arXiv:2601.16176v1 [math.AP] 22 Jan 2026

有界截面曲率流形上的度量一致拉普拉斯谱不等式

ALIX DELEPORTE、JEAN LAGACÉ 和 MARC ROUVEYROL

摘要。给定一个配备光滑度量 g 的黎曼流形 M，该度量满足截面曲率的上界和下界，我们证明，对于属于某个谱投影算子值域的函数，在 M 上的 L^2 范数与在满足厚度条件的子集 ω 上的 L^2 范数之间存在等价性。在这一情形下，厚度条件已知是最优的。范数等价性质中的常数仅取决于流形的维数、曲率界以及谱截断的频率阈值，但关键的是，它不依赖于单射半径。

1. 引言

1.1. **度量一致谱不等式**。设$(M,\ g)$ 是一个光滑完备黎曼流形。我们研究从可测集 $\omega \subset M$ 出发的定量唯一延拓，其中函数具有紧致（拉普拉斯算子）谱支撑；这类结果在控制理论文献中称为谱不等式。自 Lebeau 和 Robbiano 的开创性工作以来 [LR95], 谱不等式一直与热方程的零可控性（或等价地，终端可观测性）相关。

当 M 的里奇曲率有下界时，Deleporte 和 Rouveyrol 在 [DR24]中证明， ω 满足谱不等式的必要条件是，它在整个流形上满足某种定量等分布性质，这种性质称为厚性。在紧致 [BM23], 平坦 [EV18、WWZZ19] 和双曲 [Rou24、DR24] 情形中，研究也相继表明，ω 的厚性足以保证其满足谱不等式。本文旨在证明，对于任意截面曲率有界的流形，厚子集都能保证谱不等式成立；相关界仅依赖于维数、截面曲率的范数以及 ω 的厚性，但关键的是不依赖于 M 的单射半径（它可能在无穷远处趋于零）。这一结果意味着热方程具有零可控性，且相应常数仅依赖于这些几何量。

为准确陈述我们的结果，先定义几个对象。在 (M,g)上，我们用 $-\Delta_g \geqslant 0$ 表示拉普拉斯算子，也称为拉普拉斯–贝尔特拉米算子，它定义为狄利克雷型的弗里德里希斯延拓，参见 [Lew22]。由于拉普拉斯算子非负且自伴，它有一个正平方根，并与之关联一个支撑在 μ上的谱测度 $[0,\infty)$，该测度构成恒等分解，即对所有 $u \in \mathrm{L}^2(M)$，$u = \int_0^\infty \mathrm{d}\mu(\lambda)u$。对于 $\Lambda > 0$，令 Π_Λ 为投影到谱窗 $[0,\Lambda]$ 上的投影，其通过函数演算定义如下：

$$\Pi_\Lambda u = \int_0^\Lambda \mathrm{d}\mu(\lambda)u.$$

定义 1.1. 设 (M,g) 为一个黎曼流形，且 $\omega \subset M$ 为可测集。若存在 $C_{\mathrm{spec}} > 0$，使得对所有 $\Lambda > 0$，(M,g,ω) 满足谱不等式

和 $u \in \mathrm{L}^2(M)$,

（谱） $$\|\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq e^{C_{\mathrm{spec}}(\Lambda+1)} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)}.$$

可测集的厚性表面上看是一个纯粹的测度论性质。

定义 1.2. 设(M, g) 为一个黎曼流形，vol 为其典范黎曼测度，$\omega \subset M$ 为可测集，且 $R > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$。若对所有 $x \in M$，记 $B_x(R) \subset M$为中心在 x、半径为R的测地球，则称 ω 在尺度 R、比率为 ε 时是厚的（或称为(R, ε)-厚）。

(Thick) $$\frac{\mathrm{vol}(\omega \cap B_x(R))}{\mathrm{vol}(B_x(R))} \geq \varepsilon.$$

若存在某个 $R > 0$ 以及 $\varepsilon \in (0,1)$，使得 ω 在尺度 R、比率为 ε时是厚的，则称 ω 是厚的 。在本文余下部分，(R, ε) 称为厚性参数。

我们旨在探讨以下问题。

1. 在最大的哪一类流形上，（Spec）与（Thick）之间的等价关系成立？ 2. 能否证明常数 C_{spec} 仅依赖于流形的几何参数(M, g)（以及厚性参数 (R, ε)），而非度量 g 本身?

关于问题 1，我们得到了对 [DR24],中必要性结论的一个（部分）逆命题；而对于问题2，我们证明了维数和截面曲率的一个上界是谱不等式所依赖的唯一几何量。对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\kappa \geqslant 0$, 记 $\mathcal{M}(d, \kappa)$ 为由截面曲率范数小于 κ的 d维流形组成的集合。

定理 1.3。 设 $d \geq 2$, $\kappa \geqslant 0$ 和 $R, \varepsilon > 0$。存在常数 C_{spec}，使得对于黎曼流形 (M, g) 中的任意 (R, ε)-厚子集 ω， $\in \mathcal{M}(d, \kappa)$ 都满足常数为 C_{spec}的谱不等式。

1.2. **可观测性与控制理论的应用**。 谱不等式（Spec）的一项应用是热方程的可控性与可观测性。

定义 1.4. 热方程在时刻 $T > 0$ 的可控性代价 是常数

$$C_{\mathrm{cont}}(T, M, \omega) = \sup_{u_0, f} \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^2((0,T)\times\omega)}}{\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(M)}},$$

其中，上确界取遍所有初始条件 $u_0 \in \mathrm{L}^2(M) \setminus \{0\}$ 以及控制$f \in \mathrm{L}^2((0,T) \times M)$，使得相应解满足

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_g u &= \mathbb{1}_\omega f \quad in\ \mathbb{R}_t^+ \times M, \\ u_{|t=0} &= u_0 \quad in\ M \end{cases}$$

满足 $u_{|t=T} = 0$。

热半群在时刻 $T > 0$ 的可观测性代价 是使终端时刻可观测性不等式成立的最小常数$C_{\mathrm{obs}}(T, M, \omega)$

(Obs) $$\forall u \in \mathrm{L}^2(M), \|e^{T\Delta_g} u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq C_{\mathrm{obs}} \int_0^T \int_\omega |e^{t\Delta_g} u(x)|^2 d\,\mathrm{vol}\, dt$$

得到满足。

根据对偶性，可控性与可观测性等价；此外，利用一般的函数演算论证，两者都是谱不等式的推论（Spec）。

命题 1.5。 *(* [Cor07，定理 2。44], [Mil10，第 3 节。2], [WWZZ19]*)* 设 (M,g) 是一个完备黎曼流形，且 $\omega\subset M$ 是 M 的一个可测子集，满足 (Spec) 对 ω成立。那么， ω 满足 (Obs)，并且存在 $c_1>0$ 使得对任意 $T>0$,

$$C_{\mathrm{cont}}(T)=C_{\mathrm{obs}}(T)\leq \exp(c_1(1+C_{\mathrm{spec}})^2(1+\tfrac{1}{T})).$$

