arXiv:2601.16204v1 [cond-mat.quant-gas] 22 Jan 2026

二维超流体中的普适非高斯序参量统计

Abel Beregi[1], * En Chang, [1] Erik Rydow, [1] Christopher J. Foot, [1] 和 Shinichi Sunami[1], †
[1] *Clarendon Laboratory, University of Oxford, Oxford OX1 3PU, United Kingdom*（日期：2026年1月23日）

涨落是多体系统的固有特征，其完整的统计分布揭示了底层物理的丰富信息。尤其值得关注的是，当非平凡关联和临界性压过中心极限定理时产生的非高斯极值统计。值得注意的是，据预测，在二维量子流体中，这类效应会体现在Berezinskii–Kosterlitz–Thouless（BKT）超流相的序参量分布中，并且在低温极限下趋近于一种普适极值形式。在此，我们利用物质波干涉测量，测量了BKT 临界点两侧二维玻色气体的序参量统计。这使我们能够确认，低温下观测到的统计分布收敛于普适Gumbel分布，其概率密度的吻合精度达到0.1%。此外，原子干涉仪的固有精度使我们能够稳健地提取偏度和峰度等高阶矩可观测量；特别是，我们报告了Binder累积量的直接测量结果，从而能够精确识别相变的起始点。我们将这一方法拓展至非平衡系统的研究，探测了淬火穿越BKT 临界点后的涡旋解缚动力学，并发现高阶矩具有与参数无关的标度行为。

I. 引言

涨落观测量的统计分布为刻画多体系统提供了有力手段，揭示出仅凭均值无法推断的涌现结构 [1]。在许多情况下，高斯统计是中心极限定理的结果；然而，强关联系统和临界系统往往明显偏离这一范式，其特征是呈现非高斯极值分布 [2, 3]。在极其多样的复杂系统领域中，都有此类分布的相关报道，涵盖布朗运动 [4]、$1/f$ 噪声 [5], 星系 [6], 大气能量传输 [7], 蛋白质序列 [8], 以及进化生物学 [9]。这些普遍存在的现象引出了一个根本性问题：普适的非高斯分布何时以及如何从微观动力学中涌现?

凝聚态系统提供了一个重要范例：在这类系统中，全分布函数能够揭示涨落与非平凡集体行为之间的联系，而这种联系独立于系统的微观细节 [10–12]。尤其是，相干程度的全分布函数（FDF）对于此类研究至关重要；相干程度可由全局磁化强度或宏观波函数等序参量定量表征 [13–15]。在由自发对称性破缺引发相变的系统中，临界点附近的序参量全分布函数预计呈现非高斯分布；此时涨落占主导，谐近似不再适用。在低维系统中，涨落的影响在任何非零温度下都显著 [16, 17], , 从而产生丰富的涌现行为。二维（2D）XY普适类是低维系统中普适性的典范，与贝雷津斯基–科斯特利茨–索利斯（BKT）相变相关：这是一种由涡旋介导的拓扑相变，发生在具有准长程有序的低温超流相与高温无序相之间 [18–20] （图1a）。由于BKT超流相中的涨落具有尺度不变性，序参量全分布函数预计服从普适的极值分布 [11, 21] （图1b）。

尽管序参量 FDFs 具有根本重要性，但要直接通过实验测量它们一直颇具挑战，尤其是在传统固态系统中 [22]。超冷原子气体为测量多体量子系统的 FDF 提供了一个多功能平台，其系统参数和几何结构具有高度可调控性，还能可靠地制备多体态，从而获得大量统计数据，以识别其潜在分布 [23]。在超冷原子系统中探测序参量 FDFs 的测量技术开发是一个活跃的研究领域，近期在介观系统中的单原子分辨全计数方法 [24–26] 以及光学晶格实验 [27–30] 方面取得了进展。相比之下，对于由数万个粒子构成连续量子场的大型系统，物质波干涉测量（MWI）是一种强大的方法，可直接探测微观涨落 [10, 31–37]。原子干涉测量方法的主要优势在于其固有的精度以及对实验噪声的稳健性，这些特性常用于量子计量学 [38–40]；它们能够以低噪声和大量统计数据进行全分布测量，并促成了用于探测一维量子气体的对比度 FDF 方法 [34, 41, 42]。在二维中，干涉对比度

* abel.beregi@physics.ox.ac.uk
† shinichi.sunami@physics.ox.ac.uk

可用于探测跨越 BKT 相变的序参量 FDF [10, 11], , 将普适 FDF 与干涉测量读出联系起来 [11, 21]。因此，基于 MWI 的二维连续系统 FDF 测量前景令人振奋，不仅能够探测平衡态普适分布，还能揭示非平衡动力学中的高阶效应及其可能的标度行为。

在本研究中，我们报告了对解耦双层量子气体的物质波干涉对比度分布的测量，这使我们能够直接探测二维玻色气体跨越 BKT 临界点时的序参量全分布函数（图 1c–e）。我们首先观察对比度分布，发现其形状在 BKT 临界点两侧呈现出明显变化。在低温下，我们识别出一种稳健的序参量普适极值分布，这与理论预测一致 [3]。全分布函数测量还可提取序参量的偏度和峰度等高阶矩；我们展示了对 Binder累积量的直接观测，其特征性交叉行为与数值模拟一致。接下来，我们利用双层阱的可调控性，在非平衡条件下应用这种稳健的对比度分布方法。具体而言，我们研究了相干分裂后双层二维玻色气体的全分布函数；这一过程迅速淬火系统，使其跨越 BKT 临界点，从超流相进入正常相。近期，研究者通过二点关联函数方法对此进行了考察，揭示了由实时重整化群理论描述的与参数无关的普适动力学 [43]。全分布函数探针揭示了高阶关联的与参数无关的标度动力学，这一点由对比FDF高阶矩随时间演化曲线的重合得到证实。最后，通过与平衡态直接比较，我们确认了这些分布的非热性质。

II. 二维量子气体对比度全分布测量

为探测涨落二维量子场的统计分布，我们在圆柱对称双势阱中制备了由较低超精细能级上的 ^{87}Rb 原子构成的双层二维简并玻色气体。该势阱由多射频（MRF）缀饰技术产生[36, 37, 43]。二维玻色气体属于二维 XY 普适性类 [32, 44], , 近年来，我们已在本实验装置中通过直接探测两点关联函数和涡旋统计，对 BKT 相变进行了详细的实验观测 [36, 37]。每个势阱沿 z 方向的强轴向束缚确保囚禁气体处于准二维条件。两个势阱底部附近的轴向俘获势为调和势，竖直方向的俘获频率为 $\omega_z/2\pi \approx 1.1$kHz，二者间距为 $\Delta z \approx 4.9$μm，从而实现一对彼此独立、独立涨落的二维量子气体 [36]。无量纲二维相互作用强度为 $\tilde{g} = \sqrt{8\pi}a_s/\ell_0 = 0.09$，其中 a_s 为三维 s 波散射长度，$\hbar$ 为约化普朗克常数，而 $\ell_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_z)}$ 是质量为 m 的原子沿 z 方向的调和振子长度。利用具有环形轮廓的强失谐激光束，在 x-y 平面内形成盒状光学阱，产生近均匀二维系统 [45]。通过强制射频蒸发将云团冷却至 $T = 32$nK；调节每层的原子数 N，并通过最大化干涉对比度 [46], 使两层达到平衡，从而将相空间密度 $\mathcal{D} = nh^2/(2\pi m k_B T)$ 调节至 5 至 21 的范围，其中 n 为平均二维密度，k_B 为玻尔兹曼常数。在所有情况下，均满足准二维条件 $\hbar\omega_z > k_B T$ 和 $\hbar\omega_z > \mu$，其中 μ 为化学势。

为探测该系统，我们骤然关闭阱势，释放这对二维气体，使其进行时长为 $t_{\mathrm{TOF}} = 17$毫秒的飞行时间（TOF）膨胀。释放后的云团沿 z 轴迅速膨胀并相互重叠，形成沿 z （图 1d）的干涉图样，其在 x-y 平面上的空间相位分布编码了原位系统相对相位模的涨落 [36, 47]。在吸收成像之前，厚度为$L_y = 8$μm 的激光薄片将原子从较低超精细能级光泵浦至较高超精细能级，作用区域如图 1d 中红色半透明薄片所示，随后对原子进行探测 [36, 46]。根据采集到的一组图像，我们计算空间积分干涉对比度的统计分布。沿 y 积分是吸收成像固有的过程，因为成像会沿成像轴对密度进行积分；沿 x 积分则通过对图像进行后处理实现。由此得到沿 z积分后的密度分布，可通过其傅里叶谱进行分析（方法）。与每个密度分布对应的对比度值代表干涉条纹的可见度，如图 1d 所示。频谱的高动量区域还可用于重建成像过程固有的噪声统计，从而全面分析本方案的系统效应（见补充信息）。

见图1e，我们展示了二维玻色气体处于超流区和正常态时实验对比度统计的示例，呈现出明显的非高斯特征。在超流区，准长程有序会产生高可见度的干涉条纹，其分布在低对比度一侧呈现长尾。相反，在正常态，强烈的相位涨落会降低观测到的对比度均值，并使分布变宽。系统中存在出现无涡旋区域且具有部分相干性的有限概率；因此，观测到的分布在较高对比度一侧呈现长尾。下文将深入分析测得对比度的完整分布，从而定量揭示此前无法获取的二维量子气体高阶矩可观测量的细节。

