arXiv:2601.16201v1 [math.RA] 22 Jan 2026

非本原戴德金素环上的广义巴斯型模

Askar Tuganbaev

高等数学系，莫斯科动力学院国立研究型大学，克拉斯诺卡扎尔缅纳街14号，莫斯科，111250，俄罗斯；tuganbaev@gmail.com

摘要。 如果存在从 $M \to M/N$ 到 M 的某个子模N 的单同态 $M \to M/N$ ，从而推出 N 是 M的直和项，则称右 A-模 M 为广义巴斯型模。我们描述了非本原戴德金素环上的奇异广义巴斯型模。本研究得到俄罗斯科学基金会项目的资助。

关键词： 巴斯型模，广义巴斯型模

2020年数学主题分类：16D10、16D40、16D60、20K10、20K20、20K21

1 引言

我们只考虑含幺非零结合环及幺模。诸如「诺特环 A」这样的短语，表示模 A_A 和${}_AA$ 都是诺特模。「A-模」一词通常表示「右 A-模」。本文中未定义的概念均为标准概念；例如，参见 [8]、[11]、[13]。

若存在某个子模 N，使得对于 M 有单态射 $M \to M/N$，并因此迫使 N 成为 M 的直和项，则称模 M 为**广义巴西安**模。

若模 M 不同构于其任一真同态像的子模，则称模 M 为**巴西安**模；等价地，对于满足存在单态射 $M \to M/N$ 的任意子模 N（其中 N 是 M 的子模），有 $N = 0$ 。显然，每个 Bassian 模都是广义巴西安模。

注 1.1。 如果 A是一个环，且 M 是由无限多个同构的单 A-模组成的直和，那么显然， M 是一个广义巴西安模，但不是巴西安模。特别地，任何初等非诺特主阿贝尔群都是广义巴西安群，但不是巴西安群。 [22] 中的定理 1 描述了非本原戴德金素环上的所有奇异[1] Bassian 模（此类环的例子包括所有代数整数环及其上的矩阵环；特别地，环 是一个非本原戴德金素环）。

[1]众所周知，挠阿贝尔群与奇异 $\mathbb{Z}$-模相同。

整数环以及其上的矩阵环；特别地，环 $\mathbb{Z}$ 是一个非本原戴德金素环）。下文定理 1.2 的表述所需的一些定义在引言中定理 1.2 之后给出。其他一些必要的定义见第 2 节。

所有 Bassian 阿贝尔群均已在 [2, 主定理]中得到描述。广义巴西安阿贝尔群的描述可由 [3, 定理 2.10、推论 3.14], [6, 推论 3.6],以及 [7,推论 4.4]得出。

本文的主要结果如下，即定理 1.2。

定理 1.2。若 A 是非本原戴德金素环，且 M 是带有主分量 M_i、$i \in I$ 的奇异右 A-模，则以下条件等价。

1) M 是广义巴西安模。
2) M 是一个 Bassian 模与一个半单模的直和。
3) M 的每个主分量 M_i 都是一个诺特模与一个半单模的直和。

若模 M_A 满足以下等价条件，则称其为**投射**的：**1**）对于任意模 X_A、任意满同态 h: $X \to X$ 以及任意同态 f: $M \to X$，存在同态 f: $M \to X$，使得 $f = hf$；**2**）模 M 同构于由模 A_A的若干份组成的某个直和的直和项。若一个模的所有子模都是投射的，则称其为**遗传的**。若模 M 的所有子模都是有限生成的（等价地，M 是一个满足子模升链极大条件的模），则称其为**诺特**模。

若对于任意非零理想 B，理想 B^n（相应地，对于任意非零理想 C，理想 BC）均非零，则称一个环为半素环（相应地，为素环）。设 A 是一个具有双边经典左右分式环 Q 的环，且该分式环同构于除环上的矩阵环。若存在双模 ${}_AQ_A$ 的子双模 B^{-1} 使得 $BB^{-1} = B^{-1}B = A$，则称 A 的理想 B 为可逆理想。环 A 的所有真可逆理想组成的集合中的极大元称为极大可逆理想。环 A 的所有极大可逆理想的集合记为 $\mathcal{P}(A)$。若 M 是一个 A-模且 $P \in \mathcal{P}(A)$，则子模 $\{m \in M \mid mP^n = 0,\ n = 1, 2, \ldots\}$ 称为模 M 的 P-主分量；记为 $M(P)$。若对于某个 $P \in \mathcal{P}(A)$ 有 $M = M(P)$，则称模 M 为主的或 P-主的。