在定理 1.3的情形下，给定 d,R,ε,κ，命题 1.5 给出了 (R,ε)-厚集在 d维、曲率上界为 κ的流形上的一致可观测性代价。

Deleporte 和 Rouveyrol 证明了以下逆命题，它说明了定理 1.3的结论是锐利的。

命题 1.6 ([DR24], 定理 2)。 设 $d\geq 2$， (M,g) 是一个 d维流形，其里奇曲率有下界，且 $\omega\subset M$。若 $C_{\mathrm{obs}}(T,M,\omega)<+\infty$，则 ω是厚集。

除了（Obs）之外，我们还证明了一个关于热方程的可观测性结果，适用于固定时刻。

定理 1.7. 设设 $d\geq 2$、 $\kappa\geqslant 0$ 和 R、 ε、 $s>0$。存在 $C>0$ 和 $\alpha\in(0,1)$，使得对于任意黎曼流形$(M,g)\in\mathcal{M}(d,\kappa)$，以及任意$(R,\varepsilon)$-厚集 $\omega\subset M$，对每个 $u\in \mathrm{L}^2(M,\mathbb{R})$,

$$\|e^{s\Delta_g}u\|_{\mathrm{L}^2(M)}\leq C\|e^{s\Delta_g}u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)}\|u\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(M)}.$$

特别地，存在 C_1，使得对每个 $\delta>0$,

$$\|e^{s\Delta_g}u\|_{\mathrm{L}^2(M)}\leq C_1\delta^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}\|e^{s\Delta_g}u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)}+\delta\|u\|_{\mathrm{L}^2(M)}.$$

1.3.**进一步说明及与现有结果的比较**。谱不等式（Spec）此前已在非紧流形情形中得到研究，见 [Mil05] 和[RT24]。我们的几何假设略强于这两项工作所采用的假设（要求截面曲率有界，而非里奇曲率有下界），不过我们不需要 [Mil05] 中的插值不等式假设，并且得到了一个高频结果，这一点不同于 [RT24]。在如此一般的几何条件下，厚性足以保证谱可观测性是新的，C_{spec}的统一性也是如此。此外，我们的证明在紧情形下仍然成立，推广了以往的谱估计结果 [BM23、LL21]，并明确给出了常数对几何条件的定性依赖关系。

定理 1.7受类似的弱扩散情形下点态可观测性结果的启发 [AM22]以及 Baouendi–Grushin 算子 [AS25], 这些结果源自类似的小性传播论证。

1.4. **证明概要**。 现在我们概述定理 1.3 和 1.7的证明。总体思路借鉴了 Jerison、Lebeau 和 Robbiano 的工作 [LR95, JL99] 以及他们近期针对非紧流形情形所做的推广 [BM21, Rou24, DR24]。

给定 $(M,\ g)\in\mathcal{M}(d,\ \kappa)$、 $\Lambda>0$ 以及函数 $u\in\mathrm{Ran}(\Pi_\Lambda)$，我们通过函数演算定义 u的调和延拓如下:

$$w(t,x)=\frac{\sinh(t\sqrt{-\Delta_g})}{\sqrt{-\Delta_g}}u,$$

它满足

$$(\partial_t^2+\Delta_g)w=0\text{ in }\mathbb{R}\times M,$$

以及适用于对 w进行椭圆型小量传播估计的边界条件。证明定理1.7时，也使用了 $e^{s\Delta_g}u$ 的类似调和延拓。

随后，我们在精心构造的坐标图中，应用 Logunov 和 Malinnikova 关于来自余维 1 子集的调和函数的梯度的小性传播不等式 [LM18，定理 5。1] 然而，为了获得一致局部不等式，这些坐标图需要满足以下条件：

(i) 坐标图的定义域必须相同；(ii) 度量在这些坐标图中必须具有一致的椭圆性和利普希茨常数；(iii) 传播小性的集合的测度必须具有统一的正下界。

我们使用调和坐标来解决问题（i）和（ii）。为了使度量在这些坐标下足够正则，我们至少需要对里奇曲率给出一个上界。然而，构造调和坐标还需要局部单射半径的下界。此外，点（iii）不能直接由（Thick）推出，因为分母 $\mathrm{vol}(B(x,R))$ 可能很小（例如，当 $\mathrm{vol}(B(x,R))$ 趋于双曲曲面的尖点末端时， x 它渐近地趋于零）。我们通过指数映射在流形的局部覆盖空间——正规覆盖——中构造良好的坐标图，一举解决这两个问题；这要求我们将假设加强为截面曲率有界。

截面曲率的范数界以两种不同方式发挥作用。首先，截面曲率的下界给出了关键的体积倍增不等式（命题 2.4），该不等式在全文中被反复使用，尤其用于计数论证。其次，截面曲率的上界则在构造上述调和坐标时发挥作用。

我们注意到，若以 [LBM25，定理 2。2]替代 Logunov–Malinnikova 不等式，则可将我们的结果推广至算子 $H=-\Delta_g+V$（其势函数为 $V\in \mathrm{L}^\infty(M)$），但需注意，结果还会额外依赖于 $C_{\mathrm{spec}}\ \|V\|_{\mathrm{L}^\infty}$。

本文结构如下：第 2 节回顾几何预备知识，并定义和研究 $\mathcal{M}(d,\kappa)$ 类流形及其正规覆盖的统一性质。第 3 节基于 Logunov–Malinnikova 不等式证明局部椭圆估计，并将其一致地推广至 $\mathcal{M}(d,\kappa)$ 类。第 4 节给出定理 1.3 和 1.7证明的收尾部分。

致谢。 A.D. 和 M.R. 感谢 ERC-2022-ADG 项目 GEOEDP（项目编号 101097171）提供的资助。J.L. 感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所及剑桥在“几何谱理论及其应用”项目期间给予的支持与热情接待，本论文的最后阶段正是在该项目期间完成的。本研究得到 EPSRC 项目 EP/Z000580/1 的支持。

作者谨向 Nicolas Burq、Paul Alphonse 和 Eugenia Malinnikova 致谢，感谢他们就本文主题展开了富有启发性的讨论。

2. 几何预备知识

2.1. 几何量与记号。 设 M 是一个 d 维光滑流形。 M 上的黎曼度量 g 是指对每个 $x\in M$，在切空间 T_xM 上赋予一个正定双线性形式，也就是 $T^*M\otimes T^*M$ 的一个正截面。局部地，度量

g 的坐标表达式为

$$g(x) = \sum_{j,k} g_{jk}(x)\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k,$$

