arXiv:2601.16248v1 [math.HO] 22 Jan 2026

PRIMES STEP 项目经验

Slava Gerovitch 和 Tanya Khovanova

MIT

摘要

PRIMES STEP 是麻省理工学院于2015年创立的数学推广项目。STEP学生学习超出学校课程范围的高阶课题，并开展小组研究项目，常常最终发表成果。本文介绍了该项目的历史、招生流程、课程组织、互动式教学风格和团队合作，并就如何选择研究项目、鼓励学生以及让他们保持投入提供建议。本文对数学教师和课后数学项目的授课教师很有参考价值。

1 引言

谁能想到，七至九年级学生竟能发现稳定匹配问题与数独之间的联系？然而，2021年，麻省理工学院 PRIMES STEP 项目的参与者发现了这种联系。相关结果发表在两篇论文中：《稳定匹配问题与数独》发表于《大学数学杂志》 [1], ，而《稳定匹配问题的序列》发表于《整数序列杂志》 [2]。

如此年轻的学生是如何取得这一突破的？我们将回顾 STEP 的历史，并分享开展这一项目的经验，希望能推动学校和课外项目中的数学研究活动，激励年轻数学家。

2 项目结构

2.1 历史

Slava： 让我们回顾一下这一切是如何开始的。我们的 PRIMES 项目取得巨大成功后，STEP 的构想应运而生。麻省理工学院数学系于2011年创立了 PRIMES（高中生数学、工程与科学研究项目），当时有21名当地学生参与数学和计算生物学研究 [11]。我们的团队包括担任首席研究顾问的 Pavel Etingof、担任首席导师的你，以及担任

项目主任的我。第二年，我们为当地学生增加了计算机科学项目，并且每年都持续扩大项目规模，既增加学生人数，也拓展研究选择。2013年，我们开设了面向全国的远程数学研究项目（PRIMES-USA），以及面向当地学生的数学拓展项目（PRIMES Circle）；2015年，我们推出了为期两周的数学人才加速住宿暑期项目（Math- ROOTS）；2016年，我们与 Art of Problem Solving 合作，建立了一个大型协作式在线研究论坛，面向世界各地所有高中生和大学生开放（CrowdMath）。目前，PRIMES 每年服务150多名学生；在教育推广项目中，它以严谨程度、持续时间、服务对象以及帮助学生取得的成就而独树一帜。自项目创立以来，PRIMES网站上已发布近450篇论文，其中90多篇已发表于学术期刊和专业会议论文集。PRIMES 学生在国内外科学竞赛中已斩获近400个奖项。E **Tanya：** Pavel 曾开玩笑地提议把 PRIMES 拓展到幼儿园。我们笑了起来，但随后开始讨论能否在中学开展数学研究，而我受命负责这项工作。起初我担心这根本不可能，但后来我开始集思广益，并做出了几个让它得以实现的决定。

首先，我们决定采用小组研究的形式。学生年纪太小，还无法进行个人研究。如果有一名学生失去兴趣，我也担心会发生一些难以预料的情况。如果他们组成一个群，他们仍然可以选择项目中更吸引自己的部分。

第二个决定是，该项目不应只专注于研究；其中很大一部分应当是数学俱乐部。原因在于，即使在 PRIMES 中，也不是每个学生都想成为数学家。PRIMES STEP学生年纪更小，因此他们还不知道长大后想做什么。强迫他们只做研究并不明智。当研究只是项目的一部分时，他们就能学到很多数学知识。而且，研究有助于教会他们如何长期投入一个项目，同时也能让他们初步了解一般意义上的研究。后来，一些学生证实，这个项目让他们更有纪律性，也养成了更好的工作习惯。

第三，我还决定了要讲授哪些内容。我的想法是尽量避免与学校课程重叠。如果教他们已经知道的东西，他们在 STEP 就会感到无聊；如果教他们后来会在学校学到的东西，他们在学校也会感到无聊。因此，我选择的内容非常多样，也不属于主流。

2.2 目标

Slava： 我们决定将项目命名为 PRIMES STEP（解决问题—提出理论—探索—证明），寓意这是迈入数学发现世界的一步。我们将其宣传为一个面向好奇的初中生的项目：他们喜欢解决具有挑战性的题目，并准备探索高等数学主题。你希望你的学生在项目中学到什么？是一套数学知识，还是一组技能？STEP 的目的是什么？它是一个

数学知识体系，还是一组技能？STEP 的目的是什么？

Tanya： 我人生中做任何事的目标，都是追求最大的影响力。对于 STEP 来说，这也意味着我不仅教数学，还教他们如何思考、如何做事。STEP 的目标是运用数学拓展学生的思维，鼓励他们进行创造性思考。我们不重复中学数学课程的内容，而是让学生解决棘手的题目、逻辑谜题、有趣的益智题，以及奥林匹克竞赛类问题和华尔街面试中可能会遇到的问题。STEP学生还会通过创造新题目并率先解出这些题目，来模拟研究过程。我们甚至还会学些偶尔用得上的魔术。最重要的目标是享受乐趣！

2.3 成果

Slava： 第一年，STEP有一个由11名学生组成的群，他们写了两篇文章，如今都已发表在《休闲数学杂志》[9] 和*Math Horizons* [7]上。之后几年，我们有两个群，每群十名学生。

Tanya: 我们称它们为高年级组和低年级组，前者的学生水平更高。每个小组每年会完成 1–2 篇论文。

Slava: STEP论文涵盖哪些课题?

