arXiv:2601.16243v1 [cs.FL] 22 Jan 2026

群元胞自动机的拓扑传递性是可判定的

Niccol`o Castronuovo[1],Alberto Dennunzio[2], 和 Luciano Margara[3]

[1]意大利里米尼“A. Einstein”高中[2]意大利米兰比可卡大学信息学、系统与通信系[3]意大利博洛尼亚大学切塞纳校区计算机科学与工程系

摘要

拓扑传递性是拓扑动力学中的一个基本概念，通常被视为全局动力学复杂性的基本指标。对于一般的元胞自动机，已知拓扑传递性是不可判定的。相比之下，对于阿贝尔群上的一维群元胞自动机，已有正面的可判定性结果；而将这一结论推广到高维和非阿贝尔群的情形，仍是一个未解决的问题。在本文中，我们通过证明：对于任意有限群上的 d 维（$d \geq 1$）群元胞自动机，拓扑传递性是可判定的，从而解决了这一问题。我们的方法结合了群元胞自动机的分解技术（将问题归约为对更简单组成部分的分析），并将现有文献中的若干结果推广到一维情形。作为这些结果的推论，并利用群元胞自动机各动力学性质之间已知的等价关系，我们还证明了若干相关概念的可判定性，包括全传递性、拓扑混合与弱混合、弱遍历混合与强遍历混合，以及遍历性。

关键词：动力系统、群元胞自动机、拓扑传递性、可判定性。

1 引言

离散时间动力系统是一个二元组（$\mathbb{X}, F$），其中 $\mathbb{X}$ 是一个拓扑空间（相空间），而 F: $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是一个连续映射。系统（$\mathbb{X}, F$）具有拓扑传递性，当且仅当对于每一对非空开集 $U, V \subseteq \mathbb{X}$，都存在一个整数$n \geq 0$，使得 $F^n(U) \cap V \neq \varnothing$。拓扑传递性是拓扑动力学中的一个基本概念，反映了系统在任意相

空间区域之间移动的能力，这种移动是在 F 的迭代作用下实现的。因此，拓扑传递性受到了广泛研究，并被普遍视为全局动力学复杂性的基本指标，常常也作为迈向混合等更强性质的基础（例如参见 [1, 8, 9, 10] 及其中的参考文献）。

元胞自动机（元胞自动机）是离散时间动力系统，其相空间为 $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$，其中 $\mathbb{S}$ 是一个有限状态集，且其全局演化映射 $F:\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}\to\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$是一个与 $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$的所有移位映射交换的连续函数。这里， d 是一个表示定义元胞自动机的相空间维数的正整数。群元胞自动机（群元胞自动机）是其相空间为 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 的元胞自动机，其中 $\mathbb{G}$ 是一个有限群，且映射 F: $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}\to\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个与该空间的所有移位交换的连续群端同态。

任意元胞自动机的全局映射 F 由局部规则 f 确定（Curtis-Hedlund-Lyndon 定理 [11]）。局部规则是一个有限对象，并且有多种等价表示方式，例如表格形式。这种有限描述引出了以下自然问题：给定定义 F的局部规则 f 的描述，是否可以通过算法判定系统（$\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$， F）是否满足某种预先指定的动力性质，例如拓扑传递性?

对于一般的元胞自动机，即使将范围限制在可逆一维元胞自动机，拓扑传递性也已被证明是不可判定的 [14]。相比之下，对于阿贝尔群上的一维群元胞自动机，拓扑传递性是可判定的 [5]，而且还有有效刻画 [6]。

本文探讨的问题是：对于超出一维阿贝尔情形的群元胞自动机，拓扑传递性是否算法可判定（见 [2] 中的问题 2 和 [3]中的问题 1）。本文的主要贡献是给出了完整的肯定回答：我们证明，对于任意维数、以任意有限群为底群的群元胞自动机，拓扑传递性都是可判定的（定理5）。证明结合了两个主要要素。

首先，我们提出一种保持传递性的分解技术，通过迭代地对词子群取商来实现。给定一个群元胞自动机 ($\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$， F)，过程 `VerbalDecomposition` 会生成一个有限的群元胞自动机族 {($\mathbb{G}_1$， F_1).....，($\mathbb{G}_k$， F_k)}，其底层群都不含非平凡真口群。我们证明，这种分解保持拓扑传递性：($\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$， F) 是拓扑传递的，当且仅当每个 ($\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d}$， F_i) 都是拓扑传递的（定理 1）。根据一条经典的结构性事实（备注 1），每个 $\mathbb{G}_i$ 都是同构单群的直积，因此，原来的判定问题可归约到这个约束极强的类。

