arXiv:2601.16193v1 [math.NT] 22 Jan 2026

基于密度的素数、素数间隔与欧拉乘积结构框架

GREGORIO VETTORI

Abstract. 我们构建了一个统一的密度框架，用于研究素性、互素性和素数对，并提出一种内禀归一化模型，用以描述受素数定理约束的素数间隙。在这一框架下，哈代–利特尔伍德、克拉梅尔与素数定理的预测之间呈现出结构性张力，从而得出关于极端间隔稀少程度的定量估计。我们将偶整数的加性表示重新表述为局部密度问题，进而得到与哈代–利特尔伍德启发式相容、且不依赖猜想的上界和下界。最后，我们通过截断欧拉乘积分析黎曼ζ函数；其稳定性与振荡结构为临界线以及基于素数的非平凡零点定位数值判据提供了一种连贯的解释。

Contents

引言 1
1. 素数的显式形式体系 1.1. 素数的密度与分布 1.2. 素数的平均值与期望值 1.3. 互素性与结构关系 1.4. 孪生素数与素数对 2
2. 素数间隙的内禀框架 2.1. 素数间隙的内禀模型 2.2. 素数定理的全局密度约束 2.3. 哈代–利特尔伍德、克拉梅尔与素数定理之间的结构性张力 2.4. 极端间隔的定量估计 3
3. 在哥德巴赫型问题中的应用 3.1. 局部密度波动的界 3.2. 与哈代–利特尔伍德启发式的相容性 3.3. 结构与概率方面的洞见 4
4. ζ 稳定性与零点定位的振荡分析 4.1. 黎曼ζ函数的表示 4.2. 临界线的函数方程启发式 4.3. 非平凡零点的渐近标度 4.4. 欧拉乘积的振荡结构 4.5. 欧拉乘积的波动性与稳定性 4.6. 截断欧拉乘积的局部极小值 4.7. 成对相关与欧拉乘积振荡 11
结论 14
参考文献 15

Introduction

在第1节中，我们为素性、互素性和素数配对引入统一的形式体系。经典算术函数通过归一化密度变量，从结构层面重新诠释，强调整体行为而非个别事件。这一视角为后续分析素数间隙、加法问题和欧拉乘积奠定了自然基础。

第 2 节构建了一个针对素数间隙的内在且归一化的框架。通过引入受素数定理约束的全局密度函数 $S_j(n)$，素数间隙被视为一个整体统计对象，而非彼此独立的波动。在此框架下，哈代–利特尔伍德常数 $C_2(n)$体现为

Date: 2026年1月。

一种编码全局相关性、依赖于尺度的量，而非临时采用的修正因子。这揭示了哈代-李特尔伍德启发法、Cramér型模型与素数定理之间明显的结构性张力，并为极端间隔提供了一种概率论上的重新诠释。对异常大间隙稀有程度的定量估计也由此自然得出，无需依赖未经证实的假设。

在第 3节中，加法问题被重新表述为局部素数密度问题。哥德巴赫型表示通过一个统计变量来描述 $G(n)$，其行为受前文引入的相同全局密度原理约束。在不假设哈代-李特尔伍德猜想的前提下，我们推导出与该猜想相容的非猜想性上界和下界，并从结构上解释反例为何极不可能。互补的组合分析进一步支持了这一图景：潜在的失败需要高度非典型且具有全局相关性的排除情况。

第 4 节将基于密度的方法拓展至解析数论。在这一框架下，临界线 $\Re(s) = 1/2$ 呈现为区分欧拉乘积稳定与不稳定区域的自然阈值。尽管分析带有启发性，但其内部逻辑一致，并仅依据素数数据得出用于定位非平凡零点的有效数值判据。由此形成的图景与成对相关方面的已知结果自然相连，并支持这样一种解释：非平凡零点是全局干涉现象，而非孤立局部行为的结果。

总体框架在概率启发、组合推理与经典解析结果之间搭建了一座连贯的桥梁，并提供了一个透明的环境，使得诸如哥德巴赫猜想和黎曼猜想这样的长期猜想能够获得自然的结构性诠释。

1. Explicit formalism for prime numbers

设 $n \geq 2$ 为自然数。在模算术中，整数 i 整除 n，当且仅当 $n \equiv 0$ （模 i）。根据定义，素数是满足这一条件的整数 n，其中仅有平凡因数 $i = 1$ 和$i = n$。

为了编码整数的整除结构，我们考察满足 $2 \leq i \leq n-1$的数对（n, i）之间的所有除法，并将相应的余数整理成由（n, i）索引的三角数组。这种表示凸显了整除关系背后的算术结构。

在这一框架下，对应于余数为零的条目标识出非平凡因数。对于每个固定的 i，这些条目形成对应于 i的倍数的等差数列。限制在 $i \leq \lfloor n/2 \rfloor$范围内即可捕捉所有非平凡的整除关系。

因此，不超过 n的所有整数中，非平凡余数为零的除法总次数为

$$Z(n) = \sum_{i=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-i}{i} \right\rfloor = 1 + \sum_{i=3}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = 1 - n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, \tag{1}$$

其中，最后一个表达式对所有 $n \geq 2$ 都成立。

求和函数 $Z(n)$ 并未引入新的算术信息，而是将经典的因子数据重新组织成一种特别适用于归一化和示性函数构造的形式。

整数 n 的非平凡正因子个数可用求和函数$Z(n)$ 表示为

$$P(n) = Z(n) - Z(n-1) = \sum_{i=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-i}{i} \right\rfloor - \sum_{i=2}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-1-i}{i} \right\rfloor, \tag{2}$$

其中， $P(n)$ 计数满足 $i \mid n$ 的整数 $i \in (1,\ n)$ 的个数。根据构造， $Z(n) = \sum_{k=4}^{n} P(k)$，且$Z(1) = Z(2) = Z(3) = 0$。

由于整数 n 是素数，当且仅当它没有非平凡因数，因此条件 $P(n) = 0$ 给出了素性的充要判据，这与经典的基于因数的刻画一致。

利用取整函数的性质以及所有大于 2 的素数都是奇数这一事实，对于奇数 n， $P(n)$ 的表达式可简化为

$$P(n) = \sum_{i=2}^{(n-1)/2} \left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor \right). \tag{3}$$

$\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 反映了整数 n 的可取非平凡因数的最大数量。我们定义

$$\omega(n) = 1 - P(n) \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^{-1}, \tag{4}$$

为产生非零余数的除法次数占理论最大值的比例。以 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 进行归一化可确保 $\omega(n)$ 的取值位于 $[0,1]$ 中。在这一尺度下，素数对应极端情形 $\omega(n)=1$，而高度合数则取值较低。特别地，只有 $n=4$ 和 $n=6$ 才会出现 $\omega(n)=0$。

在此框架内，可将 $n \geq 4$ 的素数指示函数显式定义为

$$I(n) = \lfloor \omega(n) \rfloor = \begin{cases} 1, & \text{if } n \text{ is prime,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

根据构造，当且仅当不存在非平凡同余式 $n \equiv 0 \pmod{i}$ 对 $i \in [2, \lfloor n/2 \rfloor]$ 有解时，$I(n)=1$。这为所提出的形式体系中的素性提供了一种显式的算术刻画。

小于或等于 n 的素数个数由下式给出

$$K(n) = 2 + \sum_{j=4}^{n} I(j), \tag{6}$$

其中，初始偏移量用于计入素数 2 和 3，且 $I(n) = K(n) - K(n-1)$. 这一构造与素数计数函数的经典定义相似，即将素数指示函数 [10] 累加求和。

T函数 $P(n)$ 和 $I(n)$ 与经典因子函数 $\tau(n)$ 直接相关 b y

$$P(n) = \tau(n) - 2, \qquad I(n) = \left\lfloor 1 - \big(\tau(n) - 2\big) \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^{-1} \right\rfloor, \tag{7}$$

其中，$\tau(n)$ 表示 n 的正因子总数。对于整数分解 $n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_k^{q_k}$，有 $\tau(n) = (q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_k+1)$。

从计算角度来看，当前表述并非旨在与经典的基于筛法的方法竞争，例如埃拉托斯特尼筛法或阿特金筛法在高效枚举素数方面的表现。相反，其目的是提供一种直接从因数性质推导出的、关于素性的精确且明确的算术表示。

同样地，当将其解释为一种素性判据时，该构造并未针对大规模数值检验进行优化，因此就计算复杂度而言，无法与既有的概率性或确定性方法相提并论，例如费马型检验、威尔逊定理或 AKS算法。当前方法的价值在于其结构上的透明性，以及它无需依赖概率假设或辅助代数构造即可给出闭式刻画这一事实。

在以下各节中，将采用这一形式体系作为统一框架，研究素数及其间隔的结构性质，并考察其对解析数论中若干经典问题的影响，包括哈代–利特尔伍德型猜想、哥德巴赫型表示以及黎曼ζ函数的性质。

1.1. 素数密度与分布。 区间 $[1,n]$ 中的素数密度定义为 $D(n) = K(n)/n$，相应的连续素数之间的平均间距为 $L(n) = 1/D(n)$。通过考虑以 n 为中心、宽度为 $2x$ 的对称窗口，可以引入这些量的局部版本：

$$D_x(n) = \frac{K(n+x) - K(n-x)}{2x}, \qquad L_x(n) = \frac{1}{D_x(n)}. \tag{8}$$

根据素数定理，素数计数函数满足

$$K(n) \sim \mathrm{Li}(n) = \int_2^n \frac{du}{\ln u} \sim \frac{n}{\ln n}, \tag{9}$$

其中，Li(n)提供了广为人知的渐近近似 [16]。W e introduce the following heuristic refi nemen t of $n/\ln n$,

$$A(n) = \frac{n}{\ln n}\left(1 + \frac{1.08}{(\ln n)^{1.01}}\right), \tag{10}$$

这与素数定理及其经典改进完全一致。具体而言，表 1显示，在所考察的范围内，$A(n)$ 相较于 Li(n) 提供了明显更接近的近似，而不是 $n/\ln n$。

n	$n/(\mathrm{Li}(n)\ln n)-1$	$A(n)/\mathrm{Li}(n)-1$
10^{10^1}	$-4.56\cdot10^{-2}$	$-2.24\cdot10^{-3}$
10^{10^2}	$-4.36\cdot10^{-3}$	$-6.06\cdot10^{-5}$
10^{10^3}	$-4.35\cdot10^{-4}$	$-5.76\cdot10^{-7}$
10^{10^4}	$-4.34\cdot10^{-5}$	$-1.01\cdot10^{-6}$
10^{10^5}	$-4.34\cdot10^{-6}$	$-1.97\cdot10^{-7}$
10^{10^6}	$-4.34\cdot10^{-7}$	$-2.91\cdot10^{-8}$

TABLE 1. 相对误差　　关于近似式 $n/\ln n$ 和 $A(n)$ 相对于对数积分 $\mathrm{Li}(n)$ 的表现　　.

1.2. 素数的平均值与期望值。关于素数分布，自然会考虑不超过给定整数 n 的所有素数的平均值。在当前框架下，这个量可以定义为

$$\bar{p}(n)=\frac{1}{K(n)}\sum_{i=1}^{n} i\,I(i), \tag{11}$$

其中 $I(i)$ 表示第1节中引入的素数指示函数。

比值 $\bar{p}(n)/n$ 在 n 取中等偏大的值时严格小于 $1/2$，数值证据表明在较小的 n 处可能存在一个浅极小值。若素数在 $[1,n]$ 中均匀分布，则会得到平凡估计 $\bar{p}(n)=n/2$。

这种偏离均匀行为的现象，可以从递减的素数密度角度作启发式理解。事实上，利用素数定理，区间 $[1,n]$ 与 $[1,n/2]$ 中的平均密度之比满足

$$\frac{D(n)}{D(n/2)}\sim\frac{\ln(n/2)}{\ln n}<1, \tag{12}$$

这意味着平均而言，素数在区间的下半部分更为集中。由此可得启发式近似

$$\bar{p}(n)\sim\frac{n}{2}\frac{\ln(n/2)}{\ln n}+K(n)\frac{\ln n}{n}, \tag{13}$$

其趋近于 $n/2$ 当 $n\to\infty$ 时（图 1），这与素数定理所预测的渐近均匀性一致 [16]。

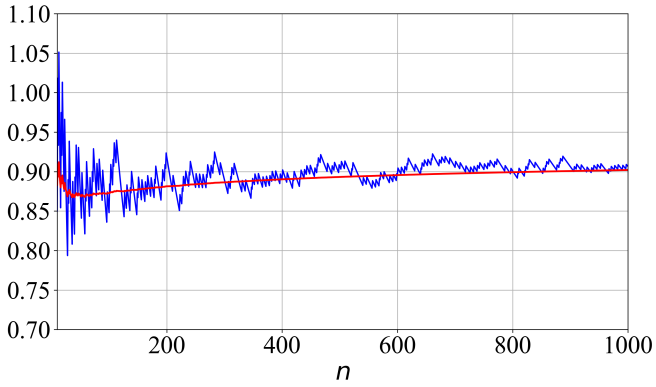

FIGURE 1. $2\,\bar{p}\,(n)\,/n$ （11）（蓝色）及其启发式近似（13）（红色），对应 $n\le1000$

1.3. 互素性与结构关系。如果两个整数唯一的公共正因数是 1，则称它们*互素*。在当前框架中，两个整数 n 和 x 的公因数个数 >1 可写为

$$C(n,x)=\sum_{i=2}^{\lfloor\min(n,x)/2\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor\right)\left(\left\lfloor\frac{x}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x-1}{i}\right\rfloor\right). \tag{14}$$

根据构造，当且仅当 n 和 x 没有大于 1 的公因数时，$C(n,x) = 0$，因此它们互素。特别地，当且仅当对于所有满足 $1 < n < p$ 的整数 n，$C(n,p) = 0$ 时，整数 $p \geq 2$ 是素数。