Tanya: 我们的大多数论文都可以视为休闲数学研究。课题范围从逻辑、硬币称量、博弈到幻方。我们的一些论文则涉足现代研究领域：组合数学、数论、信息论、博弈论和几何学。我们会将所有论文发布在 arXiv.org 上，并在STEP网站上提供链接。

Slava: 这些论文之后会发表吗?

Tanya: 大多数论文要么已经发表，要么已提交给学术期刊。由于一些学术期刊实行盲审，审稿人并不知道作者是非常年轻的学生，因此我们可以确信，论文获准发表完全是凭借其自身质量。

Slava: 多年来，STEP取得的最高成就是什么?

Tanya： 有一年特别多产，高年级组发表了四篇论文。我们从 EvenQuads 游戏 [15] 开始。第一篇论文 [3]介绍了 EvenQuads 与其他纸牌游戏的联系：SET、Socks 和 Spot It!。我们研究了 EvenQuads 的幻方类似物，并在 [5] 中撰写了相关内容。在 [4]，中，我们研究了一副 ℓ 张牌的牌组中可能出现的 Quads 最大数量与牌组大小之间的关系。我们最深入的一篇论文将 EvenQuads 游戏与纠错码联系起来，并发表于 Springer Nature Computer Science。

2.4 招生

Slava： 你们在寻找什么样的学生?

Tanya： 我们希望招收对数学感兴趣并想参与研究的学生。但现实中，有时学生并不知道我们的项目会开展研究。他们申请是因为朋友推荐，或者父母希望他们来这里，为将来的简历增添资历。

他们申请是因为朋友推荐，或者父母希望他们来这里，为将来的简历增添资历。

Slava： 好！你们如何选拔参加 STEP 的学生?

Tanya： 我们唯一的选拔方式是入学考试。我们确实需要数学能力强的学生。入学考试后，我经常会面试学生。这是我告诉他们将要进行研究并观察他们反应的机会。有一次，我面试了一位看起来不感兴趣的学生。他的父母带他来参加入学考试，却从未解释这个项目是什么。他以为这不过是另一所俄罗斯数学学校（RSM）。我们交谈之后，他变得兴奋起来，后来成长为一名优秀的学生。

Slava： 那么，什么样的学生能在 STEP 中取得成功?

Tanya： 他们大多数都能取得成功。他们喜欢学习内容，彼此帮助，成为朋友。他们希望论文能够发表，所以对课堂充满热情。

很少有学生拖延。很多年前，有一位学生对研究毫无贡献。我告诉他，如果他不做出贡献，我就会把他的名字从论文中删掉。后来他帮忙为会议制作了精美的幻灯片，所以我保留了他的名字。

现在，我会给予研究积分，并设定一个人成为合著者所需达到的门槛。从那以后，只有一名学生没有提交研究成果，家庭作业也没做多少。我在第一个学期结束后请这名学生退出了项目。

3 课程结构

Slava: 接下来，我们来详细了解一下这个项目是如何运作的。STEP课程是什么样的?

Tanya: 课堂持续两个小时，中间有一次休息。通常分为四个部分：

1. 作业讨论，
2. 动手活动，
3. 新的数学课题，以及
4. 研究讨论。

3.1 作业讨论

Slava: 让我们从家庭作业开始。你会布置家庭作业吗？它和普通学校的家庭作业一样吗?

Tanya： 我的家庭作业大约有10道题。开头是一道热身题。在教学生如何思考时，我会尽量不局限于数学。因此，热身题中可能包括谜语、笑话、物理谜题、逻辑谜题、语言谜题、棘手问题等等。

下面是一个物理题，后面接着一道谜语。

问题。 在地球上的什么地方，一个对象的重量最轻？最重？**问题**。 什么样的青蛙能跳得比建筑物还高?

甚至可能是个笑话问题。比如，有一道家庭作业题是这样的。

问题。 不要阅读这句话。

我最喜欢的答案是：不要阅读此答案。

家庭作业的核心是与当前课题相关的问题。有时，我还会布置一些过去数学竞赛中的题目用于训练。有时，我会布置一些随机的数学问题作为趣味练习。我会用一两道挑战题结束家庭作业。例如，当我们学习卡塔兰数时，家庭作业中包含了以下挑战题。

问题。 求长度为 $2n$ 、以两个X开头且以两个Y结尾的戴克词的数量公式。

学习整数在计算机中的表示方式时，我给他们布置了以下挑战。

题目。 用你最喜欢的编程语言编写一个项目，使其运行时能够打印出自己的源代码。此外，把英语也当作一种编程语言：用英语写一条命令，让它输出这条命令的文本。

讨论这份家庭作业时，我向他们解释说，他们写的是一个自复制程序。如今，我应该让学生编写一条 ChatGPT 请求，让它原样输出这条请求。

偶尔，我会给他们布置一份特别的家庭作业：一道来自麻省理工学院谜题寻宝活动的谜题。谜题寻宝活动中的谜题与常规题目不同。通常，解题者不会被告知该做什么，而是需要自己想办法找出答案。我会给大家出一道谜题，让所有人一起解答。这是训练模式识别的绝佳方式，也能培养团队合作。例如，在我的元胞自动机课堂上，我给他们出了一道名为《下一代》的谜题，网址为 https://puzzles.mit.edu/2018/full/puzzle/the_next_generation.html。

所以，要求家庭作业必须独立完成，因为家庭作业是用来练习的。我会给家庭作业评分。我向他们解释，评分的价值主要在于提供反馈，而不在于其他方面。除了可能写在推荐信里，我不会在任何地方使用这些分数。

Slava： 你在课堂上如何讨论家庭作业？会逐题讨论吗?