其中 $\{\mathrm{d}x^j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$是余切空间的一组光滑变化的基。我们用 $g^{jk}(x)$ 表示度量逆的局部坐标表达式，并通常省略度量（以及其他张量）对基点 x 的依赖。度量是一个内在对象，即 TM 上的内积与局部坐标的选择无关，但其正则性只能通过坐标来考察，并定义为坐标图中系数g_{jk}的正则性。我们所需的主要控制如下；当然，这是针对度量在坐标图中的表达式定义的。

定义 2.1. 设 g 是定义在某个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的黎曼度量。其双 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(g)$ 定义为

$$\mathrm{Lip}(g) := \max\left\{\|g\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)}, \|g^{-1}\|_{\mathrm{L}^\infty}(\Omega)\right\}.$$

若 g 定义在一个流形上，则其双 *Lipschitz* 常数是对所有由坐标图构成的 M覆盖取下确界，再对每个坐标图中计算出的双 *Lipschitz* 常数取上确界。

对于 $x \in M$ 和 $r > 0$，我们用 $B_x(r)$表示以 x 为中心、半径为 r 的球。由于我们将反复交替使用 M 中的球和 T_xM 中的球，因此用 $B_x(r)$表示以 $0 \in T_xM$ 为中心、半径为 r 的球。特别地，这些数据给出了一个点周围的几何定义的坐标图的例子。

定义 2.2. 给定一个度量为 *Lipschitz* 的黎曼流形(M, g) 以及 $x \in M$，指数映射 $\exp_x : T_xM \to M$ 将 $v \in T_xM$ 映到测地线在时刻 1 的位置 $\exp_x(v)$；该测地线在时刻 0的初始数据为 (x, v)。位于 x 处的单射半径 是最大的 $r > 0$，使得限制映射$\exp_x : B_x(r) \to B_x(r)$ 为单射。

M上的拉普拉斯算子，也称为拉普拉斯–贝尔特拉米算子，在局部坐标中表示为

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{j,k} \partial_j \left(\sqrt{|\det g|} g^{jk} \partial_k\right),$$

换言之，它在局部可表示为散度形式的椭圆算子，因此，欧氏空间中针对这类算子陈述的任何定理，都可以直接应用于坐标图中的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。

与度量相关的两个重要内蕴几何量是里奇曲率Ric 和截面曲率 K。由于我们不会直接处理这些曲率的表达式，而是研究由曲率界明确控制的量，因此我们既不提供精确定义，也不描述二者之间的差异，只指出截面曲率有界意味着里奇曲率有界。我们用截面曲率界来定义流形类，而不涉及局部坐标图；我们还将指出哪些引理只要求里奇曲率有界。

定义 2.3。令 $\kappa \in [0, +\infty)$ 且 $d \geq 1$。我们记

$$\mathcal{M}(d, \kappa) := \{(M, g) : \dim(M) = d \ and \ \|K\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \kappa\}$$

d维流形的集合，其（截面）曲率以 κ 为界。请注意，$\mathcal{M}(d, \kappa)$ 中的元素既不假定为紧致，也不假定为连通。

2.2. **体积与密度界**。 有界曲率流形满足体积加倍不等式，进而可得一致离散集的密度界。本小节的所有结果实际上仅依赖于里奇曲率的下界。加倍不等式可直接由 Bishop–Gromov 不等式 [Gro07，引理 5.3.bis],推出，为方便读者，现将其陈述如下。

命题 2.4。 设 $\kappa > 0$ 和 $d \in \mathbb{N}$。存在 $C > 0$，使得对于每个 $(M、\ g) \in \mathcal{M}(d、\ \kappa)$，$x \in M$ 和 $R > r > 0$，不等式成立

$$\mathrm{Vol}(B_x(R)) \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^d e^{(d-1)\sqrt{\kappa}(R-r)} \mathrm{Vol}(B_x(r)). \tag{2.1}$$

命题 2.4 使我们能够控制 M 中离散集的密度。

命题 2.5。 设 $d \in \mathbb{N}、\ \kappa > 0$。存在 $C > 0$，使得对于每个 $r、\ R > 0$，任意$M \in \mathcal{M}(d、\ \kappa)$，以及每个 r-分离集 $\mathbf{Y} \subset M$，

$$\#(\mathbf{Y} \cap B_x(R)) \leqslant c \left(\frac{R}{r}\right)^d e^{2(d-1)\sqrt{\kappa}R}$$

对所有 $x \in M$ 均成立。

证明。 设 $r > 0$ 和 $\mathbf{Y} \subset M$ 是一个 r-分离集。对于所有 $y,\ y' \in \mathbf{Y}$，

$$y \neq y' \quad \Longrightarrow \quad B_y(r/2) \cap B_{y'}(r/2) = \varnothing,$$

使得对于任意的 $x \in M$ 和 $R > 0$

$$\sum_{y \in \mathbf{Y} \cap B_x(R)} \mathrm{vol}(B_y(r/2)) \leqslant \mathrm{vol}(B_x(R + r/2)) \leqslant C e^{(d-1)\sqrt{\kappa}\frac{r}{2}} \mathrm{vol}(B_x(R)). \tag{2.2}$$

另一方面，对于每个 $y \in \mathbf{Y} \cap B_x(R)$，$B_x(R) \subset B_y(2R)$。因此，

$$\mathrm{vol}(B_x(R)) \leqslant \min_{y \in \mathbf{Y} \cap B_x(R)} \mathrm{vol}(B_y(2R)) \leqslant C \left(\frac{R}{r}\right)^d e^{(d-1)\sqrt{\kappa}(2R - \frac{r}{2})} \min_{y \in \mathbf{Y} \cap B_x(R)} \mathrm{vol}(B_y(r/2)). \tag{2.3}$$

结合（2.2）和（2.3），可知至多只需取一个更大的 C，

$$\#(\mathbf{Y} \cap B_x(R)) \leqslant C \left(\frac{R}{r}\right)^d e^{2(d-1)\sqrt{\kappa}R}.$$

□

我们注意到，在满足倍增不等式（2.1）的空间上，定义 1.2 中的厚度性质表现良好：如果一个集合在尺度 R_0 下是厚的，那么在任意尺度 $R > 0$下也厚。此外，如果 M 没有紧连通分支，那么子集 $\omega \subset M$ 的厚性不受移除 M中的任意紧集的影响。

