).$$

现在令 $x \in U$。由等式 (4)，我们可以将 $x = s\omega + (1-s)\omega_2$ 写成某个 $\omega \in B_\delta(\omega_1) \subset \mathrm{Int}(K)$。利用 $B \circ A(\omega) \geq 0$ ，我们得到

$$(1-s)(\mathbf{1}) \leq (1-s)B \circ A(\omega_2) + sB \circ A(\omega) = B \circ A(x).$$

因此,

$$(\chi_{U \cap K})_{1 \leq i,j \leq n} \leq \tfrac{1}{1-s} B \circ A|_K$$

应用酉完全正映射 ϕ，利用 $\phi(\chi_{U \cap K}) = \phi(\chi_U)$，并通过 $\pi(\chi_F) = \sum_{i=1}^n \pi(\chi_{F_i})$ 压缩，我们得到

$$\begin{aligned}\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F) &= (\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))\, \phi((\chi_U)_{1 \leq i,j \leq n})(\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))^* \\ &\leq (\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))\, \phi\left(\frac{1}{1-s} B \circ A|_K\right) (\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))^*.\end{aligned}$$

由于 $\phi = \pi$ 在 $A(K)$ 上，右侧等于

$$\frac{1}{1-s} (\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))\, \pi(B \circ A|_K)\, (\pi(\chi_{F_1}), \ldots, \pi(\chi_{F_n}))^* = \frac{1}{1-s} \bigoplus_{i=1}^n \pi\big(\chi_{F_i} (B \circ A)_{i,i}\big),$$

因为集合 F_i 互不相交，且 π 是一个 $*$-同态。取范数可得

$$\|\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F)\| \leq \frac{1}{1-s} \max_{1 \leq i \leq n} \|\chi_{F_i} (B \circ A)_{i,i}\|_\infty.$$

由于 B 是 $\lambda pp^* + A^-$ 的 Hadamard逆，且由等式 (3) $(\lambda pp^* + A^-)_{i,\,i} \geq \alpha$，我们有 $B_{i,\,i} \leq \alpha^{-1}$，因此

$$\|\chi_{F_i} (B \circ A)_{i,i}\|_\infty \leq \alpha^{-1} \|\chi_{F_i} A_{i,i}\|_\infty.$$

但是 $A_{i,\,i}(z) = k_z^\gamma(x_i,\ x_i)$，并且根据构造，$0 < \sup_{z \in F_i} k_z^\gamma(x_i,\ x_i) \leq \epsilon$。因此

$$\begin{aligned}\|\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F)\| &\leq \tfrac{1}{1-s} \max_{1 \leq i \leq n} \|\chi_{F_i} (B \circ A)_{i,i}\|_\infty \\ &\leq \tfrac{1}{\alpha(1-s)} \max_{1 \leq i \leq n} \|\chi_{F_i} (A)_{i,i}\|_\infty \\ &\leq \tfrac{1}{\alpha(1-s)} \epsilon.\end{aligned}$$

由于 b，c，因此 α、s 和 U 也都独立于 ϵ，我们得出

$$\|\pi(\chi_F)\phi(\chi_U)\pi(\chi_F)\| = 0.$$

□

证明 $A(K)$ 超刚性的最后一步纯粹属于测度论范畴，不涉及任何谱半代数结构。事实上，作为基础的分离原理似乎本身就具有独立的研究价值，也很可能对当前情形之外的超刚性问题有所助益。因此，我们以一般形式陈述最后一步。

定理 3.6。设 X 是一个紧致可度量空间，H 是一个希尔伯特空间。设 $\pi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个酉元 $*$- 同态，并设 $\phi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个酉完全正映射。假设对于任意两个不同的点 x、$y \in X$，都存在不相交的开邻域 U 和 V，分别包含 x 和 y，使得

$$\pi(\chi_U)\,\phi(\chi_V)\,\pi(\chi_U) = 0.$$

那么 $\phi = \pi$ 在 $C(X)$ 上。

证明。使用上述记号，我们先证明，对于任意两个不相交的开集 $U, V \subset X$，有

$$\phi(\chi_V)\,\pi(\chi_U) = 0 \qquad \text{and} \qquad \pi(\chi_U)\,\phi(\chi_V) = 0. \tag{5}$$