若环 A 是一个具有经典分式环 Q 的诺特素环[2]，且该环 A 的每个非零理想都在 Q 中可逆，则称环 A 为**戴德金素**环。若 A 不是右本原环或左本原环，即 A 没有忠实的单右模或单左模，则称环 A 为**非本原**环。对于一个模 M，若 M 的子模 X 满足：对于 M 的每个非零子模 Y，都有 $X \cap Y \neq 0$，则称 X 为本质子模。在此情况下，称 M 是 X 的本质扩张。若 M 的子模 X 在 M 中满足 X，即 M 中没有真本质扩张，则称其为**闭**子模。若一个模 M 的任意两个非零子模的交都非零，即 M 的任意非零子模都是本质子模，则称该模为一致模。若模 M 的所有子模构成的格是一条链，即 M 的任意两个子模在包含关系下均可比较（等价地，任意两个循环子模在包含关系下均可比较），则称该模为**单列**模。每个单列模都是一致模，每个一致模都是不可分解模。

若环 A 的任意本质右（分别地，**右**）理想都包含环 A 的一个非零理想，则称环 A 为**右**（分别地，**左**）**有界**。

注 1.3. 所有戴德金素环都是遗传诺特素（HNP）环。在 [14], 中证明了，任意 HNP 环 A 要么是（右且左）本原环，要么是（右且左）有界环；并且若 A 是本原有界环，则 A 是单Artin环。因此，非本原 HNP 环与非阿廷有界 HNP 环一致。

对于右（分别地，左） A-模 M 的子集 X，我们用 $r(X)$（分别地，$\ell(X)$）表示 A 中 X 的右（分别地，左）湮灭子，即 $r(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$（分别地，$\ell(X) = \{a \in A \mid aN = 0\}$）。对于右（分别地，左）$A$-模 M，我们用 Sing M 表示 M 中所有满足 $r(m)$（分别地，$\ell(m)$) 是 A 的本质右（分别地，左）理想的元素 m 所成的集合。众所周知，Sing M 是 M 的全不变子模；称其为 M 的奇异子模。若 Sing $M = M$（分别地，Sing $M = 0$），则称模 M 是奇异（分别地，非奇异）的。对于模 M，我们用 $Z_2(M)$ 表示 M 的戈尔迪根基；也就是说， $Z_2(M)$ 是 M 的子模，满足 $Z_2(M)$ 包含 Sing M，且 $Z_2(M)$/Sing M $=$Sing $(M/$ Sing M。若 $M = Z_2(M)$，则称模 M 为戈尔迪根基模。

如果模 M 是 $\oplus_{j\in J} X_j$ 的本质扩张，其中所有 X_j 都是非零一致模，且 τ 是集合 J 的基数，那么 τ 就称为 M 的一致维数或 Goldie 维数；记作 u.dim M 或 Gdim M。众所周知，基数 u.dim M 是唯一确定的。若模 M 不具有

[2]众所周知，任意诺特素环都有一个双边经典右分式环和左分式环 Q，它同构于除环上的矩阵环。

由非零模的无限直和构成的子模，则称其为有限维；在这种情况下，它的一致维数是有限的。满足右湮灭理想上的升链条件的右有限维环 A 称为右 Goldie环。

注 1.4。设 A 为一个非本原 HNP 环（例如，我们可以取 A为一个非本原戴德金素环），M 为一个奇异 A-模，并令 $\{M_i\}_{i\in I}$ 为 M的所有主分量的集合。奇异模 M 及其主分量的许多性质都是众所周知的；例如，参见 [16], [17], [18], [19], [20], [21]。这些性质类似于挠阿贝尔群的主分量的性质。例如，对于模 M的任意子模 X，有 $M = \oplus_{i\in I}M_i$、$X = \oplus_{i\in I}X_i$，其中 $X_i = X \cap M_i$ 是模 X的主分量，$M/X = \oplus_{i\in I}(M_i/X_i)$ 等。设 $i,\ j \in I$、$i \neq j$、X_i为 M_i的一个子因子，并设 Y_j 为 M_j的一个子因子。则 X_i 与 Y_j 之间不存在非零同态（特别地，所有主分量 M_i 在 M中都是全不变的）。