2.3. **正规覆盖与良好坐标系**。现在我们着手构造局部坐标图，使其在类 $\mathcal{M}(d, \kappa)$ 中受到统一控制。具体而言，目标是

(1) 在这些坐标图中，度量仅由 d 和 κ 控制；(2) 坐标图所映射的邻域大小仅取决于 κ。

单射半径在这份要求清单中显然缺席。事实上，如果我们也允许依赖单射半径，那么根据所需的正则性程度，有许多标准的坐标图选择可以满足我们的要求，例如调和坐标，或 Jürgen Jost 开发的“几乎线性坐标” [JK82，Jos84]。这些坐标只能定义在大小受单射半径限制的邻域内。在我们考虑的例子类别中，单射半径当然处处为正，但它可能没有正的下界，例如带尖点的双曲流形就是如此。

为了解决这一难题，我们将改用 M 周围局部覆盖上的调和坐标正规覆盖；我们的分析将在这个覆盖上进行。正规覆盖的单射半径仅取决于 κ，因此调和坐标将在半径由 κ一致控制的球上定义。为此付出的代价是，正规覆盖中一点的原像数可能随着单射半径趋于零而增加；但这种增加是可量化的，因此我们能够适当地控制估计。

指数映射为包含 x 的 M 连通分支提供了一个由 T_xM 构成的覆盖，其度量由拉回度量 $\exp_x^* g$ 给出。然而，这个度量通常在整个 T_xM 上性质不佳，因此我们将在一个较小的球上定义它。第一步是证明，在 T_xM 中存在一个球，使得 $\exp_x^* g$ 的单射半径得到一致控制。

命题 2.6。令 $\kappa > 0$。存在 $L > 0$，使得对任意 $d \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}(d, \kappa)$ 以及$x \in M$，其限制

$$\exp_x : B_{T_xM}(0, \tfrac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}) \to M$$

是局部双-*L*-*Lipschitz* 的。此外，在度量 $\exp_x^* g$下，每个 $v \in B_{T_xM}(0, \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}})$ 的单射半径都大于 $\frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$。

证明。双 Lipschitz 性由 Rauch 比较定理得出 [Rau51], (现代阐述见 [Jos84，引理 2.2。1])。根据 [Jos84，引理 2.4。2]， $B_{T_xM}(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$ 在由指数映射拉回的度量下是测地凸的，这意味着任意两点之间都存在唯一的测地线段，因而直接推出单射半径在半径为 $\frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$ 的球上有下界 $\frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$。 □

虽然指数映射本身是双 Lipschitz 的，但它无法为我们 g的双 Lipschitz 常数提供一致的控制。DeTurck–Kazdan [DK81], 最先指出，要最优地控制正则性，恰当的坐标是调和坐标。以下命题汇总了 [Jos84] 中引理 2.8.1 之前的讨论以及引理 2.8.2 中的论述，适用于 T_xM。

命题 2.7。设 $\kappa > 0$ 且 $d \in \mathbb{N}$。存在 L、$\rho > 0$ 和 $r_\kappa > 0$，称为一致 Lipschitz 调和半径，使得对于每个 $M \in \mathcal{M}(d, \kappa)$ 以及 $x \in M$，存在一个调和函数 $\varphi : B_x(r_\kappa) \to B_x(\frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}})$，其在像上是微分同胚，并且 $\widetilde{g} := \varphi^* \exp_x^* g$ 是双 *Lipschitz* 的，且$\mathrm{Lip}(\widetilde{g}) \leqslant L$。此外，$\widetilde{g}$是在0处的典范度量，且 φ 的像包含 $B_{T_xM}(0, \rho)$。

当然，调和半径通常取决于流形的单射半径；但如命题2.6所示，切空间上的单射半径可以用曲率给出下界。点处的正规覆盖就是切空间中的一个球，其半径略小于调和半径。

定义 2.8。设 $\kappa > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}(d,\kappa)$，且 $x \in M$。$\sim$ $\sim M$ 在 x 处的正规覆盖为 $M_x := B_x(r_\kappa)$，其上赋予拉回度量 $\widetilde{g} := \varphi^* \exp_x^* g$，并以 $\widetilde{}$ 调和坐标表示；自然投影为 $p_x : M_x \to M$。对于在 $\widetilde{}$ x 邻域中定义的任意量 Q（例如子集、函数、度量等），我们将其在 Q上的提升记为 $Q \sim M_x$，

$\widetilde{}$ 虽然 M_x 的单射半径有一个与 x无关的正下界，但覆盖 M_x 的度数 $\widetilde{}$ 会随着 x在 $\sim M$ 的单射半径趋于零的区域内变化而无界增长。事实证明，只要以 0 为中心的球在 M_x 上的投影在底空间中分布得足够均匀，我们就能获得充分的控制。为将这一点定量化，我们引入以下两个量。

定义 2.9. 对于任意 $x \in M$ 和 $r \in (0, \frac{r_\kappa}{4})$，我们定义上原像计数函数

$$N(x,r) := \max_{y \in B_x(r)} \#(p_x^{-1}(y) \cap \widetilde{B}_x(r)) \tag{2.4}$$

以及下原像计数函数

$$n(x,r) := \min_{y \in B_x(r)} \#(p_x^{-1}(y) \cap \widetilde{B}_x(4r)) \tag{2.5}$$

命题 2.10. 对于每个 $\kappa > 0$ 和 $d \in \mathbb{N}$，都存在 $C > 0$，使得原像计数函数在以下意义下等价。

$$N(x,r) \leqslant n(x,r) \leqslant C e^{3(d-1)\sqrt{\kappa} r} N(x,r),$$

此外，原像计数函数满足倍增估计

$$N(x,2r) \leqslant C e^{7(d-1)\sqrt{\kappa} r} N(x,r) \qquad \text{and} \qquad n(x,2r) \leqslant C e^{7(d-1)\sqrt{\kappa} r} N(x,r).$$

证明。取 $y, z \in B_x(r)$，使得 y 在 (2.4) 中取最大值，且 z 在 (2.5) 中取最小值。令 γ 为一条长度不超过 $2r$、连接 y 与 z 且始终位于 $B_x(r)$ 中的路径。γ的提升 $\widetilde{\gamma}$ 长度相同，并将原像 $\widetilde{y} \in p_x^{-1}(y)$ 与 $\widetilde{z} \in p_x^{-1}(z)$ 单射地连接起来。假设 $\widetilde{}$ $\widetilde{y} \in B_x(r)$，由三角不等式可得 $\widetilde{z} \in B_x(4r)$，因此确有 $N(x,r) \leqslant n(x,r)$。现在，我们注意到，在 (2.4) 和 (2.5) 中取 $y = x$，可得

$$n(x,r) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(4r))}{\mathrm{vol}(B_x(r))} \quad \text{and} \quad N(x,r) \geqslant \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(r))}{\mathrm{vol}(B_x(r))}. \tag{2.6}$$