Tanya： 我通常会以讨论家庭作业开始课堂。我不会讨论每一道题。如果解法很直接，而且大家都已经做出来了，就没有必要讨论。如果有一名学生没有做，而解法又能在网上找到，我也可以跳过这道题。我只讨论他们提出但有趣的想法，或他们错过的有趣想法。我们还会讨论全局观。

这里有一道借鉴自 Alexander Karabegov 的家庭作业题。

问题。 函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足以下条件:

- $f(1) = 1$。

对于所有 x, • $f(-x) = -f(x)$; 也就是说, $f(x)$ 是奇函数。

对于所有 x, • $f(1-x) = f(1+x)$; 也就是说, 函数 $g(x) = f(1-x)$ 是偶函数。

计算 $f(2024)$ 和 $f(2025)$。

大家都解出来了，但只有一位学生注意到，这道题的灵感来自正弦函数。于是我们对此进行了讨论。

做完家庭作业后，我常常会展示一个玩具或变个戏法。

3.2 动手活动

Slava: 学生只用纸笔学习吗?

Tanya: 不，不是所有时候！我觉得，对于年纪较小的学生来说，能看、能玩、能触摸实物会更好。我会带很多这样的实物到课堂上。我常用玩具或魔术，从作业讨论过渡到新主题，作为短暂的衔接。

Slava: 你在博客上写过自己讨厌钩针编织。不过，你钩编了很多数学物件。你会在课堂上用它们吗?

Tanya: 我想教双曲曲面，所以钩编了十个。若能拿在手里、将曲面折叠起来、在上面找直线等等，就会更容易理解它们。我试着买一些，却怎么也找不到，所以就自己做了。学生拿着钩编的双曲曲面时，很容易展示测地线是如何形成的。你可以把一个点的小邻域压平，看看它与一块平面有多相似。有时，可以通过捏住两个点并拉伸织物，在钩编曲面上找出这两点之间的直线。如果给定的曲面是常曲率双曲曲面，就可以通过折叠来找直线。折痕对应一条测地线。摆弄实物来证明平行公设独立于其他公理之外，很有意思。

Slava: 实物能帮助数学家思考吗?

Tanya: 数学研究的是思想；不过，人们拥有各种感官，可以帮助自己记忆、理解和处理思想。很多东西在摆弄实物时更容易理解。例如，摆弄链结来计算它的链接数，比看它的图片要容易得多 [12]。

Slava: 你还会带什么其他对象来课堂?

Tanya: 我很自豪自己拥有一打魔方，足够所有学生使用。讲授群论时，我会把魔方带到课堂上，并解释魔方的各种转动构成一个群。我会向学生解释，两个元素的交换子可以衡量群中的非交换性。人们或许会希望，两个群元素的交换子仍是一个群元素，而且离单位元不远。如果我们对相邻面的两种不同的 90 度旋转取交换子，结果会打乱

四个小顶点小方块和三个小棱小方块。这让我可以解释一种解魔方的方法。虽然这方法很费时，但有助于讲解群。

Slava： 我看得出数学可以很有趣，而有趣的事也可以是数学。还有其他把两者结合起来的方法吗?

Tanya： 有一次，我带了两个充气地球仪到课堂上。我当时在讲一个定理：三维空间中任何保持原点和定向的运动都是旋转。换句话说，任何球面旋转都必定有两个对跖不动点。所以我们玩了一个游戏。我固定一个地球仪，让学生随机旋转另一个，然后找出地球上相对位置相同的点。我是在书 [14] 里看到这个游戏的。

Slava： 你玩过的最有趣的游戏是什么?

Tanya： 我喜欢重现著名的谜题。来看看下面这个由 Konstantin Knop 和 Alexander Shapovalov 创作的帽子谜题。它曾于 2013年3月 在城镇锦标赛中以另一种表述方式出现：

> 一位苏丹决定让他的 100 位贤者接受一场考验。贤者们将排成一列，彼此前后站立，使队伍最后一个人能看见其他所有人。苏丹有 101 顶颜色各不相同的帽子，贤者们知道所有帽子的颜色。苏丹给贤者们每人戴上一顶帽子，留下一顶。贤者们只能看见前方人的帽子颜色。然后，他们可以按任意顺序猜自己头上帽子的颜色。每位贤者都能听到此前所有人的猜测，但除此之外，贤者们不能交谈。他们不得重复已经说过的颜色。猜错帽子颜色的人将被砍头，猜对的人则可获释。考验规则会在考验前一天告知他们，届时他们可以商定一种策略，尽量减少猜错帽子颜色的人数。他们该采用什么策略?

有一种很好的策略，利用模运算，最多只有三个人最终无法猜出自己的帽子颜色。但最优策略可以保证 99 个人存活，它使用的是排列。学生们很喜欢重现帽子谜题。这迫使学生们团队合作，而且他们也乐于向朋友解释猜测算法。

Slava: 你们玩数学游戏只是为了好玩吗？还是这些游戏与研究有关?