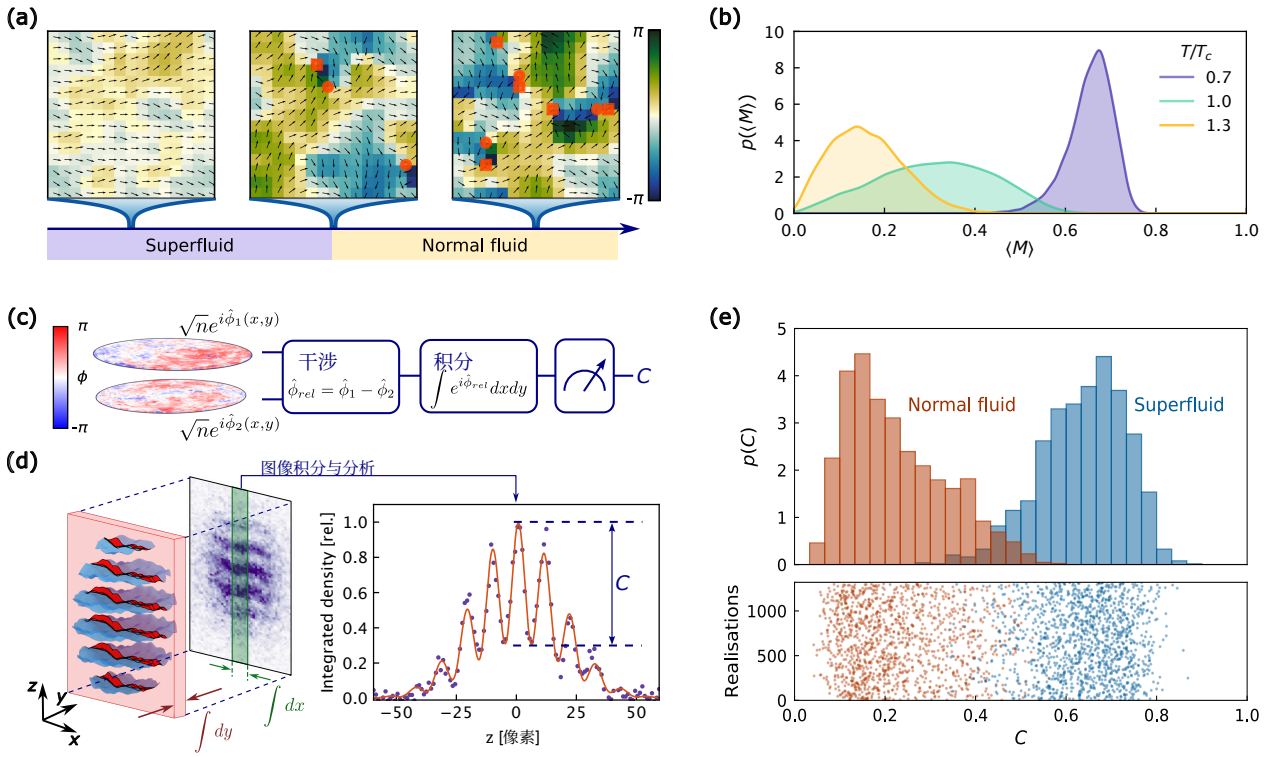

图1. 二维 XY 普适类中序参量统计的物质波干涉探针。(a)，BKT 相变不同温度下的二维 XY 模型自旋构型。在低温下（$T/T_c = 0.7$），系统呈准有序态，仅有自旋波激发。在交叉区域（$T/T_c = 1.0$），涡旋-反涡旋对与一些未配对涡旋同时出现。在正常相（$T/T_c = 1.3$），涡旋激发大量涌现（红色圆形和方形分别表示涡旋和反涡旋）。(b)，数值模拟得到的二维 XY 模型在 BKT 临界点附近的序参量分布，呈现显著的非高斯特征。超流区的分布具有普适的冈贝尔形式。(c)，实验方案。制备两个彼此独立但完全相同的二维玻色气体，其相位涨落以色彩图表示。物质波干涉测量将相对相位涨落转化为干涉图样，并对二维区域进行积分。由此得到干涉对比度 C的一次测量结果；对许多次实验实现进行采样，即可获得其完整分布。(d)，实验实现。二维玻色气体经过飞行时间膨胀后，通过吸收成像探测干涉图样；沿 y 方向的积分由具有受控深度的吸收成像内在实现（红色薄片表示选择性再泵浦 [36]），沿 x方向的积分则通过图像后处理实现。从积分干涉信号中提取对比度。(e)，BKT 相变过程中观测到的对比度统计示例，呈现非高斯特征。通过 200 多次实验重复获得了 1000 多个样本。

III. BKT 超流体的普适序参量分布

与两个二维玻色场干涉相关的对比度平方观测量为 [10]

$$\hat{C}^2 = \frac{1}{N_1 N_2}\int_\Omega d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \hat{\psi}_1^\dagger(\mathbf{r}_1)\hat{\psi}_1(\mathbf{r}_2)\hat{\psi}_2(\mathbf{r}_1)\hat{\psi}_2^\dagger(\mathbf{r}_2), \quad (1)$$

其中，$\hat{\psi}_i^{(\dagger)}$ 是第 $i = 1,\ 2$ 层中的玻色湮灭（产生）算符，N_i 是粒子数；积分区域 Ω 由再泵浦光片的厚度以及图像后处理中使用的积分宽度决定。对于两个相互独立但完全相同、处于准凝聚体区的玻色气体（涵盖 BKT 转变的正常相和超流相），

转变 [48]，式（1）可简化为

$$C = \frac{1}{N}\int_\Omega d\mathbf{r}\ \bar{n}(\mathbf{r})e^{i(\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r}))}, \quad (2)$$

其中，在经典场近似下，我们在密度-相位表示中用复数替代场算符。由于在准凝聚态区域中，密度涨落在能量上受到抑制，因此引入平均密度 $\bar{n}(\mathbf{r})$。在这些近似下，干涉对比度仅取决于相对相位模；对于非耦合层，其统计特性与各单层的相位 $\phi_i(\mathbf{r})$ 相同，但幅值是其两倍 [36]。因此，C 式（2）中的量等价于单层二维玻色气体的序参量 $A = \int d\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})$，仅相差一个因子 2；该量对应于二维 XY 模型中的磁化强度，由此建立了

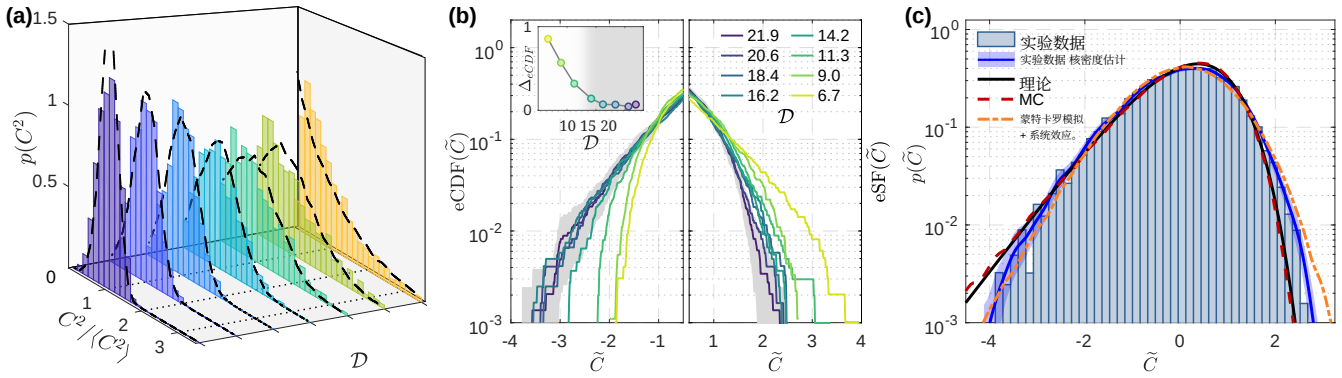

图2. 序参量统计收敛至普适极值分布。(a)，不同 $\mathcal{D}$ 值下实验数据的概率直方图，与蒙特卡罗（MC）模拟（虚线）进行比较。(b)，经验累积分布（eCDF）和生存函数（eSF），各自基于至少900个对比度值获得，并以对数刻度绘制，以突出显示分布在多个数量级范围内塌缩至一条普适曲线的情况。阴影区域表示最高 $\mathcal{D}$ 数据集的99%置信区间。插图显示了低温MC模拟结果的eCDF与各实验数据集之间的缩放平方残差和。阴影区域表示确定的普适区域。(c)，低温极限下的普适序参量统计。普适区域内实验数据的直方图（$14 \leq \mathcal{D} \leq 21$），包含超过7500个对比度值。蓝色实线为核密度估计（KDE），阴影区域表示其99%置信区间，通过自助法获得。虚线表示针对 $14 \leq \mathcal{D} \leq 21$的蒙特卡罗模拟结果，分别为（橙色）考虑和（红色）未考虑成像噪声系统效应的情况（方法）。

干涉对比度统计与序参量统计之间的明确联系。

在图 2a 中，我们展示了跨越 BKT 临界点的大范围相空间密度下所观测到的对比度平方 FDF [36, 37]。对于每组数据，对比度值均以其均方根值进行归一化，从而将 C^2 的均值固定为 1，突出显示分布形状的变化。我们将这些分布与干涉对比度的经典场蒙特卡罗模拟进行比较，该模拟考虑了影响对比度提取过程的、已得到充分表征的技术噪声（见补充信息）。在整个 BKT 交叉过程中，实验分布与模拟分布均表现出良好的一致性。在超流区的深处，当 $\mathcal{D}$ 显著高于临界值 $\mathcal{D}_c = 11.5$（7）时，概率密度 $p(C^2)$ 呈现出以 1 附近为中心的尖锐峰值，并向低对比度方向偏斜。在正常相中，观测到对比度为零的概率最大，且分布呈泊松分布。理论研究预言了 $p(C^2)$ [10, 11, 33], 的这种变化，与我们的实验观测结果良好一致。

在超流区，归一化非普适的均值和方差后，对比度观测量的 FDF 预期具有由 Gumbel分布给出的普适函数形式 [11]。为此，我们引入变量 $\widetilde{C} = (C - \langle C \rangle)/\sqrt{\langle C^2 \rangle}$，使统计分析对由三阶及更高阶矩所体现的分布形状更加敏感。为消除分箱的影响，我们计算经验累积分布函数（eCDF），以及每组数据的经验生存函数（eSF= 1-eCDF）（见补充信息）。结果如图 2b 所示：在对数刻度下绘图时，eCDF 对 $\widetilde{C}$（p）的左尾和 eSF 对右尾 $\widetilde{C}$（p）的变化十分敏感。数据表明，在超流区，分布趋向于普适分布并发生塌缩；在灰色阴影表示的 99% 置信区间内，这种塌缩一直延伸至 0.1% 的水平（见补充信息）。为量化这种塌缩，我们计算了普适行为出现的区间内蒙特卡罗模拟结果所得 eCDF 与各实验数据集之间的残差平方和，记作Δ_{eCDF}（插图）。所得 Δ_{eCDF} 值在超流区深处仍保持较小且恒定，表明在相空间密度较高时，各分布稳健地塌缩为同一分布。此外，这也说明该区间内的实验分布与蒙特卡罗模拟所得低温分布吻合良好。我们观察到，普适性在一定范围的 $\mathcal{D} \gtrsim 14.0$内成立，这与二维玻色气体的理论预测高度一致 [11]。由于均值和方差是利用 C进行归一化的，分布的塌缩完全源于所有高阶矩的普适行为，这为二维玻色气体在低温区超越两点关联函数的普适性提供了证据。

在图 2c 中，我们展示了在普适区域（$\mathcal{D} \geq 14.3$）获得的实验对比度的合并统计结果，共计超过 7500 个样本，以及相应的核密度估计（KDE）及其置信区间（见补充信息）。

冷原子实验的高重复性使我们能够获得大量样本，从而与理论模型进行广泛比较。这个普适概率密度函数对应于二维 XY 模型处于热平衡时的低温序参量分布，因此已得到广泛研究[13, 49]。热力学极限下低温时的解析结果表明，该分布为具有已知参数的 Gumbel 极值分布 [3, 21], ，并带有有限尺寸系统的微小修正 [50, 51]。在图 2c 中，我们还展示了这一解析结果（黑色实线）。按照二维 XY 模型的标准表述，普适低温分布的形式为

$$p(\tilde{m}) = K(e^{x-e^x})^a, \quad x = b(\tilde{m} - s), \tag{3}$$

其中，$\tilde{m} = (m - \langle m \rangle)/\sqrt{\langle m^2 \rangle}$ 是与 C等效的归一化磁化强度，而 $K = 2.14$、$a = \pi/2$、$b = 0.938$、$s = 0.374$ 是普适常数 [3]。此外，我们展示了蒙特卡罗模拟结果（红色虚线），它与解析预测一致。将充分表征的成像噪声所产生的系统效应纳入蒙特卡罗结果后（补充信息），我们发现模拟结果与实验结果吻合良好，表明解析 Gumbel 型分布与二维 XY 模型以及实验分布相一致。