$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别表示整数集和有理数集。

2 一般结果

对于环 A，如果 a 是 A 的<style id='4'>正则元，则称之为<style id='4'>正则元。对于模 M_A，我们用 $T(M)$表示 M中满足 $r(m)$包含 A的正则元的所有元素 m所组成的集合；该集合称为 M的<style id='19'>挠部分。如果 $T(M) = M$（分别为 $T(M) = 0$），则称模 M 为<style id='23'>挠模（分别为<style id='25'>无挠模）。

注 2。1 [7, 例 2。1], [22, 注 4]。所有诺特模都是 Bassian 的。

命题 2。2 [7, 引理 2。1], [22, 注 5]。如果 M 是广义巴西安模（分别为 Bassian 模），且 $M = X \oplus Y$，那么 X 是广义巴西安模（分别为 Bassian 模）。

证明。设 M 是一个广义巴西安模，N 是 X的一个子模，且 f: $X \to X/N$ 是一个单态射。则单态射 f 可延拓为单态射 $f \oplus 1_Y$: $X \oplus Y \to (X/N) \oplus Y = M/N$。由于 M 是广义巴西安模，存在 M 的一个子模 N'，使得$M = N \oplus N'$，由模性可得 $X = (N \oplus N') \cap X = N \oplus (N' \cap X)$。因此，$M$ 是广义巴西安模。

设 M 是一个Bassian模。假设模 X 不是Bassian模。存在一个单态射 f: $X \to X/X_1$，使得 X_1 是 X的非零子模。于是存在一个单态射 $g = f \oplus 1_Y$: $M \to M/X_1 = (X/X_1) \oplus B$，其中 $X_1 \neq 0$。这就产生了矛盾。□

命题 2.3 [7, 命题 3.1、4.1、4.4 和推论 4.2]。设 M 是一个广义 Bassian 模。

1. 如果 Soc（M）的每个齐次分量都是有限生成的，那么模 M 是 Bassian 的。特别地，如果 M 的底为零，那么模 M 是 Bassian 的。
2. 如果不存在从 M 到 M的任何真直和项的单态射，那么 M 是一个 Bassian 模。特别地，如果 M 不可分解，或者 M 的任意单射自同态都是 M的自同构，那么模 M 是 Bassian 的。

命题 2.4。设 M 是一个模，且 X 是 M的一个子模。

1. 存在 M 的两个闭子模 M_1 和 M_2，使得 M_1 是 X 的本质扩张，且 M 是 $M_1 \oplus M_2$ 的本质扩张。在这种情况下，M_1 和 M_2 分别称为 M 中 X 的闭包和加性补。2. 若 M_3 是 M 的任意闭本质子模，且 $X \subseteq M_3$，则 M_3/X 是 M/X 的本质子模。3. 若 M_4 是 M 的闭子模，且 $X \subseteq M_4$，则 M_4/M_1 是 M/X 的闭子模。4. 若 M_1 是 M 的闭子模，且 M_5 是 M 的本质子模，则 $M_1 \cap M_5$ 是 M_5 的闭子模。5. 若模同态的核是本质的，则其像是奇异的。因此，若商模 M/X 是非奇异的，则子模 X 在 M 中是闭的。6. 若 M 是非奇异的，则模 M/X 是奇异的，当且仅当 M 是 M_1 的本质扩张。7. 设 A 是一个含有极小非零右理想 S 的环。则 $S^2 = 0$ 或者对某个幂等元 e 有 $S = eA$。特别地，若 A 是半素环，则对某个幂等元 e 有 $S = eA$。

证明。命题 2.4 的所有断言都是众所周知的。例如，断言 **1** 可由佐恩引理证明。断言 **2**、**3**、**45** 和 **6** 分别见 [9,命题 **1.**4], [9, 第 **20** 页，例 16] 和 [9, 第 **20** 页，例 17], [9, 命题 **1.**20],[9, 命题 **1.**21], 。断言 **1** 可直接验证。□

命题 2.5。设 A 是一个右有限维半素环。假设 A 要么是右非奇异的，要么是右 Goldie 环（对于右有限维半素环，这两个假设等价；例如参见[9, 推论 3.32]）。