大于 1 的公因数的理论最大数量不超过 $\lfloor x/2 \rfloor$。这促使我们引入互素指示函数

$$I_C(n,x) = \left\lfloor 1 - C(n,x) \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor^{-1} \right\rfloor, \tag{15}$$

其中 $I_C(n,x) = 1$ 当且仅当 n 和 x 互素，$I_C(n,x) = 0$ 否则。

小于或等于 n 且与 x 互素的整数总数为

$$K_C(n,x) = \sum_{i=2}^{n} I_C(i,x). \tag{16}$$

在特殊情形 $n = x$ 下，有

$$K_C(n,n) = \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

其中 $\varphi(n)$ 表示欧 ler'的欧拉函数 f函数和 d p_i 是 ll th素数 h是.....的一部分f the f分解 f n。众所周知，欧拉函数的平均阶满足

$$\frac{\varphi(n)}{n} \to \frac{6}{\pi^2} \quad \text{on average,}$$

这解释了与 n 互素的整数的典型密度。

当 $n = p$ 为素数时，$\varphi(n)$ 取得最大值；而对于具有尽可能多的小素因子的整数，则取得最小值。特别地，固定一个素数 $w \in \mathbb{P}$，对于所有整数 $n < n_{\max} = \prod_{p \leq w} p$，都有

$$\varphi(n)_{\min} = n \prod_{p \leq w} (1 - p^{-1}), \qquad \varphi(n)_{\max} = n(1 - n^{-1}), \tag{17}$$

分别对应于最小和最大的互质性约束。

除了这些极值界之外，$K_C(n,\ n)$ 的取值还表现出显著的统计聚集特征。特别地，$K_C(n,\ n)$ 经常集中在 $n/3$、$n/2$ 和 $2n/3$ 附近。这一行为反映了最小素因子，尤其是 2 和 3，对互质密度的主导影响。

这一现象与如下算术约束相符：所有大于 3 的素数都属于剩余类 $6k \pm 1$，并突显了低模结构在塑造整体互质性统计中的作用。图 2 展示了 $K_C(n,n)$ 在 $n \leq 1000$ 上的情况；图 3 则展示了 $K_C(n,n)/n$ 在 $n \leq 200$上的经验分布。

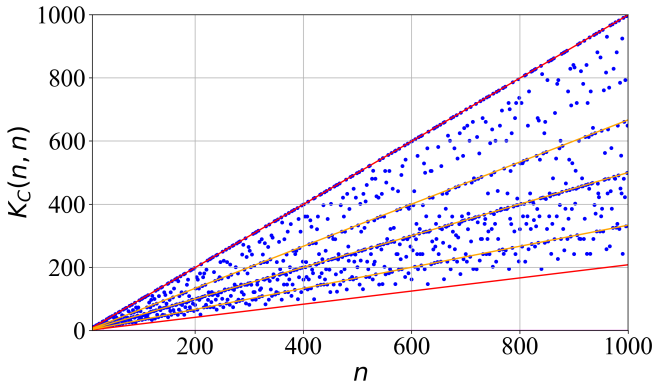

FIGURE 2. K_C（n，n）（16）（蓝色），φ（n）$_{min} \sim 0.208\ n$ 以及 φ（n）$_{max}$（17）（红色），对于 $n \leq 1000$ 和 $w = 11$。作为参考，$n/3$、$n/2$和 $2n/3$（橙色）。

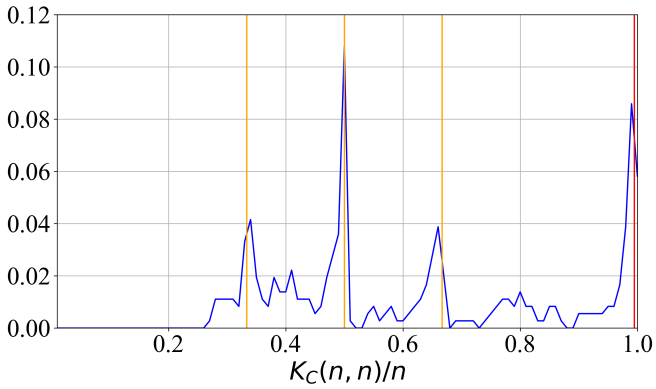

FIGURE 3. $K_C(n,\ n)/n$ 值的分布（蓝色），适用于 $n \le 200$。作为参考，$1 - n^{-1}$（红色）、$1/3$、$1/2$ 和 $2/3$（橙色）。

1.4. 孪生素数与素数对。 一对素数 $(p, p+2)$ 称为孪生素数对。在当前框架下，可以为 $n \ge 4$ 定义一个孪生素数的显式指示函数，形式如下：

$$I_2(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(I(n)\big(I(n-2) + I(n+2)\big) + 1\right) \right\rfloor. \tag{18}$$

$I_2(n)$的对称中心形式是有意采用的。它使我们能够识别属于孪生素数对的单个素数，而不必考虑伴随素数与其相距 $+2$ 还是 -2。这样一来，该指标对应的是单个素数元素，而非无序素数对。

更一般地，对于任意偶整数 $x \ge 2$，我们定义一个用于表示间距为x 的素数对的指示函数，如下：

$$I_x(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(I(n)\big(I(n-x) + I(n+x)\big) + 1\right) \right\rfloor. \tag{19}$$

间距为 x 且元素不超过 n 的素数对总数由此给出：

$$K_x(n) = \gamma_x + \sum_{j=4}^{n} I_x(j), \tag{20}$$

其中，修正项 $\gamma_x = I(3)\, I(3+x)$用于补偿求和下限所产生的边界效应。在渐近范围内，该修正项可以忽略不计。

指标函数 $I_x(n)$ 为哈代-李特尔伍德猜想中出现的素数对计数函数提供了明确的算术实现 [9], ，而无需假设其猜想性的渐近公式。

按照构造，$I_x(n)$ 仅取 $\{0,1\}$ 中的值，即使存在素数三元组或高阶簇也是如此。此外，$K_x(n)$ 统计所有间隔为 x 的素数对，而不论它们是否连续。对于 $x \ge 6$，这会导致对大小为 x的连续素数间隙重复计数，因为其中可能存在中间素数。相比之下，对于 $x = 2$，这种重复计数不可能发生，且 $K_2(n)$ 给出孪生素数对的精确计数函数。

在同一指示函数框架中表述素数对与素性和互素性，突显了本文方法的结构统一性，并为第3节所发展的加性表示的基于密度的分析作好铺垫。

2. An intrinsic framework for prime gaps

哈代-李特尔伍德猜想预言，不超过 n 的孪生素数对数量满足渐近关系

$$K_2(n) \equiv 1 + \sum_{j=4}^{n} I_2(j) \sim 2C_2 \int_2^n \frac{dt}{(\ln t)^2} \sim \frac{2C_2\, n}{(\ln n)^2}, \tag{21}$$

其中 C_2 表示孪生素数常数，

$$C_2 = \prod_{p\geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0.660161. \tag{22}$$

受这一猜想启发，我们在更一般的背景下研究这个问题：考察不超过 n的素数之间固定偶数大小 j 的素数间隙分布，旨在揭示素数间距的结构约束。

克拉默提出的经典启发式模型´表明，在渐近范围 $n)^2$ 内，素数间隙的最大规模约按 (ln [4]增长。因此，我们仅关注满足以下条件的偶数间隙大小： j 满足

$$2 \leq j \leq (\ln n)^2,$$

这一范围包含孪生素数，并排除了异常大的间隙。

从经验上看，在所有不超过 n 的素数中，统计间隙等于 j 的情况，约得到 $n/\ln n$ 个观测值，对应于不超过 n 的素数数量。将每种间隙大小的频数除以 n 进行归一化后，我们将 $P_{\text{emp}}(j,\ n)$ 定义为大小为 j 的素数间隙的经验密度。

在朴素随机模型中，若假设一个整数为素数的概率为 $1/\ln n$，且各整数的素性相互独立，那么距离为 j 的一对整数同时为素数的预期密度为 $1/(\ln n)^2$ 量级。观测到的素数间隔分布显著偏离这一基准，并呈现出强烈的正偏度。尽管平均素数间隔为 $\ln n$ 量级，但观测到的间隙大多小得多，较小的间隙出现频率远高于较大的间隙。

以下小节将详细分析这种不对称性以及向大间隙延伸的长尾。尤其是，本文的方法契合了现代观点：素数受结构与随机性的相互作用支配，例如 Tao [22]，所阐述的观点；同时，本文强调全局归一化约束的作用。

2.1. 素数间隙的内在模型。 我们引入一个启发式模型，用于描述素数间隙的经验分布，旨在捕捉数值数据中观察到的主要统计特征，包括不对称性、特征尺度和算术调制。

具体而言，我们用对数正态分布对素数间隙 j 的概率密度建模，

$$P_j(n) = \frac{C(n)}{\sigma\sqrt{2\pi}\, e^x} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{23}$$

其中 $x = \ln\ j,\quad j \in (2,\ (\ln n)^2),\quad \mu = \ln(\ln n)$，且 $\sigma = \mu/\alpha(j,\ n)$。

采用对数正态轮廓并非意在将其视为规范形式，而是因为它同时体现了实测素数间隙数据中观察到的两个最低限度要求：显著的右偏度和长尾，以及量级为 $\ln n$ 的特征尺度。任何满足这些约束的平滑模型，都会在后续分析中得出定性上相似的结论。类似的素数间隙对数正态启发式已出现在对 Cram´er 型模型的改进中 [8]。

该分布是离散的，因为可容许素数间隙是偶整数；它通过因子$C(n)$进行归一化，使得 $\sum_j P_j(n) \sim 1/\ln\ n$。

从经验上看，可被 6 整除的间隔 j 出现得更为频繁。这一效应反映了这样的算术约束：所有大于 3 的素数都属于剩余类 $6k \pm 1$。为考虑这一结构，我们引入一个周期为 6 的乘法调制，

$$S_j(n) \sim \frac{P_j(n)}{2}\left[3 + \cos\left(\frac{\pi j}{3}\right)\right], \tag{24}$$

从而得到 $S_j(n) \in (P_j(n)\ 2P_j(n))$.

尽管 $S_j(n)$ 未经过归一化，但它对经验间隙频率的描述显著改善。为量化这一改进，我们定义平均相对偏差

$$E(n) = (\ln n)^{-2} \sum_{j=2}^{\lfloor (\ln n)^2 \rfloor} \left| \frac{S_j(n)}{P_{\mathrm{emp}}(j,n)} - 1 \right|. \tag{25}$$

截至 $n = 10^7$ 的数值实验表明， $E(n)$ 随 n 增大而减小。

受这些观察启发，我们考虑一种广义形式

$$S_j(n) \sim \frac{\beta(n)}{\mu e^{\mu(\rho+1)}} \frac{3 + \cos(\pi j/3)}{2\exp\left(\frac{1}{2}(\rho-1)^2 \alpha(j,n)^2\right)}, \tag{26}$$

其中 $\rho = (\ln j)/\mu$，且 $\alpha(j,n)$ 可随 j 变化。变量 ρ 归一化到区间 $(2/\ln n, 2)$，相比典范优值 $j/\ln n$，为素数间隙提供了更自然的标度参数。

2.2. 素数定理的全局密度约束。 我们对函数 $S_j(n)$施加六项渐近约束，以反映素数间隙的已知性质、归一化要求以及已有的猜想性结果。我们并不假定这些约束在真实的素数间隙分布中同时成立。相反，它们是施加于 $S_j(n)$ 的结构性要求，用于检验经典猜想在单一归一化框架中的内部相容性。具体而言，这些约束提供了关于函数 $\beta(n)$ 和 $\alpha(j,n)$ 在 $n \gg 1$ 下渐近行为的信息。

$$S_{\ln n}(n) \sim (\ln n)^{-2} \tag{27a}$$

$$S_2(n) \gtrsim 2C_2 (\ln n)^{-2} \tag{27b}$$

$$S_{(\ln n)^2}(n) \lesssim n^{-1} (\ln n)^{-2} \tag{27c}$$

$$S_4(n) \sim S_2(n) \tag{27d}$$

$$n \sum_{j \le (\ln n)^2} j\, S_j(n) \sim n \tag{27e}$$

$$n \sum_{j \le (\ln n)^2} S_j(n) \sim \mathrm{Li}(n) \tag{27f}$$

对于 $\rho \sim 1$，函数 $S_j(n)$ 实际上独立于 $\alpha(j,\ n)$。第一个约束确定了整体归一化，从而得到 $\beta(n) \sim 2\mu/3$，并且

$$S_j(n) \sim N_j \exp\left[-\mu(\rho+1) - \tfrac{1}{2}(\rho-1)^2 \alpha(j,n)^2\right], \tag{28}$$

其中 $N_j = 1 + \cos(\pi j/3)/3 \in (0.83,\ 1.33)$，且 $\langle N_j \rangle = 1$。

对于固定的间隙 $j = 2$ 和 $n \to \infty$，我们假设素数间隙密度由哈代-李特尔伍德猜想支配。施加第二个约束可得

$$\frac{1}{2}\alpha^2(2,n) \sim \frac{\mu}{1-\rho} - \frac{\ln(12C_2/5)}{(1-\rho)^2} \ \to\ \mu, \tag{29}$$

其中 $C_2 \simeq 0.660161$ 是孪生素数常数。

当 $\rho \sim 2$ 时，素数间隙变得极其稀少。第三个约束意味着

$$\frac{1}{2}\alpha^2((\ln n)^2, n) \sim \frac{\ln n - \mu(\rho+1)}{(\rho-1)^2} \ \to\ \ln n, \tag{30}$$

从而实际上确定了 $S_j(n)$ 尾部的衰减率。

第五和第六个约束确保素数间隙的总数正确，即 $\sim \mathrm{Li}(n)$，并使平均间隙大小处于 $\ln n$ 的量级。第四个约束 $S_2(n) \sim S_4(n)$ 是经验性的，反映了观测到的间隙大小为 2 和 4 的频率相近。由此可得

$$S_2(n) \sim S_4(n) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Li}(n)}{n} - \sum_{j=6}^{\lfloor (\ln n)^2 \rfloor} S_j(n) \right). \tag{31}$$

我们通过在归一化变量 $\rho = \ln j/\mu$ 中引入两种线性依赖关系，推广了前面的分析，分别对应于低于和高于平均素数间隔尺度的区域。

我不为有效参数 $\alpha(j,\ n)$ 在整个 ρ 范围内指定单一函数形式，而是在区域 $\rho \in (\rho_2,\ 1)$ 内直接插值所得密度 $S_j(n)$；该区域的行为受小

间隙和中等间隙控制；而对于 $\rho \in (1,\ 2)$，我保留了以 $\alpha(j,\ n)$ 表示的显式参数化，因为在此范围内，分布的尾部开始占主导。

对于 $\rho \in (\rho_2,\ 1)$，我们假设线性关系

$$S_j(n)\, e^{2\mu} N_j^{-1} \sim \frac{12}{5} C_2 + \Big(1 - \frac{12}{5} C_2\Big)(\rho - \rho_2), \tag{32}$$

该关系在 $\rho = \rho_2$ 处的哈代–利特尔伍德孪生素数预测与 $\rho \simeq 1$处的平均间隙尺度之间进行插值。

对于 $\rho \in (1,\ 2)$，我们改为规定有效宽度参数的线性增长 ，

$$\frac{1}{2}\,\alpha^2(j,n) \sim \mu + (\ln n - 2\mu)(\rho - 1), \tag{33}$$

从而确保 当 j 趋近于最大尺度 $(\ln n)$ 时，大素数间隙逐步受到抑制 [2].