最后，图2c 所示的分布使我们能够对观测到的普适分布的两个相关矩进行定量分析，并与二维 XY 模型的理论预测进行比较 [50,52]。实验数据的偏度 $\gamma_1^{exp} = -0.55 - 0.15(sys.) \pm 0.07$ 与有限温度下的蒙特卡罗估计值 $\gamma_1^{MC} = -0.76$一致，且已考虑成像噪声的系统效应 [50]。同样，根据实验数据计算得到的峰度为$\gamma_2^{exp} = 3.1 + 0.6(sys.) \pm 0.3$ 与其预测的有限温度值 $\gamma_2^{MC} = 3.99$[52]一致。

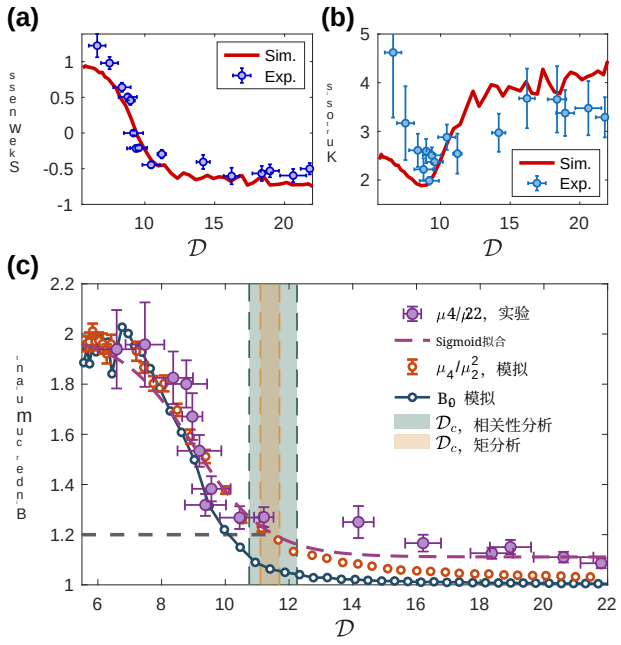

图 3. BKT 临界点两侧与对比FDF相关的高阶矩可观测量测量。(a)、(b)，归一化分布$p(\tilde{C})$的偏度和峰度。模拟数据（红色实线）来自通过蒙特卡罗模拟干涉对比度统计所得的矩。(c)，根据干涉对比度完整分布函数的原始矩测得的 Binder累积量。实验数据（紫色标记）和模拟数据（红色空心标记）均呈现出跨越 BKT 临界点时从 1 到 2 的典型阶跃行为。蓝色空心标记显示了对蒙特卡罗模拟中的各个场进行直接积分所得的结果（连接线仅用于引导视线）。绿色阴影区域标示了通过两点相位关联函数的补充分析实验测得的临界相空间密度。黄色阴影区域标示了通过 Binder 累积量分析实验测得的临界相空间密度。水平虚线表示根据有限尺寸标度分析（补充信息）预测的临界 Binder 累积量。

IV. 临界点处的高阶矩可观测量

迄今为止，我们的分析主要聚焦于超流区深处对比FDF的普适性。然而，分布 $p(\tilde{C})$尤其能提供交叉区域内系统状态的宝贵信息。在图3a-b 中，我们通过考察其前两个相关矩——偏度和峰度——来分析 $p(\tilde{C})$在BKT临界点两侧的演化。在超流区深处，这些量的数值高阶矩可观测量在实验误差范围内保持不变，这与此前研究的 FDFs 的普适性一致。当系统从高 $\mathcal{D}$ 向正常相接近临界点时，偏度急剧增大并发生符号反转，从负值变为正值。峰度也呈现出临界点附近的特征性行为，达到明显的最小值。值得注意的是，偏度反转和峰度最小值出现在临界点附近相同的相空间密度处，此时分布最接近高斯分布。这表明拓扑 BKT 相变与自发对称性破缺之间存在根本区别：在后者的情况下，远离临界点时序参量分布呈高斯分布。

除了观测到归一化对比度的普适分布$\tilde{}$及其渡越行为外，对 C 未归一化分布的分析还可通过公式 A （2）更直接地获取序参量的统计信息。通过提取原始矩，我们可以确定 Binder累积量

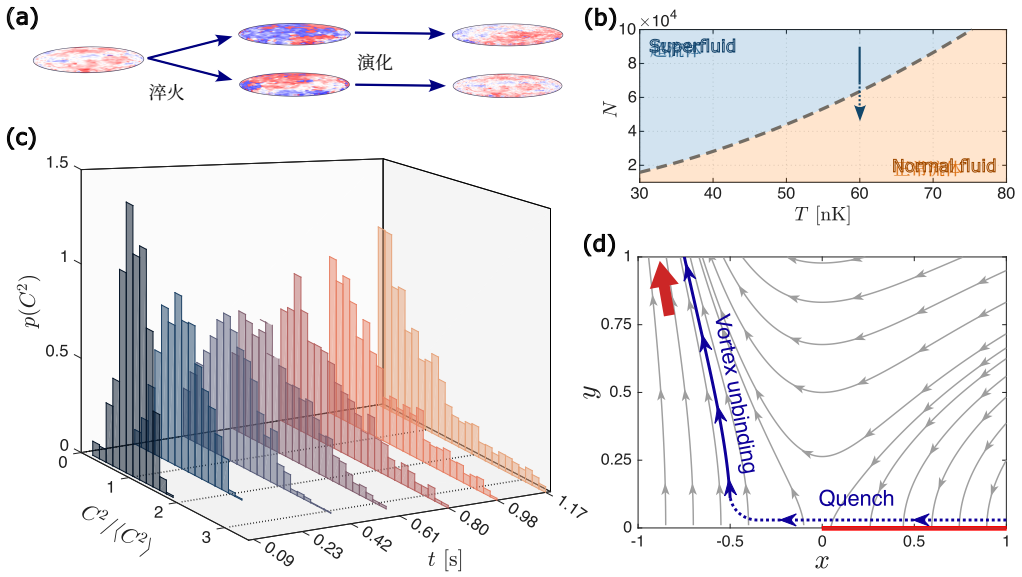

图 4. 利用干涉对比度全分布测量探测二维玻色气体的非平衡动力学。(a)，实验方案示意图。将单层二维玻色气体相干地分裂成两个云团。随后使解耦的气体演化不同的时间，再用飞行时间干涉仪探测系统。(b)，相图上所示的相干分裂淬火。(c)，淬火后不同时间的实验 C^2 概率直方图。(d)，二维 XY 模型的实时重整化群流图。红色箭头和红线（对于 $x > 0,\ \ y = 0$）表示流动的不动点。淬火使超流相中的平衡态进入正常相（蓝色虚线轨迹），随后发生涡旋动态解缚（蓝色实线轨迹）。

B_0 [53]

$$B_0 = \frac{\langle |A|^4 \rangle}{\langle |A|^2 \rangle^2} \approx \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \tag{4}$$

其中， μ_n 是对比度分布 $p\ (C)$ 的 n阶原始矩。 B_0 是多体系统临界行为中的一个核心量：对于二维 XY 模型，在热力学极限下，它在 BKT 相变处从 1 跃变至 2。对于有限尺寸系统， B_0 则从 1 渡越至 2，并且其临界值在 10^{-2} 尺度上表现出微小的对数修正 [54, 55]。该参数已被用于表征临界区域，并在许多关于平衡与非平衡条件下二维和三维玻色气体的数值研究中精确确定临界点 [56–60]。尽管 Binder累积量具有广泛的理论重要性，但对其进行实验测定的研究仍然很少，这推动了包括近期重离子碰撞研究在内的相关工作 [61]。超冷原子系统中可实现的、受到良好调控的样品制备以及对序参量的物质波干涉读出，为可靠获取这一量提供了稳健途径。

在图 3c 中，我们将从实验对比度分布中提取的 Binder累积量绘制为 μ_4/μ_2^2 原始矩之比，它展现了跨越 BKT 临界点时从 1 到 2 的典型交叉特征（紫色实心标记）。实验数据与交叉区域内干涉对比度统计的蒙特卡罗模拟所得相同矩比吻合良好（红色空心标记）。区间（红色空心标记）。模拟场也用于评估 Binder累积量的参考值， B_0，该值直接根据序参量的统计计算得出（蓝色相连空心标记）。在超流区，从噪声对比度统计中提取的累积量略高于 B_0；这是由于成像过程中光子散粒噪声带来的有限系统效应，它使 μ_4 的增长速度快于 μ_2^2。通过用 S 形函数拟合实验数据，我们将拟合曲线与 1.2 相交处确定为临界相空间密度；1.2 是我们的蒙特卡罗模拟（见补充信息）及其他近期数值结果 [56] 预测的临界 Binder累积量。所得数值 $\mathcal{D}_c = 11.4(3)$ 与通过二点相位关联函数的补充分析得到的临界相空间密度吻合良好。这凸显了在实验中使用 Binder累积量精确测量临界点的实用价值，并且该方法对标定、有限尺寸效应 [54] 和有限采样效应 [62]，具有稳健性，也可广泛应用于存在无序的二维玻色气体等系统 [63]。