取不相交的开集 $U, V \subset X$，并设 $M \subset U$ 是紧的。对于每个 $x \in M$ 和 $y \in V$，选择不相交的开邻域 $U_{x,y}$ 和 $V_{x,y}$，分别包含 x 和 y，使得 $V_{x,y} \subset V$ 并且

$$\pi(\chi_{U_{x,y}})\phi(\chi_{V_{x,y}})\pi(\chi_{U_{x,y}}) = 0.$$

取定 $y \in V$。由 M 的紧致性可知，我们可以用有限多个集合覆盖 M：$U_{x_1,y}, \ldots, U_{x_n,y}$，并令

$$U_y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i,y}, \qquad V_y = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i,y}.$$

于是 $M \subset U_y$ 且 $y \in V_y$。此外，对每个 i，我们有

$$\pi(\chi_{U_{x_i,y}})\phi(\chi_{V_y})\pi(\chi_{U_{x_i,y}}) = 0,$$

因为 $V_y \subset V_{x_i,\,y}$。利用 [4, 推论 1.2]，我们得到

$$0 \le \pi(\chi_M)\phi(\chi_{V_y})\pi(\chi_M) \le \pi(\chi_{U_y})\phi(\chi_{V_y})\pi(\chi_{U_y}) = 0.$$

由于 $\phi(\chi_{V_y}) \ge 0$，这意味着

$$\phi(\chi_{V_y})\pi(\chi_M) = 0.$$

现在，$\{V_y;\ \ y \in V\}$ 是 V的开覆盖。由于 X 是可度量的，它是林德勒夫空间，因此存在 $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ 于 V中，使得 $V \subset \bigcup_{j\ge1} V_{y_j}$。由于根据选择，对于所有$j$都有 $V_{y_j} \subset V$，我们甚至有 $V = \bigcup_{j\ge1} V_{y_j}$。令 $W_N = \bigcup_{j=1}^{N} V_{y_j}$。则 $\phi(\chi_{W_N})$ 在弱算子拓扑中 $\to \phi(\chi_V)$，并且

$$\pi(\chi_M)\phi(\chi_{W_N})\pi(\chi_M) \le \sum_{j=1}^{N} \pi(\chi_M)\phi(\chi_{V_{y_j}})\pi(\chi_M) = 0.$$

因此，$\phi(\chi_{W_N})\pi(\chi_M)=0$，并且

$$0=\lim_{N\to\infty}\phi(\chi_{W_N})\pi(\chi_M)=\phi(\chi_V)\pi(\chi_M).$$

最后，选取一个递增的紧集序列 $M_\ell\subset U$，使得 $\bigcup_\ell M_\ell=U$（这是可行的，因为 X 是紧致可度量的）。于是 $\pi(\chi_{M_\ell})\to\pi(\chi_U)$ 强收敛，因此取极限可得

$$\phi(\chi_V)\pi(\chi_U)=0.$$

这证明了 (5) 中的第一个等式。第二个等式可通过取伴随得到。

现在我们证明，对于每个开集 $U\subset X$，都有 $\phi(\chi_U)=\pi(\{v4)$。

由于 X 是可度量的，取开集 $U_1,\ U_2,\ \cdots\subset U$，使得 $U_n\subset\overline{U}$ 且 $U=\bigcup_{n\geq1}U_n$。令 $V_n=\bigcup_{j=1}^n U_j$ 和 $V_n=X\setminus V_n$。于是 V_n 和 V_n 是互不相交的开集，$V_n\uparrow U$，并且 $V_n\downarrow U^c$。由 (5) 得，

$$\phi(\chi_{\widetilde{V}_n})\,\pi(\chi_{V_n})=0\quad\text{and}\quad\phi(\chi_{V_n})\,\pi(\chi_{\widetilde{V}_n})=0\qquad(n\geq1).$$

由于

$$\pi(\chi_{\widetilde{V}_n})\to\pi(\chi_{U^c})\quad\text{and}\quad\pi(\chi_{V_n})\to\pi(\chi_V)$$

在强算子拓扑下，且

$$\phi(\chi_{\widetilde{V}_n})\to\phi(\chi_{U^c})\quad\text{and}\quad\phi(\chi_{V_n})\to\phi(\chi_V)$$

在弱算子拓扑下，并利用弱算子拓扑收敛的序列与强算子拓扑收敛的序列的乘积在弱算子拓扑下收敛这一事实，我们得到

$$\phi(\chi_{U^c})\pi(\chi_U)=\lim\phi(\chi_{\widetilde{V}_j})\pi(\chi_{V_j})=0$$

and

$$\phi(\chi_U)\pi(\chi_{U^c})=\lim\phi(\chi_{V_j})\pi(\chi_{\widetilde{V}_j})=0.$$

