arXiv:2601.16119v1 [math.DG] 22 Jan 2026

经稳定化的等变莫尔斯-博特上同调

ERKAO BAO、ROBI HUQ 和 SHENGZHEN NING

摘要。对于带有紧李群作用的闭流形，我们运用稳定化技术，研究 Austin-Braam 的 Morse 理论构造，该构造用于定义 Borel 等变上同调。我们证明，C^1-小的等变扰动会产生稳定不变 Morse-Bott 函数。通过选取一般的不变黎曼度量，这使我们能够在 Austin–Braam 的框架中实现等变横截性和可定向性假设。

1. 引言

自 Atiyah-Bott [AB84] 关于黎曼曲面上杨-米尔斯泛函的开创性工作以来，等变 Morse 理论得到了广泛研究。一般紧李群作用下的等变 Morse 上同调最早由 Austin-Braam [AB95]发展。然而，他们的构造依赖若干在一般情况下并不成立的假设（见假设 4.1）。下面我们将说明这些假设背后的主要分析难点。

当群 G 不是有限群时，G-不变函数可能具有非离散的临界集，因此必须使用 Morse-Bott 函数，而非 Morse 函数。在 Morse-Bott 情形中，一种典型的链模型由 [AB95], 采用：它为每个临界子流形关联其微分形式空间，并通过模空间上梯度流线的端点求值映射，利用拉回和沿纤维积分来定义边界算子。从这一角度看，该理论的分析基础依赖于为相关模空间建立适当的横截性性质。

在这一背景下，自然的横截性条件是*Morse-Bott-Smale* 条件，简称莫尔斯-博特-斯梅尔 （定义 1.7）。此外还有一种较弱的概念，称为弱 *Morse-Bott-Smale*，或弱莫尔斯-博特-斯梅尔 （定义 3.1）。第一组困难可概括如下：

(C1) 尽管在非等变 Morse-Bott 情形中可以满足弱MBS条件，但在等变 Morse-Bott 情形中通常无法满足。此外，仅有弱MBS条件不足以定义 Morse 理论链复形。(C2) 一般而言，即使在非等变 Morse-Bott情形中，也无法满足MBS条件。

关键词和短语。 Morse 理论、等变 Morse 上同调、李群作用、等变横截性、稳定的 Morse 函数、Morse-Bott-Smale、可定向性。

一个经典例子是 [Lat00], 带腿环面 （例 3.3），它展示了一个 Morse-Bott 函数：对于所有度量，MBS条件都不成立，尽管仍可安排使弱MBS条件成立。这个例子说明了（C2）的合理性。

稍后，我们将介绍映射环面的另一个例子（例 5.2），该例说明了（C1）中所描述的障碍。

Morse-Bott 理论中的另一个复杂之处如下：

（C3）梯度流线的模空间并不总是可定向的。

这通常需要使用局部系数系统，或取值于定向丛的微分形式。

总之，这些问题导致了关于紧李群作用的莫尔斯理论等变（上）同调发展相对滞后。

现在我们将更详细地分析这些困难。带腿环面（例 3.3）的例子可以推广到等变情形：令 $\mathbb{Z}_n$ 通过旋转作用于其上。该例表明，即使群作用本身表现良好，上述障碍依然存在。特别是， $\mathbb{Z}_n$在带腿环面上的作用是自由的，但该函数仍不存在 Morse-Bott-Smale 度量。这一观察促使我们进一步完善 G-不变 Morse-Bott 函数的概念。我们不再仅仅要求 G-不变性，而是考虑 *G-Morse-Bott* 函数（定义 1.2），并要求每个临界子流形都是单个 G-轨道。将研究范围限制在 G-Morse-Bott 函数内，虽可排除$\mathbb{Z}_n$-等变带腿环面的例子，却无法解决 (C1) 中的障碍。

请注意，映射环面例子（例 5.2）中的函数是 G-Morse-Bott。为解决这一尚存的困难，我们借鉴了稳定化 方法，该方法由 [May89、BL24]提出。以一个 G-Morse-Bott 函数为起点，我们在临界子流形附近施加经过精心选择的、 C^1-小的等变扰动。所得函数称为稳定的，它保留了原函数的关键等变特征，同时显著改善了分析性质。值得强调的是，在带腿环面的例子中，Morse-Bott 函数是稳定的，但不是 G-Morse-Bott。事实证明，稳定性与 G-Morse-Bott 条件的结合，恰好满足了所需。

关键观察。 本文的核心主题是，稳定的 *G-Morse-Bott* 函数 为紧致李群作用提供了适当的等变 Morse 理论框架。通过考察这类函数，我们针对一般的G-不变度量实现 Morse-Bott-Smale 条件，从而解决横截性障碍；同时，无需借助局部系数系统或取向丛值微分形式，即可克服可定向性问题。因此，我们得到一个定义良好的 Morse 理论等变上链复形，它能够恢复 Borel 等变上同调。

在某些情况下，稳定化过程是明确的，从而可以进行具体计算。在后续论文中，我们将进一步利用这一特点，研究当扰动的大小趋于零时等变莫尔斯复形的极限行为，以一种精确的方式建立稳定化理论与未稳定化理论之间的联系。

1.1. 主要结果。 设 $f \in C^\infty(M)$ 是闭光滑流形 M 上的光滑函数。设 $p \in M$ 是 f 的某个临界点。f 在临界点 p 处的海森矩阵是一个对称双线性型 $\mathrm{Hess}f(p)$：$T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathrm{Hess}_f(p)(v,w) = V(Wf),$$

其中 V，W 是任意延拓 v，$w \in T_pM$ 的向量场。令

$$\ker(\mathrm{Hess}_f(p)) := \{v \in T_pM \mid \mathrm{Hess}_f(p)(v,w) = 0, \forall w \in T_pM\}.$$

定义 1.1（Morse-Bott 函数）。若光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 满足：其临界集 $\mathrm{Crit}(f)$ 是若干互不相交的连通子流形之并，且对 $\mathrm{Crit}(f)$ 的每个连通分支 S 及任意 $p \in S$，都有 $T_pS = \ker(\mathrm{Hess}f(p))$，则称其为 *Morse-Bott* 函数。我们将 S 的 Morse 指标记为 $\mathrm{Ind}f(S)$（或在上下文中函数明确时简记为 $\mathrm{Ind}(S)$）；它是子空间 T_pM 的最大维数，其中对任意 $p \in S$，$\mathrm{Hess}f(p)$ 均为负定。

现在，假设紧李群 G 在 M 上有一个光滑作用。令 $C^\infty(M)^G$ 表示 M 上 G- 不变光滑函数构成的空间。当 G 是李群时，$C^\infty(M)^G$ 可能不含任何 Morse 函数，因为若 $p \in M$ 是某个 $f \in C^\infty(M)^G$ 的临界点，则轨道子流形 $G \cdot p$ 上的所有点也都是 f 的临界点。因此，为了研究 M 上的 G-等变 Morse 理论，自然需要允许存在临界子流形。

定义 1.2 (G-Morse-Bott 函数)。G-不变函数 $f \in C^\infty(M)^G$ 称为 *G-Morse-Bott* 函数，当且仅当

- f 是 Morse-Bott 函数;
- 其临界子流形的每个连通分支 S 都满足 $f\ T_pS = T_p(G \cdot p)$，对任意 $p \in S$ 均成立。

这一概念在 [Was69] 中简称为 *Morse*，在 [BZ20] 中称为 *-Morse*。当 G 是有限群时，它也与 [BL24，定义 1.1] 中引入的等变 Morse 函数概念一致。如果 G 在 M 上的作用是平凡的，那么 G-Morse-Bott 函数就退化为普通（非等变）Morse 函数。需要区分 G-不变的 Morse-Bott 函数与 G-Morse-Bott 函数。例如，常值函数总是 G-不变的 Morse-Bott 函数，但除非 G 在 M 上传递作用，否则按照定义1.2，它们并不是 G-Morse-Bott 函数。此外，例 3.3 中带腿环面上的高度函数可以看作 $\mathbb{Z}_n$-不变的 Morse-Bott 函数，但不是 $\mathbb{Z}_n$-Morse-Bott 函数。

Was69 中的引理 4.8], 证明了一个基本事实，即 G-Morse-Bott 函数的存在性。

定理 1.3 ([Was69])：*G-Morse-Bott 函数在 $C^\infty(M)^G$ 中稠密。*

现在，我们考察某个 G-不变 Morse-Bott 函数 f 的临界子流形。由临界点组成的轨道 $G \cdot p$ 将被称为**临界轨道**，它微分同胚于李群商 G/H，其中 H 是 p 处的稳定子群。由于对于任意 $v \in T_p(G \cdot p)$，$\mathrm{Hess}f(p)(v,\text{-}) = 0$，因此滥用记号，

Hess$f$(p) 也将用于表示法空间上的对称双线性型

$$N_p := T_pM/T_p(G \cdot p).$$

因此，若进一步假设 f 是 G-Morse-Bott 函数，则 Hess$f$(p) 在 N_p 上非退化。 H 在 N_p 上还有一个自然的切片表示。它具有如下典范分解

$$N_p = N_p' \oplus N_p''$$

为平凡部分 N_p'（由被 H 固定的向量组成）和非平凡部分 N_p''（由满足下述条件的向量 $v \in N_p$ 组成）

$$\int_H h \cdot v \, d\mu_h = 0$$

对于 H 上的哈尔测度 μ。切片定理指出，存在 $G \cdot p$ 的一个 G-不变邻域 $\mathcal{N}_p$，它与 $G \times_H N_p$ 通过一个 G-等变微分同胚相对应，该微分同胚将 p 映到 $[e, 0]$。相应地，我们也有该法丛的一个典范分解

$$\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p' \oplus \mathcal{N}_p''$$

其中， $\mathcal{N}_p'$ 被识别为平凡丛 $G/H \times N_p'$，而 $\mathcal{N}_p''$ 被识别为可能非平凡的丛 $G \times_H N_p''$。我们提出 G-不变 Morse-Bott 函数的稳定性概念，直接推广了 [BL24] 中针对有限群作用引入的稳定性。

定义1.4（稳定）。 设 f 是一个 G-不变的 Morse-Bott 函数。若某个 $p \in S$ 使得海森矩阵双线性形式 Hess$f$(p)在 N_p'' 上正定，则称 Crit(f)的连通分支 S 为稳定的 。若 Crit(f)的所有连通分支均稳定，则称 f 是稳定的 。

注 1.5。 容易验证，若海森矩阵 Hess$f$(p)在 N_p''上正定，则对任意 $q \in G \cdot p$, 海森矩阵 Hess$f$(q)在 N_q''上也正定。这保证了上述定义是良定义的。

关于上述概念之间的包含关系示意图，请参见图1。与定理 1.3类似，对稳定的 G-Morse-Bott 函数的等变 Morse 理论研究需要这些函数的存在性，而下面的结果保证了这一点。

定理 1.6。 给定任意 G-不变的 *Morse-Bott* 函数 f，可以对其作微扰，得到一个稳定的 G-*Morse-Bott* 函数 f'，且它与 f的距离可以任意小。