其次，我们确立了分类中两个分支上的拓扑传递性的可判定性。对于阿贝尔情形，即 $\mathbb{G}\simeq(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$，我们利用 GCAs 通过多元劳朗多项式上的矩阵进行代数表示，并将一种基于特征多项式的有效传递性判据推广到任意维数（定理 3，在定理 2 的基础上建立）。对于非阿贝尔情形，即 $\mathbb{G}\simeq\mathbb{S}^n$，其中 $\mathbb{S}$ 是一个有限非阿贝尔单群，我们扩展了 [3] 的一维分析，并在满射情形下获得了一个判定过程（定理 4）。

将这些要素结合起来，即可得到一个显式算法，用于判定任意有限群广义元胞自动机的拓扑传递性（第 5 节），从而证明定理5。

此外，由于对群元胞自动机而言，拓扑传递性等价于全传递性、拓扑混合、弱混合与强遍历混合以及遍历性（第3节），我们的结果也意味着所有这些性质都是可判定的。

本文其余部分的组织如下。第2节回顾元胞自动机和群元胞自动机的基本定义及预备结果。第3节综述若干动力学性质及其之间的关系，并特别强调群元胞自动机情形下出现的简化。第4节介绍基于词子群的保持传递性的分解技术，并建立关键的归约定理。第5节和第6节分别针对阿贝尔情形和非阿贝尔情形，证明定义在同构单群直积上的群元胞自动机的拓扑传递性具有可判定性。最后，在第8节中，我们总结全文并讨论进一步研究的方向。

2 元胞自动机和群元胞自动机

本节回顾与元胞自动机和群元胞自动机相关的基本定义和基础结果。关于其他定义和结果，请读者参阅 [7] 中介绍的内容。

设 $\mathbb{S}$ 为有限状态集，且 d 为任意正整数。一个 d维构型是从 $\mathbb{Z}^d$ 到 $\mathbb{S}$的函数，即在无限网格 $\mathbb{Z}^d$上为 $\mathbb{S}$中的符号赋值。 $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$ 表示所有在 $\mathbb{S}$上的 d维构型的集合。给定任意构型 $c \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$ 和任意元素 $v \in \mathbb{Z}^d$， c 在位置 v 处的值记为 c_v。我们赋予 $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}$ 逐离散拓扑，即令每个因子 $\mathbb{S}$ 带有离散拓扑后得到的乘积拓扑。在该拓扑下， $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个紧拓扑空间。

对于元素 $u \in \mathbb{Z}^d$， u-平移映射 $\sigma_u : \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$ 定义如下：

$$\forall c \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d},\ \forall v \in \mathbb{Z}^d :\ \sigma_u(c)_v = c_{v+u}.$$

注意，$(\mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d},\ \sigma_u)$ 本身就是一个元胞自动机。定义在 $\mathbb{S}$ 上的 d 维元胞自动机是指同时满足以下条件的连续函数 $F: \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d}$：它与平移可交换，即对每个 $u \in \mathbb{Z}^d$，都有 $F \circ \sigma_u = \sigma_u \circ F$。

任意 d 维元胞自动机也可以等价地通过局部规则 $f: \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}$ 来定义，并配以由 $\mathbb{Z}^d$ 中的元素构成的邻居向量 $v_f = (v_1,\ \ldots,\ v_k)$，如下所示：

$$\forall c \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^d},\ \forall v \in \mathbb{Z}^d :\ F(c)_v = f(c_{v+v_1}, \ldots, c_{v+v_k}).$$

设 $\mathbb{G}$ 是一个有限群，其单位元为 e。集合 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 在由 $\mathbb{G}$ 的群运算诱导的逐分量运算下本身构成一个群。我们用 $e^{\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 表示群 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 的单位元，也就是在每个位置 $v \in \mathbb{Z}^d$ 都取值为 e 的构型。显然，赋予逐离散拓扑后，$\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 成为一个紧拓扑群。若构型 $c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 满足使 $c_v \neq e$ 成立的位置 $v \in \mathbb{Z}^d$ 的数量有限，则称其为有限构型。

若 CA $F:\ \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 是群元胞自动机（GCA），则称其为群元胞自动机（GCA），当且仅当 F 是 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$的端同态。在这种情况下， F 的局部规则是一个同态

$f\colon\ \mathbb{G}^k \to \mathbb{G}$。任意群同态 $f\colon\ \mathbb{G}^k \to \mathbb{G}$ 都由一个同态族 $h_i\colon\ \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 确定，其像两两可交换 [7], ，从而

$$f(u_1, \ldots, u_k) = \prod_{1 \le i \le k} h_i\big(u_i\big)$$

定义良好。我们将记作 $f = (h_1, \ldots\ldots, h_k)$。

记号。

- 当构形空间根据上下文可以明确确定时，我们将仅用其局部规则 f 或全局规则 F 来指称元胞自动机。在其他情况下，为方便明确指定构形空间 $\mathbb{X}$，我们将用有序对 $(\mathbb{X},\ F)$ 表示群元胞自动机。