V. 非平衡二维系统的 FDF 测量

迄今为止，我们研究了平衡态下二维玻色气体的FDF，识别出了BKT超流体的普适极值统计，以及高阶矩在临界点附近的交叉行为

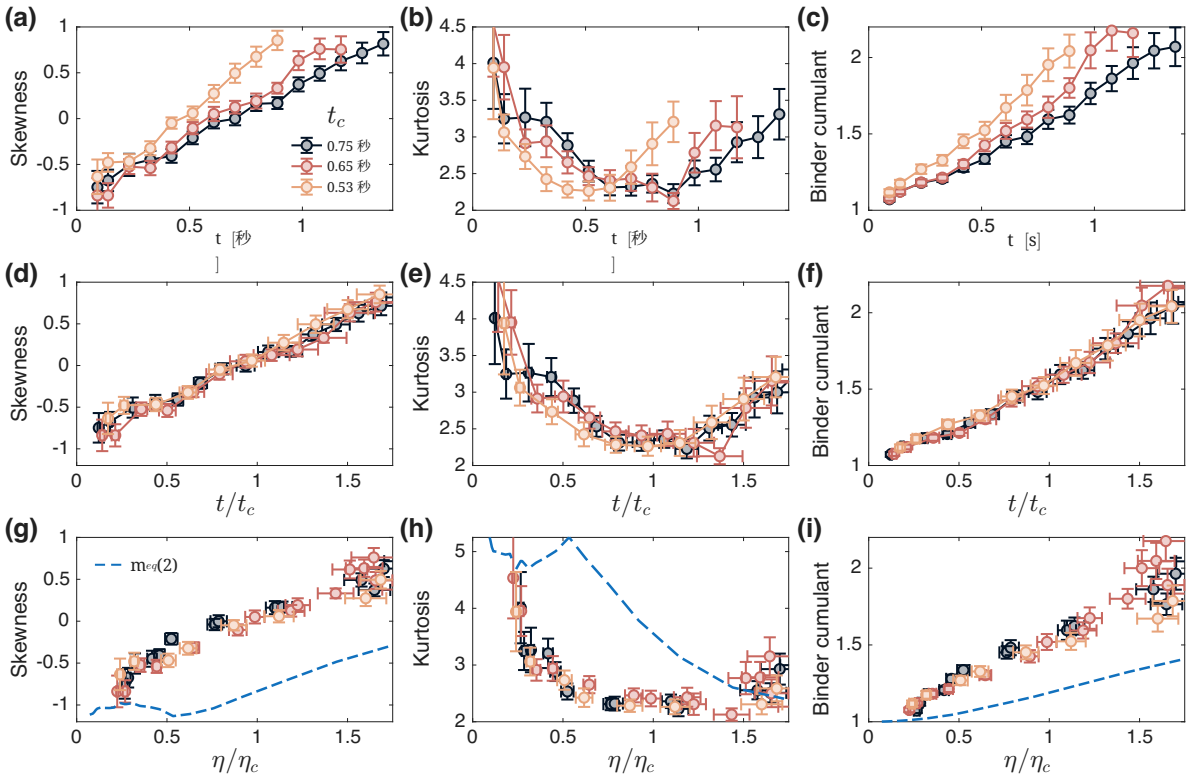

图 5. 二维玻色气体在跨越 BKT 相变淬火后，其序参量对应的高阶矩可观测量的非平衡动力学。(a)-(c)，对于三种不同的初始条件，偏度、峰度和 Binder累积量随时间的演化，初始条件以交叉时间 t_c 表示。(d)-(f)，高阶矩可观测量在约化时间 t/t_c 下的普适动力学。(g)-(i)，通过映射 f 比较高阶矩可观测量的普适动力学与平衡态模拟： $\eta \to m_{eq}$ (蓝色虚线)。

。非平衡二维玻色气体呈现出一系列新颖现象，例如湍流弛豫 [64–66],非热固定点附近的临界动力学 [67–69], Kardar-Parisi-Zhang 普适性 [70–72], 粗化动力学 [57, 73–75], 以及涡旋动态解缚[43, 76], , 仅举数例。全面表征这类多样的非平衡态仍是一项重大挑战；本研究提出的基于干涉测量的FDF测量可扩展至所有积分高阶关联函数 [10], , 是揭示这类非平凡动力学的极具前景的方法 [77–79]。

在此，我们以非平衡系统为代表，研究二维玻色气体在跨越 BKT 临界点淬火后的序参量全分布函数；这一过程产生高度非平衡的过热超流态，并通过普适的涡旋解缚过程逐渐弛豫 [43, 76]。淬火通过相干分裂过程实现：将单个二维气体分裂为两个，从而突然降低密度；对于恰当选择的初始条件，系统由此跨越临界点，从超流相进入正常相，如图4a-b 所示。

图 4c 展示了淬火后不同时间点对比度平方观测量的 FDF。

与平衡数据类似，每组数据的对比度值都经过归一化，使 C^2 的均值为 1。这显示了随时间演化的 $p(C^2)$，从峰状分布演变为泊松分布；在平衡态 BKT 临界点两侧，其总体特征相同，且相空间密度逐渐降低（图 2a）。然而，这些分布源自高度非平衡态，相应的序参量统计预计也不同于平衡态。理解低阶可观测量弛豫的一个有用理论框架是实时间重整化群（RG）理论 [43, 76, 80]（图 4d ）。在这一理论图景中，多体动力学由变量 $x = 1/(2\eta) - 1/(2\eta_c)$ 和 $y = \sqrt{2\pi}g$的时空重整化决定，其中 η_c 是幂律指数 η的临界值，而 g是涡旋逸度。重整化群方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{(x+2)^3 y^2}{8t}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{xy}{t}, \end{aligned} \tag{5}$$

表示普适演化 [43, 76] （见补充信息）。在这一处理框架中，可能的平衡态由流动的不动点表征，

如图 $x > 0$ 所示，高温相对应红色箭头，低温相对应红线（4d）。正如文献 [43] 通过两点关联函数和涡旋激发的分析所观察到的，相干分裂淬火和快速预热化（虚线箭头）驱动系统从 $x > 0$中的超流固定点出发，开启非平衡涡旋解缚动力学（实线箭头），最终在长时间极限下到达正常相 $y \gg 1$ 。系统晚期的弛豫与时空标度相一致；通过用交叉时间 t_c这一动力学的特征时间尺度——即两点关联失去准长程相干性的时刻——对时间进行重标度，这种标度行为对于淬火前初态的选择具有稳健性 [43]。下面，我们将分析扩展至高阶矩可观测量，以考察标度行为是否在高阶关联中仍然存在。

在图5a-c 中，我们展示了具有三种不同初始条件（相空间密度）的淬火系统中高阶矩可观测量随时间的演化。尽管所有初始条件下，分裂淬火都会使系统越过临界点，但淬火强度各异，因此交叉时间也各不相同 t_c =0。53(4) 秒 0。65(6) 秒和 0。75(4) 秒。偏度和峰度随时间的演化对三种初始条件都呈现相同的定性行为。具体而言，偏度过零和峰度达到最小值都发生在 t_c附近，且淬火越强，动力学越快。Binder 累积量也呈现这一特征，它在t_c期间从 1 平滑演化至 2。值得注意的是，通过时间重标度，观测到的高阶矩可观测量动力学塌缩到同一条曲线上 $t \to t/t_c$ （图5d-f），并通过一个标度函数将初始条件、时间和高阶关联联系起来，其形式类似于低阶两点关联函数的标度动力学 [43]。

这些动力学的一个有趣特征是，仅凭低阶关联函数无法推断高阶矩可观测量呈现出的标度行为，这表明对比FDF具有非平衡性质。在平衡状态下，即在重整化群流的不动点处（图 4d），超流体区和交叉区中具有不同代数指数 η 的不同状态，与高阶矩可观测量之间存在一一对应关系（图 3），由此可以构建偏度、峰度和Binder累积量的映射 f： $\eta \to m_{eq}$, $m_{eq} = \{\gamma_1, \gamma_2, B_0\}$。如果非平衡系统在平衡状态下存在相应但随时间变化的序参量全分布函数，那么测得的可观测量 $m(t)$ 在经过映射 m_{eq} 后，便会在所有时刻与平衡值 f 一致。然而，正如图 5g–i 所示，映射后的 m_{eq} 与高阶矩可观测量的观测动力学显著不同，这表明弛豫动力学过程中存在普适但高度非平凡的涨落。尤其是，在低η 区间内，偏度和峰度始终没有出现平台，这代表了平衡情形与非平衡情形之间标度行为发生了定性变化。这一特征也体现在四阶及以下的原始矩中，如图 5i 中的 Binder 累积量所示。

VI. 结论

总之，我们利用物质波干涉测量探究了二维量子气体中序参量涨落的完整分布。我们证实，在超流区深处会出现普适极值分布，并且与理论预言的Gumbel分布高度一致。通过序参量统计的偏度和峰度，以及Binder累积量，我们超越两点相位关联刻画了BKT交叉，并与经典场蒙特卡罗模拟取得了良好一致。将这些方法拓展到非平衡情形后，我们通过测量干涉对比度的完整分布函数，探究了二维玻色气体从BKT超流体淬火至正常相后的弛豫动力学。高阶矩随重标度时间的演化显示出向与参数无关的行为塌缩，这表明普适性描述可以拓展到动力学过程的高阶观测量，并呼唤相应理论的建立。这些结果表明，物质波干涉测量提供了一种强大的完整分布函数方法，可用于识别二维量子流体的动力学，将实验研究范围从更为常用的两点关联分析方法拓展到高阶关联。

本研究展示了对二维量子系统高阶关联的直接探测能力，以及精确的干涉测量探测方法，具有广泛的应用前景，包括理解预热化态 [77, 81], 二维玻色气体中的相序动力学 [57], 正弦-戈登模型 [75], 量子临界点 [63, 82], 维度交叉 [56,83], 以及具有长程相互作用的系统 [84]。此外，精确测量完整分布是探测玻色玻璃相的一种有前景的方法 [85]。

致谢

我们衷心感谢 Fabian Essler、Vijay Pal Singh 和 Ludwig Mathey 富有见地的讨论。本研究获得英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）资助，项目编号为 EP/X024601/1。A. B. 和 E. R. 感谢英国工程与自然科学研究委员会提供博士培养经费。

方法

对比可观测量与原位玻色场的关系

飞行时间后对应于原子密度的算符可近似为 [10, 11]

$$\hat{n}(x,y,z) \approx n_0(z)\big(\hat{n}_1(x,y) + \hat{n}_2(x,y) + \hat{A}(x,y)e^{iQz} + \text{h.c.}\big), \tag{6}$$

其中，$n_0(z)$ 是包络函数，$\hat{n}_{1,2}(x,y)$ 是分别对应于第 1 层和第 2 层的阱内原子密度算符，$\hat{A}(x,y) = \hat{\psi}_1^\dagger(x,y)\hat{\psi}_2(x,y)$ 是干涉项，而 $Q = m\Delta z/\hbar t_{TOF}$ 是由两个凝聚体产生的物质波干涉条纹的波矢。当云团在 x-y 平面内没有显著膨胀时，该近似是准确的；对于我们的近均匀系统，在所采用的飞行时间 $t_{\mathrm{TOF}} = 17\text{ms}$ 下，原位半径为 22.5 μm，这一条件确实成立。由于囚禁气体处于准二维区间，单层沿 z 方向的密度分布在飞行时间结束后接近于宽度（半高全宽）为 $w_{TOF} \approx 75\,\mu\text{m}$ 的高斯分布 $\gg \Delta z$。因此，我们可以放心地用具有相同宽度的高斯分布来近似包络函数 $n_0(z)$。公式（6）的形式促使我们沿 z 方向进行傅里叶变换，以从 $\hat{n}(x,y,z)$ 的本征值中提取 $\hat{A}(x,y)$ 的本征值。对于所采用的实验参数，$n_0(z)$ 在波矢 Q 处的傅里叶分量可以忽略，因此能够通过傅里叶变换直接提取 $\hat{A}(x,y)$ 的本征值。吸收成像和图像后处理过程会沿 x-y 平面积分原子密度；因此，在根据探测到的原子数 N 进行适当归一化并取系综平均后，我们得到

$$\hat{C} = \frac{1}{N}\int_\Omega dxdy\ \hat{\psi}_1^\dagger(x,y)\hat{\psi}_2(x,y). \tag{7}$$

这个方程可以直接推广，得到方程（1）。

平衡系统的数值模拟

超冷二维玻色气体可以用哈密顿量描述

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\right], \tag{8}$$

其中，$\hat{\psi}(\mathbf{r})$ 和 $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ 分别是在位置矢量 $\mathbf{r}$ 处玻色子的湮灭算符和产生算符