Tanya: 当然，游戏总是与研究有关。有一次，我们以学习玩几种纸牌游戏开启了学年，包括 SET、Socks、EvenQuads 和 Spot It!。我们用线性代数的语言将这些游戏形式化，并找到了它们之间的联系。具体来说，我们发现可以用一种游戏中的牌来玩其他游戏。最后，我们写了一篇很棒的研究论文，对比了这四种游戏 [3]。

Slava： 你提到过自己会用魔术。数学中也有施展魔术的空间吗?

Tanya： 有很多魔术并非依靠手法，而是基于数学。戏法很有趣，我一有机会就会用。

Slava： 你能举个例子吗?

Tanya： 当然。我让每位学生写下一个不为零或一的数字。我告诉他们，之后他们会知道为什么要排除零和一。我让他们把所有数字相乘，但不让我看到。接着，他们必须去掉乘积的第一位数字，并把乘积其余的数字打乱顺序写在黑板上。然后，我说一声“阿布拉卡达布拉”，猜出第一位数字。

学习整除性或概率时，我会用这个戏法。关键在于，乘积几乎肯定能被 9 整除，这让我可以迅速推断出缺失的数字。

这里唯一的手法，是我对为什么要排除一和零所作的解释。显然应该排除零，因为乘积会变成零。我说，一很无聊，因为把数字相乘时，它们不会影响乘积。然而，排除一的真正原因，是为了提高乘积能被 9 整除的概率。

我的学生喜欢琢磨这个戏法。他们会兴致勃勃地开始计算这个戏法成功的概率。顺便问一下，如果一个群里有十名学生，这个概率是多少?

3.3 新的数学主题

Slava： 你如何选择学习课题?

Tanya： 在学年开始时，我经常讲授一些可能对研究有用的新主题。例如，2023年秋季从斐波那契数和卢卡斯数开始。接下来的几堂课，我们继续学习了一些数论和数列，因为研究需要用到这些内容。不过，我想介绍各种各样的主题，因此一学完数列，我们就转向逻辑门，并上了几堂与计算机科学相关的课。到了下一个学期，我对非周期铺砌领域的最新进展感到兴奋，于是我们专门上了一堂课。

本科生项目需要讨论一些信息论内容。我们通过硬币与帽子谜题学习信息论。当然，我把帽子带到了课堂上，还重新演示了这些谜题。课题可以是公平分配、舞蹈辫结、费马大定理，或其他内容。

Slava： 费马大定理非常有名，而且花了几百年才得以证明，对吧？你的课堂怎么样?

Tanya： 我写下了定理的陈述和“证明”这个词。

定理 （费马大定理。）。 不存在三个正整数（a, b, c）能够满足方程 $a^n + b^n = c^n$，其中 n 为任何大于 *2* 的整数值。

证明。 □

高年级组在这时笑了。

我的课堂互动性很强，所以我们通常会一起证明问题。我常常停下来问大家接下来该做什么。于是，我们证明了费马大定理可以归结为这样的情形： n 是奇素数，且 $n = 4$。然后，我们又将其归结为本原三元组的存在性（三个数（a， b， c）构成的三元组，且它们两两互素）。接着，我们开始讨论 $n = 4$ 的情形1。上一堂课讲的是勾股数，所以我们能够证明这一情形。然后，我们继续讨论 n 是奇素数的情形2。对我来说，挑战在于如何使用黑板，才能恰好在合适的时候把边角空白都用完。

Slava： 你会重复使用以前的材料吗?

Tanya： 由于我的学生之后几年还会继续来上课，我不会重复讲授相同的课题。我会重新采用以前的课题，但这需要好几年时间。此外，我发现自己很容易感到厌倦，因此很喜欢设计新材料。例如，最近我讲了欧拉数，这还是我第一次讲这个课题。告诉你一个秘密，我自己也是偶然在自己的 PRIMES 项目中发现欧拉数后，才知道它们的。

课堂结束时，我们会讨论研究。

3.4 研究讨论

Slava： 你如何选择研究课题?

Tanya： 我总是承诺会为高年级组安排一个研究项目。通常，我会准备一个宽泛的研究课题，并让学生们集思广益，提出具体的研究方向。我的出发点如下：作为研究人员，一项重要能力是提出问题。因此，我需要训练他们这样做。这样做的好处是，当学生自己提出一个具体问题时，他们会更投入，这也有助于项目开展。

Slava： 你能举一个研究项目的例子吗?

Tanya： 在我们的第一个研究项目中，我们介绍了一种新型硬币：交替币。交替币可以伪装成真币，也可以伪装成假币（假币比真币轻）。每次把它放到天平上时，它都会在伪装成真币和假币之间切换。我们写了一篇论文 [7] ，解决了以下问题：给你 N 枚外观相同的硬币，其中一枚是交替币。所有真币的重量都相同。你有一架天平，可以用来找出交替币。要确保找出交替币，最少需要称几次？在这项研究过程中，我们发现了一个学生们以前从未听说过的优美数列：雅各布斯塔尔数。

Slava： 那低年级组呢?

Tanya： 我总是说，我不保证低年级组会有研究项目，但最后总会有。我总会在最初几节课中安排游戏和魔术，并让学生自己设计问题。有一年，学生们花了两个月才想出一个问题，不过通常会快得多。

Slava： 在中学开展研究有什么好处?