结合（2.6）和命题 2.4，存在 $C > 0$ 使得

$$n(x,r) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(4r))}{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(r))} N(x,r) \leqslant C e^{3(d-1)\sqrt{\kappa} r} N(x,r).$$

类似地，我们得到

$$N(x,2r) \leqslant n(x,2r) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(8r))}{\mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(r))} N(x,r) \leqslant C e^{7(d-1)\sqrt{\kappa} r} N(x,r),$$

从而得到所声称的倍增估计。 □

注 2.11。截面曲率界实际上仅在 *Rauch*比较定理中用于获得正规覆盖的单射半径下界。正如 [HH97中的定理 6], 所示，一致*Lipschitz*调和半径可以用以下量给出下界：

L^∞ 里奇曲率的范数和单射半径，因此，只要正规覆盖的单射半径有先验下界，就可以用里奇曲率替代截面曲率。不过请注意，根据同一定理，我们无法将这一结论推广到里奇曲率的下界，因为这只能保证调和坐标中度量的$C^{0,\alpha}$范数有界，而这不足以在后续应用 *Logunov–Malinnikova* 小量传播估计。

本节最后，我们就度量的先验正则性作几点说明。

文献 [Rau51、JK82、Jos84], 以及由此发展的大部分相关文献，都假设黎曼度量 g 在原坐标图中是光滑的。

由密度性可知，本节中的所有论证都可直接推广到具有有界截面曲率的 C^2 度量情形：至少在局部，这些度量在 C^2 意义下接近截面曲率界（略差一些）的光滑度量。于是，测地射线对度量的 C^2 变化具有利普希茨连续依赖性，因此命题 2.6 可推广至此情形；由此可知，我们构造正规覆盖的方法也适用于这种情形。接下来还可再次运用密度论证：经过正规覆盖后，存在一个邻近的有界曲率光滑度量；若该光滑度量的调和坐标足够好，则初始度量将在利普希茨拓扑下受到控制。

更一般地，设 g_1 是具有有界截面曲率的光滑度量， g_2是一个满足可比条件的 Lipschitz 度量，即对某个 $0 < c < C$，处处有 $cg_1 \le g_2 \le Cg_1$，并且满足 $\|\nabla_{g_1} g_2\|_{L^\infty} < \infty$。在覆盖上的一族坐标图中，如果 g_1 在 Lipschitz 拓扑下受到控制，那么 g_2 在 Lipschitz 拓扑下也将受到控制。总之，我们的主要结果也适用于 g_2 （注意，厚度条件在将 g_1 替换为 g_2时保持不变）。

遗憾的是，似乎很难刻画满足此条件的 Lipschitz 度量 g_1，因为在这种正则性下，截面曲率并无定义。一个必要条件是体积倍增估计，这是命题2.4的推广。

3. 椭圆工具

本节汇集了证明定理1.3所需的基本工具。首先，我们回顾调和函数的一些经典内点估计。随后，我们利用著名的 Logunov–Malinnikova 定理，得到一个小性传播结果。

引理 3.1。令 $U \Subset \Omega \Subset \mathbb{R}^d$ 和 $L > 0$。存在 $C > 0$，使得对于 Ω 上的每个度量 g，满足 $\mathrm{Lip}(g) < L$，以及任意 Δ_g-调和函数 $w : \Omega \to \mathbb{R}$，我们都有如下界估计

$$\|w\|_{C^1(U)} \leqslant C \|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明。设 U_1 满足 $U \Subset U_1 \Subset \Omega$。由 [GT01，定理 9。11] 可得，对所有$p \in (1,\infty)$，，

$$\|w\|_{W^{2,p}(U_1)} \lesssim_{U,\Omega,p,d,\mathrm{Lip}(g)} \|w\|_{L^p(\Omega)}, \tag{3.1}$$

并应用索博列夫嵌入定理，将 $p = 2$ 应用于 U_1，可知

$$\|w\|_{L^{\frac{2d}{d-4}}(U_1)} \lesssim_{U,\Omega,d,\mathrm{Lip}(g)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

令 $k = \lceil \frac{d-2}{4} \rceil$，并考虑一列集合，使得 $U \Subset U_k \Subset \ldots \Subset U_1 \Subset \Omega$。对 3.1）和（3.2）中的不等式递归地应用于各对 U_j，U_{j-1} 可知存在某个 $q > d$，

$$\|w\|_{\mathrm{L}^q(U_k)} \lesssim_{U,\Omega,d,\mathrm{Lip}(g)} \|w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

最后一次应用（3.1于 U 和 U_k之间，但这次随后应用 Morrey 嵌入定理，便可得到

$$\|w\|_{\mathrm{C}^1(U)} \lesssim_{U,\Omega,d,\mathrm{Lip}(g)} \|w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

□

现在，我们从 Logunov–Malinnikova 的结果中推导出适当的小性传播估计 [LM18]。我们首先推导一个局部 L^2 估计。

命题 3.2。设 $d \geq 2$ 且令 $\Omega \Subset U \Subset \mathbb{R}^d$，以及 T、ε、$L > 0$。存在 $C > 0$ 和,$\alpha \in (0,1)$，使得对 U 上满足 $\mathrm{Lip}(g) < L$ 的任意局部 ***Lipschitz*** 度量 g，以及所有满足下式的点对 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $w\colon U \times [-T,T] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (\Delta_g + \partial_t^2) w = 0 & in\ U \times [-T,T] \\ w(x,0) \equiv 0 & and\ \partial_t w(x,0) = u(x) \end{cases}$$

满足

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(U\times[-T,T])}$$

对每个满足 $\mathcal{H}^d(\omega) > \varepsilon$ 的 $\omega \subset \Omega$。

证明。在此证明中，我们滥用记号，对 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和 $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t$使用同一个字母。在 $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t$ 上，我们赋予度量 $g' = g_x + \mathrm{d}t^2$。注意，由于 w 在 U上为常数，因此对所有 $x \in U$，都有 $|u(x)| = |\nabla w(x,\ 0)|$，所以我们估计的正是这个量。特别地，我们假设 $\nabla w \neq 0$ 在 Ω 上成立，否则结论显然成立。令 V 满足 $\Omega \Subset V \Subset U$，并令 $\omega \subset \Omega$ 满足 $\mathcal{H}^d(\omega) > \varepsilon$。对于 $a > 0$，令$E_a = \{x \in \omega\colon |\nabla w(x,\ 0)| \geqslant a\}$，于是由切比雪夫不等式可得，

$$\mathcal{H}^d(E_a)^{1/2} \leqslant \frac{1}{a} \|\nabla w\|_{\mathrm{L}^2(\omega)}. \tag{3.3}$$