1. 环 A 的所有本质右理想组成的集合，恰好等于 A 中包含正则元的所有右理想组成的集合。因此，所有奇异（分别地，非奇异）右 A-模的类，恰好等于所有挠右 A-模（分别地，无挠A-模）的类。奇异（分别地，非奇异）右 A-模的所有本质扩张都是奇异（分别地，非奇异）模。对于任意模 M_A，模 $M/\mathrm{Sing}(M)$ 都是非奇异的。环 A 的右经典分式环 Q 是半单阿廷环；非零单射非奇异一致右 A-模，与半单阿廷环 Q 的极小右理想相同（差一个 A-模同构）；若环 A 是素的，则 Q 是一个单环，并同构于除环上的全矩阵环。

2. 每个非挠右 A-模都包含一个非零的非奇异子模。

3. 每个非奇异可除右 A-模都是内射的。

证明。命题 2.5 的所有断言都是众所周知的；参见 [9] 和 [10]。例如，断言 **1** 在 [10, 5.9, 5.10,6.14,6.10(a)], 中得到证明，断言**2**由**1**推出，断言**3** 在 [10, 6.12]中得到证明。□

命题 2.6 [22, 引理 4 和 5]。
设 A 是一个基数为 $|A|$的右 Goldie 素环。

1. 环 A 的每个非零理想 B 都是本质右理想，并且包含一个正则元。

2. 存在一个正整数 n，使得对于环 A 的任意非零元素 $b_1, \dots b_n$，模 $b_1A \oplus \cdots \oplus b_nA$ 都包含自由循环模 A_A 的一个同构副本。

3. 如果 X 是非挠右 A-模，并且 X 包含一个 Goldie 维数无限的非奇异子模 Y，那么 X 包含一个非零的无限秩自由子模 F；因此，存在一个从 F 到任意由 τ 个元素生成的右 A-模的满同态。

4. 如果 $|A|$是无限的，且 M 是Goldie 维数为 $\tau \geq |A|$的非奇异右 A-模，那么 M 不是Bassian模。

命题2.7。设 A是一个环，使得存在一个不奇异的简单模 S_A。

1. 简单模 S 是非奇异的，并且同构于 A的一个非奇异极小右理想 S'。
2. 存在 A 的一个理想 B 和一个闭右理想 C，使得 $B \cap C = 0$，$B \oplus C$是 A 的本质右理想，$CB = 0$是一个非奇异半单非零模，并且同构于简单模 S 的若干个副本的直和。**3.** 如果 A 是右有限维素环，那么 A是简单阿廷环。

证明。**1.** 对于简单模 S_A，存在一个满同态 h: $A_A \to S$，其核为 M，其中 M 是 A的一个极大右理想。由于简单模 S 是不奇异的，A_A 不是 M_A 的本质扩张。因此，对于某个非零右理想 S'，有$M \cap S' = 0$。由于 M 是 A的一个极大右理想，我们有 $A_A = S' \oplus M$，$S' \cong A/M \cong S$，且 S' 是一个同构于 S的非奇异极小右理想。

2. 环 A 有一个半单右理想 B，它是所有与 S同构的极小右理想之和。由命题 2.4(1)，存在 A 的一个闭右理想 C，使得 $B \cap C = 0$，且 $B \oplus C$ 是 A的本质右理想。由于 B 是所有与极小右理想 S'同构的极小右理想之和，容易验证 B 是 A的一个理想。

3. 设 B 和 C 分别为**2.** 中的理想和右理想。由命题 2.6(1)，非零理想 B 是一个本质右理想，并包含一个正则元 b。由于模 B_A 是半单的，循环右 A-模 bA是半单的。此外，$A_A \cong bA$。因此，A是一个素半单环，从而 A 是一个单Artin环。□

命题2.8。设 A为一个环。

1. 如果所有单纯 A-模都是奇异的，那么每个广义巴西安非奇异右 A-模 M 都是Bassian。

2. 如果 A 是右有限维素非阿廷环，那么所有广义巴西安非奇异右 A-模都是 Bassian。

证明。1. 由于所有简单 A-模都是奇异的，非奇异模M 没有简单子模。由命题 2.3(1)， M 是 Bassian。
2. 由命题 2.7(3)可知，所有简单 A-模都是奇异的。根据**1**，所有广义巴西安非奇异右 A-模都是 Bassian。□
如果存在一个有限 n，使得对于 A的每个简单子模 T， A 都不存在同构于 $T^{(n)}$的直和项，则称模 A是**直有界的**。

命题 2.9 [7, 定理 4.1]。 设 M 是一个 Bassian 模，S 是一个半单模。若模 M 直有界，则模 $M\oplus S$ 是广义巴西安的。特别地，若 M 是有限维的，则模 $M \oplus S$ 是广义巴西安的。