- “群元胞自动机”一词将指 d 维群元胞自动机，其中 d 是任意正整数。每当我们具体讨论一维情形时，将对此作出明确说明。

- 我们称群元胞自动机定义在群 $\mathbb{G}$ 上，是指其构形空间为 $G^{\mathbb{Z}^d}$。

3 动力学性质及其关系

如果对于任意一对非空开集$U, V \subseteq \mathbb{X}$，都存在一个整数 $n \ge 0$，使得 $F^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则系统$(\mathbb{X}, F)$是拓扑传递的。
文献中还定义并研究了离散时间动力系统的许多其他动力学性质。下面简要列出其中一些及其定义。由于这些性质并非本文关注的重点，这里对它们的定义作了简洁表述。

– 如果对于每个 $n \ge 1$，$(\mathbb{X}, F^n)$都是拓扑传递的，则称$(\mathbb{X}, F)$是完全传递的。
– 如果对于任意一对非空开集 $U, V \subseteq \mathbb{X}$，都存在 $n_0 \ge 1$，使得对于所有 $n \ge n_0$.，$F^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则称$(\mathbb{X}, F)$是拓扑混合的。
– 如果$(\mathbb{X} \times \mathbb{X}, F \times F)$是传递的，则称$(\mathbb{X}, F)$是拓扑弱混合的。
设 $(\mathbb{X},\ \mathcal{B},\ \mu)$ 是一个概率空间，且 $F\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是保持 μ 的可测映射。

– $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu, F)$ 是遍历强混合的当且仅当对所有 $A, B \in \mathcal{B}$ 都有

$$\mu\big(F^{-n}A \cap B\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)\mu(B).$$

– $(\mathbb{X},\ \mathcal{B},\ \mu,\ F)$ 是遍历弱混合的，当且仅当对所有 $A,\ B \in \mathcal{B}$ 都有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \big|\mu\big(F^{-n}A \cap B\big) - \mu(A)\mu(B)\big| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

– $(\mathbb{X},\ \mathcal{B},\ \mu,\ F)$ 是遍历的，如果

$$F^{-1}(A) = A \ (\mathrm{mod}\ \mu) \implies \mu(A) \in \{0, 1\} \quad \text{for all } A \in \mathcal{B}$$

对于一般动力系统，我们知道

拓扑混合 $\Longrightarrow$ 拓扑弱混合 $\Longrightarrow$ 完全传递

$$\Longrightarrow \text{ topologically transitive,}$$

and

$$\text{ergodically strongly mixing} \Longrightarrow \text{ergodically weakly mixing} \Longrightarrow \text{ergodic.}$$

对于群元胞自动机，整体情况要简单得多。事实上，不难证明，对于群元胞自动机，拓扑传递性、全传递性、拓扑混合、弱遍历混合、强遍历混合以及遍历性是等价性质。特别是，对于 $d = 1$ 的情形，这一等价性已在 [3, 定理 3], 中得到证明，而同样的论证稍加努力便可推广到 $d > 1$的情形。

4 一种保持群元胞自动机拓扑传递性的分解技巧

设 $\mathbb{G}$ 为一个有限群，且 $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{G}$ 是 $\mathbb{G}$的全不变子群。群 $\mathbb{G}$ 的全不变子群是指满足以下条件的子群 $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$ ： 对于 $\mathbb{G}$的每个端同态 ϕ ，都有 $\phi(\mathbb{H}) \leq \mathbb{H}$。对于 $g \in \mathbb{G}$，我们用 $[g] := g\,\mathbb{H}$ 表示 $\mathbb{G}/\mathbb{H}$中的 g 的陪集。此外，对于 $c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ ，我们用 $[c]$ 表示由 $[c]_v := [c_v]$ 对每个 $v \in \mathbb{Z}^d$定义的$(\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}$ 中的元素。

设 F 是 $\mathbb{G}$ 上的群元胞自动机。由于 $\mathbb{H}$ 是完全不变的，因此 $F(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}) \subseteq \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$。这些映射

$$\overline{F} : \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d} \quad \text{and} \quad \widetilde{F} : (\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d} \to (\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}$$

定义如下:

$$\forall c \in \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d} : \ \overline{F}(c) := F(c) \text{ and} \tag{1}$$

$$\forall [c] \in (\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d} : \ \widetilde{F}([c]) := [F(c)]. \tag{2}$$

注意，根据方程 (1) 和 (2)，并且由于 $F(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}) \subseteq \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$，$(\mathbb{H}, F)$ 和 $((\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}, \widetilde{F})$ 是定义良好的群元胞自动机。

现在回顾词子群的定义。设 $w(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个含 n 个变量的群字，即一个形如以下形式的（约化）词:

$$w(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\varepsilon_k}, \qquad i_j \in \{1, \ldots, n\},\ \varepsilon_j \in \{\pm 1\}.$$

与 w 相关联的 $\mathbb{G}$ 的词子群是子群

$$w(\mathbb{G}) = \langle\, w(g_1, \ldots, g_n) \mid g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{G} \,\rangle,$$