Tanya： 我们的许多学生在各自的学校里都很出色，对他们来说，一切都很容易。我记得儿子曾经对我说过，他觉得上学轻而易举；天资聪颖、学得快的缺点在于，你不必学会如何努力工作。我们的项目所取得的成果之一，就是教孩子们如何努力。

Slava: 项目的工作是如何组织的?

Tanya: 我们会在课堂上讨论研究，也会把相关内容布置为家庭作业。学年伊始，我们会专注于课题的背景知识和潜在的研究思路。接着，我们开始落实这些思路，并讨论定理和证明。最后，我们确定哪些结果可以整合在一起，然后撰写论文。编辑论文也是一项繁重的工作。

Slava: 对年轻学生来说，正式数学写作可能显得枯燥。你们如何应对这一点?

Tanya: 我们的论文风格各不相同。如果研究适合发表在研究期刊上，我们就采用正式数学写作。它可能显得枯燥，但能培养严谨性，对学生很有益处。有时，我们也会撰写趣味论文，写作风格则有所不同。例如，我们的论文《*Chessland*的挣扎》 [10]以童话的形式写成，采用了一位被宠坏的国际象棋皇后与她的随从之间的对话。

Slava: 学生如何合作撰写合著论文?

Tanya: 我通常会把一份包含当前材料并标出问题的文件发给他们。他们需要从中挑选几个自己感兴趣的问题并作答。我不希望所有学生都回答同一个问题，因为这样很浪费；不过，让两三名学生回答同一个问题会很有帮助。由于他们容易出错，多名学生给出相同的答案会让答案更可靠。我也希望他们能挑选自己最感兴趣的问题。他们可以根据自己的偏好选择问题：进行计算、撰写证明、提出新的想法或概念、编程等等。这份文件会慢慢扩充成一篇论文。

Slava: 你如何确保他们自己做研究，而不是看着你做研究?

Tanya: 一年中的大部分时间里，我都尽量不亲自思考我们的研究项目。学生每周都会提交自己的研究想法，由我来审阅。许多学生不知道如何用数学语言写作。他们临时创造自己的符号，却不加以解释。他们会跳过思维过程中的步骤。我必须仔细阅读他们提交的内容，找出可能有用的想法。审阅他们的研究家庭作业是我工作中最耗时的部分。好消息是，随着时间推移，再加上我的反馈，他们的写作会有所进步，审阅工作也会变得更轻松。

Slava： 研究论文是如何从这一过程中产生的?

Tanya： 我会将研究提交稿汇编成一份论文草稿的 PDF 文件。我会把学生的想法重新整理成命题、证明、例子和注记。我会检查有哪些遗漏，并将我的问题添加到文件中。我的问题会突出显示，很容易找到。我会请他们为新的命题提供证明，澄清现有证明中的步骤，计算例子，提出新想法，查阅文献，集思广益，思考更多潜在的研究问题，等等。

Slava: 论文里都包含了吗?

Tanya: 我们经常会做大量最终版本用不上的初步计算。例如，一名学生计算了某个算法的时间复杂度。这是一次很好的练习，但我们的论文并非关于算法，因此没有把这部分内容收录进去。

Slava: 之后，学生们会在五月举行的 PRIMES 春季会议上展示他们的作品。他们如何准备演讲呢?

Tanya: 我会参与论文写作，但不会参与他们演讲的准备工作；我只会在彩排时提供反馈。这是他们自己的演讲，他们为此感到非常自豪。他们会为演讲格外用心，常常把自己的项目讲成引人入胜的故事，还会加入双关语、魔术和笑话。有些群甚至把演讲变成了戏剧式表演。看他们演出真是其乐无穷!

4 建议、问题与陷阱

4.1 鼓励

Slava: 你如何让学生全年都保持兴趣?

Tanya: 他们大多喜欢家庭作业，并努力解出所有题目。我的家庭作业难度较高，因此并不是每堂课都有学生能把所有题目都解出来。我会公布得分最高的学生，他们对此感到非常自豪。我还会奖励研究积分。学生必须在一年内积累一定数量的研究积分，才能成为论文的合著者。如果有人进度落后，我会和他们谈谈，给予鼓励，了解他们的兴趣，并根据他们的兴趣量身设计具体问题。

此外，每个学期结束时，我都会给获得许多研究积分的学生发放小型数学游戏和谜题作为奖品。课堂上，学生提出好点子时，我会奖励他们金星贴纸。我现在采用的方法是在新冠疫情期间形成的，当时我们通过 Zoom 举行课程。第一次有学生在线上提出好点子时，我拿起一张金星贴纸，像往常一样想把它贴给他们，结果却贴到了屏幕上。大家都笑了起来。于是我干脆把金星贴纸贴在自己的额头上。大家都很喜欢这个做法，所以现在即使在线下上课，我也一直这么做。下课后，我骄傲地走向停车场，脸上贴满了贴纸。

Slava: 不同学生各有不同的优势。你如何让他们在团队项目中协同合作?

Tanya: 我的研究家庭作业里有很多问题。我会让学生挑选几个问题来解决。这样，他们就能根据自己的兴趣挑选问题。例如，喜欢计算机编程的学生会选择需要编程的问题，诸如此类。如果有两名或更多学生回答同一个问题，我会很高兴。如果他们得出了相同的结果，那么结果正确的可能性就更大。

Slava: 如果不同学生的贡献不一样多，有些人贡献多一些，有些人少一些，该怎么办？你如何处理这种情况?