命题 2.10 [7, 命题 3.7]。 设 A 是一个半素右 Goldie 环， Q 是 A的经典右分式环，并设 M 是一个右 A-模，使得（右） Q-模 $M \otimes_A Q$ 是有限维的。那么$M \otimes_A Q$ 是一个 Bassian Q-模。

命题 2。11 [10, 4.19, 4。20]. 环 A是右诺特环，当且仅当每个内射右 A-模都是均匀内射模的直和；并且，当且仅当所有内射右 A-模的直和都是内射模。

3 非本原 HNP 环上的模

命题 3。1 [22, 命题 4]. 设 A 是一个非本原 HNP 环，M是一个内射不可分解非零奇异模，并令 $M(P)$ 为 M的主分量，其中 P 是 A的极大可逆理想。

1. M 是一个没有极大子模的单列非循环主模。模 M 的所有真子模都是有限长度的循环模。它们构成一个可数链 $0 = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_k \subset \ldots$，其中对任意 k， X_k/X_{k-1}都是简单模。存在一个正整数 n，使得 $X_j/X_{j-1} \cong X_k/X_{k-1}$ 当且仅当$j - k$ 是 n的倍数。此外，模 M 有一个核非零的满射自同态。因此， M 不是 Bassian。

2. 如果M 是模 M的任意非零同态像，那么

对于模 M 中长度为 $\overline{\geq}\ k+n$的任意循环子模 X，存在一个满同态 $X \to X_k$，其核非零；对于来自**1**的任意循环子模 X_k 亦然。**3.** 如果 Y 是任意循环单列 P-主模，那么它同构于模 M 的一个子因子，并被理想 P的某个幂所湮灭。**4.** 如果 $\oplus_{i\in I}Y_i$ 是一个 P-主模，其中所有 Y_i 都是循环单列模，且其合成长度有一个共同上界，那么该模被理想 P的某个正幂所湮灭。**5.** 每个有限维约化奇异 A-模都是有限个有限合成长度的循环单列模的直和。**6.** 每个湮灭子非零的 A-模都是有限长度循环单列模的直和，且这些长度有一个共同上界。

命题 3.2 设 H 是一个广义巴西安模，且具有子模$K \neq 0$。

1. 若存在单态射 μ: $H \to H/K$，则存在 H的半单子模 S及直和分解 $H = S\oplus N$，使得 K 是 S 的半单子模，且 $\mu(H)$是 N的本质子模。**2.** 设 T是一个无限集，且对所有 $t \in T$，都有 $K_t \cong K$。若 $H = \oplus_{t\in T}K_t$，则模 K 是半单的。

证明。1. 该断言由 [7, 命题 **4.**3]证明。

2. 固定 $t \in T$。由于集合 T 是无限集，存在一个核为 K_t的满同态 $H \to \oplus_{u\in T\setminus t}K_t$。因此，存在单态射 μ: $H \to H/K$。根据**1**，模 K 是半单的。□

命题 3.3。设 A 是一个非本原 HNP 环，M 是一个奇异右A-模，并设 $\{M(P_i)\}$ 是 M 的所有主分量的集合。

1. 模 M 的所有有限生成子模都是有限个有限长度循环单列模的直和。

2. 模 M 的每个非内射子模都有一个有限长度的非零循环单列直和项。

3. M 是内射模，当且仅当每个主分量 $M(P_i)$都是内射模；当且仅当每个主分量 $M(P_i)$都是单列内射模的直和。4. 如果 M 是广义巴西安模，则 M 是约化模。5. 如果 M 是广义巴西安模，且其所有齐次分量都是有限维的，则 M 是约化Bassian模。6. 模 M 是广义巴西安模，当且仅当 M 的所有主分量都是广义巴西安模。7. 如果 M 的每个主分量都是一个Noether模和一个半单模的直和，则 M 是广义巴西安模。8. B 称为 M 的基本子模 B ，如果 B 是有限个有限合成长度循环单列模的直和， B 是 M的纯子模，商模 M/B 是单列非循环模 M_i/B的直和，并且模 M 的任意两个基本子模都同构；由命题 3.1(1) 和 2.11可知，模 M_i/B 和 M/B 都是内射单列模。 B 称为 M 的下基本子模，如果 u.dim (M/B) $=$ u.dim M。如果集合 I 是有限的，则 M 的每个基本子模都包含一个下基本子模。存在直和分解 $M = H_1 \oplus H_2$，其中 H_1 具有非零湮灭子 $r(H_1)$，且 u.dim H_2 =u.dim(H_2/B_2) =u.dim(M/B)，其中 B 和 B_2 分别是 M 和 H_2的最低基本子模。9. 如果 M 是广义巴西安主模，则 M 具有非零湮灭子 $r(M)$，并且存在一个正整数 n 使得 $M = \oplus_{j\in J} X_j$，其中每个 X_j 都是长度为 $\leq n$的单列诺特循环模。