在 [May89], Mayer 引入了所谓的特殊不变*Morse*函数，要求沿任意临界轨道的 Morse 指标在限制到其轨道类型层后保持不变，并得到了一个存在性结果。很容易看出，特殊不变Morse函数的概念等价于我们所说的稳定的 G<style id='8'>-Morse-Bott 函数。在第2节中，我们将利用 [BL24] 为有限群作用发展出的归纳策略，给出定理 1.6 的证明。这既重新得到 [May89]所展示的存在性结果，也提供了一种更明确的构造。另见注 2.7。

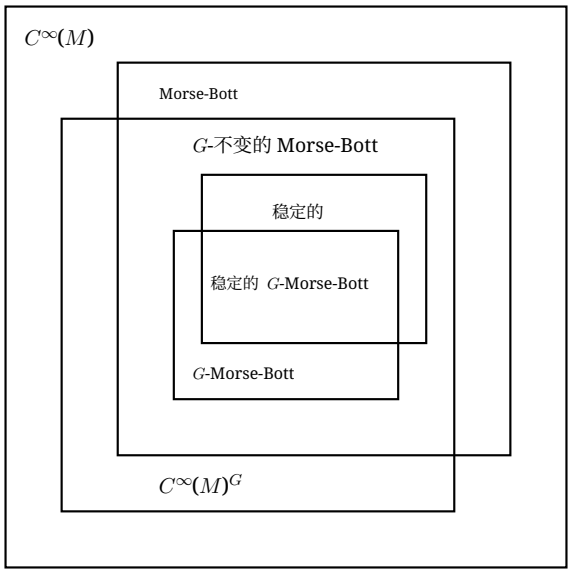


图1. 上文讨论的各种概念。

我们的下一个目标是为给定的稳定G-Morse-Bott 函数找到一个良好的 G-不变黎曼度量。给定一对 (f, g)，其中包含一个 Morse-Bott 函数 f 和一个黎曼度量 g，令 φ_t 为其负梯度流。对于 f的任意临界点 p 或临界子流形 S，我们记

$$\mathscr{D}_{f,g}(p) = \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = p\}, \mathscr{A}_{f,g}(p) = \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = p\}$$
$$\mathscr{D}_{f,g}(S) = \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) \in S\}, \mathscr{A}_{f,g}(S) = \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) \in S\}$$

在 p 或 S处的下降/上升流形。当从上下文中可以明确这一对 (f, g) 或函数 f 时，我们将分别用 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{D}$，或 $\mathscr{A}_g$和$\mathscr{D}_g$，来代替 $\mathscr{A}_{f,g}$ 和$\mathscr{D}_{f,g}$。

定义 1.7（Morse-Bott-Smale）。若 Morse-Bott 函数 f 与黎曼度量 g 构成的二元组（f，g）满足：对于 Crit(f) 的任意两个分支 S_1，S_2，任意点 $p \in S_1$ 的下降流形 $\mathscr{D}(p)$ 与 S_2 的上升流形 $\mathscr{A}(S_2)$ 横截地相交，则称该二元组为 *Morse-Bott-Smale*（简称 *MBS*）。

定理 1.8。设 $k \geq 1$。设 f 是 M 上的稳定 *G-Morse-Bott* 函数，属于 C^{k+1} 类。对于 M 上任意 G-不变的 g 黎曼度量，且属于 C^k 类，二元组（f，g）是 *Morse-Bott-Smale*。

Austin-Braam [AB95] 利用临界子流形上取值于对偶李代数的 G-不变微分形式的对称幂的 Cartan 模型，构造了等变 Morse 上链复形（另见 [Zhu25]关于非等变上链复形的工作）。然而，他们的构造要求满足假设 4.1，而这些假设一般并不成立。因此，定理 1.8结合引理 4.2表明，将范围限制到稳定的 G-Morse-Bott 函数后，这些假设即可得到满足。

本文组织如下。第2节中，我们解释如何将一个 G-Morse-Bott 函数稳定化。接着，在第3节中，我们证明任意稳定的 G-Morse-Bott 函数的 MBS度量具有一般性。随后，第4节遵循 [AB95、Zhu25]，回顾利用临界子流形上的G-不变微分形式构造普通上同调和等变上同调的方法。最后，在第5节中，我们给出通过稳定化过程进行计算的示例。

致谢 我们感谢 Tyler Lawson、Conan Leung、Ko Honda 和 Hao Zhuang 提供的有益交流。本项目部分由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-2404529。

2. 稳定化

本节中，我们改编 [BL24] 中的证明，以证明定理 1.6。设 G 是作用于闭流形 M 上的紧李群。回顾一下，我们最初对稳定的 G-不变 Morse-Bott 函数所作的定义1.4 与度量无关。此外，若 M 配备了一个 G-不变黎曼度量 g，则对于任意临界轨道 $G\cdot p$，法空间 N_p 可与正交补 $T_p(G\cdot p)^\perp$ 典范地识别，其中正交补相对于 g 而言。我们将 g_p 在 N_p 上诱导的内积记为该符号。在此识别下，海森矩阵 $\mathrm{Hess}f(p)$ 可视为 N_p 上的自伴算子 A_p，其定义为

$$\mathrm{Hess}_f(p)(v,w)=g_p(A_pv,w).$$

在这种情况下， N_p 具有一个非典范的正交分解

$$N_p=N_p^+\oplus N_p^-\oplus N_p^0,$$

其中，依赖于 g_p 的子空间 N_p^+、 N_p^- 和 N_p^0 分别表示 A_p 的正、负和零特征子空间。注意，当 f 是 G-Morse-Bott 时，零特征子空间 N_p^0 是平凡的。在存在 G-不变度量的情况下，以下引理给出了稳定性的另一种刻画。

引理 2.1. 设 f 是一个 G-不变的 *Morse-Bott* 函数，且具有某个临界轨道 $G\cdot p$。那么以下条件等价。

(1) f is stable at $G\cdot p$.
(2) For any G-invariant metric g, $N_p^-\oplus N_p^0\subseteq N_p'$. That is, $N_p^-\oplus N_p^0$ is fixed by $\mathrm{stab}(p)$.
(3) There exists a G-invariant metric g such that $N_p^-\oplus N_p^0\subseteq N_p'$.

证明。(1)⇒(2)：假设 f 在 $G\cdot p$ 处稳定，并取任意一个 G-不变度量 g。令 $H\subseteq G$ 为 p 处的稳定子群。由 f 的 G-不变性，

$$\mathrm{Hess}_f(p)(v,w)=\mathrm{Hess}_f(p)(h\cdot v,h\cdot w)$$

对于任意 $h\in H$ 和 $v,\ w\in N_p$。根据 A_p 的定义，

$$g_p(A_p(h\cdot v),h\cdot w)=g_p(A_pv,w)=g_p(h\cdot A_pv,h\cdot w),$$

这意味着，对于任意 $h \in H$ 和 $v \in N_p$，$A_p(h \cdot v) = h \cdot A_p v$。我们看到，$A_p(N_p') \subseteq N_p'$。注意，典范分解 N_p' 和 N_p'' 是 g_p-正交的，因为对于任意 $v \in N_p'$，$w \in N_p''$，

$$g_p(v,w) = \int_H g_p(h\cdot v, h\cdot w) d\mu_h = \int_H g_p(v, h\cdot w) d\mu_h = g_p(v, \int_H h\cdot w d\mu_h) = 0.$$

因此，我们还有 $A_p(N_p'') \subseteq N_p''$，因为 A_p 是自伴的。设 $x \in N_p^- \oplus N_p^0$ 是一个特征值非正的特征向量 λ。假设 $x = x' + x''$ 属于分解 $N_p' \oplus N_p''$。由于 A_p 保持 N_p' 和 N_p''，可得 $A_p(x'') = \lambda x''$。根据稳定性假设，x'' 必须为 0。因此，我们证明了 $N_p^- \oplus N_p^0 \subseteq N_p'$。

(2)⇒(3)：由 G 不变度量的存在性可得。

(3)⇒(1)：假设对于某个 G 不变度量 g，包含关系 $N_p^- \oplus N_p^0 \subseteq N_p'$ 成立。我们在步骤 (1)⇒(2) 中已经看到，N_p' 和 N_p'' 正交。因此

$$N_p^+ = (N_p^- \oplus N_p^0)^\perp \supseteq (N_p')^\perp = N_p'',$$

这意味着 N_p'' 是正定的。因此，f 在 $G \cdot p$ 处是稳定的。 □

从现在起，我们固定一个 G-不变的黎曼度量 g。设 $p \in M$ 和 $H \subseteq G$ 为其稳定子群。根据切片定理，存在轨道 $G \cdot p$ 的一个 G-不变邻域 $U(G \cdot p)$，它与 $G \times_H \mathbb{D}_p$ 是 G-等变微分同胚，其中 $\mathbb{D}_p \subseteq M$ 是一个 H-不变的嵌入球，其维数为 $\dim M - (\dim G - \dim H)$，以 p 为中心，由法空间 $N_p = T_pM/T_p(G \cdot p)$ 中原点某个开邻域的指数映射构造而成。$\mathbb{D}_p$ 称为 p 处的局部切片。下面是一个基本观察。

引理 2.2. *存在局部切片 $\mathbb{D}_p$，使得 $U(G \cdot p) \cong G \times_H \mathbb{D}_p$ 上的 G-Morse-Bott 函数集合与 $\mathbb{D}_p$ 上的 H-Morse-Bott 函数集合一一对应。*

证明。给定定义在 $U(G \cdot p)$ 上的一个 G-不变函数 f，我们可以考虑它在切片 $\mathbb{D}_p$ 上的限制 $\tilde{f} := f|_{\mathbb{D}_p}$。根据 $\tilde{f}$ 的 G-不变性，f 自然是 H-不变的。假设 f 是 G-Morse-Bott。为说明 f 是 H-Morse-Bott，首先注意，由 G-$\tilde{}$-等变微分同胚 $U(G \cdot p) \cong G \times_H \mathbb{D}_p$，局部切片 $\mathbb{D}_p$ 与群作用的任意轨道横截相交。因此，$\mathrm{Crit}(f) = \mathrm{Crit}(f) \cap \mathbb{D}_p$ 是 $\tilde{}$ 中的子流形。对于 $\mathrm{Crit}(f)$ 的任一分支 $S \subseteq$，我们可以假设 $S = S' \cap \mathbb{D}_p$，其中 S' 是 $\mathrm{Crit}(f)$ 的一个分支。对于 $s \in S$，设其稳定子群为 $H' \subseteq H$。由于 $\mathbb{D}_p \pitchfork_M (G \cdot s)$，可得

$$\dim(H \cdot s) = \dim H - \dim H' = \dim(G \cdot s) + \dim \mathbb{D}_p - \dim M,$$

这意味着 $T_s(H \cdot s) = T_s(G \cdot s) \cap T_s\mathbb{D}_p$。随后，我们可以验证 H-Morse-Bott 的要求，因为 $T_sS = T_sS' \cap T_s\mathbb{D}_p = T_s(G \cdot s) \cap T_s\mathbb{D}_p$。