在这些假设下，密度具有正确的渐近行为： $S_j(n) \sim 2C_2\, e^{-2\mu}$ 在 $\rho = \rho_2$处，$S_j(n) \sim e^{-2\mu}$ 在 $\rho \simeq 1$附近，以及 $S_j(n) \sim e^{-2\mu}\, n^{-1}$ 当 $\rho \to 2$时。

因此，密度 $S_j(n)$ 有两种渐近一致的表示形式：

$$S_j(n) \sim N_j \Big[\frac{12}{5} C_2 + \Big(1 - \frac{12}{5} C_2\Big)(\rho - \rho_2)\Big] e^{-2\mu}, \tag{34a}$$

$$S_j(n) \sim N_j\ e^{-\mu(\rho+1) - (\rho-1)^2\left[\mu + (\ln n - 2\mu)(\rho-1)\right]}, \tag{34b}$$

前者适用于 $\rho \in (\rho_2,\ 1)$，后者适用于 $\rho \in (1,\ 2)$。

我们将通过与实测素数间隙数据直接比较，评估所提出框架的定量有效性。具体而言，以下小节将考察 $S_j(n)$ 关于 j 和 n 的标度行为，以及该框架再现小间隙和中等间隙观测分布的准确性。

我们将特别关注有效参数 $\alpha(j,\ n)$ 对归一化变量$\rho = \ln j/\mu$的依赖关系，以及随着 n 增大，所得拟合的稳定性。

该模型本质上是一种启发式模型，并非旨在捕捉细尺度算术相关性，也不用于精确预测个别间隙的出现情况。相反，它旨在以平均意义描述素数间隙的整体统计结构。

2.3. **HL、Cramér 与素数定理之间的结构张力。** 方程（27）中的第六个约束体现了素数定理，要求截至规模 $(\ln n)^2$ 的素数间隙总数渐近等价于 $\mathrm{Li}(n)$。因此，为考察所提出模型的内在一致性，自然需要引入一组与密度 $S_j(n)$相关的聚合量。

- 区间（$n_1,\ n_2$）内等于 j 的素数间隙的期望数量为

$$\int_{n_1}^{n_2} n S_j(n)\ dn \sim n_2 S_j(n_2) - n_1 S_j(n_1) \tag{35}$$

- 区间（$j_1,\ j_2$）内等于 $j \in$ 的素数间隙的期望数量为 $\sum_{j_1}^{j_2} n S_j(n)$
- $\varepsilon(n)$ 是 $nS_j(n)$ 相对于 $\mathrm{Li}(n)$ 的误差：

$$\varepsilon(n) = \frac{\sum_2^{\lfloor j_{max} \rfloor} n S_j(n)}{\mathrm{Li}(n)} - 1 \tag{36}$$

- 数量 $k_1(n)$ 衡量的是大小低于平均尺度 $\ln n$ 的素数间隙所占的比例，从而为整体分布中小间隙的相对权重提供了一个自然指标：

$$k_1(n) \sim \frac{\sum_{j=2}^{\lfloor \ln n \rfloor} S_j(n)}{\sum_{j=2}^{\lfloor j_{max} \rfloor} S_j(n)} \tag{37}$$

- 满足 $\rho < 1$ 的素数间隙的平均密度为

$$\langle S_j(n) \rangle_1 \sim 2\ k_1(n)\ (\ln n)^{-2} \tag{38}$$

- 满足 $\rho > 1$ 的素数间隙的平均密度为

$$\langle S_j(n) \rangle_2 \sim \frac{2\ k_2(n)\ (\ln n)^{-1}}{(\ln n)^{\rho_{max}} - \ln n} \sim \frac{2\ k_2(n)}{(\ln n)^{\rho_{max}+1}} \tag{39}$$

其中 $k_2(n) = 1 - k_1(n)$，而 ρ_{max} 是根据克拉默猜想得出的 ρ ($\rho_{max} = 2$ 的上限。

方程（34）和（37）得出 $\langle S_j(n)\rangle_1 \sim (C_2(n)+1/2)\,(\ln n)^{-2}$。利用方程（38），我们得到小间隙比例 $k_1(n)$ 与有效孪生素数常数 $C_2(n)$ 之间的内在关系。这里，该常数作为推导所得的量出现，其取值受到全局归一化的约束，而非预先设定。

$$k_1(n) \sim \frac{1}{2}C_2(n) + \frac{1}{4}, \qquad C_2(n) \sim 2k_1(n) - \frac{1}{2}. \tag{40}$$

方程（40）应被理解为当前框架内的一致性关系。它并未断言孪生素数常数在现实中决定全局间隙分布，而是指出，任何满足所施加归一化约束的密度模型都必须呈现这种相关性。

由于 $2C_2(n)$ 必须大于 1，因此 $k_1(n)$ 始终大于 50%。反过来，约束$k_1(n) < 1$ 意味着 $C_2(n) < 1.5$。这些界限源自一般的归一化约束和正性约束，并不依赖哈代–利特尔伍德猜想或克拉梅尔猜想是否成立。特别是，假设哈代–利特尔伍德预测 $C_2(n) \to C_2 \simeq 0.66$，则意味着 $k_1(n) \to 0.58$ 为 $n \to \infty$，这一数值与低于平均尺度的间隙占主导地位相一致。

我们通过考察 $C_2 = C_2$（n）（不采用哈代-李特尔伍德猜想）、 β（n） $= \mu\ r$（n）（可变归一化）以及 $\rho_{max} = \rho_{max}$（n）（不采用克拉梅尔猜想），将方程（34）推广，得到:

$$S_j(n) \sim y(j,n)\,\left[z(n) + (1-z(n))(\rho-\rho_2)\right]\,e^{-2\mu} \tag{41a}$$

$$S_j(n) \sim y(j,n)\,e^{-\mu(\rho+1)-(\rho-1)^2\alpha^2(j,n)/2} \tag{41b}$$

其中 $y(j,\ n) = 3r(n)N_j/2$, $z(n) = 8C_2(n)/5r(n)$，且

$$\frac{1}{2}\alpha^2(j,n) = \frac{\mu(\rho_{max}-1) + (\ln n - \mu\rho_{max})(\rho-1)}{(\rho_{max}-1)^3} \tag{42}$$

其渐近行为为 $S_j(n) \sim (\ln n)^{-2}n^{-1}$，当 $\rho \to \rho_{max}$ 时达到。

在由方程（34）定义的参考配置中，参数固定为 $C_2 = 0.66$, $r = 2/3$，以及$\rho_{\max} = 2$，分别对应哈代–利特尔伍德孪生素数常数、由$S_{\ln n} \sim$（ln n）$^{-2}$所隐含的归一化，以及克拉默猜想所提出的归一化间隙上界。

对于 n ($n < 10^6$) 的中等取值，量 $nS_j(n)$ 显著低估了 Li(n)。这一现象与以下事实相符：哈代–李特尔伍德预测 $C_2(n) \to 0.66$ 具有渐近性质，而在有限范围内，经验孪生素数密度 $K_2(n)$ 可能显著高于其极限形式 $2C_2(\ln n)^{-2}$ [8]。随着 n 增至 $10^{30} \lesssim n \lesssim 10^{80}$ 范围，与素数定理约束的吻合程度有所提高，且相对误差 $|\varepsilon(n)|$ 保持在 2.5% 以下。

然而，当 n 取较大值时，偏差再次出现：对于 $n \gtrsim 10^{80}$，我们观察到 $|\varepsilon(n)| \gtrsim 3\%$，且该偏差单调增长，在 $n > 10^{300}$时达到 $|\varepsilon(n)| > 10\%$。这一行为表明，在当前框架下，同时施加 $C_2 = 0.66$、 $r = 2/3$和 $\rho_{\max} = 2$ 与素数定理在渐近意义上并不相容。

为找出这种不一致的来源—— $nS_j(n)$ 与 Li(n) 之间的偏差——我们分析了三个互补情形，每个情形都放宽了上述假设之一。

(i) 可变的孪生素数常数。固定 $r = 2/3$ 和 $\rho_{\max} = 2$，我们确定满足素数定理所需的 $C_2(n)$ 值。对于 $n = 10^{300}$，这给出 $C_2(n) \simeq 1$ 和 $k_1(n) \simeq 68\%$。当 $n \to \infty$时，形式上可得 $C_2(n) \to 1.5$ 和 $k_1(n) \to 1$，这意味着平均素数间隔小于 $\ln n$，与素数定理相矛盾。这一观察并不否定哈代-李特尔伍德猜想，但表明在当前模型中， $C_2(n)$ 不可能无限增长，而且还必须有其他结构参数共同决定 $S_j(n)$ 的形态。

（*ii*）变量归一化。固定 $C_2 = 0.66$和 $\rho_{\max} = 2$，我们确定满足素数定理所需的归一化 r（n）。虽然这一选择减小了整体误差，却迫使 k_1（n）随 n增大，从而违反了40式中 k_1（n）与 C_2之间的内在关系。这支持条件 $S_{\ln n} \sim$（ln n）$^{-2}$及其对应值 $r = 2/3$的稳定性。

（*iii*）变量最大间隔尺度。固定 $C_2 = 0.66$和 $r = 2/3$，我们转而允许 $\rho_{\max}$ 依赖于 n。这种情形既保留了素数定理，也保留了40式，但要求 $\rho_{\max}$（n） > 2 对于充分大的 n成立，这与克拉默猜想不相容。在当前框架下，这表明界 $j <$（ln n）^{2} 不能对 n一致成立。

表 2 总结了 k_1（n）和 ε（n）的行为，重点说明通过分别放宽 C_2、 r或 $\rho_{\max}$，可以恢复素数定理约束。

n	$k_1(n)$	$\varepsilon(n)$	$C_2(n)$	$r(n)$	$\rho_{max}(n)$
10^{10}	55。6%	2.11%	0.620	0.646	1.955
10^{25}	57。0%	2.65%	0.602	0.642	1.941
10^{50}	58。9%	0.11%	0.658	0.666	1.998
10^{100}	60。3%	−3.66%	0.761	0.700	2.095
10^{200}	62.5%	−7.95%	0.903	0.742	2.230
10^{300}	63。9%	−10.51%	1.002	0.768	2.325

标准情形下的 TABLE 2. k_1（n）和 ε（n），以及验证素数定理所需的 C_2（n）、 r（n）和 ρ_{max}（n）（作为 3 种不同情形）。

受可容许范围 $C_2(n) \in (0.5,1.5)$ 的启发，我们提出唯象形式

$$C_2(n) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{2} + \chi(n), \tag{43}$$

与常数值 $C_2 = 0.66$ 相比，该形式在很宽的 n 范围内（表 3）能更好地拟合经验数据。

n	C_{emp}	$C_2(n)$	$C_2(n)/C_{em\,p} - 1$	$0.66/C_{emp} - 1$
10^3	0.835	0.841	0。71%	−20.94%
10^6	0.780	0.776	−0.49%	−15.32%
10^9	0.735	0.748	1。73%	−10.22%
10^{12}	0.714	0.732	2.45%	−7.55%
10^{15}	0.702	0.720	2。56%	−5.98%

TABLE 3. 经验数据 的 $C_2(n)$，根据方程（ $C_2(n)$ 得到的预期值，误差相对于经验数据而言43） r C_2（n）和 $C_2 \sim 0.66$。

在此参数化下，对于 $n \gtrsim 10^{85}$， C_2（n）会降至 0.66 以下，这表明，若将哈代–利特尔伍德常数解释为严格的渐近极限，它将无法描述观测到的标度关系。我们强调，这一结论取决于当前模型，并不构成对猜想本身的证明或反驳。