Tanya: 在所有多位作者合著的论文中，贡献的分配都不均等

。点数很多的学生非常喜欢研究。有一次，我有一位点数不太理想的学生。我和他聊了聊，发现他比起数学部分，更喜欢编程部分。于是，我开始给他安排具体的编程任务，他很轻松地积累了足够的贡献，成为合著者，并开始享受自己所做的贡献。

4.2 互动式教学

Slava: 你如何让学生参与到学习过程中?

Tanya: 我认为互动非常重要。教学时，我总会给学生机会，让他们自己解题，或一起证明定理。有时，我甚至会让他们把我的定义补充完整。我常常问他们，觉得我接下来会讲什么。这有助于培养他们的数学品味和全局观。

Slava: 有什么特别的戏法吗?

Tanya: 我有一个从著名数学家约翰·康威那里学来的戏法。我曾多次听约翰讲同一场课，每次讲到某个时刻，他都会盯着黑板，等着听众来“帮帮他”。遗憾的是，随着年纪渐长，听众不再有所反应，因为这看起来越来越像老年性健忘。我对这个戏法做了些改编：有时讲授新主题时，我会假装忘了接下来要讲什么。我会在演讲中途看着黑板，等他们来帮我。不过，我会明确告诉学生，我停顿的那些时刻都是刻意安排的。

有时我会故意出错，看看他们有没有认真听。当然，我也可能会犯无意错误。很高兴地告诉你，他们确实会纠正我。

Slava: 他们这样做能学到什么呢?

Tanya: 参与讨论能让他们记得更牢。而且，他们不能只是坐在那里放松。知道我们正在一起取得进展，会让他们始终积极参与。

4.3 小组合作

Slava: 你会鼓励还是遏制竞争精神?

Tanya: 我教他们不要那么争强好胜。他们刚加入项目时，如果知道我问题的答案，常常会脱口而出，想要显得自己很聪明。我向他们解释，项目的目标是教学生如何思考。如果有人立刻喊出答案，其他学生就没有时间思考了。规则是，如果你知道答案，就要给其他学生机会思考这个问题。他们很快就理解了这一点，并开始举手。

Slava: 学生们是作为一个群一起工作，还是分成了子组?

Tanya: 有时讨论研究或给他们布置一道复杂的问题时，我会让他们分成较小的群来完成。我发现有时打乱分组会更好，所以我总是随身带着一副扑克牌。（反正我本来就带着一副扑克牌，以备需要表演戏法时使用。）例如，我可以用这

些牌随机分组。我挑出五张红色牌和五张黑色牌，然后洗匀。他们各抽一张牌，这样我就把十名学生随机分成两个各有五人的群。

他们告诉我，如果我把他们随机分组，他们会更好地了解彼此，也能结交更多朋友。

Slava： 我记得有人曾提议，应该把国会山上的共和党和民主党立法者的助理随机安排在自助餐厅的座位上，这样他们就能彼此交流，有助于增进不同政治派别之间的理解。

4.4 竞赛

Slava： 你在数学竞赛方面经验丰富。你是历史上第二位在国际数学奥林匹克竞赛中获得金牌的年轻女性。你在 STEP 中会运用竞赛训练的技巧吗?

Tanya： 我们有时会布置过去竞赛中的家庭作业，仅仅是为了练习。我们在课堂上讨论的数学内容可能对竞赛有用。不过，该项目的目标是研究，而它对竞赛的帮助是间接的。虽然我自己参加过很多竞赛，但后来不再喜欢它们了。

Slava： 为什么会这样?

Tanya： 主要是因为题目变了。我年轻的时候还没有互联网，这意味着人们会在不同国家的不同竞赛中重复使用题目思路。因此，包含有趣思路的题目比例很高。而现在，如果一道有趣的题目出现在竞赛中，一个小时后，它的解答就会被发布到互联网上。这样一来，你就再也无法重复使用这些题目了。我认为正因如此，很难设计出具有新颖、有趣且优雅思路的新题目。

此外，我的学生大多来自中学。他们参加的主要竞赛是 MATHCOUNTS，这项竞赛以速度为基础，而速度确实很有用。但计算越来越多地交由计算机完成，随着时间推移，训练速度的价值也越来越低。

4.5 与其他项目的比较

Slava： 一些高级暑期数学营也会为参与者提供研究经历。STEP 有何不同?

Tanya: 许多夏令营和项目都提供研究体验。麻省理工学院为本科生开设了一门名为“数学项目实验室”的课堂。在这门课堂上，学生会得到一个项目，也就是一个开放式问题，需要他们发现一些规律，并将结果写成论文。不过，这些问题的答案都是已知的。学生通过重现先前完成的研究来获得研究经验。我们的目标不同。我们的目标不只是获得研究经验，而是真正做出前人未曾做过的研究。最后，我们会将论文发布到 arXiv 上，并投稿至学术期刊发表。

Slava: STEP 是专注于单一数学课题，还是涵盖广泛的课题?