证明。1、2、3。这些结论众所周知；例如，参见 [22, 命题 3]。另见 [17]和 [18]。

4。假设 M 不是约化模。那么 M 有一个非零的单射直和项。由 **3**， M 有一个非零的单射单列直和项M'。根据命题 2.2，模 M'是广义巴西安。根据命题 2.3(1)，模 M' 是 Bassian。这与命题 3.1(1)矛盾。

5. 根据4，模 M 是约化的。由于 M 的所有齐次分量都是有限维的，底 Soc (M) 的每个齐次分量都是有限生成的。根据命题 2.3(1)，模 M 是 Bassian 的。

6. 如果 M 是广义巴西安的，那么根据命题 2.2， M 的所有主分量都是广义巴西安的。
设 M 的所有主分量 M_i 都是广义巴西安模。我们有 $M = \oplus_{i\in I} M_i$。利用注 1.4，可以直接验证M 是广义巴西安模。

7. 该断言由命题 2.9 和注 2.1 得出。

8. 第一个断言见 [19, 定理 1]；另见 [1, 定理 1.3]。第二和第三个断言见 [21, 定理 3.8, 3.10]。

9. 由 **8**，存在一个直和分解 $M = H_1 \oplus H_2$，其中 H_1 的湮灭子非零 $r($$H_1$)，且 u.dim H_2 = u.dim(H_2/B_2)，其中 B_2 是 H_2 的最低基本子模。由于 $r(H_1) \neq 0$，商环 $A/r(H_1)$ 是串列阿廷环。因此，存在一个正整数 n，使得$M = \oplus_{j\in J} X_j$，其中每个 X_j 都是长度为 $\leq n$ 的单列诺特循环模。根据命题 2.2，模 H_2 是广义巴西安模。

剩下需要证明的是 $H_2 = 0$。假设 $H_2 \neq 0$。那么 $B_2 \neq 0$，H_2的底为 $S_2 \neq 0$，且 H_2 是 S_2的本质扩张。由于 u.dim H_2 =u.dim(H_2/B_2)，且模 H_2/B_2 是内射模，存在一个单态射 f: $S \to H_2/B_2$，它可以延拓为从 H_2 到内射模 H_2/B_2的同态μ 。由于 $S \cap$Ker $g =$ Ker $f = 0$，且 H_2 是 S_2的本质扩张，我们得到 μ 是从广义巴西安模 H_2 到 H_2/B_2的单态射，其中 $B_2 \neq 0$.

现在我们使用命题 3.2，其中令 $H = H_2$ 和 $K = B_2$。由于μ: $H \to H/K$ 是单态射，由命题 3.2可知，存在 H 的一个半单子模 S 以及一个直和分解$H = S \oplus N$，使得 S 是半单子模，且 $N \neq 0$的 $\mu($$H$)是本质子模。由于 S 是半单模，存在直和分解 $S = K \oplus S'$ 和 $H = K \oplus S' \oplus N$。因此，非零模 N 同构于非零内射模 H/K的一个直和项。此外， N 是广义巴西安的，因为 H 是广义巴西安的。因此，存在一个广义巴西安的非零内射奇异模 N。由命题 2.11 和 2.2可知，存在一个广义巴西安的非零内射不可分解奇异模 N'；根据命题 2.3(2)，它是 Bassian 的。这与命题 3.1(1)矛盾。□

命题 3。4 [22, 命题 5]。 设 A 是一个非本原戴德金素环， M_A 是一个内射不可分解非零奇异模，并设 $M($$P$) 是 M的主分量，其中 P是一个极大理想。

1. M 是单列非循环主模，其所有非零商模

M 的都是同构于 M的模； M 的所有真子模都是有限长度的循环模，并构成可数链 $0 = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_k \subset \ldots$，其中对于任意 $k \geq 1$，所有模 X_k/X_{k-1} 都是同构的简单模。