它由将 $\mathbb{G}$ 中任意元素代入变量 $x_1, \ldots, x_n$ 后得到的 w 的所有取值生成。举例来说，考虑词

$$w(x_1, x_2) = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2.$$

与之相关的词子群是 $\mathbb{G}$的换位子群。

众所周知，词子群是完全不变的。

注 1. 唯一没有非平凡真口群的有限群，是由同构单群构成的直积（例如参见 *[3]* 中的定理 *8*）。

现在，我们通过对词子群取商来定义群元胞自动机的分解函数。

1 函数 VerbalDecomposition($\mathbb{G}$,F)**: 2 如果** $\mathbb{G}$ 不存在非平凡真口群 **则 3 返回** $\{(\mathbb{G},\ F)\}$; **4 结束 5 否则 6** 令 $\mathbb{H}$ 为 $\mathbb{G}$ 的非平凡真词子群; ~**7** 令 a $\leftarrow$ VerbalDecomposition($\mathbb{G}/\mathbb{H}, F$); **8** 令 b $\leftarrow$ VerbalDecomposition($\mathbb{H}, F$); **9 返回** $a \cup b$; **10 结束**

—

函数 VerbalDecomposition 以一个群元胞自动机（$\mathbb{G}$，F）为输入，并生成一个有限集合 $\{$（$\mathbb{G}_1$，F_1）$\ldots$，（$\mathbb{G}_k$，F_k）$\}$，其中每个 $\mathbb{G}_i$ 都不存在非平凡真词子群，并且对于所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$，F_i 都是定义在 $\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d}$ 上的群元胞自动机。注意，根据注 1，每个 $\mathbb{G}_i$ 都是同构单群的直积。

现在，我们已经具备了陈述以下定理所需的全部要素。

定理 1. 设 $\mathbb{G}$是一个有限群，F 是定义在 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$. 上的群元胞自动机。令

$$\{(\mathbb{G}_1, F_1), \ldots, (\mathbb{G}_k, F_k)\}$$

为函数 VerbalDecomposition作用于$(\mathbb{G}, F)$后产生的输出。则$(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 是拓扑传递的，当且仅当每个$(\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d}, F_i)$ 都是拓扑传递的。

证明。 为证明该定理，只需证明：对于 $\mathbb{G}$ 的每个言词子群 $\mathbb{H}$，$(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 是拓扑传递的，当且仅当 $(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 和 $((\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}, \widetilde{F})$ 都是拓扑传递的。我们将分别证明以下三个陈述。

(a) 如果$(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 和$((\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}, \widetilde{F})$ 是拓扑传递的，那么 $(\mathbb{G}, F)$ 就是拓扑传递的。

(b) 若 $(\mathbb{G}, F)$ 是拓扑传递的，则 $((\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}, \widetilde{F})$ 是拓扑传递的。

(c) 若 $(\mathbb{G}, F)$ 是拓扑传递的，则 $(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 是拓扑传递的。

命题（a）的证明直接改编自 $[3, \text{定理 } 4]$ 中给出的关于 $d = 1$ 的相应命题的证明。请注意，在该证明中，作者使用了 Moothathu 的一个结果（ [16] 中的推论 9.3），该结果指出，两个拓扑传递的元胞自动机的乘积仍是拓扑传递的。尽管 Moothathu 的结果是在一维情形下表述的，但对于 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 上的群元胞自动机，同样的结论也成立。事实上，拓扑传递的群元胞自动机总是拓扑弱混合的（见 [15]），而拓扑传递的群元胞自动机与拓扑弱混合的群元胞自动机的乘积仍是拓扑传递的。

这可由 [12], 中的结果推出；Moothathu 在证明其推论 9.3 时也使用了相同的工具。

陈述（b）的证明与 [3, 定理 4]中给出的 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}}$相应结果的证明完全相同。

从技术上来说，陈述（c）的证明最为复杂，且依赖于词子群的结构性质。它是 [3] 实现群元胞自动机拓扑传递性可判定性完整证明所缺少的关键步骤。

为便于阅读，我们仅针对一个特定的词子群，即换位子群，证明陈述（c）。这个词子群是由词 $w(x,\ y) = xyx^{-1}y^{-1}$定义的 $w(\mathbb{G})$。一般情形的证明遵循相同的论证，只需将 $w(x,\ y)$替换为定义相关词子群的词即可。

设 k 是任意正整数，$M \in (\mathbb{Z}^d)^k$，且 $P \in \mathbb{G}^k$。$G^{\mathbb{Z}^d}$ 的柱集 $Cyl(M,\ P)$定义为

$$Cyl(M,P) = \left\{ c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d} :\ c_{M(i)} = P(i) \text{ for every } i \in \{1,\dots,k\} \right\}$$