结合方程（43）、（38）和（39），我们得到 k_1（n）$\sim \frac{1}{2}$（$1+\chi$）上 和 k_2（n）$\sim \frac{1}{2}$（$1-\chi$），对应的平均密度为 $\langle S_j$（n）$\rangle_1 \sim$（$1+\chi$）（ln n）$^{-2}$ 和 $\langle S_j$（n）$\rangle_2 \sim$（$1-\chi$）（ln n）$^{-(\rho_{\max}+1)}$。在极限 $n \to \infty$ 下，这给出C_2（n）$\to 0.5$ 和 k_1（n）$= k_2$（n）$= 50\%$。

最后，在假设（43）下强制满足素数定理，需要 $\rho_{\max}(n) > 2$ 在 $n \gtrsim 10^{61}$时成立；这一范围超出了目前经验数据所能覆盖的程度。对于 $\rho_{\max}(n)$，一个二次拟合如下：

$$\rho_{max}(n) \sim 2.192 - 0.2257\mu + 0.03828\mu^2 \tag{44}$$

表 4总结了本文所考虑的最一般配置下模型的行为，并表明关系式（40）中 $C_2(n)$ 与 $k_1(n)$ 之间的关系也得到了经验数据的验证。在此设定下，孪生素数密度由一个依赖于标度的系数 $C_2(n)$ 描述，该系数由方程（43）给出，与现有经验数据高度吻合，但不会收敛至哈代–利特尔伍德常数。归一化固定为 $r = 2/3$，从而强制满足标度关系 $S_{\ln n} \sim (\ln n)^{-2}$，而 $\rho_{\max}(n)$ 则通过将素数定理作为全局约束来确定，因此迫使 $\rho_{\max}(n)$ 在 n 足够大时超过 2。

在当前框架下，同时强制满足哈代–利特尔伍德常数、克拉默上界和素数定理会导致内部不一致。这并不构成反对其中任何一个猜想的证据，但凸显了将它们结合为单一全局密度模型所施加的严格约束。

2.4. 关于极端间隔的定量估计。 现在我们讨论所提出的框架对大间隙和极端素数间隙的一般影响。

n	μ	$C_2(n)$	$\rho_{max}(n)$	$k_1(n)$	$\varepsilon(n)$
10^{10}	3.137	0.742	1.861	61。0%	−0.10%
10^{25}	4.053	0.698	1.906	60。1%	0.19%
10^{50}	4.746	0.674	1.983	59.6%	−0.03%
10^{100}	5.439	0.655	2.097	58。0%	−0.12%
10^{200}	6.132	0.640	2.247	56。9%	−0.04%
10^{300}	6.538	0.633	2.353	56.3%	0.04%

TABLE 4. μ， C_2（n）来自方程（43），ρ_{max}（n）来自方程（44），由此得到 k_1（n）和 ε（n）。

（*i*）渐近衰减　行为与阈值行为。对于 $\rho \sim 2$，方程（41）给出了上包络行为 r

$$S_j(n) \sim (\ln n)^{-2}\, n^{-(\rho-1)^3}, \tag{45}$$

它在典型间隙区域（$\rho \lesssim 1$）与分布的极端尾部之间平滑过渡。施加条件 $S_j(n) \sim n^{-1}$，对应于期望重数为 1 量级，由此得到近似阈值 ρ_T，满足

$$\rho_T \sim 1 + \left(\frac{\ln n - 2\mu}{\ln n}\right)^{1/3}, \tag{46}$$

其中 $\rho_T \to 2$，当 $n \to \infty$ 时。

这一结果表明，$\rho = 2$ 是一个临界概率阈值，而非一个僵硬的上界。对于给定的 n，虽然不能保证一定会出现满足 $\rho \approx \rho_T$ 的素数间隙，因为 $nS_j(n)$ 会变得小于 1，但该模型并未排除存在满足 $\rho > \rho_T$ 的间隙。

从这个意义上说，尺度 $\rho = 2$ 是由素数定理约束与 $S_j(n)$ 的衰减之间的相互作用动态形成的，而非先验设定。这种解释与支撑克拉梅尔猜想 [4]，的经典启发式论证一致，同时也允许极端尾部出现偏离。

（*ii*）超间隙及其期望重数。受上述考量启发，我们将超间隙定义为满足 $\rho > 2$的素数间隙。我们采用方程（41中的精确表达式，并在临界尺度$\rho \sim 2$附近取值，得到

$$S_{(\ln n)^2}(n) \sim \exp\left(-3\mu - \frac{\ln n - \mu}{(\rho_{\max} - 1)^3}\right), \tag{47}$$

对于 $\rho > 2$，我们有平凡条件 $S_j(n) < S_{(\ln n)^2}(n)$。O

在此基础上，一个 可通过以下方式得到尺度 n 以内超间隙期望数量的上界

$$N_S(n) < \frac{1}{2}\, n\, S_{(\ln n)^2}(n)\, \left[(\ln n)^{\rho_{\max}} - (\ln n)^2\right], \tag{48}$$

为了与素数间隙总数进行比较，我们定义相对频率

$$R_S(n) = N_S(n)\, \mathrm{Li}(n)^{-1}, \tag{49}$$

它衡量超间隙数量与所有素数间隙数量的期望比值。

尽管 $N_S(n)$ 随着 n 增加而增大，这是由于 $S_j(n)$ 的整体归一化所致，但比值 $R_S(n)$ 会随着 n迅速衰减，这意味着超间隙仍极为罕见。数值计算（表 5）表明，只有在极大的尺度下才有望出现首个超间隙，尺度约为 $n \sim 10^{61}$，此时相对频率 $R_S(n) \sim 10^{-57}$。

本文的估计本质上是概率性的，讨论的是期望频率，而非确定性构造。因此，这些估计与 [25, 19, 6], 中显式构造的大间隙互为补充；后者证明了大间隙的存在，但并未描述其整体统计行为。

从互补的角度来看，只有长度为 $j < j_{\max}(n)$ 的素数间隙才有望以不可忽略的概率出现。记

$$j_{\max}(n) = n^{\theta(n)}, \qquad \theta(n) \sim \frac{\mu}{\ln n}\, \rho_{\max}(n), \tag{50}$$

我们观察到，$\theta(n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，即使 $\rho_{\max}(n) > 2$（表 5），也是如此。因此，最大间隔尺度仍是 n 的次多项式级别，这与关于大素数间隙的所有已知严格结果 [6]一致。

（*iii*）与经验数据和数值外推的比较。在本研究中，密度 S_j（n）与所有不超过 $j \in$（2，$\lfloor$（ln n）$^2\rfloor$）的素数间隙经验数据进行检验 $n = 10^7$（图4）。数量 nS_j（n）通过数值计算得到，范围远超经验数据可及的范围，从而对该 $n = 10^{300}$模型进行受控外推

n	$\rho_{max}(n)$	$j_{max}(n)$	$\theta(n)$	$N_S(n)$	$R_S(n)$
10^{10}	1.861	$3.42 \cdot 10^2$	0.253	–	–
10^{25}	1.906	$2.26 \cdot 10^3$	0.134	–	–
10^{50}	1.983	$1.22 \cdot 10^4$	0.082	–	–
10^{100}	2.097	$8.98 \cdot 10^4$	0.050	$2.42 \cdot 10^{21}$	$5.54 \cdot 10^{-75}$
10^{200}	2.247	$9.67 \cdot 10^5$	0.030	$2.13 \cdot 10^{93}$	$9.77 \cdot 10^{-103}$
10^{300}	2.353	$4.78 \cdot 10^6$	0.022	$4.77 \cdot 10^{174}$	$3.29 \cdot 10^{-121}$

TABLE 5. ρ 和 j的预期上限、系数 $\theta(n)$、超间隙的期望数量（$\rho > 2$）及其预期相对频率 $R_S(n)$，均作为 n的函数。

模型（表6）。图5 和6 分别展示了在固定 S_j（n）时 j 对 n的依赖关系，以及nS_j（n） n 随的标度关系（针对具有代表性的间隙大小）。

总体而言，这些结果表明，所提出的框架再现了小间隙和中等间隙的观测行为，同时对分布的极端尾部给出了非平凡且可检验的预测。

特别是，Maier 定理关于短区间中的素数所展示的素数密度相对于平均值的大幅局部偏离，表明有必要采用基于全局密度的视角，而不能仅依赖局部概率模型。

此外， $\rho = 2$附近动态阈值的出现、对超大间隙重数的定量估计，以及 $j_{\max}(n)$的次多项式增长，构成了该模型稳健且原创的特征，并且在很大程度上独立于未经证明的猜想。

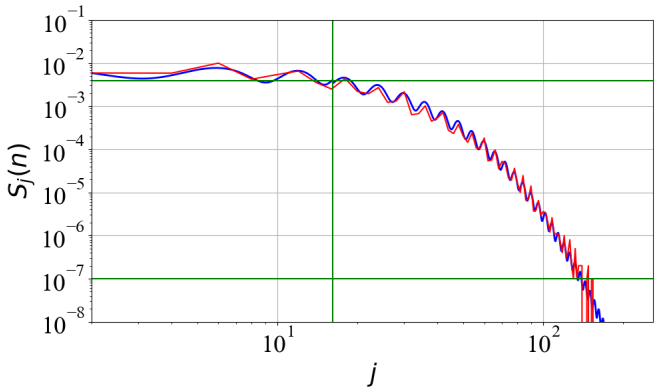

FIGURE 4. $S_j(n)$ (41)（蓝色）与 $P_{emp}(j,n)$（红色）相比，对于 $n = 10^7$ 和 $\rho_{max} = 1.92$。作为参照，水平绿色线分别为 $S_j(n) = (\ln n)^{-2}$和 $S_j(n) = n^{-1}$，而垂直绿色线为 $j = \ln n$。

	10^2	10^3	10^4	10^5
10^{25}	$1.11 \cdot 10^{21}$	$8.43 \cdot 10^8$	–	–
10^{50}	$6.97 \cdot 10^{45}$	$7.09 \cdot 10^{39}$	$5.67 \cdot 10^1$	–
10^{100}	$1.83 \cdot 10^{95}$	$9.95 \cdot 10^{92}$	$4.09 \cdot 10^{68}$	–
10^{200}	$4.69 \cdot 10^{194}$	$1.07 \cdot 10^{194}$	$1.55 \cdot 10^{180}$	$2.72 \cdot 10^{123}$
10^{300}	$2.11 \cdot 10^{294}$	$1.14 \cdot 10^{294}$	$5.32 \cdot 10^{284}$	$8.95 \cdot 10^{238}$

TABLE 6. nS_j（n）由方程（41），作为 j （列）和 n （行）的函数，并考虑 C_2（n） （43）以及 ρ_{max}（44）。

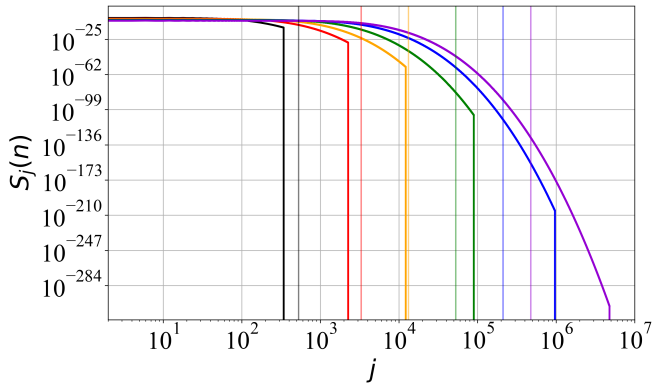

FIGURE 5. $S_j(n)$ （41）作为 j的函数： $n = 10^{10}$ （黑色）、 $n = 10^{25}$ （红色）、 $n = 10^{50}$ （橙色）、 $n = 10^{100}$ （绿色）、$n = 10^{200}$ （蓝色）、 $n = 10^{300}$ （紫色）。竖线对应于所考虑取值下的 $\rho = 2$ n。

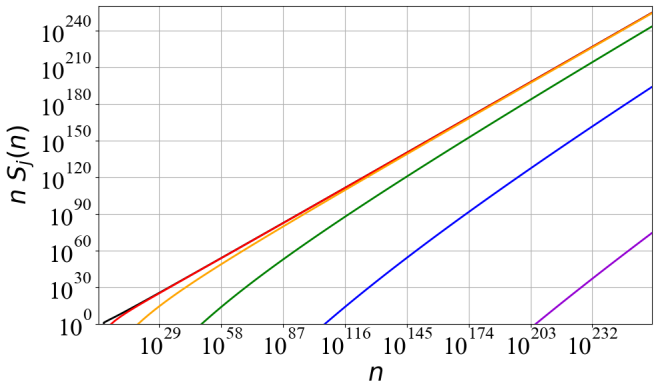

FIGURE 6. $nS_j(n)$ （41）作为 n的函数： $j = 10$ （黑色）、 $j = 10^2$ （红色）、 $j = 10^3$ （橙色）、 $j = 10^4$ （绿色）、 $j = 10^5$（蓝色）、 $j = 10^6$ （紫色）。

3. Applications to Goldbach-type problems

哥德巴赫猜想是解析数论中最著名的未解决问题之一。它断言，每个偶整数 $2n \geq 4$ 都可以写成两个素数之和。等价地，将这种表示写成对称形式，可表示为

$$n = \frac{p_1 + p_2}{2} = p_1 + j = p_2 - j, \tag{51}$$

对于某个整数 $j \geq 0$。因此，该猜想可以改述为：每个整数 $n \geq 2$ 要么本身是素数，要么位于至少一对相距 $2j$ 的素数的中心。

遵循哈代和利特尔伍德在其关于加法问题的经典著作中提出的概率论和基于密度的观点 [9], ，我们用第 I节中定义的素数指示函数 n（1）重新表述哥德巴赫猜想。在这种表述下，该猜想可写为

$$\exists\, j \in [0, n-2] \;:\; I(n-j)\, I(n+j) = 1 \qquad \forall\, n \geq 2. \tag{52}$$