反之，给定一个 H-Morse-Bott 函数 f，我们可以为任意 $[x,y] \in G \times_H \mathbb{D}_p$ 定义一个 G-不变 $\tilde{}$ 函数 $f([x,y]) := f(y)$。与前面的

~讨论类似，任意分支 $S = H \cdot s \subseteq \mathrm{Crit}(f)$ 都对应于一个分支

$$S' := \{[x, y] \mid y \in S\} \subseteq \mathrm{Crit}(f).$$

由于 S' 可以识别为齐性空间 $G \times_H (H \cdot s)$，其切空间由 G 的群作用所对应的基本向量场张成。因此， f 是 G-Morse-Bott。

最后是很容易验证上述 f 与 ~之间的对应关系。

现在，设 f 是 M 上任意的 G-Morse-Bott 函数。我们将对流形 M 的维数进行归纳，以将 f 扰动为稳定的函数。

假设 2.3。对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们称可以进行 k-稳定化，如果定理 1.6 对任意紧李群 G 和维数为 $M \leq k$的闭流形 M 均成立。

显然可以进行 0-稳定化。我们将说明一旦能够实现 $(k-1)$-稳定化，如何获得 k-稳定化。证明改编自 [BL24] 中有限群情形的论证。回顾 [BL24 推论 6.4] 中的构造。

构造2.4。对于较小的 $\lambda \gg \delta > 0$，存在光滑函数Φ_λ， $\Psi_\delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

- $\Phi_\lambda(t) = t^2$ 当 $t \leq \lambda$时；
- $\Phi_\lambda(t) = -t^2$ 当 $t \geq 3\lambda$时；
- Φ_λ 在 0， t_0 处恰有两个临界点，其中 $\lambda < t_0 < 2\lambda$ 且$\Phi''_\lambda(t_0) < 0$。
- Ψ_δ是一个平台函数，在 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$内部取常值 1，在 $[\lambda-\delta, 3\lambda+\delta]$外部取值 0。

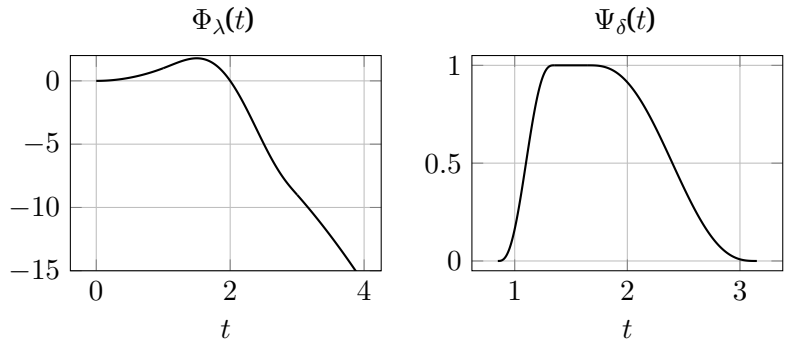


图2. 构造2.4中用于 $\lambda = 1, t_0 = 1.5, \delta = 0.1$的辅助函数 Φ_λ （左）和 Ψ_δ （右）。

引理 2.5. 假设可以进行$(k-1)$-稳定化。设紧李群 H 作用于 $\mathbb{D}^k$，后者是一个 k维开球，并带有某个 H-不变的

黎曼度量 g。设 f 是 H上的一个 $\mathbb{D}^k$ -*Morse-Bott* 函数，并且具有唯一的临界点 $p \in \mathbb{D}^k$。那么，存在 $\mathbb{D}^k$上的另一个 H-*Morse-Bott* 函数 F，使得

- 的临界轨道要么是 p，要么包含在以p 为中心、半径任意小于 p处注入半径的球面内；
- F 在以 p 为中心的小球之外与 f 一致，并且可以任意接近 f，其距离小于 C^1;
- F 是稳定的。

证明。 根据等变莫尔斯引理（[Was69，引理 4.1]），存在一个开邻域 U_p，围绕 p，并带有坐标 $(x_1, \cdots, x_k)$，使得

- U_p 包含在一个球内，该球的半径小于 p 处的单射半径；
- $f(x_1, \cdots, x_k) = -\sum_{i\le l} x_i^2 + \sum_{i>l} x_i^2$;
- $U_p^-:= \{x_{l+1} = \cdots = x_k = 0\}$和 $U_p^+:= \{x_1 = \cdots = x_l = 0\}$是$H$-不变的。

考虑半径较小的球面 $S \subseteq U_p^-$，群 H 在其上作用。根据（$k-1$）稳定化的假设，由于 dim $S \le k-1$，存在一个稳定的 H-Morse-Bott 函数 h，定义在 S 上。对于 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，令 $\|\vec{x}_+\| = (\sum_{i>l} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|\vec{x}_-\| = (\sum_{i\le l} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$。给定较小的参数 $\lambda, \delta, \varepsilon > 0$，于是定义修正后的函数

$$F_{\lambda,\delta,\varepsilon}(x_1, \cdots, x_k) = \|\vec{x}_+\|^2 + \Phi_\lambda(\|\vec{x}_-\|) + \varepsilon\Psi_\delta(\|\vec{x}_-\|)h(\frac{(x_1, \cdots, x_l)}{\|\vec{x}_-\|}).$$

注意，只要将 $\lambda, \delta, \varepsilon$ 取得足够小，$F := F_{\lambda,\delta,\varepsilon}$ 就可以任意接近C^1- f。这一构造本质上与 [BL24, Construction 6.5] 中通过选择 $W = 0$ therein[1]的方法相同。由 [BL24, Proposition 6.6 (4)] 中的计算可知，当 ε 足够小时，$F_{\lambda,\delta,\varepsilon}$ 的临界子流形要么是原点，要么是 h 在球面 S内的临界子流形。设 $C \subseteq S$ 为临界子流形的任意一个连通分支。那么 [BL24, Proposition 6.6 (5)] 中的计算表明

$$\mathrm{Ind}_{F_{\lambda,\delta,\varepsilon}}(C) = \mathrm{Ind}_h(C) + 1,$$

其中“$+1$”来自 $S \subseteq U_p^-$的法向方向。由于 S 是 H-不变的，因此这个法向方向必须由 H 固定。这使我们能够根据 h的稳定性看出$F_{\lambda,\delta,\varepsilon}$ 是稳定的。□

注2.6。 令 S^1 通过旋转作用于 S^2，并将高度函数视为 S^2上的一个S^1-Morse–Bott 函数。在对应于北极的临界轨道处进行稳定化会产生一个凹痕（见图3(B)和例5.1）。在这种情况下，选取以北极为中心的小圆上的函数 h 为常函数。这个简单的例子是上述引理中构造 $F_{\lambda,\delta,\varepsilon}$的原型。

[1] [BL24] 中的空间 W 应视为 U_p^- 中的 H 不动部分。但实际上，这一修改可以在整个 U_p^- 上进行。

定理 1.6 的证明。假设 $\dim M = k$。我们将证明，在假设可以进行 $(k-1)$-稳定化的前提下，可以进行 k-稳定化。根据定理 1.3，我们可以先通过小扰动假设 f 是 G-Morse-Bott 函数。固定一个 G-不变的黎曼度量 g。对于任意稳定子群为 $H \subseteq G$的临界轨道 $G \cdot p$，取一个充分小的局部切片 $\mathbb{D}_p$，使 H作用于其上。根据引理 2.5，$f|_{\mathbb{D}_p}$ 可以经由一个 C^1-小扰动变为稳定的 H-Morse-Bott 函数 F。根据引理 2.2，通过限制，$G \cdot p$附近的 G-Morse-Bott 函数空间对应于 H-不变局部切片$\mathbb{D}_p$ 中的 H-Morse-Bott 函数空间。因此，F 对应于 M 上的一个 G-Morse-Bott 函数 F，它与 f C^1-接近。由于这种扰动是局部的，我们可以假设 $G \cdot p$ 是 f 唯一的临界轨道，并检查 F 在 $G \cdot p$附近是否稳定。令 $S = G \cdot s$ 为 F 和 $s \in S$的一个临界轨道。根据注 1.5，我们可以取 $s \in S \cap \mathbb{D}_p$。假设 $\mathrm{stab}(s) = H' \subseteq H$。注意，由于 F与 F之间存在˜对应，F和 F在 s处的海森矩阵算子˜的负特征空间可以识别，因为 $\mathrm{Ind}_F(S) = \mathrm{Ind}_{\tilde{F}}(S \cap \mathbb{D}_p)$。我们将它们的负特征空间记为 N_s^-。˜由于 F 稳定，N_s^-由 H'固定。因此，根据引理 2.1，我们可知 F 也必定稳定。□

注 2.7。 如果我们通过仅保留 f 中的前两项 $\|\vec{x}_+\|^2 + \Phi_\lambda(\|\vec{x}_-\|)$ 来进行扰动，则 $F_{\lambda,\ \delta,\ \varepsilon}$ 在 0 处仍然稳定，但会失去 G-Morse-Bott 性质。 [May89] 中的方法是抽象地应用 Wasserman 的结果（定理 1.3），以获得一个小的 G-Morse-Bott 扰动，然后使用一个 G-不变的截断函数在两个函数之间进行插值。如果从一个 G-Morse-Bott 函数开始，我们的方法则更加明确：我们指定低维球面 S 上的函数 h，从而为在具体情形下实施稳定化提供明确指引。参见例 5.2。

3. Morse-Bott-Smale 度量的泛性

3.1. Morse-Bott情形。 本节回顾不存在群作用的情形，即 $G = \{e\}$。当 $G = \{e\}$ 时，G-Morse-Bott 函数与 Morse 函数相同。不过，出于比较的目的，我们考虑更大的一类函数，即 Morse-Bott 函数。

为了定义 Morse-Bott 上同调，根据临界子流形上所选上链模型的不同，可以施加各种横截性条件；例如参见 [Fuk96、AB95、Hut02、BH10、Zhu25]。首要且通常不可或缺的要求是，梯度流线的模空间应当被横截地切出。下面将介绍的这就是弱 *Morse-Bott-Smale*条件，它是定义 1.7 的较弱版本。

定义 3.1（弱 Morse-Bott-Smale）。若 Morse-Bott 函数 f 与黎曼度量 g 构成的二元组 (f, g) 满足：对于 $\mathrm{Crit}(f)$ 的任意两个分支 S_1, S_2，S_1 的下降流形 $\mathscr{D}(S_1) = \mathscr{D}_{f,g}(S_1)$ 与 S_2 的上升流形 $\mathscr{A}(S_2) = \mathscr{A}_{f,g}(S_2)$ 横截相交，则称其为弱 *Morse-Bott-Smale*（简称弱 *MBS*）。

引理 3.2（MBS 蕴含弱 MBS）。若二元组(f, g) 是 *Morse-Bott-Smale*，则它也是弱 *Morse-Bott-Smale*。

证明。对于任意 $x \in \mathscr{D}(S_1) \cap \mathscr{A}(S_2)$，都存在某个 $p \in S_1$ 使得$x \in \mathscr{D}(p) \cap \mathscr{A}(S_2)$。如果 (f, g) 是 Morse-Bott-Smale 的，那么我们有

$$T_xM = T_x\mathscr{D}(p) + T_x\mathscr{A}(S_2) \subseteq T_x\mathscr{D}(S_1) + T_x\mathscr{A}(S_2),$$