其中，$M(i)$和 $P(i)$分别表示 M和 P的第 i个元素。

柱集是闭开集，并构成 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 上逐离散拓扑的一个基。于是，$(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 具有拓扑传递性，当且仅当对于每个 $k > 0$、每个 $M \in (\mathbb{Z}^d)^k$ 以及每一对 $P, Q \in \mathbb{G}^k$，都存在 $n \geq 0$，使得

$$F^n\left(Cyl(M,P)\right) \cap Cyl(M,Q) \neq \varnothing. \tag{3}$$

现在证明，如果性质 (3) 成立，那么

$$F^n\left(Cyl(M,P) \cap \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}\right) \cap \left(Cyl(M,Q) \cap \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}\right) \neq \varnothing,$$

或者，等价地说，$(\underline{\mathbb{G}}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 的拓扑传递性蕴含 $(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 的拓扑传递性。

设 $k > 0$, $M \in (\mathbb{Z}^d)^k$ 以及 $P, Q \in \mathbb{H}^k$。根据 $\mathbb{H}$, $S = \{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} : g_1,\ g_2 \in \mathbb{H}\}$ 的定义，它是 $\mathbb{H}$ 的有限生成集。$\mathbb{H}$ 中的每个元素都可以表示为 S 中有限多个元素的乘积。由于 $\mathbb{H}$ 是有限的，因此存在一个常数 q，它仅取决于 $\mathbb{H}$，使得 $\mathbb{H}$ 中的每个元素都可以表示为恰好 q 个 S 中元素的乘积（通过在乘积中填入适当数量的等于 e 的元素即可实现）。因此，在下文中，不失一般性地假设下面引入的模式 P 和 Q 取值于 S，而不是取值于 $\mathbb{H}$。

$$\begin{aligned} P &= \left(x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}, \dots, x_k y_k x_k^{-1} y_k^{-1}\right) \\ Q &= \left(r_1 s_1 r_1^{-1} s_1^{-1}, \dots, r_k s_k r_k^{-1} s_k^{-1}\right), \end{aligned}$$

其中 $x_i,\ y_i,\ r_i,\ s_i \in \mathbb{H}$。令

$$\begin{aligned} P_x &= (x_1,\dots,x_k), & P_x^{-1} &= (x_1^{-1},\dots,x_k^{-1}), \\ P_y &= (y_1,\dots,y_k), & P_y^{-1} &= (y_1^{-1},\dots,y_k^{-1}), \\ Q_r &= (r_1,\dots,r_k), & Q_r^{-1} &= (r_1^{-1},\dots,r_k^{-1}), \\ Q_s &= (s_1,\dots,s_k), & Q_s^{-1} &= (s_1^{-1},\dots,s_k^{-1}). \end{aligned}$$

利用逐分量群乘法，我们得到

$$P = P_x P_y P_x^{-1} P_y^{-1} \quad \text{and} \quad Q = Q_r Q_s Q_r^{-1} Q_s^{-1}.$$

由于 $(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 是拓扑传递的，我们可以找到 $c_x \in Cyl(M, P_x)$、$c_y \in Cyl(M, P_y)$、$c_r \in Cyl(M, Q_r)$ 和 $c_s \in Cyl(M, Q_s)$，使得

$$F^n(c_x) = c_r \quad \text{and} \quad F^n(c_y) = c_s$$

然后

$$F^n(c_x c_y c_x^{-1} c_y^{-1}) \;=\; c_r c_s c_r^{-1} c_s^{-1}.$$

注意，对于拓扑传递的群元胞自动机 F，一旦柱集的大小固定，就存在一个正整数 n，使得任意两个大小相同的柱集都能在恰好经过 n 次 F 的迭代后相互到达。另请注意，$c_x, c_y, c_x^{-1}, c_y^{-1}, c_r, c_s, c_r^{-1}, c_s^{-1} \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，但是

$$c_x c_y c_x^{-1} c_y^{-1} \in Cyl(M, P) \cap \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d} \quad \text{and} \quad c_r c_s c_r^{-1} c_s^{-1} \in Cyl(M, Q) \cap \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}.$$

由于 P 和 Q 是 $\mathbb{H}^k$ 的任意元素，因此 $(\mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}, F)$ 是拓扑传递的。

□

5 直积的同构阿贝尔单群上的群元胞自动机的拓扑传递性

同构的阿贝尔单群的直积恰好是同构于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ 的有限群，其中 p 是素数，n 是正整数。基于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ 的群元胞自动机可以用多元劳朗多项式和级数自然表示。任意构型 $c \in ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n)^{\mathbb{Z}^d}$ 都表示为一个长度为 n 的向量，其分量属于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]]$，而映射 F 则表示为一个矩阵 $n \times n$，其元素属于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]$。在这种表示下，第 n 次迭代 $F^n(c)$ 可以等价地计算为 $M^n v$，其中 M 是 F 的矩阵表示，v 是 c 的向量表示。

在研究阿贝尔群上的群元胞自动机的动力学性质时，与 F 相关联的矩阵的特征多项式 $\chi(t)$ 起着基础性作用。特别是，关于拓扑传递性，我们有以下结果。**定理 2** ([4])。设 $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$。$(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}}, F)$ 是拓扑传递的，当且仅当 F 是满射且

$$\gcd(\chi(t), t^{p^i - 1} - 1) = 1 \;\; \textit{for all } i \in \{1, \ldots, n\},$$