给定约束条件 $p_1 \geq 2$ 和 $p_2 \leq 2n-2$，我们将以 n 为中心的素数对数量（允许退化情形 $p_1 = p_2 = n$）定义为

$$G(n) \;=\; \sum_{j=0}^{n-2} I(n-j)\, I(n+j). \tag{53}$$

因此，哥德巴赫猜想等价于断言：对所有 $n \geq 2$， $G(n) \geq 1$ 。

利用恒等式 $I(n) = K(n) - K(n-1)$，其中 $K(n)$ 表示前文引入的累积素数计数函数，方程（53）可改写为

$$G(n) = \sum_{j=0}^{n-2} \big[K(n-j) - K(n-j-1)\big]\big[K(n+j) - K(n+j-1)\big]. \tag{54}$$

在这种表述中，从期望值的角度看，被加数可以解释为：在基于密度的模型中，整数 $n-j$ 和 $n+j$ 同时为素数的局部概率。这种改写将问题的焦点从单个素数的精确位置转向其局部分布规律，这与经典启发式方法 [15] 的思路一致。

为了说明这一观点，不妨考虑一个极端的假设情形：所有奇数都是素数。在这种情况下，$n-j$ 和 $n+j$ 同时为素数的概率将是 $1/2$，因此预期 $G(n)$ 个数可以表示为两个素数之和。更一般地，即使存在局部波动或素数密度较低的区域，决定 $G(n)$ 典型大小的，仍是 n 周围区间内素数的整体分布。

利用公式（8）中引入的局部密度近似，我们写作

$$K(n \pm j) \;\approx\; K(n) \pm D_j(n)\, j, \tag{55}$$

其中，$D_j(n)$表示距离 j 处、相对于 n的平均素数密度。在期望值层面并取主项后，可得到近似式

$$G(n) \;\sim\; \sum_{j=0}^{n-2} D_j(n)^2. \tag{56}$$

公式（56）应理解为一种启发式关系，用于描述的哥德巴赫型表示的期望数量与局部素数密度平方之间的关系。这一观点与经典的哈代–利特尔伍德启发法相一致，并补充了严格的部分结果以及广泛的计算验证 [18]。

3.1. 局部密度波动的界。 当前方法的新颖之处不在于引入新的哥德巴赫计数函数，而在于分离出结构性的密度约束，这些约束迫使 $G(n)$的期望规模远超猜想所要求的最低阈值。从这个意义上说，与素数密度已经施加的全局约束相比，哥德巴赫型表示体现为一种低复杂度的加法现象。

我们通过考察量 $G(n)$来分析哥德巴赫问题，将来自区间（2，n）和（n，$2n$）的贡献分离开来，旨在推导其期望规模的理论上界和下界。

上界。 在配对效率最高的情形下，我们假设对于每个素数 $p_2 \in (n, 2n)$，都存在一个对应的素数 $p_1 \in (2, n)$，使得 $p_1 + p_2 = 2n$。这种配置不应被视为可实现的情形，而应视为符合全局密度约束的极端基准。

在这一理想化配置下，$(n, 2n)$ 中的每个素数至多贡献一个哥德巴赫表示，因此理论上界为

$$G_{\max}(n) \;\sim\; \mathrm{Li}(2n) - \mathrm{Li}(n) \;\sim\; n\,\frac{2\ln n - \ln(2n)}{\ln n\,\ln(2n)}. \tag{57}$$

这一上界对应于符合素数定理的可容许中心配对的最大数量，并为 $G(n)$ 提供了一个自然上限。

下界。 在相反的极端情形下，我们考虑一个对称性最弱的情形：是否存在一个与给定素数 $p_2 > n$ 互补的素数 $p_1 < n$，完全由局部素数密度决定。令 j_2 表示区间 $(n, 2n)$ 内的平均素数间隔。根据素数定理，我们有

$$j_2 \;\sim\; \frac{\ln n\,\ln(2n)}{2\ln n - \ln(2n)} \;>\; \ln(2n). \tag{58}$$

在这种情况下，给定的 p_2 存在互补素数 p_1 的概率为 j_2^{-1}量级。

若允许这一概率显著更小，那么在基于密度的解释下，就会迫使区间 (2，n) 和 (n，$2n$) 中的素数计数出现宏观失衡，这与素数定理相矛盾。

将估计 $D_j(n) \sim j_2^{-1}$ 代入方程（56），可得 $G(n)$ 的期望值的下界：

$$G_{\min}(n) \;\sim\; \frac{\big(\mathrm{Li}(2n)-\mathrm{Li}(n)\big)^2}{n} \;\sim\; n\left(\frac{2\ln n-\ln(2n)}{\ln n\,\ln(2n)}\right)^2. \tag{59}$$

推论。结合上述估计，我们得到启发式不等式

$$G_{\min}(n) \;\lesssim\; \mathbb{E}[G(n)] \;\lesssim\; G_{\max}(n), \tag{60}$$

该不等式将狭窄范围内哥德巴赫表示的期望数量限制在仅由素数密度决定的区间内。特别是，条件 $G_{\min}(n) \gg 1$ 明显强于要求 $G(n) \geq 1$，这表明若哥德巴赫猜想不成立，则素数分布必定异常稀疏。

为了体会这一界限的严格性，考察表示的期望数量变得临界时的假设阈值颇有启发意义。令 $G_{\min}(n) \sim 1$，形式上对应的平均素数密度为 $D(n) \sim n^{-1/2}$。这种衰减与素数定理不相容，因为素数定理蕴含 $n/\ln n \gg \sqrt{n}$；同时，它也与第 $S_j(n$节中所述的间隙统计（形式体系）不相容，该体系预测，超过2的间隙不可能在超过中等大小的 $\sqrt{n}$ 之后出现 n。因此，在这一概率框架下，使哥德巴赫猜想不成立所需的机制似乎与素数已知的整体行为不相容。

最后，对可容许构形取平均后，$G(n)$ 的典型大小可由下式很好地近似：

$$\langle G(n)\rangle \;\sim\; \frac{n}{\ln(3n/2)^{3/2}}, \tag{61}$$

与中等取值下的数值计算非常吻合 n（图7）。

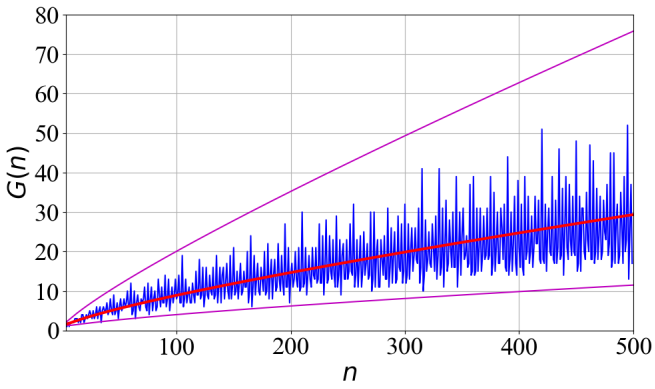

FIGURE 7. G（n）（53）（蓝色），$\langle G$（n）$\rangle$（61）（红色），G_{max}（n）（57）以及 G_{min}（n）（59）（洋红色），当 $n \leq 500$时。

3.2. **与哈代–利特尔伍德启发式的相容性**。经典的哈代-李特尔伍德猜想为哥德巴赫计数函数给出了更精细的渐近预测，断言

$$G(n) \;\sim\; 2C_2\,\frac{n}{(\ln n)^2}\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}, \tag{62}$$

其中 C_2 表示孪生素数常数，有限欧拉乘积则计入由模小素数的剩余类所导致的局部同余障碍。

本框架既不假设这一猜想，也不先验地引入算术修正因子。相反，它直接从全局素数密度和间隙统计推导出 G（n）的上界和下界。因此，在所采用的统计形式体系内，方程（57）和（59）中得到的界限仅属于模型内部，并不依赖猜想。值得注意的是，就数量级而言，它们与哈代–利特尔伍德预测完全相容。

这种相容性可以表达得更为明确。根据经验，对于 n 处于范围 $10^1 \leq n \leq 10^4$内的情形，所有整除 n 的素数之积满足

$$1 \;<\; \prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2} \;\lesssim\; 1.4\,\ln n, \tag{63}$$

其中，$\ln n$ 的有效系数随着 n 的增大而减小。特别是，该乘积至多按对数增长，并且始终一致地有一个远离零的下界。

此外，在当前框架中，孪生素数常数 C_2 可以一致地替换为依赖尺度的量 $C_2(n)$。将方程(43)代入哈代–李特尔伍德表达式(62)，并利用经验界(63)，可得不等式

$$\frac{n}{(\ln n)^2} \lesssim G(n) \left(\frac{1+\mu}{3+\mu}\right) \lesssim \frac{1.4\, n}{\ln n}. \tag{64}$$

在极限 $n \to \infty$ 下，两个界渐近地都化为 $n/(\ln n)^2 \lesssim G(n) \lesssim n/\ln n$，这恰好重现了此前在素数间隙形式体系中以完全独立的方式推导出的上、下界。

这一观察具有重要的概念意义。这里得到的下界远强于强哥德巴赫猜想所要求的仅有条件 $G(n) \geq 1$。哥德巴赫表示的存在并非依赖特定的算术相关性，而是仅由素数密度这一结构性因素所导致。

3.3. 结构性与概率性洞见。 从组合学视角来看，考察截至给定尺度、以整数为中心的素数对的累积数量是很自然的。我们定义

$$G_*(n) = \sum_{j=2}^{n} G(j), \tag{65}$$

它统计偶整数 $2j \leq 2n$ 表示为两个素数之和的所有表示总数，允许重复计数。

不考虑哥德巴赫型约束时，满足 $p_1, p_2 \in [2, n]$和 $p_1 \leq p_2$ 的无序素数对 (p_1, p_2) 的总数为

$$C_P(n) = K(n) \left\lfloor \frac{K(n)+1}{2} \right\rfloor, \tag{66}$$

其中，对于 $n \to \infty$，$C_P(n) \to K(n)^2/2$。

事实上，$C_P(n)$ 未计入满足 $p_1 \leq n < p_2$的素数对，而 $C_P(2n-2)$ 还包括满足 $p_1 > n$ 的素数对，这些素数对无法用于表示整数 $\leq 2n$。因此，

$$C_P(n) \leq G_*(n) \leq C_P(2n-2). \tag{67}$$

然而，不同的素数对可能对应同一个中心整数。也就是说，不同的素数对 (p_1, p_2) 可能对同一个 j 满足 $p_1 + p_2 = 2j$。

我们用 $G_D(n)$ 表示此类**重复素数对**的数量。因此，我们定义

$$G_G(n) = G_*(n) - G_D(n), \tag{68}$$

它统计满足以下条件的整数 $j \leq n$ 的数量：这些整数本身是素数，或位于至少一对素数对的中心。

采用这种累积视角，并非为了改进渐近估计，而是为了评估纯组合障碍是否有可能阻止可容许中心被全部覆盖。

强哥德巴赫猜想等价于命题 $G_G(n) = n-1 \; \forall \, n \geq 2$，即每个整数$2 \leq j \leq n$ 都至少有一种哥德巴赫表示。

显然，恒有 $G_G(n) < n$，且 $G_D(n) \geq C_P(n) - n$，因为至少有 $C_P(n) - n$ 对必须映射到已覆盖的中心。这表明，即使不存在重复素数对（$G_D(n) = 0$），对于 $n \to \infty$，仍有$G_G(n) < K(2n)^2/2$。

因此，哥德巴赫猜想成立的一个必要但不充分条件是

$$G_G(n) = n - 1 \Rightarrow K(n) > \sqrt{2n}, \tag{69}$$

这确保了不同素数对的数量足够多，理论上能够覆盖所有中心。该条件在渐近意义下成立，因为 $K(n) \sim n/\ln n \gg \sqrt{n}$。

尽管这完全是组合性的，远远不足以构成充分证明，但这一论证强化了本节反复出现的主题：任何反例若要推翻哥德巴赫猜想，都必须要求素数密度在某个尺度上出现崩溃，而这与解析和概率约束均不相容。

4. Oscillatory analysis of Zeta stability and zero localization

黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 的经典定义是：对于满足 $\Re(s) > 1$ 的复数 s，它由绝对收敛的狄利克雷级数给出

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{70}$$

它可以解析延拓至复平面，在 $s = 1$ 处有唯一的简单极点，并且可以通过欧拉乘积公式等价地表示

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{71}$$

其中乘积遍及所有素数。这个恒等式揭示了 $\zeta(s)$ 与素数分布之间的基本联系。

在第 1 节提出的基于密度的观点下，可以将整除条件 $i \mid n$ 理解为其在整数中的平均频率，该频率渐近等于 i^{-1}。相应地，其补事件的平均密度为 $1 - i^{-1}$。

如埃拉托斯特尼筛法那样，仅关注素因子可以避免系统性的重复计数，并得出对素数密度 [23] 的一致近似。

我们考虑经典梅滕斯乘积的一个截断版本，其渐近行为由梅滕斯第三定理支配。

$$\Pi(n) = \prod_{p \le \lfloor n/2 \rfloor} \left(1 - p^{-1}\right), \tag{72}$$

由此得到

$$K(n) \sim \sum_{j=2}^{n} \Pi(j) \sim \mathrm{Li}(n), \tag{73}$$

这与素数定理一致。

我们定义截断ζ函数

$$\zeta(s, n) = \prod_{p \le \lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{74}$$

从启发式角度看，对于 $s = 1$，我们有

$$\zeta(1, n) \sim \frac{n}{\mathrm{Li}(n)} \sim \ln n, \tag{75}$$

这与预期的平均素数间隔相吻合。

$\zeta(s)$在 $s = 1$ 处的发散，反映了素数间隙在极限 $n \to \infty$下的无界增长；这一现象与素数定理及关于较大素数间隙的已知结果相符。对于 $\Re(s) > 1$，我们定义

$$M(s) = 1 - \zeta(s)^{-1}, \tag{76}$$

可以将其理解为，从平均密度的角度来看，可被至少一个素数 e 幂 p^s.