这意味着 (f, g) 是弱 Morse-Bott-Smale 的。 □

如 Latschev [Lat00，第 2.4] 条注释中的以下例子所示，“Morse-Bott-Smale”的概念严格强于“弱 Morse-Bott-Smale”。

例 3.3（带腿环面 [Lat00]）。考虑坐标为（φ, ψ）$\in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$的二维环面，以及 Morse-Bott 函数[2]

$$h_n(\varphi, \psi) = -(2 + \cos n\varphi)(1 + \cos \psi)$$

对任意正整数 n。它有极大圆

$$S = \{\psi = \pi\}$$

以及 n 个鞍点

$$\{p_k = (\frac{(2k+1)\pi}{n}, 0)\}_{0 \le k \le n-1}$$

作为指标为 1 的临界子流形； n 个极小点

$$\{q_k = (\frac{2k\pi}{n}, 0)\}_{0 \le k \le n-1}$$

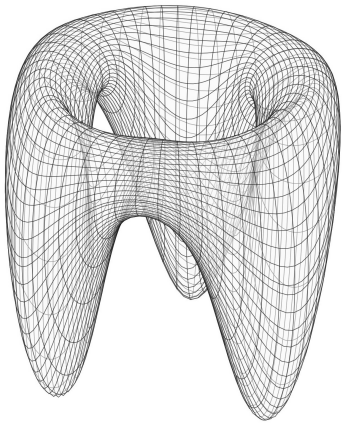
作为指标为 0 的临界子流形。若将环面嵌入 $\mathbb{R}^3$，并赋予其标准度量，同时将 h_n 视为高度函数，如图 3(A) 所示，则很容易验证弱Morse-Bott-Smale条件。然而，由于h_n（S）$> h_n$（p_k）$> h_n$（q_k），对于任意度量，总存在从某个点 $s \in S$ 到鞍点 p_k 的流轨线。这意味着 $\mathscr{D}$（s）与 $\mathscr{A}$（p_k）不横截。因此，不存在满足 Morse-Bott-Smale 条件的度量。

作为比较，我们陈述以下众所周知的定理（例如参见 [Hut02，第 6.2 节。1] 或 [Zho24，第 8]节），其证明是对莫尔斯情形的标准改编（例如参见 [Hut02，命题 5。8]）。

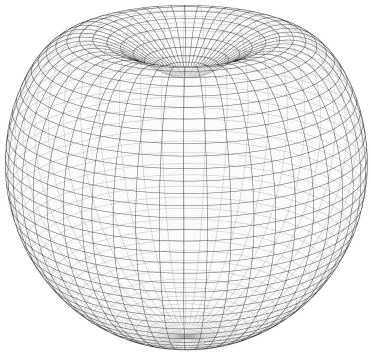
定理 3.4. 给定 M上的一个 *Morse-Bott* C^{k+1}-函数 f，一个一般的 C^k-度量 g使得这对(f, g) 为弱 *Morse-Bott-Smale*。

前面的例 3.3 也表明，如果将“弱 Morse-Bott-Smale”替换为“Morse-Bott-Smale”，定理 3.4 就不成立。然而，在下一节中，我们将说明，在存在群对称性的情况下，稳定性条件使我们能够将定理 3.4 提升为“Morse-Bott-Smale”，即定理 1.8。

[2]我们的函数与 [Lat00] 中的函数只差一个负号，因为我们使用负梯度流，而非梯度流。



(A) 带腿环面



(B) 带凹痕的球面

3.2. G**-Morse-Bott 情形**。 在“有问题的”例 3.3 中，令 $G = \mathbb{Z}_n$ 通过旋转 φ 坐标 $\frac{2\pi}{n}$ 来作用于环面。于是 G 在环面上自由作用，并保持函数 h_n 不变。因此，函数 h_n 是 G-不变的 Morse-Bott 函数，并且是稳定的（相对于 G）。但它并非 G-Morse-Bott，因为它不满足定义 1.2 中的第二个条件。下面的引理将说明考虑 G-Morse-Bott 函数的优点。

引理 3.5 (弱 MBS 蕴含 MBS)。 设紧李群 G 作用于闭流形 M，该流形上具有一个 G-*Morse-Bott* 函数 f 和一个 G-不变度量 g。假设 $G\cdot p$和 $G\cdot q$是 f的两个临界轨道。那么， $\mathscr{D}(p) \pitchfork_M \mathscr{A}(G\cdot q)$ 当且仅当 $\mathscr{D}(G\cdot p) \pitchfork_M \mathscr{A}(G\cdot q)$。

证明。 我们只需证明“如果”方向。对于任意 $x \in \mathscr{D}(p) \cap \mathscr{A}(G\cdot q)$，假设

$$T_x\mathscr{D}(G\cdot p) + T_x\mathscr{A}(G\cdot q) = T_xM.$$

我们的目标是证明

$$T_x\mathscr{D}(p) + T_x\mathscr{A}(G\cdot q) = T_xM.$$

由于以下简单事实，我们还可以假设 x任意接近临界点 p 。

命题 3.6。 设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ 是从 p 出发、流向 $G\cdot q$中某点的(f,g) 梯度流线。那么，对于任意 $s, s' \in \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_g(p)$ 和 $\mathscr{A}_g(G\cdot q)$，它们在 M中于 $\gamma(s)$ 横截相交，当且仅当它们在 $\gamma(s')$横截相交。

命题的证明。 这是因为下降流形和上升流形在梯度流下保持不变。因此，它将 $T_{\gamma(s)}\mathscr{D}(p)$ 同构地映射到 $T_{\gamma(s')}\mathscr{D}(p)$，并将 $T_{\gamma(s)}\mathscr{A}(G\cdot q)$ 同构地映射到 $T_{\gamma(s')}\mathscr{A}(G\cdot q)$。 □

一方面，由于对（f， g）是 G-不变的，轨道 $G\cdot x \subseteq \mathscr{D}$（$G\cdot p$），这意味着

$$T_x\mathscr{D}(p) + T_x(G\cdot x) \subseteq T_x\mathscr{D}(G\cdot p).$$

另一方面，取李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，并考虑其相应的基本向量场 X_1，$\cdots$，$X_{\dim G}$。这些基本向量场在 M 上张成轨道的切空间。在点 p 处，我们有

$$0 = T_p\mathscr{D}(p) \cap T_p(G\cdot p) = T_p\mathscr{D}(p) \cap \operatorname{span}\{X_1, \cdots, X_{\dim G}\}|_p.$$

由维数原因可知

$$T_p\mathscr{D}(G\cdot p) = T_p\mathscr{D}(p) + \operatorname{span}\{X_1, \cdots, X_{\dim G}\}|_p.$$

由于 x 与 p 足够接近，根据连续性可得

$$T_x\mathscr{D}(G\cdot p) = T_x\mathscr{D}(p) + \operatorname{span}\{X_1, \cdots, X_{\dim G}\}|_x = T_x\mathscr{D}(p) + T_x(G\cdot x).$$

最后，(f,g) 的 G-不变性也意味着 $T_x(G\cdot x) \subseteq T_x\mathscr{A}(G\cdot q)$。因此，我们可以看到

$$\begin{aligned} T_x\mathscr{D}(p) + T_x\mathscr{A}(G\cdot q) &= T_x\mathscr{D}(p) + T_x(G\cdot x) + T_x\mathscr{A}(G\cdot q) \\ &= T_x\mathscr{D}(G\cdot p) + T_x\mathscr{A}(G\cdot q) \\ &= T_xM. \end{aligned}$$

□

定理 *1.8* 的证明。设 $G\cdot p$，$G\cdot q$ 是稳定的 G-Morse-Bott 函数 f 的两个临界轨道，其中 $H = \operatorname{stab}(p)$，$H' = \operatorname{stab}(q)$。给定 G上的任意 G-不变 C^k 类黎曼度量 g，由引理 3.5，我们的目标是证明：在 $G\cdot p$附近支集于此的 g 的泛 G-不变扰动 g'，能够实现 $\mathscr{D}_{g'}(G\cdot p)$ 与 $\mathscr{A}_{g'}(G\cdot q)$ 之间的弱 Morse-Bott-Smale 横截性。

我们用 (H) 表示 G 中与 H 共轭的子群所构成的集合。存在一个 G-不变子流形（例如参见 [Mei03，第 1.5] 节）

$$M_{(H)} = \{x \in M \mid \operatorname{stab}(x) \in (H)\}$$

它具有 G/H 束的结构

$$G/H \hookrightarrow M_{(H)} \xrightarrow{\pi} X_{(H)} := M_{(H)}/G.$$

$M_{(H)}$ 是子流形（通常不是闭的）的流出集 $G\cdot M_H$

$$M_H = \{x \in M \mid \operatorname{stab}(x) = H\}.$$

我们先给出以下观察。

命题 3.7。对于任意 G-不变度量 g'，(f,g') 的梯度向量场限制在 M_H（分别为 $M_{(H)}$）上时，必与 M_H（分别为 $M_{(H)}$）相切。因此，

$$\mathscr{D}_{f,g'}(p) \subseteq M_H, \mathscr{D}_{f,g'}(G\cdot p) \subseteq M_{(H)}.$$

命题的证明。由于这一对 (f,g') 是 G-不变的，G 的作用保持梯度流线。因此，任何与 M_H 相交的梯度流线都不可能离开M_H，这是由常微分方程唯一性定理得出的。由此可知，限制在 M_H 上的梯度向量场必与 M_H相切。这进一步意味着

$$\mathscr{D}_{f|_{M_H},g'|_{M_H}}(p) \subseteq \mathscr{D}_{f,g'}(p).$$

由于 f 是稳定的，这两个下降流形维数相同，因此必相等。因此，$\mathscr{D}_{f,g'}(p) \subseteq M_H$。由于 $M_{(H)}$ 是M_H的流出集，我们对 $M_{(H)}$也有同样的结论。□

我们的证明将分三步进行：

1. 利用 G对称性，将横截性从 $X_{(H)}$ 提升到 $M_{(H)}$。2. 运用 Sard-Smale 论证，在商空间 $X_{(H)}$ 上实现横截性，此处不再存在群作用。3. 利用临界轨道 $G \cdot q$处的稳定性条件，将横截性从 $M_{(H)}$ 提升到 M。

步骤 1

将有序对（f，g）限制到 $M_{(H)}$上，我们得到 $M_{(H)}$上的有序对（f，$\tilde{g}$）。由于 f、g和 $M_{(H)}$ 都是 G-不变的，有序对（f，$\tilde{g}$）也具有 G-不变性。此外，$M_{(H)}$ 与 $X_{(H)}$ 之间的以下对应关系是显而易见的。