若 $\mathcal{H}^d(E_a) < \frac{\varepsilon}{2}$，则由 Logunov–Malinnikova 传播估计 [LM18，定理 5。1] 应用于 $\omega \setminus E_a \Subset \Omega \Subset V$（此时其测度大于 $\frac{\varepsilon}{2}$），可得

$$\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant C \|\nabla w\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^\infty(\omega\setminus E_a)} \|\nabla w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^\infty(V)} \leqslant C a^{\alpha} \|\nabla w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^\infty(V\times[-T,T])},$$

或者，重新排列后，

$$a^{\alpha} \geqslant \frac{\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}}{C \|\nabla w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^\infty(V\times[-T,T])}}. \tag{3.4}$$

反过来说，若 a 不满足不等式（3.4），则 $\mathcal{H}^d(E_a) > \frac{\varepsilon}{2}$。将这一假设代入（3.3），并对两边取 α 次幂，可得

$$\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant C \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla w\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|\nabla w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^\infty(V\times[-T,T])}.$$

根据定义，再由引理3.1可知

$$\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^\infty(V\times[-T,T])} \leqslant \|w\|_{\mathrm{C}^1(V\times[-T,T])} \lesssim \|w\|_{\mathrm{L}^2(U\times[-T,T])},$$

因此，简单应用霍尔德不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \|\nabla w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$$

证明完成。 □

在本节的其余部分，我们将命题 3.2 推广到 $\mathcal{M}(d,\kappa)$ 中的有界曲率流形。我们分三步进行：首先在足够小的球中建立局部估计，然后通过覆盖论证将其推广到任意固定半径的球。最后，在假设 ω 在 M 内是 (R,ε)-厚的条件下，将该结论推广到任意 $M \in \mathcal{M}(d,\kappa)$。回顾定义 2.8 中的约定。也就是说，给定 $(M,g) \in \mathcal{M}(d,\kappa)$，在 $x \in M$ 处的正规覆盖 $\widetilde{\ }$ 记作 M_x；我们将 $B_x(r) = B_M(x,r)$ 写作，并且对于与 $M^{\widetilde{\ }}$ 相关的任意量 s（无论是函数、子集、度量等），我们用 $\widetilde{s}$ 表示其在 M_x 上的相应量。

命题 3.3。设 $d \geq 2$、κ、ε、$T > 0$ 和 $r \in (0, \frac{r_\kappa}{4})$。存在 $C > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$，使得每个满足方程的 $(M, g) \in \mathcal{M}(d, \kappa)$、$x \in M$ 以及成对的 $u\colon B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \to \mathbb{R}$ 和 $w\colon B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T]$

$$\begin{cases} (\Delta_g + \partial_t^2) w = 0 & in\ B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T] \\ w(y,0) \equiv 0 & and\ \partial_t w(y,0) = u(y) \end{cases}$$

满足估计式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(B_x(r))} \leq C \|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T])}$$

对于满足 $\mathrm{vol}(\omega) > \varepsilon \mathrm{vol}(B_x(r))$ 的每个 $\omega \subset B_x(r)$。

证明。设 $\omega \subset B_x(r)$ 满足 $\mathrm{vol}(\omega) > \varepsilon \mathrm{vol}(B_x(r))$。根据命题 2.10，

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\widetilde{\omega} \cap \widetilde{B}_x(4r)) &\geqslant \mathrm{vol}(\omega) n(x,r) \\ &\geqslant \varepsilon\, \mathrm{vol}(B_x(r)) N(x,r) \\ &\geqslant \varepsilon\, \mathrm{vol}(\widetilde{B}_x(r)). \end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$命题 2.7 告诉我们，$\mathrm{vol}(B_x(r))$ 有正的下界，并且 $\mathrm{Lip}(\widetilde{g})$ 有界，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其界仅取决于 r、κ 和 d。将命题 3.2 应用于 $\Omega = B_x(4r) \Subset U = B_x(r_\kappa)$，我们得到 $C > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$，使得 —

$$\|\widetilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{B}_x(4r))} \leq C \|\widetilde{u}\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\omega})} \|\widetilde{w}\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(\widetilde{B}_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T])}.$$

现在，一个简单的计数论证结合霍尔德不等式，一方面得到

$$n(x,r)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(B_x(r))} \leq \|\widetilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{B}_x(4r))}$$

另一方面得到

$$\|\widetilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\omega})} \leq N(x, \tfrac{r_\kappa}{4})^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} \quad \text{and} \quad \|\widetilde{w}\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{B}_x(\frac{r_\kappa}{4}))} \leq N(x, \tfrac{r_\kappa}{4})^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathrm{L}^2(B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T])},$$

and therefore

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(B_x(r))} \leqslant C \left(\frac{N(x, \frac{r_\kappa}{4})}{n(x,r)} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(B_x(\frac{r_\kappa}{4}) \times [-T,T])}.$$

反复应用命题 2.10，我们得到比值 $\frac{N(x,\ \frac{r_\kappa}{4})}{n(x,\ r)}$ 有界，且其界仅取决于 r，d，κ，由此证明得证。 □

现在，我们将这一不等式从小球推广到大球。

命题 3.4。 设 $d \geq 2$ 和 $\kappa, R, \varepsilon, T > 0$ 并令 $R' = R + r_\kappa$。存在 $C > 0$ 和 $\beta \in (0,\ 1)$，使得对每个 $(M, g) \in \mathcal{M}(d, \kappa)$，$x \in M$ 以及满足以下条件的配对 $u\colon B_x(R) \to \mathbb{R}$ 和 $w\colon B_x(R) \times [-T, T] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (\Delta_g + \partial_t^2) w = 0 & in\ B_x(\frac{\pi}{8\sqrt{\kappa}}) \times [-T, T] \\ w(y, 0) \equiv 0 & and\ \partial_t w(y, 0) = u(y) \end{cases}$$

我们有如下估计

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(B_x(R))} \leq C \|u\|^{\beta}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\beta}_{\mathrm{L}^2(B_x(R') \times [-T,T])}$$

对于每个满足 (R) 且 体积$(\omega)\ > \varepsilon$体积$(B_x(R))$的 $\omega \subset B_x$。

证明。 设 $r = \frac{r_\kappa}{16}$ 和$\mathbf{Y}$ 是 $B_x(R)$ 中的一个极大 $r/2$-分离集，特别是 $B_x(R)$ 被以$\mathbf{Y}$ 中的元素为中心、半径为 $r/2$的球覆盖。设$\mathbf{G}$为一个图，其顶点集为$\mathbf{Y}$，边由以下关系给出

$$y \sim y' \iff B_y(r) \cap B_{y'}(r) \text{ contains a ball of radius } r/2.$$

由于 $\mathbf{Y}$ 是连通集合 $r/2$中的一个极大 $B_x(R)$-分离集，κ，$\mathbf{G}$ 是一个连通图，并且根据命题 2.5，其顶点集的基数有一个上界，该上界为常数 N，且仅依赖于 r、κ、R和 d。