在 x-y 平面内，$g = \tilde{g}\hbar^2/m$ 是准二维相互作用参数，且 $V(\mathbf{r})$ 是外势 [48]。我们采用内部半径为 22.5μm 的圆形盒式势来模拟平衡系统。为了生成该系统中涨落玻色场的原位 样本，我们采用经典场近似，将方程（8）中的场算符替换为复数及其复共轭 [86]。我们将系统映射到一个 128×128 晶格常数为$\delta l = 0.5$ μm 的正方晶格上，并使用一阶差分计算导数。晶格常数被选为小于系统的特征长度尺度（热德布罗意波长和愈合长度），以确保对连续极限的准确表示。

我们采用 Metropolis-Hastings算法 [87,88] ，从巨正则系综中抽取有限温度二维玻色气体的随机状态。这种方法能够准确捕捉涡旋和声子的行为，并已用于支持实验观测 [36, 89]。我们将复场初始化为实部和虚部均为零。每次迭代时，我们随机选择一个格点，并从均值为零、标准差为 σ 的正态分布中抽取两个随机数，以生成对该格点场实部和虚部的候选更新。随后，我们计算巨正则权重 $p = \exp\{(-[\Delta E - \mu\Delta N]/k_BT)\}$，其中 k_B 是玻尔兹曼常数，μ 是化学势，而ΔE、ΔN 分别表示候选场更新引起的系统能量变化和粒子数变化。然后按照标准的 Metropolis-Hastings 算法决定是否接受此次更新。

为确保热平衡和场之间互不相关，我们首先运行算法，每个格点更新 200 000 次以实现热化，然后开始对场进行采样，每次采样之间再进行 10 000 次格点更新。我们调整 σ，使场更新的平均接受率接近 0.25，从而实现最优收敛 [90, 91]。

实验流程：平衡

在第 II-IV节所述的实验中，我们结合静磁场和射频（RF）磁场，形成用于缀饰原子的双阱势[92, 93]。静磁场为四极磁场，关于竖直轴呈圆柱对称（z），并施加三个沿 x线偏振的射频场，以形成多射频（MRF）阱 [94]。通过控制射频分量的振幅和频率，我们可以将势形从单阱调制为双阱势，详见文献[35, 94, 95]。在本研究中，我们采用射频频率组合（f_1，f_2，f_3）=（7.02、7.10、7.18）MHz，实现了 $\Delta z = 4.9\mu\text{m}$ 的阱间距。由于 $\Delta z \gg \ell_0$，我们可以忽略两个阱之间的约瑟夫森耦合。

射频振幅经过设定，使得沿 z 方向的囚禁频率在每个阱中均为 $\omega_z/2\pi = 1.1$kHz，双阱势垒高度为 $E_b/h \sim 4$ kHz。得益于现代射频信号生成设备的高精度和稳定性，射频信号的涨落和漂移在至少数周内始终低于 1000 ppm，从而能够进行本研究所需的大量重复测量 [96]。将原子装载到单射频缀饰势中并进行蒸发冷却后，我们通过缓慢引入另外两个射频信号，将原子绝热转移到多射频缀饰势中，且几乎不会造成加热。在单射频缀饰阶段进行射频振幅斜坡调节期间，我们用 3 秒引入光学势，在x-y 平面内形成近均匀囚禁势；该势由532纳米激光经空间光调制器（数字微镜器件）整形后产生，从而形成盒状囚禁几何。分裂过程持续 300 ms，显著长于面内和轴向动力学的时间尺度。我们优化分裂过程，以确保两个阱中的原子数相等，方法是最大化观测到的物质波干涉对比度，详见文献 [46]。气体进一步平衡 400 ms 后，同时关闭多射频缀饰势和光学势，使云团释放并进行飞行时间膨胀，以观测物质波干涉图样，如图 1 [36]所示。最后，如正文所述，为了局部探测密度分布，我们在吸收成像前施加一束再泵浦光片；光片沿水平方向传播（沿 x 方向），厚度为 $L_y = 8$μm，宽度则远大于原子云团的范围[46]。我们选择该厚度，以便同时局部测量相位涨落并以高信噪比提取干涉对比度。我们沿成像光的传播方向移动光片，通过寻找总吸收信号最大的位置，确保再泵浦光穿过云团中心。我们还进行了再泵浦光覆盖整个云团的实验，以确定正文中报告的相空间密度。

径向对称的单阱准二维势，如文献 [92, 94, 97]所述。阱由多射频缀饰势 [36, 46] 产生，其包含三个射频分量（f_1、f_2、f_3）=（7.14、7.2、7.26）MHz。静态四极场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = b(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y - 2z\boldsymbol{e}_z)$ 的梯度为 $b = 145\,\mathrm{G\,cm^{-1}}$。与平衡实验不同，这里没有使用光学盒状势。单阱势的径向和轴向囚禁频率分别为 $\omega_r/2\pi = 13$Hz 和 $\omega_z/2\pi = 1$kHz。这些实验条件对应的无量纲二维相互作用强度为 $\tilde{g} = \sqrt{8\pi}a_s/\ell_0 =$0.076。对于本文所用的参数，这些参数满足准二维条件 $k_BT \lesssim \hbar\omega_z$、$\mu$：在 $\hbar\omega_z \sim k_BT$ 时，z 方向上存在少量激发态布居，会使二维相互作用强度降低 $\sim$ 15% [98]；但这使BKT临界温度的变化不到 4 %[99, 100]。淬火前，我们在单阱中通过飞行时间测量[36]，测量密度分布中非凝聚部分的膨胀，从而对系统（平衡态）进行温度测量。将气体置于单阱中 400 ms 后 [32, 36], ，我们通过在 12 ms 内将垂直囚禁几何从单阱变为双阱势，将云团分成两个子云，如图 4a 所示。分裂持续时间远短于径向动力学的典型时间尺度 $2\pi/\omega_r \sim 80$ms，也远短于平衡实验中采用的典型分裂时长。分裂后，每个势阱中含有 $N = 4.5 \times 10^4$ 个原子，垂直阱频率为 $\omega_z/2\pi = 1$kHz，满足准二维条件。我们通过最大化物质波干涉图样的对比度，确保两个势阱中的布居相等。分裂前不久，我们通过在 10 ms 内改变 b，将径向囚禁频率调节至 $\omega_r/2\pi = 11$Hz，使分裂前后的径向密度分布尽可能接近，从而避免淬火激发单极模（径向呼吸）。这一径向调节以及分裂过程的持续时间，都远长于垂直方向原子运动的特征时间尺度 $\tau_{\mathrm{trap}} \sim 2\pi/\omega_z = 1$ms，因此系统保持在二维极限（沿$z$方向的激发可忽略）。分裂后，静态四极场的场梯度为 $b = 94\,\mathrm{G\,cm^{-1}}$。我们测量了高于准凝聚点[36] 的云团分裂前后的膨胀动力学，确认分裂过程本身不会导致加热；在测量误差范围内，温度保持不变。双阱势极小值之间的空间间距为 $\Delta z = 7$μm $\gg \ell_0$，这确保在本研究所用的温度范围和阱参数下两个云团彼此解耦。

实验步骤：淬火系统

对于第 V节展示的结果，我们从大约 9.0×10^4 ^{87} 个铷原子的超冷玻色气体开始，将其置于 $F = 1$ 超精细基态，温度为 $T = 60$nK，并绝热加载至一个圆柱形

[1] D. Sornette, *Critical phenomena in natural sciences*, 第 2 版，Springer 协同学系列（Springer，柏林，2006年）。

[2] S. T. Bramwell、P. C. W. Holdsworth 和 J.-F. Pinton，《湍流和临界现象中稀有涨落的普适性》，《自然》396，552（1998年）。[3] S. T. Bramwell、K. Christensen、J.-Y. Fortin、P. C. W. Holdsworth、H. J. Jensen、S. Lise、J. M. L´opez、M. Nicodemi、J.-F. Pinton 和 M. Sellitto，《关联系统中的普适涨落》，《物理评论快报》84，3744（2000年）。[4] J. Farago，《朗之万方程中的注入功率涨落》，《统计物理学杂志》107，781（2002年）。[5] T. Antal、M. Droz、G. Gy¨orgyi 和 Z. R´acz，《1/f噪声与极值统计》，《物理评论快报》87，240601（2001年）。[6] T. Antal、F. Sylos Labini、N. L. Vasilyev 和 Y. V. Baryshev，《星系分布与极值统计》，《欧洲物理快报》88，59001（2009年）。[7] R. Blender、D. Gohlke 和 F. Lunkeit，《大气能量循环的涨落分析》，Phys. Rev. E 98，023101（2018年）。[8] C. Webber 和 G. J. Barton，《蛋白质序列全局比对的P值估计》，《生物信息学》17，1158（2001年）。[9] R. Kassen 和 T. Bataillon，《细菌实验种群中选择前有益突变的适合度效应分布》，《自然遗传学》38，484（2006年）。[10] A. Polkovnikov、E. Altman 和 E. Demler，《独立涨落凝聚体之间的干涉》，《美国国家科学院院刊》103，6125（2006年）。[11] S. P. Rath 和 W. Zwerger，《独立玻色-爱因斯坦凝聚体干涉对比度的全计数统计》，Physical Review A 82，053622（2010年）。[12] D. A. Ivanov 和 A. G. Abanov，《利用全计数统计表征关联：经典伊辛模型与量子XY自旋链》，Phys. Rev. E 87，022114（2013年）。[13] P. Archambault、S. T. Bramwell、J.-Y. Fortin、P. C. W. Holdsworth、S. Peysson 和 J.-F. Pinton，《二维XY模型中的普适磁涨落》，《应用物理学杂志》83，7234（1998年）。[14] A. Lamacraft 和 P. Fendley，《临界量子伊辛链中的序参量统计》，《物理评论快报》100，165706（2008年）。[15] S. T. Bramwell，《空间平均临界性质的分布》，《自然·物理》5，444（2009年）。[16] N. D. Mermin 和 H. Wagner，《一维或二维各向同性海森堡模型中不存在铁磁性或反铁磁性》，《物理评论快报》17，1307（1966年）。[17] P. C. Hohenberg，《一维和二维中长程有序的存在》，Phys. Rev. 158，383（1967年）。[18] V. Berezinskiĭ，《具有连续对称群的一维和二维系统中长程有序的破坏。II. 量子系统》，Sov. J. Exp. Theor. Phys. 34，610（1972年）。[19] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，《二维系统中的有序化、亚稳性与相变》，J. Phys. C Solid State Phys. 6，1181（1973年）。[20] J. V. Jos´e，*40 Years of Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Theory*（世界科学出版社，2013）第 1–351 页。[21] S. T. Bramwell，《二维临界分布的解析形式》，Phys. Rev. E 105，034142（2022年）。[22] I. Lovas、B. D´ora、E. Demler 和 G. Zar´and，《全计数-时间的统计-of-飞行图像，Physical Review A95，053621（2017）。[23] F. Fukuhara, S. Sugawa, Y. Takasu, and Y. Takahashi，《光学晶格中超冷原子量子模拟的工具》，《自然·物理》2，411 (2020)。[24] J. Xiang, E. Cruz-Col´on, C. C. Chua, W. R. Milner, J. De Hond, J. F. Fricke, and W. Ketterle, *In Situ*《超冷玻色气体中热德布罗意波长的成像》，《物理评论快报》134 (2025)。[25] R. Yao, S. Chi, M. Wang, R. J. Fletcher, and M. Zwier-lein，《通过原子分辨显微术测量玻色气体和费米气体中的成对关联》，《物理评论快报》134 (2025)。[26] T. De Jongh, J. Verstraten, M. Dixmerias, C. Daix, B. Peaudecerf, and T. Yefsah，《连续体中费米子的量子气体显微术》，《物理评论快报》134 (2025)。[27] G. Herc´e, J.-P. Bureik, A. T´enart, A. Aspect, A. Dareau, and D. Cl´ement，《膨胀后相互作用晶格气体的全计数统计：凝聚体耗尽在多体相干性中的作用》，《物理评论研究》5, L012037 (2023)。[28] J. F. Wienand, S. Karch, A. Impertro, C. Schweizer, E. McCulloch, R. Vasseur, S. Gopalakrishnan, M. Aidelsburger, and I. Bloch，《混沌量子系统中涨落流体动力学的涌现》，《自然·物理》20, 1732 (2024)。[29] A. Impertro, S. Karch, J. F. Wienand, S. Huh, C. Schweizer, I. Bloch, and M. Aidelsburger，《光学晶格中电流和动能算符的局域读出与调控》，《物理评论快报》133, 063401 2024( )。[30] M. Allemand, G. Dupuy, P. Paquiez, N. Dupuis, A. Ran.con, T. Roscilde, T. Chalopin, and D. Cl´ement，《连续相变中序参量普适非高斯统计的观测》(2025)，arXiv:2508.21623 [凝聚态物理·量子气体]。[31] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhardt，《双阱势中的玻色–爱因斯坦凝聚体原子干涉测量》，《物理评论快报》92, 050405 (2004)。[32] Z. Hadzibabic, P. Kr¨uger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard，《囚禁原子气体中的别列津斯基–科斯特利茨–索利斯交叉》，《自然》441, 1118 (2006)。[33] A. Imambekov, V. Gritsev, and E. Demler，《库仑气体和正弦-戈登模型到随机曲面统计的映射》，Physical Review A 77, 063606 (2008)。[34] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, T. Schumm, A. Imam-bekov, V. Gritsev, E. Demler, and J. Schmiedmayer，《探测相互作用多体系统中的量子噪声和热噪声》，《自然·物理》4, 489 (2008)。[35] A. Beregi, C. Foot, and S. Sunami，《利用多重射频缀饰势中的双层二维玻色气体进行量子模拟》，《AVS量子科学》6, 030501 (2024)。[36] S. Sunami, V. P. Singh, D. Garrick, A. Beregi, A. J. Barker, K. Luksch, E. Bentine, L. Mathey, and C. J. Foot，《通过物质波干涉测量观测二维玻色气体中的别列津斯基–科斯特利茨–索利斯相变》，《物理评论快报》128, 250402 2022( )。[37] E. Rydow, V. P. Singh, A. Beregi, E. Chang, L. Mathey, C. J. Foot, and S. Sunami，《具有层间相干性的双层超流体的观测》，Nature Communications 16, 7201 2025( )。