其中，$\chi(t)$ 是表示 F 的矩阵的特征多项式。

该定理的证明纯属代数性质，并且可以相当自然地推广到 d 维情形，从而得到以下结果。

定理 3。关于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ 上的群元胞自动机的拓扑传递性是可判定的。

证明。该结论由定理 2 推广到 d 维情形后得出，并结合了如下事实：对于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ 上的群元胞自动机，满射性是可判定的（见 [13]）。

□

6 非阿贝尔单群同构直积上的群元胞自动机的拓扑传递性

设 $\mathbb{S}$ 是一个有限非阿贝尔单群，并设 $\mathbb{G} = \mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_m$，其中每个 $\mathbb{S}_i$ 都同构于 $\mathbb{S}$。对于每个 i，我们将 $\mathbb{S}_i$ 视为 $\mathbb{G}$ 的典范子群，其元素除第 i 个坐标外，其余坐标均为单位元。

设 F 是 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 上的满射群元胞自动机，其满射局部规则为 $f = (h_1, \ldots, h_k)$，其中每个 h_i 都是 $\mathbb{G}$ 的端同态。则以下结论成立（其证明见 [3] ）。

(*a*) 集合 $\{1, \ldots, m\}$ 存在一个划分 $\{J_1, \ldots, J_k\}$，使得对每个$i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\mathrm{Im}(h_i) = \prod_{t \in J_i} \mathbb{S}_t.$$

(*b*) 存在子集 $I_1, \ldots, I_k \subseteq \{1, \ldots, m\}$，使得对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\mathrm{Ker}(h_i) = \prod_{t \in I_i} \mathbb{S}_t.$$

(*c*) 对每个 $t \in \{1, \ldots, m\}$，都存在唯一的指标 i，使得 $\mathbb{S}_t$ 不是 Ker(h_i) 的因子。

(*d*) 将每个 h_i 限制在其作用非平凡的因子 $\mathbb{S}_j$ 上，会产生一个自同构 h_i'，它将 $\mathbb{S}_j$ 映射到另一个分量 $\mathbb{S}_l$.

定义1. 令 π_f表示由 $\pi_f(j) = l$ 定义的符号 $\{1, 2, ..., m\}$ 上的置换，当且仅当存在一个 i 使得 $h_i|_{\mathbb{S}_j} = \mathbb{S}_l$. 。记 o 为置换 π_f在 $\{1, 2, ..., m\}$上的对称群中的阶。

ˆ若 h_i 在 $\mathbb{S}_j$上 的作用非平凡，则将 h_i o 与ˆ自身复合 h_i 次所得到的映射是 $\mathbb{S}_j$. 的一个自同构。记 o_i 为 h_i 作为群 $Aut(\mathbb{S}_j)$的元素的阶。

定义2. 群 $\mathbb{G}$ 是有限、非阿贝尔的同构单群 $\mathbb{S}_i$ 的乘积 $\mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_m$。若对于给定的作用于 $\mathbb{G}$ 上的群元胞自动机 F，不存在将 $\{1, 2, ..., m\}$ 划分为两个集合 I、J的划分使得，则称该群是极小的

$$F\left(\left(\prod_{i \in I} \mathbb{S}_i\right)^{\mathbb{Z}^d}\right) \subseteq \left(\prod_{i \in I} \mathbb{S}_i\right)^{\mathbb{Z}^d} \quad and \quad F\left(\left(\prod_{i \in J} \mathbb{S}_i\right)^{\mathbb{Z}^d}\right) \subseteq \left(\prod_{i \in J} \mathbb{S}_i\right)^{\mathbb{Z}^d}.$$

当 F 为满射时，群 $\mathbb{G}$ 相对于 F 的作用是极小的，当且仅当上文定义的对应置换 π_f 是一个单循环。

注 2。 如果 $\mathbb{G}$ 相对于 F 不是极小的，则可以将 F 的动力学分解为其限制在各个极小分量上的动力学之积。特别地，给定的 *GCA* 在 $\mathbb{G}$ 上是拓扑传递的，当且仅当其所有极小分量都是拓扑传递的。

引理 1。 设 $G = \mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_m$ 是有限、非阿贝尔且彼此同构的单群之积。设 F 是 $\mathbb{G}$ 上具有满射性且极小的 *GCA*，其局部规则为 $f =$ （h_1、 ..... 、 h_k），邻居向量为 $v =$ （v_1、.....、 v_k） $\in$ （$\mathbb{Z}^d$）^{k}。设 $\{J_1, \ldots, J_k\}$ 为陈述 (a) 中引入的指标划分，并令 $r_i = |J_i|$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 成立。设 o 以及 o_i、 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 如上文定义。则

$$F^{o\alpha} = \sigma_{-\alpha\beta}.$$

其中 $\alpha = \mathrm{lcm}(o_1$、.....、 $o_m)$ 以及 $\beta = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i.$