存在 $y_0 \in \mathbf{Y}$ 使得

$$\mathrm{vol}(\omega \cap B_{y_0}(r/2)) \geqslant \frac{\varepsilon}{N} \mathrm{vol}(B_x(R)) \geqslant \frac{\varepsilon}{N} \mathrm{vol}(B_{y_0}(r)).$$

特别地，由命题 3.3 可知，存在 $C > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(B_{y_0}(r))} \leqslant C \|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(B_x(R') \times [-T,T])}.$$

设 $y \in \mathbf{Y}$ 满足 $y \sim y'$。应用命题 3.3，取较小集合 ω' 为半径 $r/4$ 且圆心与半径为 $r/2$ 的球圆心相同的球，两者相交，得到

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathrm{L}^2(B_y(r))} &\leqslant C \|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^2(\omega')} \|w\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^2(B_x(R') \times [-T,T])} \\ &\leqslant C \|u\|^{\alpha^2}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha^2}_{\mathrm{L}^2(B_x(R') \times [-T,T])}. \end{aligned}$$

以同样的方式，在 $\mathbf{G}$ 中从邻点到邻点反复应用命题3.3，最终可得，对任意 $y \in \mathbf{Y}$，

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(B_y(r))} \leqslant C \|u\|^{\alpha^{\mathrm{diam}(\mathbf{G})}}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w\|^{1-\alpha^{\mathrm{diam}(\mathbf{G})}}_{\mathrm{L}^2(B_x(R') \times [-T,T])}, \tag{3.5}$$

又因为 $\mathbf{G}$ 的直径不超过其顶点数，对所有 $y \in \mathbf{Y}$，将（3.5）求和后，即可得到所需结论。□

最后，我们将命题3.4推广到整体情形。

命题 3.5。 设 $d \geqslant 2$ 和 $\kappa, R, \varepsilon, T > 0$。存在 $C > 0$ 和 $\beta \in (0、1)$，使得以下结论成立。

对于每个$(M、\ g)\ \in \mathcal{M}(d、\ \kappa)$，满足以下方程的任意一对 $u\colon\ M \to \mathbb{R}$ 和 $w\colon\ M \times [-T, T] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (\Delta_g + \partial_t^2) w = 0 & in\ M \times [-T, T] \\ w(y, 0) \equiv 0 & and\ \partial_t w(y, 0) = u(y) \end{cases}$$

以及任意开集 $\omega \subset M$，使得对于所有 $x \in M$,

$$\mathrm{vol}(\omega \cap B_x(R)) \geqslant \varepsilon \,\mathrm{vol}(B_x(R))$$

我们有如下估计

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq C\|u\|^{\beta}_{\mathrm{L}^2(\omega)}\|w\|^{1-\gamma}_{\mathrm{L}^2(M\times(-T,T))}.$$

证明。令$\mathbf{Y}$ 为 M中的一个极大 R-分离集。根据构造,

$$M \subset \bigcup_{y\in\mathbf{Y}} B_y(R),$$

由此可得，根据命题3.4，存在 $C>0$ 和 $\beta \in (0,1)$ 使得

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq \sum_{y\in\mathbf{Y}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(B_y(R))} \leqslant C\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|u\|^{\beta}_{\mathrm{L}^2(\omega\cap B_y(R))}\|w\|^{1-\beta}_{\mathrm{L}^2(B_y(R+r_\kappa)\times[-T,T])} \tag{3.6}$$

存在 $N>0$，仅依赖于 d， κ 和 R，使得对每个 $y\in\mathbf{Y}$

$$\#\{z\in\mathbf{Y} : B_z(R)\cap B_y(R)\neq\varnothing\} \leqslant N.$$

事实上，交集 $B_z(R)\cap B_y(R)$ 非空等价于 $z\in B_y(2R)$ ，并且根据命题2.5，存在 N，其与 y 无关，可用于限制 R-分离族在 $B(y,2R)$中的基数。特别地,

$$\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega\cap B_y(R))} \leq N\|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} \tag{3.7}$$

and

$$\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|w\|_{\mathrm{L}^2(B_y(R+\frac{r_\kappa}{4})\times(-T,T))} \leq N\|w\|_{\mathrm{L}^2(M\times(-T,T))}. \tag{3.8}$$

代入（3.7）和（3.8）到（3.6）中，并应用霍尔德不等式，最终得到

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathrm{L}^2(M)} &\leq C\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|u\|^{\beta}_{\mathrm{L}^2(\omega\cap B_y(R))}\|w\|^{1-\beta}_{\mathrm{L}^2(B_y(R)\times(-T,T))} \\
&\leq C\left(\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega\cap B_y(R))}\right)^{\beta}\left(\sum_{y\in\mathbf{Y}} \|w\|_{\mathrm{L}^2(B_y(R+r_\kappa)\times(-T,T))}\right)^{1-\beta} \\
&\leq CN\|u\|^{\beta}_{\mathrm{L}^2(\omega)}\|w\|^{1-\beta}_{\mathrm{L}^2(M\times(-T,T))}.
\end{aligned}$$

□

4. 主要定理的证明

定理*1.3*的证明。设 $M\in\mathcal{M}(d,\ \kappa)$， $R,\ \varepsilon>0$ 并设 $\omega\subset M$为一个（$\varepsilon,\ R$）-厚集，且$u\in \mathrm{L}^2(M)$。回顾一下， μ 是$\sqrt{-\Delta_g}$ 的谱测度，并且对于 $\Lambda>0$， Π_Λ 是 $[0,\Lambda]$上的谱投影，即

$$\Pi_\Lambda u = \int_0^\Lambda \mathrm{d}\mu(\lambda)u.$$

通过以下表达式定义 w_Λ： $M\times[-T,T]$

$$w_\Lambda(x,t) = \int_0^\Lambda \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda}[\mathrm{d}\mu(\lambda)u](x).$$

根据构造，

$$(\Delta_g + \partial_t^2) w_\Lambda = 0 \qquad w_\Lambda|_{t=0} = 0 \qquad \partial_t w_\Lambda|_{t=0} = \Pi_\Lambda u,$$

因此应用命题3.5，我们得到

$$\|\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq \|\Pi_\Lambda u\|^{\gamma}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|w_\Lambda\|^{1-\gamma}_{\mathrm{L}^2(M\times(-T,T))}. \tag{4.1}$$

对于任意有界可测函数 $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$，函数演算给出估计

$$\|\varphi\left(\sqrt{-\Delta_g}\right)\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty([0,\Lambda])} \|\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)}.$$