2. 若 Y 是任意循环单列 P-主模，则它同构于模 M 的一个子因子，且被理想 P 的某个幂所消灭。**3.** 每个 Goldie 维数为 τ 的 P-主模 N_A，都是直和 $\oplus_{j\in J}S_j$ 的本质扩张；该直和由同构的简单模 S_j 组成，其中 $|J| = \tau$，且 $(\oplus_{j\in J}S_j)P = 0$。**4.** 设 $\oplus_{i\in I}Y_i$ 是一个 P-主模，其中所有 Y_i 都是循环单列模，且其合成长度有一个共同上界，则该模被理想 P 的某个正整数次幂所消灭，并且 $\oplus_{i\in I}Y_i$ 的所有简单子因子都彼此同构。**5.** 设 Q 是一个 Goldie 维数为 τ 的单射 P-主 A-模，且 X 是一个 Goldie 维数为 $\sigma \leq \tau$ 的 P-主 A-模。则存在一个单态射 f: $X \to Q$。

命题 3。5 [22, 定理 1]。若 A 是非本原戴德金素环，且 M 是带有主分量 M_i、$i \in I$ 的奇异右 A-模，则以下条件等价。

1) M 是 Bassian模。**2)** 模 M 的每个主分量 M_i 都是约化有限维模。**3)** 模 M 的每个主分量 M_i 都是诺特模。

命题3.6。若 A 是非本原戴德金素环，且 M 是广义巴西安奇异右 A-模，则 M 的每个主分量 M_i 都是一个诺特模与一个半单模的直和。

证明。 根据命题 2.2， M 的每个主分量 M_i 都是广义 Bassian 主模。不失一般性，假设$M = M_i$ ，其中 $i \in I$。根据命题 3.3(9)，存在一个正整数n ，使得 $M = \oplus_{j\in J}K_j$，其中每个 K_j 都是长度为 $\leq n$的单列诺特循环模。根据命题 3.4(4)， M 的所有简单子因子都同构。令 I 为 J 的子集，使得 K_i 的长度大于 2。

我们将模 $\oplus_{i\in I}K_i$ 记为 M_1，并在集合 I 为空时令 $M_1 = 0$。我们将半单模 $\oplus_{j\in J\setminus I}K_j$记为 M_2；若 $I = J$，则令$M_2 = 0$。我们有 $M = M_1 \oplus M_2$。剩下要证明的是模 M_1为诺特模。当集合 I 有限或为空时，这一点成立。

假设集合 I 是无限的。根据命题 2.2，模 M_1 是广义巴西安的。由于每个长度为 $2 \le d \le n$ 的循环单列直和项K_i 的所有简单子因子都同构于一个固定的简单模，因此存在 I 的一个无限子集 T，使得所有模 X_t、 $t \in T$ 同构。令 $H = \oplus_{t\in T}X_t$。根据命题 2.2，模 H 是广义巴西安的。根据命题 3.2(2)，模 X_t 是半单的。这与 X_t 的长度为 ≥ 2相矛盾。□

4 备注

备注 4.1。 定理 1.2 是本文的主要结果，由命题 3.3(7) 和 3.6 推出。

若模 M的子模 N满足：对于 M的每个自同态 f，都有 $f(N) \subseteq N$，则称其为<style id='3'>全不变 子模。若一个模的每个子模都是全不变的，则称该模为<style id='10'>不变 模。环 A 是右不变的，当且仅当 A 的每个右理想都是 A的理想；显然，交换环和除环都是右不变环和左不变环。

注 4.2 [7, 例 2.1 和 2.7]。
任何素环或右不变环 A 都是 Bassian 右 A-模。
若模 M 的子模 N 满足：对任意 $y \in M$ 和非零 $x \in M$，存在 $r \in R$ 使得 $xr = 0$，且 $yr \in N$，则称其为**稠密**子模。若从模 M 的子模 N 到 M 的每个非零同态都是单态射，则称模 M 为**单形式**模。若对模M的每个子模 K 及 f： $K \to M$，Ker(f) 都是模 K 的闭子模，则称模 M 为**多形式**模。

注 4.3 [7, 例 2.11 和 2.5，命题 3.2 和 3.3]。设 M 是一个模。

1. 如果 M 的所有真子模都是稠密的，那么 M 是 Bassian 的。**2.** 如果 M 是单形式的，那么 M 是 Bassian 的。**3.** 如果 M 是一致的，且 M 是非奇异的或多形式的，那么 M 是 Bassian 的。

注 4。4 [7, 推论 3。2]。 设 B 是环 A 的一个理想，且 M 是一个右 A-模。如果 M/MB 是一个 Bassian R/B-模，那么 M 是一个 Bassian 右 A-模。

注记 4。5 [7, 命题 3。8]。 </style}若 M 是一个 A-模，且 $M[X]$是 Bassian $A[X]$-模，则 R-模 M 是 Bassian 模。

注记 4.6。开放问题。 定理 1.2 能否从 Dedekind 素环推广到 HNP 环?