证明。 一维情形下该证明的细节可见于 [3]。推广到 d维情形不会带来额外困难，其推理思路与一维情形相同。

□

定理 4。 对于 $\mathbb{S}^n$上的群元胞自动机，其中 $\mathbb{S}$ 是一个简单的非阿贝尔群，拓扑传递性是可判定的。

证明。 首先，对于任意有限群上的给定群元胞自动机，判断其是否为满射是可判定的 [2]。因此，我们可以判断 $\mathbb{S}^n$ 上的群元胞自动机是否为满射。非满射性立即意味着不具备拓扑传递性。因此，我们可以假设 F是满射的。根据注 2，我们还可以假设 F 是极小的。给定 $\mathbb{S}^n$上的群元胞自动机 F 的局部规则，引理 1 中的量 o、 o_i 和 r_i 是可计算的。因此，要判断 F 是否具有拓扑传递性，只需计算向量 $\alpha\beta$。当且仅当该向量非零时，群元胞自动机 F 才具有拓扑传递性。

□

7 拓扑传递性的可判定性

结合第 3、4 和 6 节的结果，我们终于可以给出一个算法，用以判定任意有限群上的群元胞自动机是否具有拓扑传递性。

1 函数 `IsTransitive`($\mathbb{G}$,F)**：2 如果** $(\mathbb{G}, F)$ 不是满射，**则 3 返回***False*；**4 结束5** $\{(\mathbb{G}_1, F_1) \ldots, (\mathbb{G}_k, F_k)$ $\} \leftarrow$ `VerbalDecomposition`($\mathbb{G}$,F)；**6 对** $i \leftarrow 1$ **到** k **执行 7 如果** $(\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d}, F_i)$ 不具有拓扑传递性，**则 8 返回***False*；**9 结束 10 结束 11 返回**$True$;

现在我们说明函数 `IsTransitive`为何可有效计算，以及为何其输出能够判定 ($\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}, F$) 是否具有拓扑传递性。

`IsTransitive`**的可计算性**。
指令 2 是可计算的：已在 [2, 定理 21]中证明。

指令 5 是可计算的：由于 $\mathbb{G}$是一个有限群，计算它的词子群以及相应的商运算都是有效的过程。
指令 7 是可计算的：由于每个 $(\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d},\ F_i)$ 都是定义在同构单群直积上的群元胞自动机，而根据定理 3 和定理 4，其拓扑传递性是可判定的。

`IsTransitive` **的正确性**。
`IsTransitive` 的正确性主要依据定理 1，该定理表明，当且仅当每个 $(\mathbb{G}_i^{\mathbb{Z}^d},\ F_i)$ 都是拓扑传递的时，$(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d},\ F)$ 才是拓扑传递的。请注意，在指令 2 中，我们会预先检查 $(\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d},\ F)$ 的满射性。这是必要的，因为定义在非阿贝尔单群直积上的群元胞自动机的拓扑传递性的可判定性（定理 4）仅针对满射群元胞自动机建立。然而，这一限制并不会导致一般性损失，因为拓扑传递性总是蕴含满射性。

总结本文的研究结果，我们可以陈述以下定理。
Th定理 5. 有限群上的群元胞自动机的拓扑传递性 $\mathbb{G}$ 是可判定的 .

8 结论与后续工作

本文证明，对于任意有限群上的群元胞自动机，拓扑传递性是可判定的，从而解决了[2, 3]中提出的开放问题。结合群元胞自动机类中拓扑传递性与若干更强（或先验看来不同）的动力学性质之间的等价性，我们的主定理还得出了全传递性、拓扑混合、弱遍历混合与强遍历混合以及遍历性的可判定性。

T本研究为后续研究提出了若干自然方向 .

群子移位。 首先，可以将研究范围从满移位拓展至群子移位，即带有诱导逐离散拓扑的闭移位不变子群 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$。在此情形下，可以研究连续的、与移位作用可交换的端同态 $F:\ \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ （以及更一般地，对于适当作用而言的 $\mathbb{G}$-等变端同态），它们为受约束构形空间上的群元胞自动机提供了一种自然类比。一个关键问题是：当相空间为由有限描述给出的群子移位（例如有限型、sofic，或由有限个禁用图案指定）时，拓扑传递性（以及等价的混合／遍历性质）是否仍然可判定。找出仍适用分解方法的群子移位类别，或能够将传递性归约为有限呈示模上的代数条件的类别，尤其值得探索。