[38] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. E. Pritchard, 《原子和分子的光学与干涉测量》, Rev. Mod. Phys. 81, 1051 (2009)。[39] S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Ka-sevich, and S. Rajendran, 《利用原子干涉测量探测引力波》, Phys. Lett. B 678, 37 (2009)。[40] C. Overstreet, P. Asenbaum, J. Curti, M. Kim, and M. A. Kasevich, 《引力阿哈罗诺夫–玻姆效应的观测》, 《科学》375, 226 (2022)。[41] M. Kuhnert, R. Geiger, T. Langen, M. Gring, B. Rauer, T. Kitagawa, E. Demler, D. Adu Smith, and J. Schmied-mayer, 《一维量子系统中的多模动力学及特征长度尺度的涌现》, 《物理评论快报》110, 090405 (2013)。[42] M. Gring, M. Kuhnert, T. Langen, T. Kitagawa, B. Rauer, M. Schreitl, I. Mazets, D. A. Smith, E. Dem-ler, and J. Schmiedmayer, 《孤立量子系统中的弛豫与预热化》, 《科学》337, 1318 2012( )。[43] S. Sunami, V. P. Singh, D. Garrick, A. Beregi, A. J. Barker, K. Luksch, E. Bentine, L. Mathey, and C. J. Foot, 《淬火二维玻色气体中动态BKT相变的普适标度》, 《科学》382, 443 (2023)。[44] A. Posazhennikova, 《专题综述：二维弱相互作用稀薄玻色气体》, Rev. Mod. Phys. 78, 1111 (2006)。[45] S. Sunami, V. P. Singh, E. Rydow, A. Beregi, E. Chang, L. Mathey, and C. J. Foot, 《通过噪声关联探测二维玻色气体的相位相干性》, 《物理评论快报》134, 183407 (2025)。[46] A. J. Barker, S. Sunami, D. Garrick, A. Beregi, K. Luksch, E. Bentine, and C. J. Foot, 《磁势中二维玻色气体的相干分裂》, New J. Phys 22, 103040 (2020)。[47] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein condensation in dilute gases* (剑桥：剑桥大学出版社，2008)。[48] N. Prokof'ev, O. Ruebenacker, and B. Svistunov, 《弱相互作用二维玻色气体的临界点》, 《物理评论快报》87, 270402 (2001)。[49] S. T. Bramwell, J.-Y. Fortin, P. C. W. Holdsworth, S. Peysson, J.-F. Pinton, B. Portelli, and M. Sellitto, 《经典XY模型中的磁涨落：复杂系统中指数尾部的起源》, Phys. Rev. E 63, 041106 (2001)。[50] S. T. Banks and S. T. Bramwell, 《二维 XY 模型中依赖温度的涨落》, J. Phys. A 38, 5603 (2005)。[51] G. Palma, F. Niedermayer, Z. R´acz, A. Riveros, and D. Zambrano, 《零温度下二维XY模型磁化分布标度的有限尺寸修正》, Phys. Rev. E 94, 022145 (2016)。[52] G. Palma, 《二维谐和XY模型中普适涨落的温度依赖性》, Phys. Rev. E 73, 046130 (2006)。[53] K. Binder, 《伊辛模型块分布函数的有限尺寸标度分析》, Z. Phys. B Cond. Mat. 43, 119 1981( )。[54] D. Loison, 《Kosterlitz–Thouless相变的Binder累积量》, J. Phys. Condens. Matter 11, L401 (1999)。[55] M. Hasenbusch, 《Kosterlitz–Thouless相变处的Binder累积量》, J. Stat. Mech.: Theory Exp 2008, P08003 (2008)。[56] N. A. Keepfer、I.-K. Liu、F. Dalfovo 和 N. P. Proukakis, 《囚禁超冷原子玻色气体中从二维到三维的相变维度交叉》, 《物理评论研究》4, 33130 (2022)。[57] P. Comaron、F. Larcher、F. Dalfovo 和 N. P. Proukakis, 《超冷二维玻色气体的淬火动力学》, Physical Review A 100, 033618 (2019)。[58] M. Kobayashi 和 L. F. Cugliandolo, 《随机 Gross-Pitaevskii 方程中的热淬火：涡旋网络的形态》, 《欧洲物理快报》115, 20007 (2016)。[59] M. Kobayashi 和 L. F. Cugliandolo, 《三维 U(1) 复场理论的淬火动力学：涡旋缠结的几何与标度表征》, Phys. Rev. E 94, 062146 (2016)。[60] I.-K. Liu、J. Dziarmaga、S.-C. Gou、F. Dalfovo 和 N. P. Proukakis, 《囚禁超冷玻色气体中的 Kibble-Zurek 动力学》, 《物理评论研究》2, 033183 (2020)。[61] A. Sorensen 和 P. Sorensen, 《从重离子碰撞中质子累积量的有限尺寸标度确定强子到夸克—胶子等离子体相变的临界点》(2024), arXiv:2405.10278 [nucl-th]。[62] M. Kikuchi、N. Ito 和 Y. Okabe, 《统计依赖性分析》, Int. J. Mod. Phys. C 07, 379 (1996)。[63] G. Carleo、G. Bo´eris、M. Holzmann 和 L. Sanchez-Palencia, 《二维无序玻色子的普适超流转变与输运性质》, 《物理评论快报》111, 050406 (2013)。[64] W. J. Kwon、G. Moon、J.-y. Choi、S. W. Seo 和 Y.-i. Shin, 《高度扁平玻色–爱因斯坦凝聚体中超流湍流的弛豫》, Physical Review A 90, 063627 2014( )。[65] M. T. Reeves、K. Goddard-Lee、G. Gauthier、O. R. Stockdale、H. Salman、T. Edmonds、X. Yu、A. S. Bradley、M. Baker、H. Rubinsztein-Dunlop、M. J. Davis 和 T. W. Neely, 《二维量子涡旋气体中的湍流弛豫至平衡》, Phys. Rev. X 12, 011031 (2022)。[66] A. Karailiev、M. Gazo、M. Ga˙lka、C. Eigen、T. Satoor 和 Z. Hadzibabic, 《观测到驱动量子气体中的逆湍流波级联》, 《物理评论快报》133, 243402 (2024)。[67] J. Schole、B. Nowak 和 T. Gasenzer, 《非热固定点附近二维超流体的临界动力学》, Physical Review A 86, 013624 (2012)。[68] M. Karl 和 T. Gasenzer, 《淬火二维玻色气体中的强反常非热固定点》, New J. Phys. 19, 093014 (2017)。[69] N. Rasch 和 T. Gasenzer, 《反常非热固定点附近衰减的超流湍流》(2025), arXiv:2509.21285 [cond-mat]。[70] O. K. Diessel、S. Diehl 和 A. Chiocchetta, 《二次驱动凝聚体中涌现的 Kardar-Parisi-Zhang 相》, 《物理评论快报》128, 070401 (2022)。[71] K. Deligiannis、Q. Fontaine、D. Squizzato、M. Richard、S. Ravets、J. Bloch、A. Minguzzi 和 L. Canet, 《离散二维驱动耗散型激子极化激元凝聚体中的 Kardar-Parisi-Zhang 普适性》, 《物理评论研究》4, 043207 (2022)。[72] S. Widmann、S. Dam、J. D¨ureth、C. G. Mayer、R. Daviet、C. P. Zelle、D. Laibacher、M. Emmer- ling、M. Kamp、S. Diehl、S. Betzold、S. Klembt 和 S. H¨ofling, 《观测到二维中的 Kardar-Parisi-Zhang 普适标度》(2025), arXiv:2506.15521