Tanya： 我从来不想把项目限定在某一个特定课题上，比如组合数学或数论。有好几个夏令营专门研究数论，这很不错，但据我估计，在 STEP，日后可能成为数学家的不会超过十分之一。其他人都会选择别的职业。他们为什么需要学高等数论呢？在学期中，我会安排几个主题模块。比如，我可以安排一个由四堂课组成的组合数学模块，然后上一堂关于不变量的课，再上一堂关于元求解的课，接着继续学习一个结合数论与密码学的模块。我决定尽可能广泛地涉猎，涵盖许多课题。我可以讲公平分配和投票权，接着讲三角形中心和自然界中的尺度论证。我会尽量涉猎很多领域。当然，做研究项目时，我们会深入得多。

4.6 团队合作

Slava： 教室里有一群兴致勃勃的学生。你如何让他们一起合作?

Tanya： 正如我提到的，我的教学方式注重互动。我会先引入一个课题，然后开始提问。比如，我们发现群中一个元素的阶整除群的阶，我就会问他们为什么。他们会开始讨论，然后一起推导出解答。有时，我会指出一位学生的想法是如何在另一位学生的想法基础上发展出来的。我很喜欢看他们彼此交流想法，随着时间推移，他们也开始享受这种互动。

我们的教室里，墙面几乎都被黑板覆盖着。我让他们解一道题时，他们就会起身走到黑板前，自发地分成若干小群。

4.7 选择研究项目

Slava： 你从哪里寻找研究课题?

Tanya： 这很难。到目前为止，幸运的是，我每年都设法做到了。我会查看过去做过的项目，看看有没有尚未解决的题目。我会四处走访，与不同的人交谈。有时，我会在 Gathering for Gardner 或 MOVIES会议上找到一个项目。

Slava： 学生会参与课题选择吗?

Tanya： 研究与解决问题的区别在于，做研究时，你可以选择自己的问题。训练学生提出问题是个好主意。不过，我不希望他们完全自行选择课题。

Slava： 为什么不呢?

Tanya: 例如，有一次一位学生建议研究负数进制。负数进制在一百多年前就已被发明，因此相关研究已经很多。我们不能只是盲目地研究负数进制，而是需要提出一个更具体的问题。

Slava: 那么，你总是自己选择课题吗?

Tanya： 对于高年级组，我会提前准备一个课题，认为它有望取得进展并在研究期刊上发表。然后，我会让学生们集思广益，提出可能的问题。接着，我们查阅文献，讨论哪些问题看起来更容易着手、也更有趣。选定几个方向后，我们就开始研究，同时继续讨论可以拓展项目的新方向。到了三月左右、临近学年结束时，我会不再接受新的问题建议。

Slava： 那么，低年级组是如何选择课题的?

Tanya： 低年级组的做法有些不同。低年级组的学生通常基础较弱，所以我的目标不是在研究期刊上发表，而是在趣味期刊上发表。同样，找到一个好问题并不容易，因此在学年开始时，我会把一些谜题放进家庭作业里，因为我觉得这些谜题有拓展的潜力。例如，在2023–2024学年，我给他们展示了两个彼此相关的魔术，他们一下子就来了兴致。低年级组写了一篇有趣的论文 [8] ，将纸牌魔术与信息论联系起来。他们还在过程中发明了一个新魔术!

Slava: 高年级组的项目需要更多背景知识吗?

Tanya: 是的，我会在课堂课题中介绍基础背景知识。当背景知识对高年级组和低年级组来说都变得过于复杂时，我只会和高年级组讨论进阶细节。例如，在2024–25学年，我准备了一个关于芯片发射的研究项目。学年开始时，我们在两个组的课堂上学习了美元游戏和芯片发射。我还用芯片发射来讲授数学中的其他一些内容，例如等价类、图论、数列等。更深入的问题则只和高年级组讨论。

Slava: 你也会在两个组中讨论低年级组项目的背景知识吗?

Tanya: 是的，只要某个组的研究背景中有适合两个组一起学习的内容，我就会把它作为课堂课题。例如，在2023–2024学年第二学期，我发现低年级组的项目需要一些信息论背景知识，于是便给两个组都讲授了这部分内容。

4.8 玩具研究还是真正的研究?

Slava： 你的许多研究课题都属于“休闲数学”的范畴。这种研究是否可以称为“玩具研究”？还是说它是真正的数学研究？这类研究对数学家未来的职业生涯有多大用处?

Tanya： STEP学生所做的**是** 研究。我们正在做一件前人从未做过的事。当我们探究这个问题时，这个过程本身就是研究过程。休闲数学意味着你不需要太多高深知识就能理解它，但仍有可能发现一些新现象，或构造一个可能对真正的数学有用的对象。例如，在进行项目的过程中，我们常常会偶然发现新的

整数数列，然后我们会将这些数列提交给整数数列百科全书 [13]。这算不上突破，但让数学界拥有这些有趣的数列还是很有用的。

2023年，并非职业数学家的 David Smith 发明了人们多年来一直寻找的单瓦片。这与平面的非周期铺砌有关，许多数学家一直在寻找这种单瓦片，却始终未能如愿。我们也完全有可能偶然发现一些未来可能派上用场的东西。

我们的许多论文不仅发表在数学趣味类学术期刊上，也发表在正规的研究期刊上。**这**是真正的研究！

4.9 STEP 的影响

Slava： 这个项目对 STEP学生 的长期影响是什么？
Tanya： 我的学生爱上了数学，并继续参加 MIT PRIMES 和其他项目。他们非常享受研究，以至于完成我们的项目后，便开始寻找新的研究机会。