$\zeta(s)$在 $s = 1$ 处的极点反映了这样一个事实：对可被素数整除的整数进行累积排除无法收敛，这与不存在不含素因子的整数这一结论相对应，并符合算术基本定理。

随着 $\Re(s)$ 增大，更高次素数幂的贡献变得日益稀疏。例如，$\zeta(2) = \pi^2/6$意味着，可被某个 p^2 整除的整数的密度为 $1 - 6/\pi^2$；对于更大的 s（表 7），也有类似的规律。

s	2	3	4	5	6	7
$\zeta(s)$	$\pi^2/6$	1.202	$\pi^4/90$	1.037	$\pi^6/945$	1.008
$M(s)$	39。21%	16.81%	7.61%	3.57%	1.70%	0.79%

Table 7. $\zeta(s)$ 以及由此得到的 $M(s)$ (76)，对于 $\Re(s) \in (2, 7)$。

对于 $\Re(s) \gg 1$ 和 $\Im(s) = 0$，可以写出一阶近似

$$M(s) \sim \sum_{p=2}^{\lfloor n^{1/|s|} \rfloor} p^{-s} \tag{77}$$

从而

$$\zeta(s) \sim \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{p=2}^{\lfloor n^{1/|s|} \rfloor} p^{-s}\right)^{-1}, \tag{78}$$

反映了主导 筛法项在素数贡献快速衰减情形下的主导地位 .

4.1. 黎曼ζ函数的表示。对于 $\Re(s) > 1$，黎曼ζ函数可以用基本算术函数表示为若干经典形式。特别是，它与冯·曼戈尔特函数 $\Lambda(n)$有关，该函数定义为

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{79}$$

对于 $\Re(s) > 1$，我们有

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n}, \tag{80}$$

whi明确说明素数幂对 $\zeta(s)$ 对数结构的贡献 .

利用方程（5），可以将这一展开形式地改写为

$$\ln \zeta(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Li}(n^{1/k}) - \mathrm{Li}(n^{1/k} - 1)}{k\, n^s}, \tag{81}$$

从而用局部素数密度表示 $\ln \zeta(s)$。

对于 $\Re(s) > 0$， $\zeta(s)$ 与狄利克雷η函数相关

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\, \zeta(s), \tag{82}$$

w它为 $\zeta(s)$ 在半平面 $\Re(s) > 0$ 上提供了解析延拓，但不包括 $s = 1$ 处的极点。ζ函数满足经典函数方程

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\!\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1 - s)\, \zeta(1 - s), \tag{83}$$

其中 $\Gamma(s)$ 表示欧拉伽马函数。其魏尔斯特拉斯乘积表示为 y

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n}, \tag{84}$$

其中 $\gamma \sim 0.57722$ 表示欧拉-马歇罗尼常数,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + 1/n}\right). \tag{85}$$

由于 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，利用方程（84）， γ 可表示为

$$\gamma = \ln\left(\frac{4}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 e^{1/n}}{(2n+1)^2}\right) \tag{86}$$

确定一个类似于沃利斯乘积的 π 表达式:

$$\pi = 4 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+1+1/4n} \tag{87}$$

黎曼 z η 函数在经典意义上与伯努利数 $\{B_s\}$ 相关，其递归定义为 b y

$$B_s = -\frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s+1}{j} B_j, \tag{88}$$

并满足著名恒等式

$$\zeta(2s) = \frac{|B_{2s}|\,(2\pi)^{2s}}{2(2s)!}, \tag{89}$$

对于整数 $s \geq 1$ [1]。

在当前形式体系中，这一关系表明，可以从基于素数的乘积角度对伯努利数进行自然的重新诠释。形式上，可以写成

$$B_s = -\frac{s!}{2^{\,s-1}\,\pi^s}\cos\!\left(\frac{\pi s}{2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-I(n)\,n^{-s}}, \tag{90}$$

其中 $I(n)$ 表示第 1 节中引入的素数指示函数。

这一表达式应纯粹理解为一种形式重构，它通过结合欧拉乘积与经典恒等式（89）得到，并不旨在作为伯努利数新的独立定义。

对于 $\Re(s) \gg 1$，由于 $\zeta(s) \to 1$，并利用斯特林近似 $s! \sim \sqrt{2\pi s}(s/e)^s$，方程（90）给出经典的渐近行为

$$B_s \sim -\sqrt{8\pi s}\left(\frac{s}{2\pi e}\right)^{s}\cos\!\left(\frac{\pi s}{2}\right), \tag{91}$$

与伯努利数的标准结果一致（图 8）。

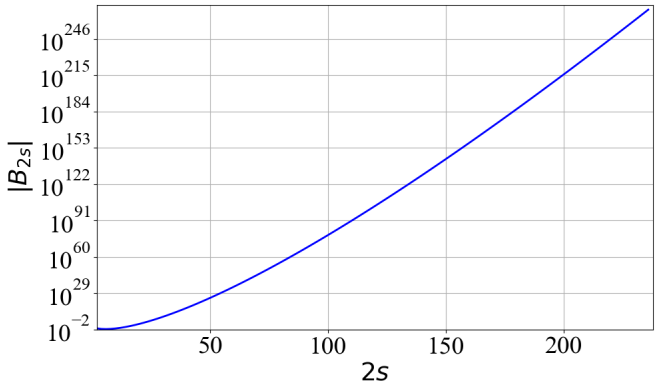

FIGURE 8. $|B_{2s}|$（91），对于 $\Re(s) \leq 236$。

$\zeta(s)$ 的解析结构进一步编码在其阿达马乘积表示中，

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s e^{s(\gamma/2-1)}}{2(s-1)\Gamma(1+s/2)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}, \tag{92}$$

其中乘积遍历 $\zeta(s)$ 的非平凡零点 ρ [24]。

通过代入前文推导出的 $\Gamma(s)$、γ 和 π 的显式乘积表示，可以将 $\zeta(s)$ 正式改写为因式分解形式

$$\zeta(s) = f(s)\prod_{n=1}^{\infty} g(s,n)\,h(n)^s\,e^{s/2n}\prod_{\rho}\frac{1-s/\rho}{e^{-s/\rho}}, \tag{93}$$

其中

$$f(s) = \frac{1}{4}\,\frac{s+2}{s-1}\left(\frac{4}{e}\right)^{s}, \qquad g(s,n) = 1+\frac{s}{2(n+1)}, \qquad h(n) = \frac{4n^3}{(4n^2-1)(n+1)}. \tag{94}$$

在这种表示中，$s=1$ 处的极点源于 $f(s)$的发散；平凡零点对应于 $f(s)$和 $g(s,\ n)$在负偶整数处的消失；归一化 $h(n) \to 1$适用于 $n \to \infty$；而非平凡零点则由关于 ρ的最终乘积编码。虽然在代数上等价于经典的阿达马因子分解，这种表述从启发式角度凸显了 $\zeta(s)$的主要解析特征。

4.2. 临界线的函数方程启发式。 著名的黎曼猜想（RH）断言，黎曼ζ函数的所有非平凡零点都位于临界线 $\Re(s) = 1/2$上。众所周知，这一猜想等价于对素数定理中的误差项给出尖锐界，并构成现代解析数论许多成果的基础。

在本文所构建的基于对称性的框架中， $\zeta(s)$ 的函数方程为启发式探讨其非平凡零点位置提供了一个自然的起点。

设 $\rho_1 = a_1 + ib_1$ 和 $\rho_2 = 1 - a_1 + ib_1$ 表示一对关于临界线对称的非平凡零点，其中 $0 < a_1 < 1$。(s)，即方程（83），自然地提示我们考虑以下比值

$$V(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}, \tag{95}$$

whi其在解析比值层面明确编码了函数对称性 $s \leftrightarrow 1 - s$。

利用伽马函数的函数方程，

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)\,\Gamma(1-s)}, \tag{96}$$

结合 $\sin(\pi s) = 2\sin(\pi s/2)\cos(\pi s/2)$，可得显式表达式

$$V(s) = \frac{(2\pi)^s\,\Gamma(s)}{2\cos(\pi s/2)}. \tag{97}$$

该表达式表明， $V(s)$完全由初等超越因子决定，而与 $\zeta(s)$的零点结构无关。仅为纯粹的探索与可视化目的，我们引入辅助量

$$V_1(s) = \big|\,|V(s)| - 1\,\big|^k, \qquad V_2(s) = \left|\frac{\arg V(s) + \pi}{2\pi}\right|^k, \tag{98}$$

其中 $k > 0$ 是一个不具有理论意义的可视化参数。

条件 $|V(s)| \approx 1$ 反映了由函数方程所诱导的 $\zeta(s)$与 $\zeta(1-s)$取值之间的近似平衡，而$\arg V(s) \approx -\pi$ 则对应于非平凡零点附近的相位行为。

对复平面的数值探索表明， $V_1(s)$在接近 $\Re(s) = 1/2$ 和$\Im(s) = 2\pi$ 处取得极小值（图9），而 $V_2(s)$在与 $\zeta(s)$已知非平凡零点相对应的虚部处为零（图10）。因此，组合条件 $V_1(s) \approx 0$ 与 $V_2(s) \approx 0$ 为可视化非平凡零点的位置提供了一个便利的数值指标。

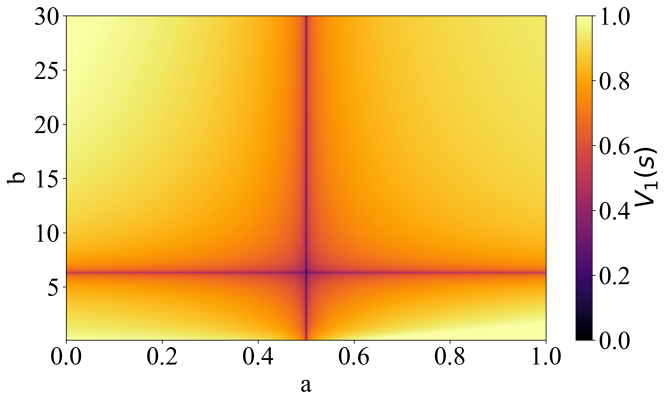

FIGURE 9. $V_1(s)$ (98) 关于 a和 b。

我们强调，这一判据纯属启发式且具有视觉性质。它既不能构成黎曼猜想的证明，也无法为零点导出新的解析约束。相反，它提供了一种几何视角，说明 $\zeta(s)$的函数对称性如何在临界线附近显现，并与哈代和Li [12]等经典解析判据相辅相成。

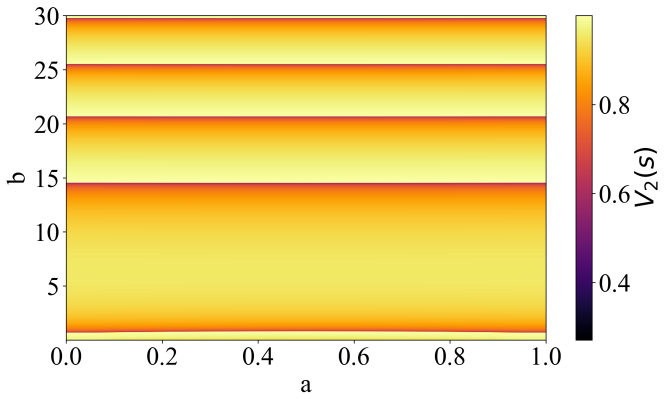

FIGURE 10. V_2（s）（98）作为 a 和 b的函数。

4.3. 非平凡零点的渐近标度。 黎曼ζ函数非平凡零点的渐近分布由经典的黎曼-冯·曼戈尔特公式支配。该公式指出，虚部位于(0，b)内的零点个数 $N(b)$满足

$$N(b) \sim \frac{b}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{2\pi e}\right), \tag{99}$$

作为 $b \to \infty$ [24]。

受.....启发 通过比较素数统计与零点统计，我们引入比率

$$q(n) = \frac{N(n)}{\pi(n)} \sim \frac{\ln(n/2\pi e)\,\ln n}{2\pi}, \tag{100}$$

该比率比较了高度 n 以下非平凡零点的增长率与 n以下素数的密度。该量为衡量这两种分布的相对渐近尺度提供了一个便捷指标（图11）。

对渐近关系（100）进行形式上的反演，得到

$$n(q) \sim \sqrt{2\pi e}\,\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\ln(2\pi)\right)^2 + 8\pi q}\right), \tag{101}$$

这种反演仅应在主阶渐近意义上理解。具体而言， $n(q=0) = 2\pi e \approx 17$ 提供了一个粗略尺度，与第一个非平凡零点的出现相吻合。 $n(q=1) \sim 74$ 则标示出素数与零点的预期计数变得相当的尺度。

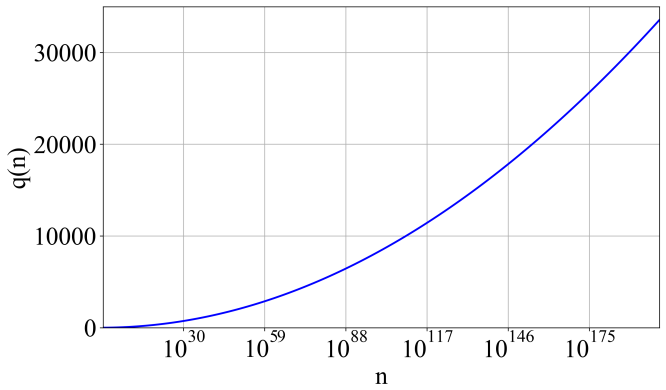

FIGURE 11. 比值 q（n）（100），展示了非平凡零点与素数相对增长的情况 s.