[量子物理]。[73] A. J. Groszek, P. Comaron, N. P. Proukakis 和 T. P. Billam, 《淬火二维玻色气体动力学临界指数的交叉》, 《物理评论研究》3, 1（2021年）。[74] M. Gazo, A. Karailiev, T. Satoor, C. Eigen, M. Ga-lka 和 Z. Hadzibabic, 《均匀二维玻色气体中的普适粗化》, 《科学》389, 802（2025年）。[75] E. Chang, V. P. Singh, A. Beregi, E. Rydow, L. Mathey, C. J. Foot 和 S. Sunami, 《双层二维玻色气体中耦合诱导的普适动力学》（2025年）, arXiv:2510.23600 [凝聚态物理·量子气体]。[76] L. Mathey, K. J. G¨unter, J. Dalibard 和 A. Polkovnikov, 《超冷原子二维玻色混合物中的动态科斯特利茨-索利斯转变》, Physical Review A 95, 053630（2017年）。[77] D. Adu Smith, M. Gring, T. Langen, M. Kuhnert, B. Rauer, R. Geiger, T. Kitagawa, I. Mazets, E. Dem-ler 和 J. Schmiedmayer, 《通过完整分布函数的弛豫动力学揭示预热化》, New J. Phys. 15, 75011（2013年）。[78] A. Steffens, M. Friesdorf, T. Langen, B. Rauer, T. Schweigler, R. H¨ubener, J. Schmiedmayer, C. Riofr´ıo 和 J. Eisert, 《利用超冷原子实现实验量子场层析的探索》, Nature Communications 6, 7663（2015年）。[79] S. Gopalakrishnan, A. Morningstar, R. Vasseur 和 V. Khemani, 《全计数统计揭示扩散输运的不同普适类》, Physical Review B 109, 024417（2024年）。[80] L. Mathey 和 A. Polkovnikov, 《量子淬火后二维超流体中的光锥动力学与反向基布尔-祖雷克机制》, Physical Review A 81, 033605（2010年）。[81] M. Abuzarli, N. Cherroret, T. Bienaim´e 和 Q. Glo-rieux, 《二维光子流体中的非平衡预热态》, 《物理评论快报》129, 100602（2022年）。[82] J.-C. Yu, S. Bhave, L. Reeve, B. Song 和 U. Schneider, 《在光学准晶中观测二维玻色玻璃》, 《自然》633, 338（2024年）。[83] L. Chomaz, L. Corman, T. Bienaim´e, R. Desbuquois, C. Weitenberg, S. Nascimb`ene, J. Beugnon 和 J. Dal-ibard, 《均匀准二维玻色气体中通过横向凝聚实现相干性的涌现》, Nature Communications 6, 6162（2015年）。[84] Y. He, Z. Chen, H. Zhen, M. Huang, M. K. Parit 和 G.-B. Jo, 《探索二维偶极玻色气体中的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 相变》, Science Advances 11, eadr2715（2025年）。[85] J. Colbois, N. Chepiga, S. Adam, G. Lemari´e 和 N. Laflorencie, 《极值统计作为探测超流体到玻色玻璃的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 相变的工具》（2025年）, arXiv:2512.09029 [凝聚态物理·无序与非平衡]。[86] P. B. Blakie, A. S. Bradley, M. J. Davis, R. J. Ballagh 和 C. W. Gardiner, 《利用C场技术研究超冷玻色气体的动力学与统计力学》, Advances in Physics 57, 363（2008年）。[87] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller 和 E. Teller, 《利用高速计算机进行状态方程计算》, Journal of Chemical Physics 21, 1087 1953（）。

[88] W. K. Hastings, 《使用马尔可夫链的蒙特卡洛抽样方法及其应用》, Biometrika 57, 97（1970）。[89] W. Weimer、K. Morgener、V. P. Singh、J. Siegl、K. Hueck、N. Luick、L. Mathey 和 H. Moritz, 《BEC-BCS 跨越中的临界速度》, 《物理评论快报》114, 095301（2015）。[90] A. Gelman、W. R. Gilks 和 G. O. Roberts, 《随机游走 Metropolis 算法的弱收敛与最优缩放》, Ann. Appl. Probab. 7, 110（1997）。[91] G. O. Roberts 和 J. S. Rosenthal, 《多种 Metropolis-Hastings 算法的最优缩放》, Stat. Sci. 16, 351（2001）。[92] T. L. Harte、E. Bentine、K. Luksch、A. J. Barker、D. Trypogeorgos、B. Yuen 和 C. J. Foot, 《多重射频着装绝热势中的超冷原子》, Physical Review A 97, 013616（2018）。[93] H. Perrin 和 B. M. Garraway, 第四章——利用射频绝热势囚禁原子（Academic Press, 2017）, 第181–262页。[94] E. Bentine、A. J. Barker、K. Luksch、S. Sunami、T. L. Harte、B. Yuen、C. J. Foot、D. J. Owens 和 J. M. Hutson, 《射频着装超冷原子混合物中的非弹性碰撞》, 《物理评论研究》2, 033163（2020）。[95] A. J. Barker、S. Sunami、D. Garrick、A. Beregi、K. Luksch、E. Bentine 和 C. J. Foot, 《利用多重射频着装势实现物种选择性双势阱》, J. Phys. B 53, 155001（2020）。[96] S. Sunami, *Non-equilibrium Dynamics in Two-dimensional Quantum Systems*, 博士论文, 牛津大学（2021）。[97] K. Luksch、E. Bentine、A. J. Barker、S. Sunami、T. L. Harte、B. Yuen 和 C. J. Foot, 《利用超冷原子探测多频原子-光子相互作用》, New J. Phys. 21, 073067（2019）。[98] M. Holzmann、M. Chevallier 和 W. Krauth, 《准二维囚禁玻色气体的半经典理论》, Eur. Phys. Lett. 82, 30001（2008）。[99] M. Holzmann、M. Chevallier 和 W. Krauth, 《准二维囚禁玻色气体中的普适关联与相干性》, Physical Review A 81, 043622（2010）。[100] R. J. Fletcher、M. Robert-de Saint-Vincent、J. Man、N. Navon、R. P. Smith、K. G. H. Viebahn 和 Z. Hadzibabic, 《通过调节囚禁气体中的相互作用关联贝雷津斯基-科斯特利茨-索利茨相变与 BEC 相变》, 《物理评论快报》114, 255302（2015）。[101] D. W. Scott, *Multivariate density estimation: theory, practice and visualization* 2, , , , 第版, Wiley 概率与统计丛书（Wiley, 霍博肯, 新泽西州, 2015—2015）。[102] A. Bezett 和 P. B. Blakie, 《囚禁相互作用玻色气体的临界性质》, Physical Review A 79, 033611（2009）。[103] M. J. Davis 和 S. A. Morgan, 《经典场的微正则温度：在玻色-爱因斯坦凝聚中的应用》, Physical Review A 68, 053615（2003）。[104] E. S. Pearson, 《关于正态性检验的注记 I》, Biometrika 22, 423（1931）。

补充信息

I. 对比度提取及实验噪声的影响

影响对比度测量的主要噪声来源是图像中的随机噪声。对比度通过对积分柱密度在波矢 $Q = m\Delta z/\hbar t_{TOF}$ 附近的离散傅里叶变换取模，并除以检测到的原子数来提取。我们对峰值周围 ± 1 个数据点取平均，得到更准确的数值，因为这样可以平均掉涨落，如图A1a所示。进一步增加远离 Q 的数据点并无益处，因为信噪比会下降。这会导致测得的对比度出现小幅、确定性的降低。噪声信号的对比度提取可建模为

$$C_{ex} = |C_0 + \xi_{Re} + i\xi_{Im}|, \tag{9}$$

其中， C_0 为真实对比度，而 $\xi_{Re/Im}$ 表示噪声的实部和虚部。在不失一般性的情况下，我们假设 $C_0 \in \mathbb{R}$。我们从波矢$\xi_{Re/Im}$ 处傅里叶变换后的信号中获得 $k > 1.5Q$ 的统计量，其非常接近正态分布，如图A1b-c所示，因此可以用高斯白噪声对其进行准确建模。由式9可知，噪声并非加性噪声；因此，不能简单地通过概率分布的卷积来建模其影响。如果我们在复数域中分析对比度，情况将有所不同，但问题维度的增加要求更多的实验数据。

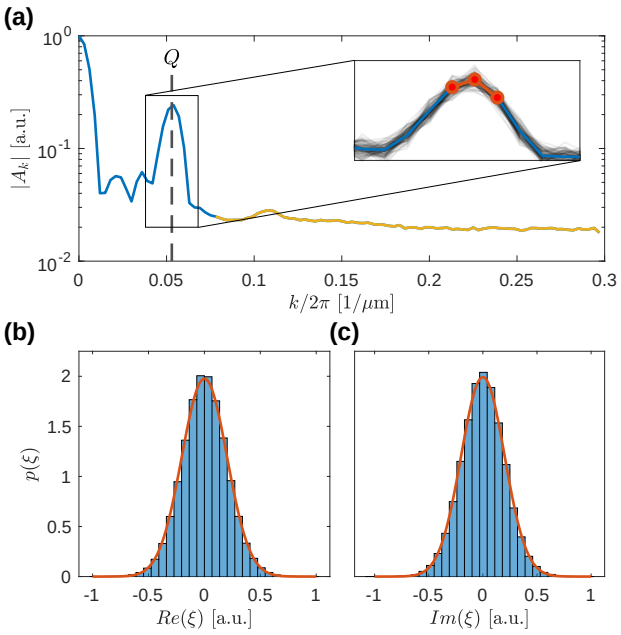

图 A1. 从图像中获取噪声统计。(a)，干涉信号的典型平均频谱，在 Q 处显示峰值。噪声统计取自以黄色标出的频谱部分。插图：Q 附近的平均频谱，以线性刻度绘制。我们使用标出的三个数据点的均值来计算对比度。阴影表示成像噪声的各种实现。(b)、(c)，从高波矢处的实验图像频谱中获得的对比度噪声实部和虚部的统计，并附有高斯拟合。

为研究成像噪声对分布和矩的系统效应，我们从理论低温序参量分布中抽取了一个大样本。我们调整生成样本的均值和标准差，使其与实验观测到的 $\mathcal{D} = 20.9$处的对比度统计相匹配。噪声的实部和虚部取自具有不同标准差 σ的高斯分布，并使用式9计算对比度。所得分布经过归一化处理，使其具有零均值和单位方差，并与图A2a中的原始分布进行比较。由于该分布的右尾衰减更快，噪声最显著的影响是负偏度减小。此外，我们还数值计算了噪声样本的三阶和四阶中心矩随 σ的变化，如图A2b-c所示。图2a中校正分布的获取过程与此类似；不过，在本例中，原始

最终的无噪声分布通过蒙特卡罗模拟获得。

II. 对比度分布的统计分析

为分析和可视化观测到的对比度值分布，我们采用了一系列统计工具，包括核密度估计（KDE）、经验累积分布函数（eCDF）和经验生存函数（eSF）。核密度估计根据离散观测值给出平滑、连续的概率密度函数估计，在此主要用于可视化。核密度估计的置信区间通过自助法获得。计算核密度估计时，全程使用高斯核，带宽则根据斯科特规则 [101] 选取。

为比较概率分布，我们采用经验累积分布函数（eCDF）及其互补形式经验生存函数（eSF），定义为 eSF $=1-$ eCDF。这些阶跃函数在每个 n个观测数据点处增加 $1/n$。这种方法尤其有优势，因为计算 eCDF 无需分箱，而且它们几乎必然收敛到潜在分布。置信区间