定理 1.2 对 HNP 环是否成立?

参考文献

[1] Benabdallah, K., Singh, S.（1983）。论类似模的挠阿贝尔群。载于: G¨obel, R., Lady, L., Mader, A.（编）《阿贝尔群理论》。数学讲义，第 1006 卷。施普林格，柏林、海德堡。[2] Chekhlov A. R.; Danchev P. V.; Goldsmith, B. 关于阿贝尔群的 Bassian 性质 // 《巴塞尔数学档案》。– 2021。– 117:6。– 第 593–600 页。[3] Chekhlov, A. R.; Danchev, P. V.; Goldsmith, B. 关于阿贝尔群的广义 Bassian 性质 // 《匈牙利数学学报》。– 2022。–168:1。– 第 186–201 页。[4] Chekhlov, A. R.; Danchev, P. V.; Keef, P. W. 半广义 Bassian 群 // 《群论杂志》。– 2025年。– 28。– 第 391–407 页。[5] Chekhlov, A. R.; Danchev, P. V.; Keef, P. W. 阿贝尔群的 Bassian 与 co-Bassian 性质的推广 // 《交换代数杂志》。– 2025年。–17:1。– 第 1–11 页。[6] Danchev, P. V.; Keef, P. W. 具有有界 p-挠的广义 Bassian 及其他混合阿贝尔群 // 《代数杂志》。– 2025 年。– 663:1。– 第 1–19 页。[7]Das, Soumitra; Ko¸san, M. Tamer; Ta¸sdemir, ¨Ozg¨ur; Žemlička, Jan. 论 Bassian 模与广义 Bassian 模 // 《代数及其应用杂志》。– 2026年，2650275（20 页），DOI：10.1142/S0219498826502750

[8] Faith，C.《代数 II》。施普林格，柏林 – 纽约，1976年。

[9] Goodearl, K.R.《环论：非奇异环与模》。– 纽约–巴塞尔：Marcel Dekker，1976年。[10]Goodearl, K.R.; Warfield, R.B.《非交换诺特环导论》。– 剑桥：剑桥大学出版社，1989年。[11] Kasch, F.《模与环》。– Academic Press，伦敦–纽约，1982年。[12] Keef, P. W. 阿贝尔群上的次巴西安性质 // 《Commun. Algebra》。– 2025年。–**53**:4. – 第1723–1738页。[13] Lam, T.Y.《模与环讲义》。– 施普林格，纽约。底，1999年。[14] Lenagan, T.H. 有界遗传诺特素环 // 《J. London Math. Soc.》– 1973年。– **6**. – 第241–246页。[15] Robson, J. C. 理想化子与遗传诺特素环 // 《代数杂志》。– 1972年。–**22**. – 第45–81页。[16] Singh, S. 遗传诺特素环上的拟内射模与拟投射模 // 《Can. J. Math.》– 1974年。– **26**:5. – 第1173–1185页。[17] Singh, S. 遗传诺特素环上的模 // 《Can. J. Math.》– 1975年。–**27**:4. – 第867–883页。[18] Singh, S. 遗传诺特素环上的模，II // 《Can. J. Math.》– 1976年。–**28**:1. – 第73–82页。[19] Singh, S. 每个模都存在基本子模的 (hnp)-环 // 《Can. J. Math.》– 1978年。– **28**:1. – 第73–82页。[20] Singh, S. 阿贝尔群的一些分解定理及其推广——II // 《Osaka. J. Math.》– 1979年。– **16**. – 第45–55页。[21] Singh, S., Talwar, S. 有界遗传诺特素环上的模 // 《Arch. Math.》– 1979年–**32**. – 第134–142页。[22] Tuganbaev, Askar. 关于Bassian模 // 《数学》（MDPI）。– 2026年。– **14**. – 108（11页）。