- 存在一个定义在 $X_{(H)}$ 上的函数 f，使得 $f = f \circ \pi$。由于 f 是 G-Morse-Bott 函数，函数 f 是 Morse 函数，且在 $\pi(p)$处有一个临界点。
- 度量 $\tilde{g}$ 在切丛上诱导出正交分解

$$TM_{(H)} \cong (TM_{(H)})^{\text{ver}} \oplus (TM_{(H)})^{\text{hor}}$$

将其分解为垂直部分和水平部分

$$(TM_{(H)})^{\text{ver}} := \ker d\pi, \quad (TM_{(H)})^{\text{hor}} := (\ker d\pi)^{\perp}.$$

将 $\tilde{g}$ 限制在水平分布 $(TM_{(H)})^{\text{hor}}$ 上，可下降为 $X_{(H)}$ 上的度量 g，使得 $\pi : (M_{(H)}, \tilde{g}) \to (X_{(H)}, g)$ 是一个黎曼浸没；

- 在上述分解下，$X_{(H)}$ 上的任意度量 g'，都可通过将水平分布 $(TM_{(H)})^{\text{hor}} \cong \pi^* TX_{(H)}$ 上的 $\tilde{g}$ 替换为 $\pi^* g'$，来确定 $M_{(H)}$ 上的度量$\tilde{g}'$；
- 若 $\gamma(t)$ 是 $M_{(H)}$ 中 $(f, \tilde{g}')$ 的一条梯度流线，则其投影 $\pi(\gamma(t))$ 是 $X_{(H)}$ 中 (f, g') 的一条梯度流线。

理解了这一点后，我们现在旨在证明，若一对 (f, g') 具有横截性，则另一对 $(f, \tilde{g}')$ 也具有横截性。设 ϕ_t 是 (f, g') 的负梯度流，并假设 ϕ_t 对所有时间均存在。我们将使用

$$\mathscr{D}_{\bar{f},\bar{g}'}(\pi(p)) := \{x \in X_{(H)} \mid \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = \pi(p)\}$$

表示通常意义下 $\pi(p)$ 处的下降流形。对于上升流形，尽管点 q 可能具有更大的稳定子群 $H' \supsetneq H$，且不属于 $M_{(H)}$，我们仍将使用

$$\mathscr{A}_{\bar{f},\bar{g}'}(\pi(q)) := \{x \in X_{(H)} \mid \lim_{t \to +\infty} d_g(\pi^{-1}(\phi_t(x)), G \cdot q) = 0\}$$

表示 $X_{(H)}$ 中的流线的并集，这些流线在 $M_{(H)} \subseteq M$ 中的提升在黎曼距离 d_g 下收敛于 $G \cdot q$。

命题 3.8。 在上述设定下，如果

$$\mathscr{D}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(p)) \pitchfork_{X_{(H)}} \mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q)),$$

then

$$\mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G\cdot p) \pitchfork_{M_{(H)}} \pi^{-1}(\mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q))).$$

证明。 如果 $y \in \mathscr{D}_{f,\ g'}(\pi(p))$ 和 $x \in \pi^{-1}(y)$，我们知道 $\pi(\phi_t(y))$ 是 $X_{(H)}$ 中一条经过 y 的负梯度流线。因此，$x \in \mathscr{D}_{\tilde{f},\ \tilde{g}'}(G\cdot p)$，因为 $\lim_{t\to-\infty}\pi(\phi_t(y)) = \pi(p)$。因此，我们看到

$$\pi^{-1}(\mathscr{D}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(p))) \subseteq \mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G\cdot p),$$

这尤其意味着

$$(T_xM_{(H)})^{\mathrm{ver}} + \pi^*T_y\mathscr{D}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(p)) \subseteq T_x\mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G\cdot p).$$

现在，假设 $x \in \mathscr{D}_{\tilde{f},\ \tilde{g}'}(G\cdot p) \cap \pi^{-1}(\mathscr{A}_{f,\ g'}(\pi(q)))$。根据 $X_{(H)}$ 中的横截性假设，

$$\begin{aligned} T_xM_{(H)} &= (T_xM_{(H)})^{\mathrm{ver}} + \pi^*T_{\pi(x)}X_{(H)} \\ &= (T_xM_{(H)})^{\mathrm{ver}} + \pi^*T_{\pi(x)}\mathscr{D}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(p)) + \pi^*T_{\pi(x)}\mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q)) \\ &\subseteq T_x\mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G\cdot p) + T_x\pi^{-1}(\mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q))). \end{aligned}$$

□

步骤 2

现在，我们的目标是在商流形 $X_{(H)}$ 上点 $\pi(p)$ 附近扰动度量 g，使其成为一般度量 g'，从而使这一对 $(f,\ \overline{g}')$ 满足命题 3.8 中的横截性假设。注意，若 g' 与 g 的差异仅限于 $\pi(p)$ 的某个紧邻域内，则其流 ϕ_t 将对所有时间都存在。事实上，根据命题 3.7，$\tilde{(f,\ \tilde{g})}$ 在 $M_{(H)}$ 上的梯度流对所有时间都存在。将这些流线经由 π 投影后可知，$(f,\ g)$ 在 $X_{(H)}$ 上的梯度流也对所有时间都存在。

由于 $X_{(H)}$ 上没有群作用，我们将采用标准的 Sard-Smale 论证（例如参见 [Hut02，命题 5.8] 和 [Sal90，定理 3.3]）来实现 $X_{(H)}$ 中的横截性。

命题 3.9. 对于一个在紧邻域 $\pi(p)$ 之外与 g 一致的一般度量 g'，我们有

$$\mathscr{D}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(p)) \pitchfork_{X_{(H)}} \mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q)).$$

证明。 取巴拿赫流形 $\mathcal{B}\times\mathcal{G}$，其中

$$\mathcal{B} := \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}, X_{(H)}) \mid \lim_{t\to-\infty} u(t) = \pi(p),\ \lim_{t\to+\infty} d_g(\pi^{-1}(u(t)), G\cdot q) = 0\},$$

$$\mathcal{G} := \{C^k\text{-metrics on } X_{(H)}\},$$

以及纤维为 $\mathcal{E}_{(u,h)} := L^2(u^*TX_{(H)})$ 的巴拿赫丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{B}\times\mathcal{G}$。考虑由下式定义的截面 $\mathcal{L}\mathcal{E}$

$$\mathcal{L} = \frac{d}{ds} + \mathrm{grad}_{\overline{f},h} : \mathcal{B}\times\mathcal{G} \to \mathcal{E},$$

其中 $\mathrm{grad}_{f,h}$ 是 $X_{(H)}$ 上关于度量 $h \in \mathcal{G}$ 的 f 的梯度向量场。对于任意 $(u, h) \in \mathcal{L}^{-1}(0)$，存在如下线性化算子

$$D_{(u,h)} : L^2(u^*TX_{(H)}) \oplus T_h\mathcal{G} \to L^2(u^*TX_{(H)})$$

通过对截面映射 $\mathcal{L}$ 在 $(u,\ h)$ 处求导，再投影到纤维方向 $\mathcal{E}_{(u,h)}$，从而定义。

现在，为了应用 Sard-Smale定理（[Hut02，定理 5.4]），我们需要考虑将 $D_{(u,h)}$ 限制到 $L^2(u^*TX_{(H)})$ 分量上的限制算子 D_u，其定义为

$$D_u\xi = \nabla_{u'(t)}\xi + A_t\xi,$$

其中

- $\nabla_{u'(t)}$ 表示相对于固定背景度量的 Levi-Civita联络所取的协变导数;
- A_t 是 f 在 $u(t)$ 处的海森矩阵算子，借助度量 h 将其视为一个 (1，1)-张量。

为了证明 D_u 是 Fredholm算子，回顾一下，根据 [RS95 的定理 2.1] 或 [Hut02 的原理 5.6] , , 只需证明极限 $\lim_{t\to\pm\infty} A_t$ 存在，且是可逆的自伴算子。与通常的Morse框架类似，A_t 的负渐近极限由 f 在临界点 $\pi(t)$处的海森矩阵给出。对于正渐近极限，我们可以选取一条提升路径 $v:\ \mathbb{R} \to M_{(H)}$，使得 $\pi(v(t)) = u(t)$，且当 $t \to +\infty$时，$v(t)$位于 $G\cdot q$ 在 q 处的局部切片 $\mathbb{D}_q$ 中。当 t足够大时，若 $\{e_i(t)\}$ 是沿着 $u(t)$、使 $u^*TX_{(H)}$平凡化的标架，则存在一个与 $\mathbb{D}_q$相切的标架 $\{l_i(t)\}$，使得 $\pi_*(l_i(t)) = e_i(t)$。因此，极限 $\lim_{t\to+\infty} A_t(e_i(t))$可以由 f 在 q 处的 Hessian 算子以及极限向量 $\lim_{t\to+\infty} l_i(t) \in T_q\mathbb{D}_q$计算得出。由于 G-Morse-Bott 假设意味着 $\mathrm{Hess} f(q)$在 $T_q\mathbb{D}_q$处非退化，因此 A_t 的正渐近极限也是一个可逆的自伴算子。

因此，我们可以恢复标准论证中用于在闭流形上获得 Morse-Smale度量的相同设置。局部坐标中的直接计算表明，$T_h\mathcal{G}$ 中的变分空间足够大，可以使$D_{(u,h)}$ 成为满射。此外，可以选择这些变分，使其支集包含在 $\pi(p)$的任意小邻域中（[Hut02，命题 5.8，步骤 2(a)]）。Sard-Smale定理（[Hut02，定理 5.4]）保证，对于 $X_{(H)}$上的泛型度量 $g' \in \mathcal{G}$，D_u 是满射的，因此$\overline{\mathscr{D}}_{f,\ g'}(\pi(p))$与$\overline{\mathscr{A}}_{f,\ g'}(\pi(q))$在 $X_{(H)}$中横截相交。

□

步骤3

根据前两个步骤，我们可以假设 $M_{(H)}$ 上的度量 $\tilde{g}'$ 满足横截性条件$\overline{\mathscr{D}}_{\tilde{f},\ \tilde{g}'}(G\cdot p) \pitchfork_{M_{(H)}} \pi^{-1}(\overline{\mathscr{A}}_{f,\ g'}(\pi(q)))$。现在，我们将 $M_{(H)}$ 上的这个扰动度量 $\tilde{g}'$ 延拓为 M 上的一个 G-不变度量 g'，且该度量与原度量 g的距离小于 C^k。

令 $K \subseteq X_{(H)}$ 为 $\pi(p)$的一个邻域，其中包含命题 3.9 中扰动对称 (0, 2)-张量 $\delta := g' - g$ 的支集。于是，相应的