Now

$$\phi(\chi_U)=\phi(\chi_U)\pi(\chi_U)+\phi(\chi_U)\pi(\chi_{U^c})+\phi(\chi_{U^c})\pi(\chi_U)=\pi(\chi_U).$$

最后，容易验证

$$\{F\subset X;\ F\text{ Borel},\ \phi(\chi_F)=\pi(\chi_F)\}$$

是一个包含所有开集的 Dynkin 系统。由 Dynkin $\pi-\lambda$ 定理可得，对于每个博雷尔集 F，$\pi(\chi_F)=\phi(\chi_F)$。因此 $\pi=\phi$。 □

定理 3.7。设 $K\subset\mathbb{R}^k$ 是一个紧致谱体，且$\mathrm{ex}(K)$ 是闭的。那么 $A(K)$ 在 $C(\mathrm{ex}(K))$中是超刚性的。

证明。设 $K\subset\mathbb{R}^k$ 为一个紧致谱体，且 $\mathrm{ex}(K)$ 是闭集。由于 K 是紧的，并且 $\mathrm{ex}(K)$在 K中是闭集，因此空间 $\mathrm{ex}(K)$ 是紧且可度量的。

设 $\pi\colon C(\mathrm{ex}(K))\to\mathcal{B}(H)$ 是一个幺正 $*$-同态，并设 $\phi\colon C(\mathrm{ex}(K))\to$

$\mathcal{B}(H)$ 是一个酉完全正映射，使得 $\phi = \pi$ 在 $A(K)$ 上成立。我们证明 $\phi = \pi$ 在$C(\mathrm{ex}(K))$ 上成立。
根据本节开头的讨论，我们知道存在一个对称铅笔 Q，使得

$$K = \{z \in \mathbb{R}^k;\ Q(z) \geq 0\}.$$

情形 1：$\mathbf{Int}(K) \neq \emptyset$。
根据定理 3.6，只需证明对于每个 $x \neq y \in \mathrm{ex}(K)$，都存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V，使得

$$\pi(\chi_U)\phi(\chi_V)\pi(\chi_U) = 0.$$

固定 $x \neq y \in \mathrm{ex}(K)$。由于 $x, y \in \mathbb{R}^k$，我们找到开集 U 和 V，使得 $x \in U$、$y \in V$、$U \cap V = \emptyset$ 和 $\overline{V}$ 紧。
固定 $j \in \{1, \ldots, m\}$，并令 $z \in U \cap K_j$ 和 $\omega \in V$。应用引理 3.4 和引理 3.5，我们得到 z 的一个开邻域 $U_{z,\omega}$，使得 $U_{z,\omega} \subset U$，以及 ω 的一个开邻域 $V_{z,\omega}$，使得

$$\pi(\chi_{U_{z,\omega} \cap K_j})\phi(\chi_{V_{z,\omega}})\pi(\chi_{U_{z,\omega} \cap K_j}) = 0.$$

（若 $z \notin \mathrm{ex}(K)$ 或 $\omega \notin \mathrm{ex}(K)$，则相应地选取开邻域 $z \in U_{z,\omega} \subset U$ 和 $\omega \in V_{z,\omega}$，满足 $U_{z,\omega} \cap \mathrm{ex}(K) = \emptyset$ 和/或 $V_{z,\omega} \cap \mathrm{ex}(K) = \emptyset$；此类邻域存在，因为 $\mathrm{ex}(K)$ 是闭的。）

现在固定 $z \in U \cap K_j$。由于 $(V_{z,\omega})_{\omega \in V}$ 是紧集 V 的开覆盖，因此存在有限子覆盖 $(V_{z,\omega_i})_{i=1}^n$。令

$$U_z = \bigcap_{i=1}^n U_{z,\omega_i} \qquad \text{and} \qquad V_z = \bigcup_{i=1}^n V_{z,\omega_i}.$$

那么 U_z 是包含于 U 中的 z 的开邻域，并且 $V \subset V_z$。因此

$$\pi(\chi_{U_z \cap K_j})\phi(\chi_V)\pi(\chi_{U_z \cap K_j}) = 0 \qquad \text{for all } z \in U \cap K_j.$$

对于每个 j，集合 $(U_z)_{z \in U \cap K_j}$ 构成 $U \cap K_j$ 的一个开覆盖。由于 $U \cap K_j$ 是林德勒夫的，我们可以选取点 $z_i^j \in U \cap K_j$，使得

$$U \cap K_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{z_i^j}.$$

定义递增开集

$$U_N^j = K_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^N U_{z_i^j}, \qquad N \in \mathbb{N} \right).$$