通过将零点计数函数与伯努利数的渐近增长联系起来，可以获得进一步的洞见。利用近似式

$$|B_{2n}| \sim \sqrt{16\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}, \qquad n \gg 1, \tag{102}$$

可得渐近表示式

$$N(2n) \sim \frac{n}{\pi}\ln\left[\left(\frac{|B_{2n}|}{\sqrt{16\pi n}}\right)^{1/2n}\right], \tag{103}$$

这与黎曼-冯·曼戈尔特公式一致。反过来,

$$|B_{2n}| \sim \sqrt{16\pi n}\, e^{2\pi N(2n)}, \tag{104}$$

p为伯努利数的增长提供了另一种渐近描述 .

对于 $b \lesssim 14$ 不存在非平凡零点这一事实，在数值上与以下情况一致： $|B_{2n}| < 1$ 当 n较小时，但这并不意味着二者之间存在任何因果或结构联系。利用经典恒等式（89），还可进一步得到，当$n \gg 1$时,

$$\zeta(2n) \sim \sqrt{4\pi n}\,\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\, e^{2\pi N(2n)}, \tag{105}$$

其联系 了 $\zeta(s)$ 在实轴上的行为与其非平凡零点的全局分布 s.

零点计数公式的更精细版本（包括低阶修正项）在文献中广为人知 [2, 5]:

$$N(b) = \frac{b}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} + S(b) + O(b^{-1}), \tag{106}$$

其中 $S(b) = \arg\zeta(1/2+ib)/\pi$。

特别是，对于 $k \gg 1$，它们允许通过 Lambert$W$-函数近似第 k 个非平凡零点的虚部 b_k：

$$b_k \sim \frac{2\pi\,(k-11/8)}{W_0[(k-11/8)/e]}. \tag{107}$$

将其代入截断的哈达玛乘积（93），我们得到 $\zeta(s)$ 的截断显式表示,

$$\zeta(s) \sim f(s)\prod_{k=1}^{n_{\max}} g(s,k)\,h(k)^s \frac{1-s/s_k}{e^{-s(1/2k+1/s_k)}}, \tag{108}$$

其中 $\Im(s) \gg 1$, $s_k = 1/2+ib_k$ 且 $n_{\max} = \lfloor (b/2\pi)\ln(b/2\pi e)\rfloor + 1$。这一表达式凸显了单个零点的贡献如何逐步构建出 $\zeta(s)$ 的整体结构。

4.4. 欧拉乘积的振荡结构。 我们通过研究复平面中每个欧拉因子的局部行为，分析黎曼ζ函数的欧拉乘积表示,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \tag{109}$$

令 $s = a + ib$，并定义

$$z_p = p^{-a}, \qquad \theta_p = b\ln p.$$

$(1-p^{-s})^{-1}$ 的模和相位可显式表示为:

$$r_p(s) = \left(1 - 2z_p\cos\theta_p + z_p^2\right)^{-1/2}, \qquad \varphi_p(s) = \arctan^2\left(\frac{z_p\sin\theta_p}{1-z_p\cos\theta_p}\right) \tag{110}$$

其中 $\varphi_p(s) \in (-\pi,\ \pi)$。

由于 $\cos\theta_p \in [-1,1]$，模 $r_p(s)$ 满足以下界

$$(r_p)_{min} = \frac{1}{1+z_p} \le r_p(s) \le \frac{1}{1-z_p} = (r_p)_{max}, \tag{111}$$

对相位 θ_p 进行均匀分布的形式平均，得到

$$\langle r_p\rangle \approx \frac{1}{1-z_p^2}, \tag{112}$$

当 $a > 0$ 时，该值严格大于 1。这一观察表明，欧拉乘积的收敛性质不能仅凭振幅考量推断，而是关键取决于振荡相位的集体相互作用。

图 12 展示了在第一个非平凡零点 $r_n(s)$ 处的取值行为 $s = 1/2 + 14.135\,i$。在 $r_n(s)$ 的局部极小值与素数分布（红点所示）之间观察到的对应关系

这表明，在对应于非平凡零点的虚部处，欧拉因子呈现出高度有序的干涉图样。这一现象与启发式模型相符；在这些模型中，局部振荡之间的相消对于 $\zeta(s)$ 的零点的出现起着核心作用。

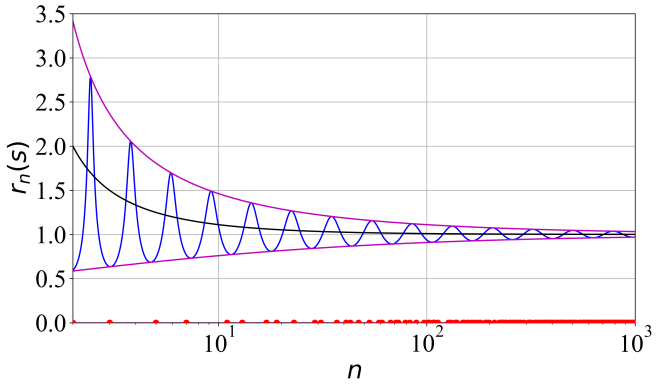

FIGURE 12. $r_n(0.5 + 14.135\ i)$ (110)（蓝色），$(r_p)_{min}$ 以及 $(r_p)_{max}$ (111)（洋红色），以及 $\langle r_p \rangle$ (112)（黑色）。红点表示素数的位置。

$r_p(s)$ 的振荡行为由相位 $\theta_p = b\ln\ p$ 控制，从而产生振幅为

$$\Delta r_p = r_{p,\max} - r_{p,\min} = \frac{2p^a}{p^{2a} - 1}. \tag{113}$$

特别是，在临界线 $a = 1/2$ 上，对于较大的素数 p，有 $\Delta r_p \sim 2/\sqrt{p}$，这表明振荡幅度随 $\sqrt{p}$ 增大而缓慢衰减（图 13）。

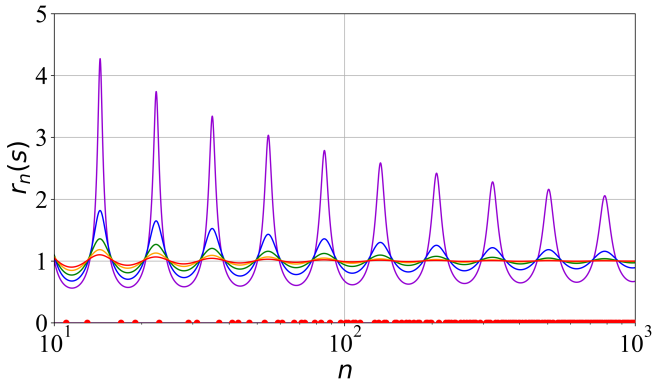

FIGURE 13. $r_n(s)$ (110) 对于 $b = 14.135$: $a = 0.1$ （紫罗兰色），$a = 0.3$ （蓝色），$a = 0.5$ （绿色），$a = 0.7$ （橙色），$a = 0.9$（红色）。红点表示素数的位置。

素数 p $\leq n$，$r_p(s)$ 振荡次数截至标度 n 可启发式地估计为 a s

$$X(b, n) \sim \frac{b}{2\pi} \ln\left(\frac{n}{2}\right), \tag{114}$$

这反映了黎曼-冯·曼戈尔特公式中出现的对数标度关系，并且与蒙哥马利分析对非平凡零点成对相关性的研究一致 [14]。将这一标度关系与黎曼-冯·曼戈尔特公式进行比较，可得

$$N(b) \sim X(b, n) - \frac{b}{2\pi} \ln\left(\frac{\pi e n}{b}\right), \tag{115}$$

忽略低阶项时，对于 $n = 2\pi e$，有 $N(b) = 0$。

因此，自然会问，$r_p(s)$的多少个极值能够有效地贡献于截断欧拉乘积。如果 $X(b, n) < K(n)$，素数的数量超过振荡次数；而如果 $X(b, n) > K(n)$，素数密度便限制了可独立贡献于 $\zeta(s)$的极值数量。

令 $X(b,\ n)\ = K(n)$ 相等，可得虚部的特征交叉尺度，

$$b_{\lim}(n) = \pm\frac{2\pi K(n)}{\ln(n/2)} \sim \pm\frac{2\pi n}{\ln(n/2)\ln n}. \tag{116}$$

函数 $b_{\lim}(n)$ 在 $n \approx 9-13$处取得最小值 $\sim 2\pi e$，其尺度在数值上与第一个非平凡零点的高度相当，这与方程（100）一致。

特别是，对于第一个非平凡零点，对所有 n，都有 $b < b_{\lim}(n)$，这表明在欧拉乘积的早期阶段，振荡极值并未被先验地排除在贡献之外。

我们考察前 $K(k)$ 个素数对应的欧拉因子的平均模，

$$M_k(s) = K(k)^{-1}\sum_{p\le k} r_p(s), \tag{117}$$

其中，$K(k)$ 表示不超过 k 的素数个数。对于 $k = 50$，对前 29 个非平凡零点（$b < 100$）进行数值计算，得到

$$\min_{p\le k} r_p(b) \sim 0.58-0.71, \qquad M_k(b) \sim 0.92-0.97, \qquad \max_{p\le k} r_p(b) \sim 1.17-1.47. \tag{118}$$

图 14 展示了 $M_k(b)$ 的平均值，以及相应的最小值和最大值随a的变化情况，其中 $k = 50$ 和 $b < 100$固定。在临界线 $a = 1/2$上，理论界 $(1+2^{-1/2})^{-1} \approx 0.586$ 和 $(1-2^{-1/2})^{-1} \approx 3.413$ 与观测到的数值范围相符。这些结果表明，即使在非平凡零点附近，局部欧拉因子仍然有界且分布适中，这进一步支持了一种广为接受的观点：$\zeta(s)$ 的零点源自欧拉因子之间精细的整体抵消 [21]。

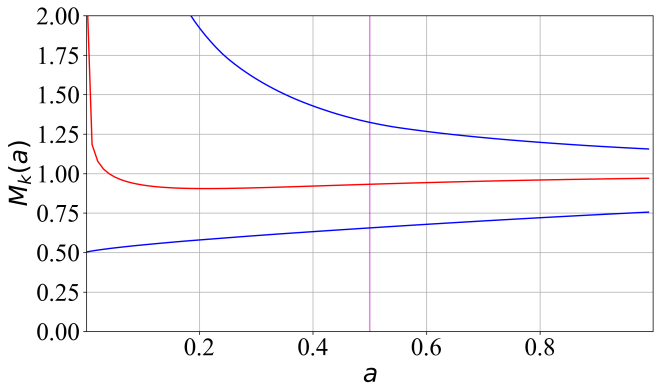

FIGURE 14. $M_k(b)$ 的平均值（红色）、$\min_{p\le k} r_p(b)$ 和 $\max_{p\le k} r_p(b)$（蓝色），对应 $k = 50$ 和 $b < 100$。作为参照，临界线（$a = 1/2$）以洋红色标出。

4.5. 欧拉乘积的波动性与稳定性。 局部欧拉因子 $r_p(s)$ 对素数变量 p 的依赖关系由下式决定

$$\frac{\partial r_p}{\partial p} = -\frac{z_p}{p}\, r_p(s)^{-3}\big[a(\cos\theta_p - z_p) + b\sin\theta_p\big], \tag{119}$$

其中 $z_p = p^{-a}$ 且 $\theta_p = b\ln p$。这里将 p 视为连续变量，这与欧拉乘积的启发式分析中的惯例一致。

对于任意 $a > 0$，当 $p \to \infty$ 时，有 $r_p(s) \to 1$，同时振荡分量的振幅和频率均会减小。因此，欧拉乘积的初始因子主导着$|\zeta(s)|$的整体行为，这与先前对截断欧拉乘积 [7] 的分析一致。

利用展开式

$$(1-u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + O(u^3), \tag{120}$$

对于 $p \gg 1$ 和 $a > 0$，可得，

$$r_p(s) \sim 1 + z_p\cos\theta_p + z_p^2\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2\theta_p)\right). \tag{121}$$

这种分解自然地将一个非振荡贡献 $1+z_p^2/4$ 与两个谐波分量区分开来：

$$H_{1,p} = z_p \cos\theta_p, \qquad H_{2,p} = \frac{3}{4} z_p^2 \cos(2\theta_p). \tag{122}$$

因此，为了评估收敛性质，自然要研究这些振荡项对 $\sum_{p\le n} \log r_p(s)$ 的累积影响。

对 θ_p 关于 p 进行形式求导，得到局部角频率 $\omega(p) = |b|/p$，这意味着振荡周期为 $\Delta p \sim 2\pi p/|b|$。根据素数定理，在这样的周期内，素数的数量渐近为

$$N(p) \sim 2\pi p/(|b| \ln p). \tag{123}$$

在一个振荡周期内，$H_{1,p}$ 和 $H_{2,p}$ 对 $|\zeta(s)|$ 的主要贡献是 $\sum_{j=1}^{N(p)} z_j \cos\theta_j$。假设相位 θ_p 模 2π均匀分布，则 $\cos\theta_p$ 的方差为 $1/2$。因此，累积谐波贡献的标准差为

$$\sigma_p(s) \sim \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} z_j^2} \tag{124}$$

假设相位准独立 性在一个周期内成立，并对区间内的 $z_j \sim p^{-a}$ 进行近似，我们得到 n

$$\sigma_p(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{|b| \ln p}}\, p^{1/2-a}. \tag{125}$$

一般来说， $r_p(s)$的每个振荡周期都可以从启发式角度诱发数量级为 $e^{\pm\sigma}$的乘法波动。平均而言，每个素数都会以因子 $\exp(\pm p^{-a}/\sqrt{2})$ 对欧拉乘积作出贡献。

对于 $a > 1/2$ $\sigma_p(s)$ $\to 0$如 $p \to \infty$ ，从而欧拉乘积的波动变得可以忽略，且 $|\zeta(s)|$ 稳定。对于 $a < 1$ $/2$, $\sigma_p(s) \to \infty$ 如 $p \to \infty$, 表明 g g全局不稳定性 y 的 p乘积。