对称 (0，2)-张量 $\tilde{\delta} := \tilde{g}' - \tilde{g}$ 在 $M_{(H)}$ 上的支集包含于 $\pi^{-1}(K) \subseteq M_{(H)}$ 中。必要时缩小 K，我们可以将嵌入子流形 $\pi^{-1}(K) \subseteq M$ 的法丛 $N_{\pi^{-1}(K)}$ 与一个 G-不变的管状邻域pr 等同，该邻域由关于度量 g的指数映射定义为： $U(\pi^{-1}(K)) \to \pi^{-1}(K)$。在 $U(\pi^{-1}(K))$上，我们采用 g-正交分解

$$TU(\pi^{-1}(K)) \cong pr^*(T\pi^{-1}(K)) \oplus pr^* N_{\pi^{-1}(K)}$$

定义一个对称的 $(0,2)$-张量 δ，其在 M 上的支集包含于 $U(\pi^{-1}(K))$，方法是规定

- δ 沿 $pr^*(T\pi^{-1}(K))$ 方向等于 $pr^*\tilde{\delta}$；
- $\delta(v,\text{-}) = 0$，若 v 属于法向方向 $pr^* N_{\pi^{-1}(K)}$。

˜由于投影映射 pr、分解以及 δ 都是 G-不变的，因此该对象 δ 是 G-不变的。取一个 G-不变的截断函数 χ，其支集包含于 $U(\pi^{-1}(K))$，并且在 $\pi^{-1}(K) \subseteq U\,\pi^{-1}(K)$ 的一个较小邻域上满足 $\chi \equiv 1$。现在，我们可以定义

$$g' := g + \chi\delta$$

将其定义为 G 上的一个 M-不变对称 (0，2) 张量，并满足：其在 $M_{(H)}$ 上的限制 $g'|_{M_{(H)}}$ 与 $\tilde{g}'$ 一致。注意，若固定函数 χ 并选择使 C^k-范数足够小的 δ'，则可以使 g' 与 g 的距离任意 C^k 小。由于小的 C^k-扰动保持正定性， g' 在 M 上定义了一个 G-不变度量，该度量将 $M_{(H)}$ 上的扰动延拓出去。

定理 1.8 的证明所需的最后一个要素是以下断言，它类似于 [BL24, 引理 7.5], ，可将 $M_{(H)}$ 中的横截性提升为 M 中的横截性。这正是我们实质性地利用临界轨道 $G \cdot q$ 处稳定性条件的地方。

命题 3.10. 设 g' 是通过上述描述由 $M_{(H)}$ 上的度量 $\tilde{g}'$ 在 M 上得到的度量。若

$$\mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G \cdot p) \pitchfork_{M_{(H)}} \pi^{-1}(\mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q))),$$

那么我们还有

$$\mathscr{D}_{f,g'}(G \cdot p) \pitchfork_M \mathscr{A}_{f,g'}(G \cdot q).$$

证明. 根据命题 3.7，我们只需检验在点处 $\mathscr{D}_{\tilde{f},\ \tilde{g}'}(G\cdot p)$ 与 $\mathscr{A}_{f,\ g'}(G \cdot q)$ 之间的横截性

$$x \in \mathscr{D}_{f,g'}(G\cdot p) \cap \mathscr{A}_{f,g'}(G\cdot q) \cap M_{(H)} = \mathscr{D}_{\tilde{f},\tilde{g}'}(G\cdot p) \cap \pi^{-1}(\mathscr{A}_{\overline{f},\overline{g}'}(\pi(q))) \subseteq M_{(H)}.$$

根据 $M_{(H)}$ 中的横截性假设，只需证明

$$T_x M_{(H)} + T_x \mathscr{A}_{f,g'}(G \cdot q) = T_x M.$$

根据命题 3.6，我们还可以假设 x 位于 $G \cdot q$ 的一个管状邻域内，该邻域被识别为

$$U(G \cdot q) \cong G \times_{H'} N_q,$$

其中， H' 是 q 处的稳定子群， N_q 是 q处的法空间。不妨设 $q = [e, 0]$ 和 $x = [e, v] \in G \times_{H'} N_q$。那么， $x \in M_{(H)}$ 这一假设意味着 H' 包含一个 H'' 共轭的子群

到 H，使得 v 属于由 H''固定的线性子空间 $N_q^{H''} \subseteq N_q$。注意，$N_q^{H''} \supseteq N_q^{H'}$。考虑$G\times_{H'} N_q^{H'}$与$\mathscr{A}_{f,\ g'}(G\cdot q)$之间的局部交集。根据 $G\cdot q$处的稳定性假设，我们有

$$\begin{aligned} T_qM &= N_q^{H''} + T_q(\mathscr{A}_{f,g'}(G\cdot q)) \\ &\supseteq N_q^{H'} + T_q(\mathscr{A}_{f,g'}(G\cdot q)) \\ &= N_q^{H'} + T_q(G\cdot q) + T_q(\mathscr{A}_{f,g'}(G\cdot q)) \\ &= T_{[e,0]}(G\times_{H'} N_q^{H'}) + T_q(\mathscr{A}_{f,g'}(G\cdot q)). \end{aligned}$$

由于 $M_{(H)}\cap(G\times_{H'} N_q^{H'})$ 是从 $G\times_{H'} N_q^{H'}$ 中去掉对应于较大稳定子群的低维层后得到的，因此它是 $G\times_{H'} N_q^{H'}$ 的稠密开子流形。因此，当 x 充分接近 q 时，根据连续性，我们将在 x 处得到 $M_{(H)}$ 与 $\mathscr{A}_{f,\ g'}(G\cdot q)$ 之间所需的横截性。

□

最后，注意到临界轨道只有有限多个。为了完成定理 1.8 的证明，我们只需按照上述方案，在 $M_{(\mathrm{stab}(m))}$ 内每个临界轨道 $G\cdot m$ 附近对度量进行一般扰动，然后以 G 不变的方式将扰动延拓到 M。

□

注记 3.11。上述关于李群作用的等变横截性证明与有限群作用的 [BL24] 证明不同：我们处理的是层 $M_{(H)}$ 及其商空间 $X_{(H)}$，而不是 H 的不动点子流形

$$M^H = \{x\in M \mid H\subseteq \mathrm{stab}(x)\}.$$

当 G为有限集时，临界轨道 $G\cdot p$是 M^H的离散子集，因此 p具有一个足够小的邻域 $V_p\subseteq M^H$，该邻域与 $G\cdot p$中的其他点不相交。在这种情况下，[BL24] 中的一般扰动在V_p内进行。在李群情形下，扰动则是在 $\pi(p)\in X_{(H)}$ 的一个小邻域 K 内进行。

4. MORSE理论等变上同调

4.1. 莫尔斯流线的模空间及其可定向性。在 [AB95 第 3 节中，2], Austin–Braam 引入了以下假设，以定义与一对（f、g）相关的 Morse-Bott 上链复形。

假设 4.1。

（1）函数 f 是弱自指标化的。也就是说，对于任意连通分支 S，$S'\subseteq \mathrm{Crit}(f)$，若 $\mathrm{Ind}(S)\le \mathrm{Ind}(S')$则不存在从 S到S' 的负梯度流线。

（2）对于任意连通分支 S，$S'\subseteq \mathrm{Crit}(f)$ 以及任意 $p\in S$，下降流形 $\mathscr{D}(p)$ 与上升流形 $\mathscr{A}(S')$ 横截相交。

（3）每个连通分支 $S \subseteq \mathrm{Crit}(f)$及其负法丛 $\mathcal{N}^-(S)$ 都是可定向的。

正如 Banyaga–Hurtubise [BH10, 引理 3.6], 所指出的，条件（2）已经蕴含条件（1）。

如果我们只考虑稳定的 G-Morse-Bott 函数，那么根据定理 1.8，对于一般的 G-不变度量，条件（2）成立。相比之下，若不满足G-Morse-Bott 条件和稳定性假设，条件（2）通常不成立。事实上，若不将范围限定为 G-Morse-Bott 函数，则例 3.3 表明，对于任意 G-不变度量，条件（2）都不成立。即使在 G-Morse-Bott 函数这一类中，例 5.2 也表明，对于所有 G-不变度量，条件（2）仍可能不成立。

在存在李群对称性的情况下，临界分支 S 是齐性空间，它们本身也可能不可定向（例如 $\mathbb{RP}^2 = SO(3)/O(2)$）。尽管如此，我们将看到，临界子流形 S 的可定向性并非本构造所必需。此外，下面的引理表明，定义1.4中的稳定性条件保证了条件（3）中出现的负法丛可定向。

引理 4.2. *设紧李群 G 作用在 M上。若 f 是一个稳定的 G-Morse-Bott 函数，则对于每个临界轨道 S，关于任意 G-不变黎曼度量的负法丛 $\mathcal{N}^-(S)$是平凡丛。*

证明。 任取 $p \in S$ ，并令 $H = \mathrm{stab}(p)$。H 在 p 处的法空间 N_p 上的诱导表示可分解为平凡部分 N_p' 与非平凡部分 N_p''之和。由引理 2.1， f的稳定性假设意味着，对于任意G-不变度量，Hess$f(p)$作为自伴算子时的负特征空间 N_p^-包含于 N_p'中。这意味着 N_p^-由 H固定。因此，负法丛 $\mathcal{N}^-(S)$可识别为

$$G \times_H N_p^- \cong G/H \times N_p^- \cong S \times N_p^-,$$

这是一个以 S为底空间的平凡丛。 □

对于任意两个连通分支 $S, S' \subseteq \mathrm{Crit}(f)$， 令 $\mathcal{M}(S, S')$表示从 S 到 S' 的无参数负梯度流线模空间，其定义为

$$\mathcal{M}(S, S') = (\mathscr{D}(S) \cap \mathscr{A}(S'))/\mathbb{R},$$

其中 $\mathbb{R}$ 通过沿流方向的平移作用。如果这对 (f, g) 是弱 Morse-Bott-Smale 的，那么 $\mathcal{M}(S, S')$ 是一个维数为

$$\mathrm{Ind}(S) - \mathrm{Ind}(S') + \dim S - 1.$$

类似地，对于临界点 $p \in S$ 和临界子流形 $S' \subseteq \mathrm{Crit}(f)$，我们将从 p 到 S' 的未参数化负梯度流线的模空间 $\mathcal{M}(p, S')$ 定义为

$$\mathcal{M}(p, S') = (\mathscr{D}(p) \cap \mathscr{A}(S'))/\mathbb{R},$$

其中， $\mathbb{R}$ 仍通过沿流方向的平移作用。当配对 (f, g) 是 Morse-Bott-Smale 时，$\mathcal{M}(p, S')$ 是一个维数为

$$\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(S') - 1.$$

根据引理 4.2，我们可以为所有连通分支 $S \subseteq \mathrm{Crit}(f)$ 的负法丛 $\mathcal{N}^-(S)$ 固定定向，使这些定向保持 G- 不变。对于每个 $p \in S$，该识别

$$T_p\mathscr{D}(p) \cong \mathcal{N}^-(S)_p$$

在 p 处诱导下降流形 $\mathscr{D}(p)$ 上的定向。模空间 $\mathcal{M}(p,\ S')$ 的定向如下。对于任意 $[\gamma] \in \mathcal{M}(p,\ S')$，沿 γ 的线性化流诱导出一个向量空间的同构

$$T_p\mathscr{D}(p) \cong T_{[\gamma]}\mathcal{M}(p, S') \oplus \mathbb{R}\langle\partial_s\rangle \oplus T_q\mathscr{D}(q),$$