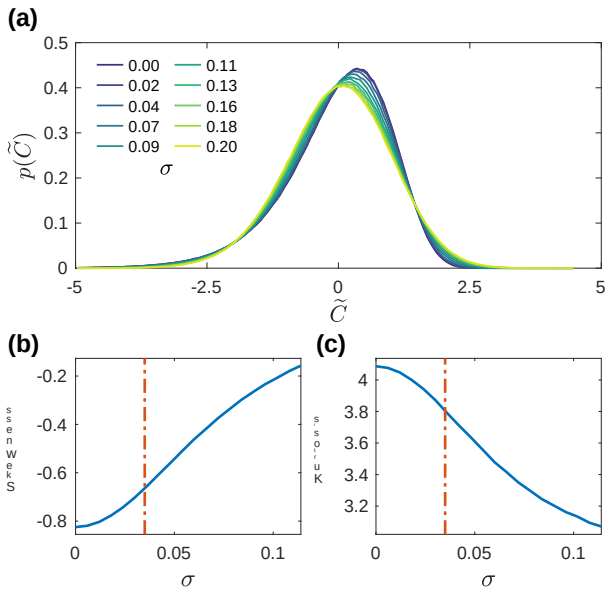

图 A2. 噪声对比度统计的影响。(a) 相对于平均对比度，具有不同噪声水平的理论低温普适分布。(b)、(c) 偏度和峰度随影响理论分布的噪声强度变化。噪声强度相对于平均对比度给出。橙色点划线表示 $\mathcal{D} = 20.9$ 时的实验噪声水平。

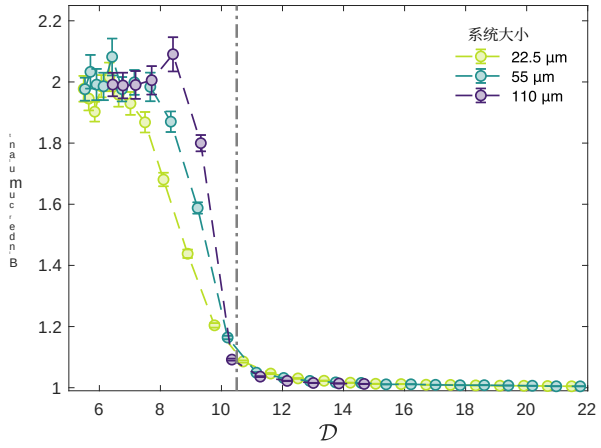

图 A3. 使用经典场蒙特卡洛模拟对 Binder 累积量交叉行为进行有限尺寸标度分析。每个数据点均根据涨落玻色场的 40000 个实现样本计算得出，误差棒通过自助法获得。灰色点划线表示临界点。

eCDF 和 eSF 通过自助法获得。在对数刻度上绘制 eCDF 和 eSF，可以凸显分布尾部的行为：具体而言，eCDF 的左尾和 eSF 的右尾。图 2 中采用这种方法来展示测得的分布向普适形式收敛。

III. 高阶矩可观测量的有限尺寸标度分析

为了分析偏度、峰度和 Binder累积量的有限尺寸标度行为，我们对不同系统大小的二维玻色气体进行蒙特卡罗模拟 $r_{sys} = \{22.5\,\mu\mathrm{m},\ 55\,\mu\mathrm{m},\ 110\,\mu\mathrm{m}\}$，其中第一个是实验中的系统大小。此外，我们将结果与非均匀谐俘获系统进行比较，该系统对应于淬火实验所用的实验参数。我们用两种不同的方法提取矩。首先，对于涨落玻色场的每个实现样本，我们计算半径为 $A = \int d\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})$ 的圆形区域内的空间平均序参量，以避免边缘效应。使用 40 000 个 A实现样本，我们计算 Binder累积量，结果如图 A3所示。Binder累积量跃变逐渐变得尖锐，使我们能够精确确定临界相空间密度为$\mathcal{D}_c^{(sim)} = 10.5$，如垂直点划线所示。

我们还通过使用以下方法评估对比度统计来模拟实验：利用干涉对比度的统计量，按照公式（1）进行计算，其中积分区域与实验选择性成像区域相匹配；随后，我们根据所得的一组对比度值计算各阶矩。在此分析中，我们随机选择处于相同温度和化学势下的场对，并从多个区域评估对比度，从而获得至少 150 000 个统计独立的对比度值。图 A4 展示了 Binder累积量，以及归一化对比度的偏度和峰度$\widetilde{\ }$。 C对于所考虑的所有均匀系统，在所模拟的对比度统计的功率谱密度范围内，由此得到的所有高阶矩观测量均表现出良好的一致性。非均匀系统（例如本文所考虑的谐阱系统）则需要对序参量采用另一种定义[102]。然而，由于选择性探测区域位于系统中心附近，且相较于典型系统大小而言很小，因此，从谐阱系统的对比度统计矩中提取的 Binder累积量在超流相中给出一致的数值，并且在交叉区域中的偏差仍然很小。利用先前确定的临界点，我们得到干涉对比度探针对应的 Binder累积量临界值为 $(\mu_4/\mu_2^2)_c^{sim} \approx 1.2$，这与有限尺寸系统中先前的数值研究结果一致 [56, 103]。

IV. 有限抽样对高阶矩可观测量的影响

从有限尺寸样本中表征非高斯分布本身就很困难，因为偏度和峰度的估计量可能存在偏差，且

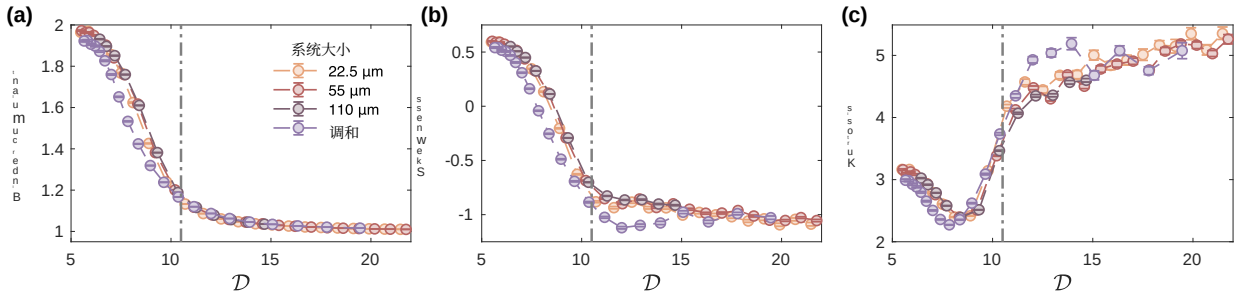

图 A4. 从不同系统大小以及谐阱系统的模拟干涉对比度统计中提取的高阶矩观测量。对于所有图，每个数据点均由 150000 个对比度实现样本贡献。灰色虚线表示临界点，该临界点通过 Binder累积量的有限尺寸标度分析获得（图 A3）。

方差可能很大。为研究这些影响，我们采用拒绝抽样法，从二维 XY 模型的普适低温分布（式（3），通常称为 BHP 分布）中生成各种规模的样本。我们将每个样本标准化为均值为零、标准差为一，并计算偏度和峰度，这与实验对比度的分析流程类似。重复这一流程 10 000 次，以准确统计高阶矩的抽样分布，并计算所得的均值和方差。作为参照，我们对来自正态分布的样本重复相同的流程。我们将数值结果与适用于正态分布抽样的解析公式进行比较 [104]:

$$\langle \gamma_1^{(N)} \rangle - \langle \gamma_1^{(\infty)} \rangle = 0, \tag{10}$$

$$\langle \gamma_2^{(N)} \rangle - \langle \gamma_2^{(\infty)} \rangle = -\frac{6}{N+1}, \tag{11}$$

$$\langle (\gamma_1^{(N)} - \langle \gamma_1^{(N)} \rangle)^2 \rangle = \frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}, \tag{12}$$

$$\langle (\gamma_2^{(N)} - \langle \gamma_2^{(N)} \rangle)^2 \rangle = \frac{24N(N-2)(N-3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)}. \tag{13}$$

我们在图 A5中展示结果。正如预期，从正态分布中抽样得到的参考数据与理论预测相符。然而，与均值为零且方差为单位方差的正态分布相比，采用 BHP 分布进行数值实验会产生更大的偏差和更大的方差。我们用以下模型拟合数值结果，并发现对于 BHP 分布， $1/N$ 模型给出

$$\langle \gamma_1^{(N)} \rangle - \langle \gamma_1^{(\infty)} \rangle \approx \frac{4.25}{N}, \tag{14}$$

$$\langle \gamma_2^{(N)} \rangle - \langle \gamma_2^{(\infty)} \rangle \approx -\frac{45}{N}, \tag{15}$$

$$\langle (\gamma_1^{(N)} - \langle \gamma_1^{(N)} \rangle)^2 \rangle \approx \frac{20}{N}, \tag{16}$$

$$\langle (\gamma_2^{(N)} - \langle \gamma_2^{(N)} \rangle)^2 \rangle \approx \frac{720}{N}. \tag{17}$$

对于典型数量的实验对比度值$N > 1000$，这意味着我们预期偏度的偏差为 8.5×10^{-3}，标准差为 0.14。同样，对于峰度，我们预期偏差为 -0.045，标准差为 0.85。

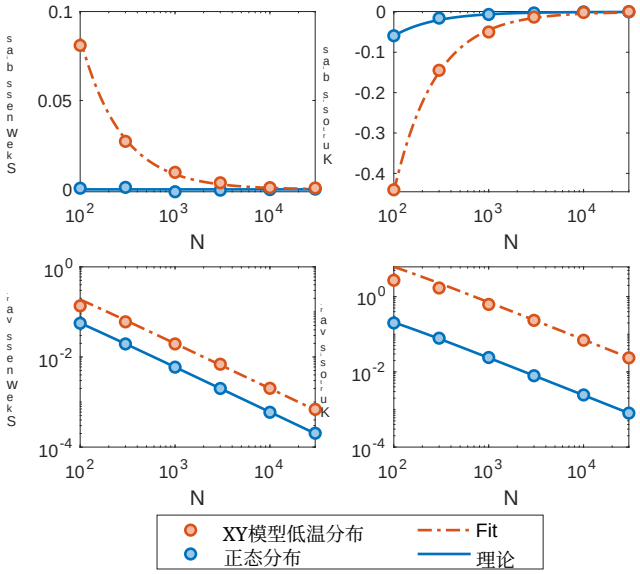

图 A5. 有限抽样对二维 XY 模型低温序参量分布的高阶矩观测量的影响。

V. 实时重整化群方程

在式(5)中，我们给出了参考文献 [43], 中引入的实时重整化群方程，这些方程基于

参考文献 [76, 80] 中为动力学正弦-戈登模型推导的方程。该对偶模型描述了 BKT 相变,

$$\frac{dg}{d\ell} = \left(2 - \frac{2}{\tau}\right) g, \tag{18}$$

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \frac{\pi^2 g^2}{\tau}, \tag{19}$$

其中 ℓ 为流参数，与实时间的关系为 $t = t_0 e^{\ell}$ 且 $\tau = 4\eta$。重整化群方程在 [76]中的非普适常数设定为使方程 19 的数值前因子为 1。这些方程描述了二维玻色气体跨越临界点的动力学，与用于识别对应于有序相的不动点的静态重整化群方程形成对比。