由 [4, 推论 1.2] 可知，对于所有 $N \in \mathbb{N}$

$$\pi(\chi_{U_N^j})\phi(\chi_V)\pi(\chi_{U_N^j}) = 0.$$

最后，$\pi(\chi_{U_N^j}) \to \pi(\chi_{U\cap K_j})$ 强算子拓扑，因此取强算子拓扑极限可得

$$\pi(\chi_{U\cap K_j})\phi(\chi_V)\pi(\chi_{U\cap K_j}) = 0,$$

再次应用 [4, 推论 1.2], ，我们得到

$$\pi(\chi_U)\phi(\chi_V)\pi(\chi_U) \le \sum_{j=1}^{m} \pi(\chi_{U\cap K_j})\phi(\chi_V)\pi(\chi_{U\cap K_j}) = 0.$$

因此，定理 3.6 的假设成立，从而 $\pi = \phi$。这证明了当 Int(K) $\neq \emptyset$ 时，$A(K)$ 在 C(ex(K)) 中是超刚性的。

情形 2：Int$(K) = \emptyset$。
用 aff(·) 表示一个集合的仿射包。设 $d =$dim(aff(K)) $< k$，并选取一个仿射同胚 $L : \mathbb{R}^d \to$ aff(K)。令 $\widetilde{K} = L^{-1}(K)$ 和 $\widetilde{Q}(w) = Q(L(w))$。于是

$$\widetilde{K} = \{w \in \mathbb{R}^d;\ \widetilde{Q}(w) \ge 0\},$$

所以 $\widetilde{K}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个紧致谱体，且 aff($\widetilde{K}$) $= \mathbb{R}^d$。特别地，除非 K 是单点集，否则 $\widetilde{\text{Int}}(K) \neq \emptyset$。

此外，L 诱导了一个同胚 ex(K) $\cong$ ex(K)（仿射双射保持极点），与 L 复合后得到一个从 $A(K)$ 到 $A(K)$ 的含幺完全序同构。因此，$A(K)$ 在 C(ex(K))$\widetilde{}$ 中的超刚性，等价于 $A(K)$ 在 C(ex(K)) 中的超刚性。

如果 K 不是单点集，那么 $\widetilde{\text{Int}}(K) \neq \emptyset$，且情形 1 适用于 $\widetilde{K}$。

如果 K 是单点集，那么 $A(K) = C$(ex(K))，且超刚性显然成立。 □

参考文献

[1] William Arveson。《非交换 Choquet 边界 II：超刚性》。《*Israel J. Math.*》，184:349–385，2011年。[2] Boris Bilich。对应表示的极大性，2024年。https://arxiv.org/abs/2407.04278。[3] Boris Bilich 和 Adam Dor-On。Arveson 的超刚性猜想是错误的，2024年。[4] Lawrence G. Brown。自伴算子函数的收敛及其应用。《*Publ. Mat.*》，60(2):551–564，2016年。[5] Raphaël Clouâtre。Arveson 超刚性猜想的新障碍，2025年。[6] Kenneth R. Davidson 和 Matthew Kennedy。函数系统的 Choquet 序与超刚性。《*Adv. Math.*》，385:论文编号 107774，共 30 页，2021年。

[7] Monique Laurent 和 Frank Vallentin。《半定优化》。讲义（Mastermath），2012年春季，2012年5月。讲义。[8] Vern Paulsen。完全有界映射与算子代数，剑桥高等数学研究丛书第 78 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[9] Paweł Pietrzycki 和 Jan Stochel。超刚性 I：单生成交换 C*-代数，2024年。https://arxiv.org/abs/2405.20814。[10] Robert Reams。几乎半正定矩阵的 Hadamard 逆、平方根与乘积。《线性代数及其应用》，288(1-3):35–43，1999年2月。[11] Marcel Scherer。紧凸集上的超刚性猜想，$\mathbb{R}^2$，2024年11月。arXiv:2411.11709。[12] Marcel Scherer。Arveson 超刚性猜想的有限维反例，2025年。[13] Terence Tao。随机矩阵理论专题，数学研究生教材丛书第 132 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。[14] Stephan Weis 和 Maksim Shirokov。由一点生成的面、广义仿射约束与量子理论。《凸分析杂志》，28(3):847–870，2021年。也可见 arXiv:2003.14302。

以色列理工学院，海法，以色列电子邮件地址：
scherer@math.uni-sb.de