当 $\ln \sigma_p(s) < 0$ for $p \to \infty$ 时，欧拉乘积呈现稳定的波动。特别是，当 $\ln \sigma_p(s)$ 取小于 0 的最大可能值时， $\zeta(s)$ 收敛到 0 的速度最快，这表明 a 应满足以下条件：

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln p} \ln\left(\frac{|b|}{\pi} \ln p\right) \tag{126}$$

对于 $p \to \infty$，这变为 $a = 1/2$。

因此，临界线对应于在稳定性条件下， $\sigma_p(s)$可能具有的最慢衰减，

$$\sigma_p(1/2+b) \sim \sqrt{\frac{\pi}{|b| \ln p}}, \tag{127}$$

反映了振荡幅度与素数密度之间的精确平衡（图15）。

尽管这一论证只是启发式的，并不构成黎曼猜想的证明，但它为临界线为何在欧拉乘积的涨落平衡中发挥特殊作用提供了结构性启发，这与经典见解 [20] 以及关于ζ函数涨落的现代分析 [11]相一致。

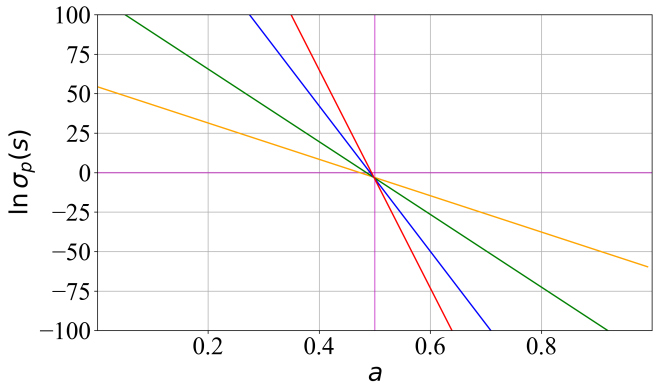

FIGURE 15. $\ln \sigma_p(s)$（125）对应 $b = 14.135$： $p = 10^{50}$ （橙色）、 $p = 10^{100}$ （绿色）、 $p = 10^{200}$ （蓝色）、 $p = 10^{300}$ （红色）。作为参考， $a = 1/2$ 和 $\ln \sigma_p(s) = 0$ 以洋红色显示。

4.6. **截断欧拉乘积的局部极小值。** 根据定义（110），

$$r_p(s) \le 1 \;\Leftrightarrow\; 2\cos\theta_p \le \frac{1}{2}p^{-a}, \tag{128}$$

这对属于以下区间并集的 b 成立

$$b \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi k+\alpha}{\ln p}, \frac{2\pi(k+1)-\alpha}{\ln p}\right], \tag{129}$$

其中 $\alpha = \arccos(p^{-a}/2)$。

这些区间对应于这样的相位：局部欧拉因子使截断乘积收缩，而非放大。这些区间的间距为 $\Delta b = 2\pi/\ln p$，宽度为 $2(\pi-\alpha)/\ln p$，因此可取值所占的比例为 $f_p(a) = 1-\alpha/\pi$。特别是，当 $a = 1/2$ 时，可得 $f_p(a) \to 1/2$，当 $p \to \infty$时亦然，这反映了放大相位与阻尼相位之间的渐近平衡。

当 b 的取值满足条件 $r_p(s) < 1$，且这种情况对相当比例的素数成立时，截断欧拉乘积的模更可能出现局部抑制。因此引入平均截断模 $M_k(b)$，其定义见公式（117）。数值上观察到，非平凡零点的虚部系统地接近 $M_k(b$ 的局部极小值，这与此前关于截断欧拉乘积的研究 [7]一致。

将 b 视为 一个连续参数，并保持截断指标 k 固定，求导得到 s

$$\frac{\partial M_k}{\partial b} = K(k)^{-1}\sum_{p\le k}\frac{z_p\,\theta_p}{b}\frac{\sin\theta_p}{D_p^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 M_k}{\partial b^2} = K(k)^{-1}\sum_{p\le k}\frac{z_p\,\theta_p^2}{b^2}\left(\frac{\cos\theta_p}{D_p^{3/2}} - \frac{3z_p\sin^2\theta_p}{D_p^{5/2}}\right), \tag{130}$$

其中 $D_p = 1 - 2z_p\cos\theta_p + z_p^2$。

由这些表达式可得出以下用于极小值定位的启发式数值判据：

$$K(|b|)^{-1}\sum_{p\le|b|} r_p(s) < 1 + |b|^{-1}, \tag{131a}$$

$$K(|b|)^{-1}\left|\sum_{p\le|b|}\sin\theta_p\right| < |b|^{-1}, \tag{131b}$$

$$K(|b|)^{-1}\sum_{p\le|b|}\cos\theta_p < |b|^{-1}, \tag{131c}$$

其中 $K(|b|)$ den ote 表示不超过 $|b|$的素数个数，而 $|b|^{-1}$ 表示数值容差 .

从经验上看，满足这些条件的 b 值，仅使用前 $K(|b|)$个素数，且无需显式计算 $\zeta(s$的相位，就能为非平凡零点的虚部提供可靠的数值近似（图16）。

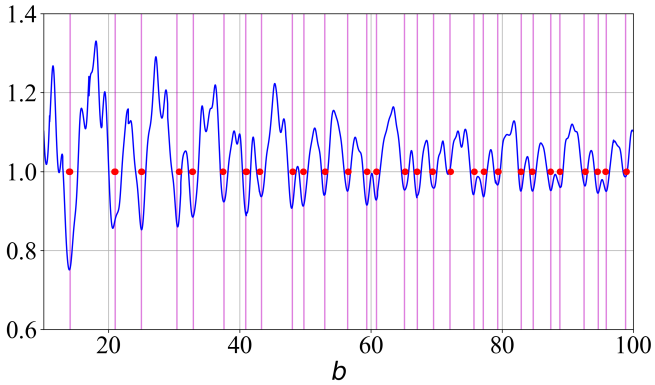

FIGURE 16. $M_k(b)$（117）（蓝色）以及 $\zeta(s)$的非平凡零点的虚部（洋红色），其中 $k = b$，$a = 1/2$且 $b < 100$。红点表示同时满足 3 个约束条件（131）的 b 值。

为量化局部阻尼的普遍程度，我们将 $F_k(s)$ 定义为局部欧拉因子模小于 1 的素数所占的比例：

$$F_k(s) = \frac{1}{K(k)}\sum_{p\le k}\mathbf{1}_{\{r_p(s)<1\}}, \tag{132}$$

数值实验表明，$F_k(s)$ 在 $M_k(b$ 的局部极小值附近以及当 $a < 1/2$ 时，系统性地更大。特别是，对于 $k = 100$，$F_k(s)$ $\sim 62.5 - 78.2\%$（对应于非平凡零点的 b 取值），而对于一般的 $F_k(s)$，则为$\sim 50.3 - 66.7\%$（图 17）。这些数值在 k 适度变化时保持稳定。

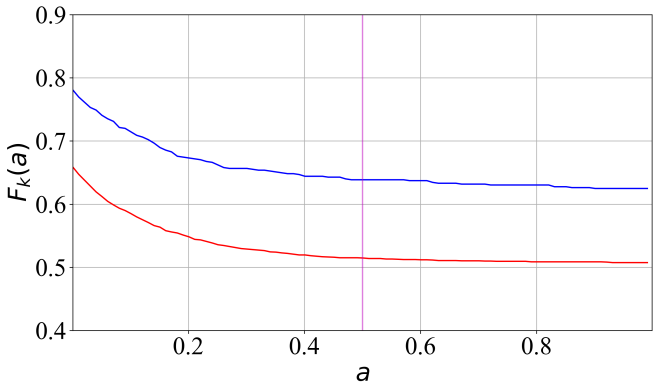

FIGURE 17. $\langle F_k(a) \rangle$ (132) 表示 $b < 100$ （红色），以及前 29 个非平凡零点（蓝色）。作为参照，临界线（$a = 1/2$）以洋红色显示。

总之，非平凡零点的虚部表现为同时最小化 $M_k(b)$，并提高满足 $r_p(s) < 1$ 的素数比例。正如 $p \to \infty$ 所示，在这一启发式框架内，欧拉乘积最快的稳定抑制在渐近意义下仅与 $a = 1/2$ 相容，这与黎曼猜想所预言的临界线现象一致。

4.7. 成对相关与欧拉乘积振荡。 上文提出的虚部判据，可以自然地从 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的成对相关角度加以解释。蒙哥马利成对相关猜想 [14]，得到广泛数值证据 [17]，的支持，表明这些零点的虚部呈现出很强的局部相关性和短程排斥，其背后由一种振荡结构所支配。

在当前框架中，欧拉乘积中出现的依赖于素数的相位 $\theta_p = b \ln p$ 会产生类似的振荡行为。尽管这些相位以素数而非零点为索引，但它们的集体干涉决定了截断欧拉乘积在虚方向上的精细结构。

当不同素数对应的 $r_p(s)$ 振荡呈现统计上相干的排列时，平均模 $M_k(b)$ 会出现局部极小值。这些 b 值对应于 $|\zeta(1/2 + ib)|$ 在统计意义上可能较小的区域。

从这个角度来看，$M_k(b)$ 的极小值并不直接标识单个零点，而是标示由零点排斥背后的相同干涉机制所决定的统计优选位置。

蒙哥马利的理论研究零点之间的相关性，而当前判据研究欧拉乘积中以素数为索引的振荡贡献之间的相关性。尽管这些对象各不相同，但两种描述都揭示了联系素数与零点的共同谐波结构的互补表现。

这种联系与半经典方法和随机矩阵方法相一致；在这些方法中，欧拉乘积被视为谱统计的生成函数 [3], ，并为截断欧拉乘积为何能有效地数值定位非平凡零点的虚部提供了自然的统计学解释。

Conclusions

与以往的方法不同，我们引入了基于密度的素数和素数间隙结构框架，并且：

- 明确统一了素性、互素性和素数对的性质；
- 揭示了 HL、Cramér 与素数定理预测之间的结构性张力，并对极端间隙的稀有性给出了定量估计；

- 推导出了哥德巴赫型加法表示的无条件界；
- 分析了截断欧拉乘积的振荡结构，为临界线及非平凡零点虚部提供了一种连贯的解释。

尽管如此，若干根本性问题仍未解决。具体而言，极端间隔分布的完全严格推导、这一归一化框架内加性表示的综合统计理论，以及足以用于研究黎曼猜想的欧拉乘积稳定性的精确解析表述，仍有待发展。解决这些问题或可为概率、组合与解析方法研究数论中的一些核心问题提供统一的结构基础。

References

1. Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976. 2. R. J. Backlund, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de riemann*, 巴黎科学院纪要 158 (1914), 1979–1982. 3. E. Bogomolny and J. P. Keating, *Gutzwiller's trace formula and spectral statistics*, 《物理评论快报》 77 (1996), 1472–1475. 4. H. Cramér, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, 《算术学报》 2 (1936), 23–46. 5. H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974. 6. K. Ford, B. Green, S. Konyagin, J. Maynard, and T. Tao, *Large gaps between consecutive primes*, 《数学年刊》183 (2016), 935–974. 7. S. M. Gonek, C. P. Hughes, and J. P. Keating, *A hybrid euler–hadamard product for the riemann zeta function*, 《杜克数学杂志》136 (2007), 507–549. 8. A. Granville, *Harald cramér and the distribution of prime numbers*, 《斯堪的纳维亚精算杂志》(1995), 12–28. 9. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of "partitio numerorum"; III: On the expression of a number as a sum of primes*, 《数学学报》44 (1923), 1–70. 10. G. H. Hardy 和 E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 第6版，牛津大学出版社，牛津，2008. 11. A. J. Harper, *A note on the maximum of the riemann zeta function*, 《伦敦数学学会杂志》89 (2014), 911–926. 12. Xian-Jin Li, *The positivity of a sequence of numbers and the riemann hypothesis*, 《数论杂志》65 (1997), 325–333. 13. H. Maier, *Primes in short intervals*, 《密歇根数学杂志》32 (1985), 221–225. 14. H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, 《纯数学专题讨论会论文集》24 (1973), 181–193. 15. H. L. Montgomery and K. Soundararajan, *Beyond pair correlation*, Paul Erdős and His Mathematics I (G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits, and V. T. Sós, eds.), Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 11, Springer, 2004, pp. 507–514. 16. H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative number theory i: Classical theory*, 剑桥大学出版社，剑桥，2006. 17. A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, 《数学计算》48 (1987), 273–308. 18. T. Oliveira e Silva, S. Herzog, and S. Pardi, *Empirical verification of the even goldbach conjecture and computation of prime gapsup to 4×10^{18}*, 《计算数学》83 (2014), 2033–2060. 19. R. A. Rankin, *The difference between consecutive prime numbers*, 《伦敦数学学会杂志》13 (1938), 242–247. 20. A. Selberg, *Contributions to the theory of the riemann zeta-function*, 《数学与自然科学档案》48 (1946), 89–155. 21. K. Soundararajan, *Moments of the riemann zeta function*, 《数学年刊》170 (2009), 981–993. 22. T. Tao, *Structure and randomness in the prime numbers*, 国际数学家大会（首尔），2014. 23. Gérald Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, 剑桥大学出版社，1995. 24. E. C. Titchmarsh, *The theory of the riemann zeta-function*, 牛津大学出版社，1986. 25. E. Westzynthius, *Über die verteilung der zahlen, die zu den n ersten primzahlen teilerfremd sind*, Commentationes Physico- Mathematicae 5 (1931), 1–37.*Email address*: gregoriovettori@outlook.com