其中 $q = \gamma(+\infty) \in S'$ 且 s 表示流参数。我们对 $T_{[\gamma]}\mathcal{M}(p,\ S')$ 定向，使该同构为保定向的；具体而言，使用选定的 G-不变定向，分别为 $\mathcal{N}^-(S)$ 和 $\mathcal{N}^-(S')$ 定向，从而为 $T_p\mathscr{D}(p)$ 和 $T_q\mathscr{D}(q)$ 定向。注意，以这种方式指定的定向也具有 G-不变性：对于任意 $g \in G$，$T_{[\gamma]}\mathcal{M}(p,\ S')$ 上的定向与 $T_{[g\cdot\gamma]}\mathcal{M}(g\cdot p,\ S')$ 上的定向一致。

4.2. 普通上同调的上链复形。我们简要回顾如何利用等变莫尔斯-博特理论，在李群对称性下构造普通上同调。更多细节请参见 [Zhu25] 。设 f 是闭 G 流形 M 上的一个稳定的 G-Morse-Bott 函数，并设 g 是一个 G-不变的黎曼度量，使得这对 $(f,\ g)$ 满足莫尔斯-博特-斯梅尔条件。对于每个 i，令 S_i 表示 $\mathrm{Crit}(f)$ 中指标为 i 的分支之并。

莫尔斯-博特上链复形 $(C,\ \partial)$ 定义为

$$C^p = \bigoplus_{i+j=p} \Omega^j(S_i)^G,$$

其中 $\Omega^j(S_i)^G$ 表示 S_i 上光滑的 G-不变微分 j-形式空间。对于齐次元素 $\omega \in \Omega^j(S_i)^G$，微分定义为若干项之和

$$\partial = \sum_{r\geq 0} \partial_r,$$

其各分量如下所述。

- 对于 $r > 0$,

$$\partial_r\omega := (-1)^j(e_-^{i+r,i})_*(e_+^{i+r,i})^*\omega \in \Omega^{j-r+1}(S_{i+r})^G.$$

Here

$$e_+^{i+r,i} : \mathcal{M}(S_{i+r}, S_i) \to S_i,$$
$$e_-^{i+r,i} : \mathcal{M}(S_{i+r}, S_i) \to S_{i+r},$$

表示梯度流线模空间上的端点评价映射。算子 $(e^{i+r}{}_{,+}{}^{i})^*$ 表示拉回，而 $(e^{i+r}{}_{,-}{}^{i})_*$ 表示推前；由于莫尔斯-博特-斯梅尔条件保证 $e^{i+r}{}_{,-}{}^{i}$ 具有局部平凡纤维丛的结构，因此推前可解释为沿纤维积分。符号和次数移位反映了纤维的维数，推前所用的定向则是在上一小节中为模空间固定的。

• 对于 $r = 0$,

$$\partial_0 \omega := d\omega \in \Omega^{j+1}(S_i)^G.$$

引理 4.3。 [Zhu25，命题 2.3] $\partial^2 = 0$。

定理 4.4。 [Zhu25，定理 1。4] C，∂）的上同调与德拉姆上同调 H^*（M；$\mathbb{R}$）同构。

注 4.5。 在 [Zhu25], 中，由于考虑取值于 $\mathscr{D}(S_i)$ 上的定向丛中的 G-不变微分形式，定义上链复形时会出现额外的复杂性。根据我们的稳定性假设，这一问题得以避免。事实上，局部平凡纤维丛 $e^{i+r}, _ \ ^i$: $\mathcal{M}(S_{i+r}, S_i) \to S_{i+r}$ 是逐纤维可定向的，因为对于每个 $p \in S_{i+r}$， $\mathcal{M}(p, S_i)$ 上的定向都是 G-不变的。因此，使用普通的 G-不变微分形式，沿纤维积分是良定义的。

4.3. 等变上同调的上链复形。 我们沿用上一小节中的相同设置和记号。按照 Austin-Braam [AB95], ，我们将莫尔斯论卡当模型 (C_G, ∂_G) 定义为

$$C_G^p = \bigoplus_{i+j+2k=p} \left(\Omega^j(S_i) \otimes S^k(\mathfrak{g}^*)\right)^G.$$

这里， $S^k(\mathfrak{g}^*)$ 表示对偶李代数的第 k 次对称幂，上标 G 表示不变子空间。群 G 通过拉回作用于 $\Omega^j(S_i)$，并通过余伴随作用作用于 $S^k(\mathfrak{g}^*)$。

对于齐次元素 $\omega \otimes \phi \in \left(\Omega^j(S_i) \otimes S^k(\mathfrak{g}^*)\right)^G$，微分定义为

$$\partial_G = \sum_{r \geq 0} (\partial_G)_r,$$

其中各分量定义如下。

• 对于 $r > 0$,

$$(\partial_G)_r(\omega \otimes \phi) := (-1)^j (e_-^{i+r,i})_* \left((e_+^{i+r,i})^* \omega\right) \otimes \phi \in \left(\Omega^{j-r+1}(S_{i+r}) \otimes S^k(\mathfrak{g}^*)\right)^G.$$

• 对于 $r = 0$,

$$\begin{aligned}(\partial_G)_0(\omega \otimes \phi) &:= d\omega \otimes \phi - \sum_\alpha \iota_{\widetilde{X}_\alpha} \omega \otimes (\theta^\alpha \cdot \phi) \\ &\in \left(\Omega^{j+1}(S_i) \otimes S^k(\mathfrak{g}^*)\right)^G \oplus \left(\Omega^{j-1}(S_i) \otimes S^{k+1}(\mathfrak{g}^*)\right)^G,\end{aligned}$$

其中 $\{X_\alpha\}$ 是 $\mathfrak{g}$的基， $\{\theta^\alpha\}$ 是 $\mathfrak{g}^*$的对偶基， X_α 表示由 X_α 诱导的基本向量场， $\theta^\alpha \cdot \phi$ 表示对称乘法。

引理 4.6 ([AB95] 定理 5.1)。 $\partial_G^2 = 0$。

定理 4.7 ([AB95] 定理 5.3)。 $C_G, \partial_G)$ 的上同调与 *Borel* 等变上同调 $H_G^*(M;$ $\mathbb{R})$ 作为一个 $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)^G$- 模同构。

5. 示例

我们从一个简单的例子开始，其中不一定需要稳定化，但仍能得出相同的计算结果。

例5.1 (S^2 带有 S^1-旋转)。设 $G = S^1$。我们考虑由绕 z 轴旋转给出的 S^2 上的标准 S^1-作用。令

$$f(x, y, z) = z$$

为高度函数。则 f 是一个 S^1-Morse-Bott 函数，具有两个临界子流形：

$$S_N = \{(0, 0, 1)\}, \qquad S_S = \{(0, 0, -1)\},$$

其指标分别为 2 和 0。此例见 [AB95，例 5.4.1 (1)]。令 g 为标准圆度量。虽然函数 f 在 S_N 处不稳定，但这一对 $(f,\ g)$ 已满足莫尔斯-博特-斯梅尔条件，因此可以定义与 f 相关联的上链复形 $(C_f^\bullet,\ \partial_G)$。令 n、s 和 θ 分别表示 $\Omega^0(S_N)^G$、$\Omega^0(S_S)^G$ 和 $S(\mathfrak{g}^*)^G$ 中的生成元。则群 C_f^p 由 $n \otimes \theta^k$ 和 $s \otimes \theta^k$ 生成（当 $p = 2k \geq 0$ 时），否则为零。由于次数的原因，微分 ∂_G 全部为零。

另一方面，我们可以通过在 S_N 处进行稳定化来修改函数 f。将北极稍微向下移动后，会得到一个小圆，形成新的指标 1 临界子流形 S'_N，而原来的临界子流形 S_N 则变为指标 0；见图3(B)。稳定化之后，这基本上等价于 [AB95, Example5.4.1 (2)]，其中 S^1-Morse-Bott 函数取为

$$f'(x, y, z) = 1 - z^2.$$

我们仍使用上述记号 n, s, θ，并令 n'_0, n'_1 分别为 $\Omega^0(S'_N)^G$, $\Omega^1(S'_N)^G$ 中新生成的生成元。与稳定化函数 f' 相关联的上链群 $C^p_{f'}$ 在 $p = 2k + 1 \geq 0$ 时由 $n'_0 \otimes \theta^k$ 生成；在 $p = 2k \geq 0$ 时由 $n \otimes \theta^k, s \otimes \theta^k, n'_1 \otimes \theta^{k-1}$ 生成；其他情况下为零。微分 ∂_G 给出为

$$\partial_G(n'_0 \otimes \theta^k) = 0,\ \partial_G(n'_1 \otimes \theta^{k-1}) = -n'_0 \otimes \theta^k,\ \partial_G(n \otimes \theta^k) = \partial_G(s \otimes \theta^k) = n'_0 \otimes \theta^k.$$

注意，与 f 及其稳定化 f' 相关的两个上链复形的上同调都计算出了众所周知的等变上同调群

$$H^n_{S^1}(S^2; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & n = 0, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & n \in 2\mathbb{Z}_{>0}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

下一个例子不在 [AB95] 的范围内，因为不存在 Morse-Bott-Smale 度量，而在此处确实需要稳定化才能得到上链复形。

例 5.2（映射环面）。 考虑映射环面

$$M = T^2 \times [0,1]/\sim,$$

其中 $T^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$，且同一化由下式给出

$$(\theta_1, \theta_2, 0) \sim (-\theta_1, \theta_2, 1).$$

注意， M 也可以描述为 S^1 与克莱因瓶的乘积。令 $G = S^1$ 通过向量场 ∂_τ 生成的流作用于 M，其中τ 表示 $[0,1]$因子上的坐标。

定义一个 S^1-不变函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$，如下:

$$f(\theta_1, \theta_2, \tau) = (3 + \cos 2\pi\theta_1) \sin 2\pi\theta_2.$$

那么 f 是 G-Morse-Bott，具有四个临界轨道:

- 一个指标为 2 的子流形

$$P_2 = \big\{(0, \tfrac{1}{4}, \tau) \mid \tau \in [0,1]\big\},$$

- 两个指标为 1 的子流形

$$Q_1 = \big\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tau) \mid \tau \in [0,1]\big\}, \qquad R_1 = \big\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tau) \mid \tau \in [0,1]\big\},$$

- 一个指标为 0 的子流形

$$S_0 = \big\{(0, \tfrac{3}{4}, \tau) \mid \tau \in [0,1]\big\}.$$

函数 f 不稳定，因为 P_2 和 R_1 不是稳定的临界子流形。此外， P_2 和 R_1 的下降流形不可定向。

事实上，不存在使得 $(f,\ g)$ 满足莫尔斯-博特-斯梅尔条件的 G-不变度量 g。确实，对于任意 $p \in Q_1$，虚维数

$$\operatorname{virdim} \mathcal{M}(p, R_1) = -1, \qquad \mathcal{M}(p, R_1) \neq \emptyset.$$