可 amenable 群指标集。 另一个研究方向是将范围从格 $\mathbb{Z}^d$ 拓展到更一般的指标群。给定一个可数 amenable 群$\mathbb{H}$，可以考虑带有（预）离散乘积拓扑的满移位 $\mathbb{G}^{\mathbb{H}}$，以及 $\mathbb{H}$ 通过左平移定义的移位作用。于是，自然可以将 $\mathbb{H}$ 上的群元胞自动机 定义为连续的 $\mathbb{H}$-等变群端同态 $F\colon \mathbb{G}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{G}^{\mathbb{H}}$，并探讨在这一更广泛的情形下，拓扑传递性是否可判定。这里，可 amenable 性为 Følner 几何提供了一种稳健的替代方案；Følner 几何在研究混合性质、熵和回归时往往至关重要；然而，缺乏

线性序以及 $\mathbb{H}$ 可能复杂的几何结构，或许需要新的工具。一个具体目标是确定分解技术的哪些部分可以从 $\mathbb{Z}^d$ 推广到可 amenable 群，并找出 $\mathbb{H}$ 的若干子类（例如几乎阿贝尔群、多循环群，或更一般地，具有有效 Følner 序列的群），使得这些子类能够获得算法刻画。

基于幺半群的配置空间。另一个自然的研究方向是，探究本文所得结果能否从群推广到更一般的代数结构，尤其是幺半群。可以考虑构形空间为 $M^{\mathbb{Z}^d}$ 的元胞自动机，其中 M 是有限幺半群，且其全局演化映射是连续的、与移位交换的幺半群端同态。在群的情形中，许多工具都严重依赖可逆性以及正规子群和词子群的存在；因此，一个自然的问题是，能否在多大程度上为幺半群发展类似的分解技术，例如基于同余关系或 Green关系的技术。一个核心问题是，在这一更广泛的框架下，拓扑传递性（以及相关的混合性或遍历性质）是否仍然可判定，以及底层幺半群的哪些代数特征起着决定性作用。回答这些问题将有助于更深入地理解元胞自动机中代数结构与动力系统复杂性之间的相互作用。

复杂性与有效不变量。最后，除了可判定性之外，自然还应研究我们的方法所产生的判定程序的计算复杂性，并开发能够控制群元胞自动机传递性与混合性的有效不变量（例如，模论或表示论数据）。这或许能带来更精细的分类，以及适用于具体实例的实用算法。

我们认为，这些方向为将动力学性质的算法理论从 $\mathbb{Z}^d$ 上的全群移位推广到更一般的代数和几何背景，提供了富有成效的框架。

参考文献

[1] Joseph Auslander.《极小流及其扩张》，收入*North-Holland* 数学研究丛书第 153 卷。North-Holland / Elsevier Science，阿姆斯特丹和纽约，1988 年。关于拓扑动力学的专著，重点讨论极小流及其结构性质。

[2] Pierre B´eaur 和 Jarkko Kari. 通过群移位上的有效投影判定群元胞自动机的性质。《国际计算机科学基础杂志》，35(1&2):77– 100，2024 年。

[3] Niccol`o Castronuovo、Alberto Dennunzio 和 Luciano Margara。用于判定群元胞自动机动力学的分治算法。《计算机与系统科学杂志》，157:103749，2026。

[4] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti、Darij Grinberg 和 Luciano Margara。线性元胞自动机在 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ 上的混沌性与遍历性是可判定的。*Information Sciences*，539:136–144，2020。[5] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti、Darij Grinberg 和 Luciano Margara。有限阿贝尔群上加性元胞自动机动力学性质的可判定刻画及其在数据加密中的应用。*Infor-mation Sciences*，563:183–195，2021。[6] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti 和 Luciano Margara。一种判定线性元胞自动机混沌性的高效算法（适用于 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ ），及其在数据加密中的应用。*Inf. Sci.*，657:119942，2024。[7] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti 和 Luciano Margara。有限群上元胞自动机的动力学行为。*IEEE Access*，12:122061–122077，2024。[8] Robert L. Devaney。混沌动力系统导论。Westview Press，第2版，1989。[9] Fabien Durand 和 Dominique Perrin。拓扑动力系统。剑桥大学出版社，2022。[10] Eli Glasner。通过联结研究遍历理论，*Mathematical Surveysand Monographs*第101卷。美国数学会，2003。[11] Gustav Arnold Hedlund。移位动力系统的端同态与自同构。*Mathematical Systems Theory*，3:320–375，1969。[12] Wen Huang 和 Xiangdong Ye。一个显式的散射、非弱混合例子及弱不相交。*Nonlinearity*，15:849–862，2002。[13] Jarkko Kari。具有多个状态变量的线性元胞自动机。载于 Horst Reichel 和 Sophie Tison 编，*STACS 2000*，*LNCS*第1770卷，第110–121页。施普林格出版社，2000。[14] Ville Lukkarila。可逆一维元胞自动机的敏感性与拓扑混合是不可判定的。*Journal of Cellular Automata*，5(3):241–272，2010。[15] T. K. Subrahmonian Moothathu。拓扑（半）群中单个变换的弱混合与混合。*Aequationes Mathematicae*，78:147–155，2009。[16] T.K. Subrahmonian Moothathu。满射元胞自动机的齐性。*Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*，13:195–202，2005。