由于 $\|\sinh(\lambda\cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(-T,\ T)} \leqslant e^{\lambda T}$，我们有

$$\|w_\Lambda\|_{\mathrm{L}^2(M\times[-T,T])} \leqslant e^{\Lambda T} \|\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)}.$$

将其代入（4.1）可得

$$\|\Pi_\Lambda u\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leqslant C e^{\frac{T}{\gamma}\Lambda} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)},$$

换言之，（Spec）对 ω成立。 □

定理 *1.7*的证明。 令 $v \in \mathrm{L}^2(M)$，则有

$$e^{s\Delta_g} v = \int_0^\infty e^{-s\lambda^2} \mathrm{d}\mu(\lambda) v.$$

现在，对于 $s > 0$，若令

$$w_s(x,t) = \int_0^\infty e^{-s\lambda^2} \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda} [\mathrm{d}\mu(\lambda) v](x)$$

再次有 $w_s \in \mathrm{W}^{1,2}(M \times [-T,T])$，其中

$$\|w_s\|_{\mathrm{L}^2(M\times[-T,T])} \leq C(s,T) \|v\|_{\mathrm{L}^2(M)};$$

e本质上，热方程导致的二次频率衰减超过了 sinh 的增长。特别地，应用命题 3.5，可得

$$\|e^{s\Delta_g} v\|_{\mathrm{L}^2(M)} \leq C(s) \|e^{s\Delta_g} v\|^{\gamma}_{\mathrm{L}^2(\omega)} \|v\|^{1-\gamma}_{\mathrm{L}^2(M)},$$

证明完毕。 □

参考文献

[AM22] Paul Alphonse 和 Jérémy Martin. 基于厚控制支集的一大类扩散方程的稳定化与近似零可控性. *ESAIM* 控制、优化与变分分析, 28:论文编号 16, 30, 2022. [AS25] Paul Alphonse 和 Albrecht Seelmann. 圆柱体上 Baouendi-Grushin 方程的唯一延拓估计. 纯粹与应用分析, 7(3):733–770, 2025. [BM21] Nicolas Burq 和 Iván Moyano. 小性传播与谱估计. *arXiv* 预印本 *arXiv:2109.06654*, 2021. [BM23] Nicolas Burq 和 Iván Moyano. 热方程的小性传播与控制. 欧洲数学会杂志（*JEMS*）, 25(4):1349–1377, 2023. [Cor07] Jean-Michel Coron. 控制与非线性，收录于第 136 卷 数学调查与专著. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007. [DK81] Dennis M. DeTurck 和 Jerry L. Kazdan. 黎曼几何中的一些正则性定理. 高等师范学校科学年刊 *(4)*, 14(3):249–260, 1981.

[DR24] Alix Deleporte 和 Marc Rouveyrol. 双曲曲面上的谱估计及流形上热半群可观测性的一个必要条件. arXiv 预印本 arXiv:2410 01323, 2024 . .[EV18] Michela Egidi 和 Ivan Veselić. 热方程零可控性的尖锐几何条件, 以及控制代价的一致估计. Arch. Math. (Basel), 111 99, 2018 1 85( ): – .[Gro07] Misha Gromov. 黎曼与非黎曼空间的度量结构. Birkhäuser 现代经典丛书. Birkhäuser Boston, Inc., 波士顿，马萨诸塞州，英文版，2007. 据 1981 年法文原版编写，附录作者为 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes，Sean Michael Bates 从法文译出.[GT01] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger. 二阶椭圆型偏微分方程. 数学经典. Springer-Verlag，柏林，2001. 1998 年版重印. [HH97] Emmanuel Hebey 和 Marc Herzlich. 调和坐标、调和半径与黎曼流形的收敛. Rend. Mat. Appl. (7), 17(4):569–605, 1997. [JK82] Jürgen Jost 和 Hermann Karcher. 运用几何方法获得调和映射先验界. Manuscripta Math., 40(1):27–77, 1982. [JL99] David Jerison 和 Gilles Lebeau. 特征函数和的节点集. 载于《调和分析与偏微分方程》（芝加哥，伊利诺伊州，1996），Chicago Lectures in Math., 第 223–239 页. Univ. Chicago Press，芝加哥，伊利诺伊州，1999. [Jos84] Jürgen Jost. 黎曼流形之间的调和映射，收录于澳大利亚国立大学数学分析中心论文集第 4 卷. 澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1984. [LBM25] Kévin Le Balc'h 和 Jérémy Martin. 薛定谔算子的定量小性传播与谱估计. J. Spectr. Theory, 15(1):245–278, 2025. [Lew22] Mathieu Lewin. 谱理论与量子力学，收录于第 87 卷 Mathématiques & Applications (Berlin) /数学与应用/. Springer，Cham，2022. [LL21] Camille Laurent 和 Matthieu Léautaud. 热方程的可观测性、控制理论中的几何常数及 Luc Miller 的一个猜想. Anal. PDE, 14(2):355–423, 2021. [LM18] Alexander Logunov 和 Eugenia Malinnikova. 椭圆方程解的小性定量传播. 载于《2018 年里约热内卢国际数学家大会论文集》第三卷: 特邀报告，第 2391–2411 页. World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018. [LR95] Gilles Lebeau 和 Luc Robbiano. 热方程的精确控制. Comm. Partial Differential Equations, 20(1-2):335–356, 1995. [Mil05] Luc Miller. 非紧流形上拉普拉斯算子与热方程的唯一延拓估计. Math. Res. Lett., 12(1):37–47, 2005. [Mil10] Luc Miller. 用于类热半群可观测性的直接 Lebeau-Robbiano 策略. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 14(4):1465–1485, 2010. [Rau51] Harry E. Rauch. 对整体微分几何的一项贡献. Ann. of Math. (2 55, 1951 54 38), : – .[Rou24] Marc Rouveyrol. 双曲半平面上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱估计. arXiv 预印本 arXiv:2401.14977, 2024. [RT24] Christian Rose 和 Martin Tautenhahn. 里奇曲率有下界的流形上的唯一延拓估计. J. Math. Phys., 65(4):论文编号 041503, 16, 2024. [WWZZ19] Gengsheng Wang、Ming Wang、Can Zhang 和 Yubiao Zhang. 热方程的可观测集、可观测性、插值不等式与谱不等式. J. Math. Pures Appl. (9), 126:144–194, 2019.

奥赛数学实验室，巴黎-萨克雷大学，法国国家科学研究中心，307号楼，91405 奥赛 Cedex，法国电子邮箱：alix.deleporte@universite-paris-saclay.fr 数学系，伦敦国王学院，斯特兰德，伦敦，WC2R 2LS，英国电子邮箱：jean.lagace@kcl.ac.uk 数学系，比勒费尔德大学，大学街25号，33615 比勒费尔德，德国电子邮箱：marc.rouveyrol@universite-paris-saclay.fr