我时不时会在麻省理工学院校园遇到以前教过的学生。看到他们成长并逐渐成为学者，总是令人欣慰。他们告诉我，STEP 的研究经历非常棒，让他们觉得自己为知识世界作出了贡献。

Slava： 你经常收到这个项目校友的消息吗？
Tanya： 我经常收到感谢明信片。MIT招生办公室也会定期给我寄信，告诉我某某被录取的学生提名我为对他们人生影响最大的人。

Slava： 听到这个消息真好。希望你能继续运营这个独特的项目，培养一代又一代崭露头角的数学家！

5 致谢

我们要感谢 Pavel Etingof 提出创办 PRIMES STEP 的想法，并持续给予指导和支持。我们也感谢 MIT数学系对该项目的支持。

参考资料

[1]Matvey Borodin、Eric Chen、Aidan Duncan、Tanya Khovanova、Boyan Litchev、Jiahe Liu、Veronika Moroz、Matthew Qian、Rohith Raghavan、Garima Rastogi 和 Michael Voigt，《稳定匹配问题与数独》，《大学数学杂志》，1–14，（2023）。

[2]Matvey Borodin、Eric Chen、Aidan Duncan、Tanya Khovanova、Boyan Litchev、Jiahe Liu、Veronika Moroz、Matthew Qian、Rohith Raghavan、Garima Rastogi 和MichaelVoigt，《稳定匹配的数列》

问题，发表于《整数序列杂志》第27卷，文章编号24.2.2，（2024年）。[3] Nikhil Byrapuram、Hwiseo (Irene) Choi、Adam Ge、Selena Ge、Tanya Kho- vanova、Sylvia Zia Lee、Evin Liang、Rajarshi Mandal、Aika Oki、Daniel Wu 和 Michael Yang，《揭开纸牌游戏的奥秘：探索其背后的线性代数》，math.HO arXiv:2306.09280，（2023）。[4] Nikhil Byrapuram、Hwiseo (Irene) Choi、Adam Ge、Selena Ge、Tanya Kho- vanova、Sylvia Zia Lee、Evin Liang、Rajarshi Mandal、Aika Oki、Daniel Wu 和 Michael Yang，《四张牌的最大数量》，发表于 I ntelligence Planet 数学及其应用杂志，第1卷第1期（2024年）。[5]Nikhil Byrapuram、Hwiseo (Irene) Choi、Adam Ge、Selena Ge、Tanya Khovanova、Sylvia Zia Lee、Evin Liang、Rajarshi Mandal、Aika Oki、Daniel Wu 和 Michael Yang，《四方形》。math.HO 和 math.CO arXiv:2308.07455，（2023）。[6] Nikhil Byrapuram、Hwiseo (Irene) Choi、Adam Ge、Selena Ge、Tanya Kho- vanova、Sylvia Zia Lee、Evin Liang、Rajarshi Mandal、Aika Oki、Daniel Wu 和 Michael Yang，《EvenQuads 游戏与纠错码》，发表于 SN Computer Science 6, 763 (2025), DOI: 10.1007/s42979- 025-04293-7。[7] Benjamin Chen、Ezra Erives、Leon Fan、Michael Gerovitch、Jonathan Hsu、Tanya Khovanova、Neil Malur、Ashwin Padaki、Nastia Polina、Will Sun、Jacob Tan、Andrew The，《交替硬币》，*Math Horizons*，**25**(1)，第22–25页，（2017年）。[8]Aria Chen、Tyler Cummins、Rishi De Francesco、Jate Greene、Tanya Khovanova、Alexander Meng、Tanish Parida、Anirudh Pulugurtha、Anand Swaroop、Samuel Tsui，《纸牌戏法与信息》，math.HO arXiv:2405.21007（2024年）。[9] Benjamin Chen、Ezra Erives、Leon Fan、Michael Gerovitch、Jonathan Hsu、Tanya Khovanova、Neil Malur、Ashwin Padaki、Nastia Polina、Will Sun、Jacob Tan、Andrew The，《谁是罪犯？》，发表于《休闲数学杂志》，第8卷第15期，第41–52页，（2021年）。[10] Irene Choi、Shreyas Ekanathan、Aidan Gao、Tanya Khovanova、Sylvia Zia Lee、Rajarshi Mandal、Vaibhav Rastogi、Daniel Sheffield、Michael Yang、Angela Zhao 和 Corey Zhao，《Chessland的挣扎》，《休闲数学杂志》，第11卷第18期，第65–97页，（2024年）。[11] Pavel Etingof、Slava Gerovitch 和 Tanya Khovanova，高中数学研究：*PRIMES* 体验，*Notices Amer. Math. Soc.*，N，第62卷，第910–918页，（2015年）。

[12]Tanya Khovanova，《链接数》，可见于 Tanya Kho- vanova 的数学博客：https://blog.tanyakhovanova.com/2023/08/ the-linking-number/[13] OEIS 基金会有限公司，《在线整数数列百科全书》，电子版发表于 https://oeis.org，访问于 2024 年。[14] Jonas Peters 和 Nicolai Meinshausen，《乌鸦的帽子：坠落的图片、上升序列及其他数学游戏》，麻省理工学院出版社，2021年[15] Lauren L. Rose，《Quads：一款别出心裁的类似 SET 的游戏》。跨课程项目中的数学教学 72，第 309 页（2024 年）。