为说明后一陈述，注意到 Q_1 是稳定的，且稳定子群满足 $\mathrm{stab}(p) \cong \mathbb{Z}_2$。令 K 表示包含 p的 $M^{\mathbb{Z}_2}$ 的连通分支。于是， K 与克莱因瓶微分同胚，并包含 R_1。由于 Q_1 是稳定的，根据命题 3.7，下降流形 $\mathscr{D}(p)$包含于 K 中。因此，在 M 中从 p 到 R_1 的流线模空间 $\mathcal{M}(p,\ R_1)$与 K中对应的模空间相同，后者是利用限制函数 $f|_K$ 和度量 $g|_K$计算得到的。函数 $f|_K$只有两个临界子流形：指标为 1 的子流形 Q_1 和指标为 0 的子流形 R_1。因此，任何从 p 出发的莫尔斯流线都必须终止于 R_1，这就证明了 $\mathcal{M}(p,\ R_1)$非空。

事实上，对于任意 G-不变度量 g，通过类似论证可知，配对$(f,\ g)$甚至不满足弱莫尔斯-博特-斯梅尔条件。留给读者验证。

通过应用稳定化，我们将 f 修改为稳定的 G-Morse-Bott 函数 f'。在这一过程中，原始临界子流形 P_2 产生了一个指标为 1 的稳定临界¯子流形 P_1，以及一个位于 P_1 附近、指标为 2 的新稳定临界子流形 P_2'，它与 τ 上的每个纤维相交于两点。类似地，¯原始临界子流形 R_1 变为一个指标为 0 的稳定临界子流形 R_0，我们还在 R_0 附近引入了一个指标为 1 的新稳定临界子流形 R_1'，

它同样与 τ 上的每个纤维相交于两点。图4对此进行了说明。

上同调 $H^*(M;\mathbb{R})$。固定一个 G-不变的积度量 g，使得 $(f',\ g)$ 满足莫尔斯-博特-斯梅尔条件。对于每个

$$A_i \in \{S_0, \bar{R}_0, R_1', Q_1, \bar{P}_1, P_2'\},$$

存在生成元 $a_{ij} \in \Omega^j(A_i)^G,\ j = 0,\ 1$，其中装饰标明分支，$i$ 表示指标，j 表示微分形式的次数。上链复形 $(C^\bullet,\ \partial)$ 的微分为

$$\begin{aligned}
&\partial s_{00} = r'_{10}, && \partial \bar{r}_{00} = -r'_{10}, && \partial r'_{10} = 0,\\
&\partial s_{01} = -r'_{11}, && \partial \bar{r}_{01} = r'_{11}, && \partial r'_{11} = 0,\\
&\partial q_{10} = p'_{20}, && \partial \bar{p}_{10} = -p'_{20}, && \partial p'_{20} = 0,\\
&\partial q_{11} = -p'_{21}, && \partial \bar{p}_{11} = p'_{21}, && \partial p'_{21} = 0.
\end{aligned}$$

我们仅说明如何推导恒等式 $\partial s_{01} = -r'_{11}$；其余计算类似。需要考虑三个相关的模空间：

- 模空间 $\mathcal{M}(R_1',\ S_0)$ 与 R_1' 微分同胚，并通过端点映射允许一个 S_0 的二重覆盖。它对微分的贡献产生项 $-r'_{11}$。
- 模空间 $\mathcal{M}(P_1, S_0)$ 与 $P_1 \bigsqcup P_1 \cong S_0 \bigsqcup S_0$ 微分同胚，并且同样通过端点映射存在一个 S_0 的双覆盖。然而，每个纤维中的两个点带有相反的定向，因此它们对微分的贡献相互抵消。
- 模空间 $\mathcal{M}(P_2', S_0)$ 不对微分作出贡献。实际上，S_0 上表示 s_{01} 的1-形式位于 $d\tau$方向，而沿纤维积分会将其消去，因为该纤维的切空间与环面纤维方向相切。

由此得到的 $(C^\bullet, \partial)$ 的上同调计算普通上同调

$$H^n(M;\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & n = 0,\\ \mathbb{R}^2, & n = 1,\\ \mathbb{R}, & n = 2,\\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，H^0 由 $s_{00} + \bar{r}_{00}$ 生成；H^1 由 $s_{01} + \bar{r}_{01}$ 和 $q_{10} + \bar{p}_{10}$ 生成；H^2 由 $q_{11} + \bar{p}_{11}$ 生成。

等变上同调 $H^*_{S^1}(M;\mathbb{R})$。令 θ 表示 $S(\mathfrak{g}^*) \cong \mathbb{R}[\theta]$的一个生成元。等变上链复形 $C^\bullet_G$ 由以下元素生成

$$\begin{aligned}
&s_{00}\otimes\theta^k,\ \bar{r}_{00}\otimes\theta^k,\ r'_{10}\otimes\theta^k,\ q_{10}\otimes\theta^k,\ \bar{p}_{10}\otimes\theta^k,\ p'_{20}\otimes\theta^k,\\
&s_{01}\otimes\theta^k,\ \bar{r}_{01}\otimes\theta^k,\ r'_{11}\otimes\theta^k,\ q_{11}\otimes\theta^k,\ \bar{p}_{11}\otimes\theta^k,\ p'_{21}\otimes\theta^k,
\end{aligned}$$

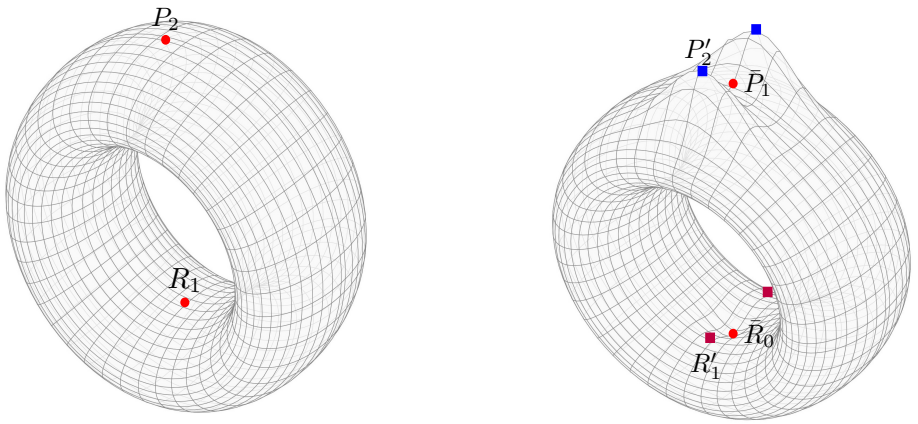
对于所有 $k \geq 0$。

微分 ∂_G 由下式给出

$$\begin{aligned}
&\partial_G(s_{00}\otimes\theta^k)=r'_{10}\otimes\theta^k, && \partial_G(s_{01}\otimes\theta^k)=-r'_{11}\otimes\theta^k-s_{00}\otimes\theta^{k+1},\\
&\partial_G(\bar r_{00}\otimes\theta^k)=-r'_{10}\otimes\theta^k, && \partial_G(\bar r_{01}\otimes\theta^k)=r'_{11}\otimes\theta^k-\bar r_{00}\otimes\theta^{k+1},\\
&\partial_G(r'_{10}\otimes\theta^k)=0, && \partial_G(r'_{11}\otimes\theta^k)=-r'_{10}\otimes\theta^{k+1},\\
&\partial_G(q_{10}\otimes\theta^k)=p'_{20}\otimes\theta^k, && \partial_G(q_{11}\otimes\theta^k)=-p'_{21}\otimes\theta^k-q_{10}\otimes\theta^{k+1},\\
&\partial_G(\bar p_{10}\otimes\theta^k)=-p'_{20}\otimes\theta^k, && \partial_G(\bar p_{11}\otimes\theta^k)=p'_{21}\otimes\theta^k-\bar p_{10}\otimes\theta^{k+1},\\
&\partial_G(p'_{20}\otimes\theta^k)=0, && \partial_G(p'_{21}\otimes\theta^k)=-p'_{20}\otimes\theta^{k+1}.
\end{aligned}$$

$(C_G^\bullet,\ \partial_G)$ 的上同调由 $s_{00}+\bar r_{00}$ 在 0 次上生成，并由$q_{10}+\bar p_{10}$ 在 1 次上生成。因此，它计算了 S^1-等变上同调

$$H^n_{S^1}(M;\mathbb{R})=\begin{cases}\mathbb{R}, & n=0,1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



(A) 将 f 限制到一个纤维

（B） f' 限制在一个纤维

图4。稳定化对环面纤维的影响

参考文献

[AB84] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 矩映射与等变上同调。*Topology*，23(1):1–28，1984年。[AB95] D. M. Austin 和 P. J. Braam. Morse-Bott 理论与等变上同调。载于*Floer*纪念文集，第 133 卷，*Progr. Math.*，第 123–183 页。Birkh¨auser，巴塞尔，1995年。[BH10] Augustin Banyaga 和 David E. Hurtubise. Morse-Bott 同调。*Trans. Amer. Math. Soc.*，362(8):3997–4043，2010年。[BL24] Erkao Bao 和 Tyler Lawson. Morse 同调与等变性，2024年。arXiv:2409.04694。[BZ20] Shaoyun Bai 和 Boyu Zhang. 等变塞尔夫理论与微扰 $SU(n)$ Casson 不变量，2020年。arXiv:2009.01118。

[Fuk96] Kenji Fukaya. 同调 3-球面的连通和的 Floer 同调。*Topology*，35(1):89–136，1996年。 [Hut02] Michael Hutchings. Morse 同调讲义（着眼于 Floer 理论与伪全纯曲线），2002年。 [Lat00] Janko Latschev. Morse-Bott 函数的梯度流。*Math. Ann.*，318(4):731–759，2000年。[May89] Karl Heinz Mayer.

G 63 1 99 114, -不变

1989

Morse 函数。*Manuscripta Math.*，( ): – 。[Mei03] Eckhard Meinrenken. 流形上的群作用，2003年。 [RS95] Joel Robbin 和 Dietmar Salamon. 谱流与 Maslov 指数。*Bull. London Math. Soc.*，27(1):1–33，1995年。[Sal90] Dietmar Salamon. Morse 理论、Conley 指数与 Floer 同调。*Bulletinof the Lon- don Mathematical Society*，22(2):113–140，1990 年。 [Was69] Arthur G. Wasserman. 等变微分拓扑。*Topology*，8:127–150，1969年。 [Zho24] Zhengyi Zhou. 基于同调扰动理论的 Morse-Bott 上同调。*Algebr. Geom. Topol.*，24(3):1321–1429，2024年。[Zhu25] Hao Zhuang. 不变 Thom-Smale 复形的解析与拓扑实现，2025年。arXiv:2311.10417。

数学学院 ，明尼苏达大学 ，明尼阿波利斯 ，明尼苏达州 55455
电子邮箱： bao@umn.edu
统一资源定位符: https://erkaobao.github.io/math/

数学学院 ，明尼苏达大学 ，明尼阿波利斯 ，明尼苏达州 55455

数学学院 ，明尼苏达大学 ，明尼阿波利斯 ，明尼苏达州 55455
电子邮箱: ning0040@umn.edu
统一资源定位符: https://sites.google.com/view/shengzhenning