共形场论谱的实验观测

Xiangkai Sun,[1,*] *Yuan Le,*[1,*] *Stephen Naus,*[1,*] *Richard Bing-Shiun Tsai,*[1,*] *Lewis R. B. Picard,*[1] *Sara Murciano,*[2] *Michael Knap,*[3,4] *Jason Alicea,*[1] 和 *Manuel Endres*[1,†]

[1] *California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA*

[2] *Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS, 91405, Orsay, France.*

[3] *Technical University of Munich, TUM School of Natural Sciences, Physics Department, 85748 Garching, Germany*

[4] *Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstr. 4, 80799 München, Germany*

arXiv:2601.16275v1 [quant-ph] 22 Jan 2026

共形场论（CFT）在高能物理[1,2]，统计力学[3–5]和凝聚态物质[6–9]中扮演着重要角色。例如，CFT 描述了经过调谐而发生量子相变[6, 10–12]的系统所涌现的普适性质，包括其纠缠、关联和低能激发谱。然而，CFT 预言的丰富结构大多仍未在实验中观测到。在此，我们直接观测量子相变处涌现共形场论的能量激发谱，并还原出底层场论特有的普适能量比[13–15]。具体而言，我们开发并实现了一种调制技术，用于分辨里德堡链的有限尺寸谱；该链可调至由伊辛或三临界伊辛共形场论描述的量子相变。我们还利用局域控制，区分激发在反射下的宇称；并在三临界伊辛链中，诱导边界条件变化所关联的不同共形场论谱之间的跃迁。我们进一步采用调制技术的一种变体，研究临界系统的动力学结构因子，它与底层伊辛共形场的关联密切相关。我们的工作不仅在量子模拟器中探测了共形场论特征的涌现，也为未来实验诊断先验未知的普适类提供了一种技术。

共形场论（CFTs）是保持共形变换的量子场论，这些变换会严格约束物理可观测量。尽管共形对称性通常不会在微观层面显现——例如，它在标准模型和典型的多体哈密顿量中都不是精确成立的——但它可以在适当的长度尺度上涌现。在高能物理背景下，反德西特/共形场论对应提出，共形场论与反德西特空间中的量子引力之间存在对偶性[1]；Pastawski、Yoshida、Harlow 和 Preskill 提出的纠错码提供了一个具体的微观框架，重现了这一对应关系的关键特征[17]。在多体系统中，共形场论通常用于描述量子相变（QPTs）中的普适现象——即分隔不同物质相的零温临界点，在这些临界点上，共形对称性会在长距离和低能量尺度上涌现[6]。

共形场论由一组数据所固定，人们可以据此推断出量子纠缠的空间结构以及支配时空关联的临界指数等普适特征。这些普适特征体现于有限尺寸标度中，而有限尺寸标度已成为由二维共形场论支配的系统中的有力诊断工具：Cardy 在20世纪80年代提出的一种策略[13,18]表明，有限系统中的低能级模式可以直接揭示共形场论的算符内容——也就是说，可以揭示其中存在哪些场及其标度维数。此外，切换边界条件就像一个控制旋钮，可以筛选允许的算符，从而改变可观测的低能谱。

在量子材料中，用于探测共形场论的候选平台包括磁性绝缘体和量子霍尔系统；这些平台支持非弹性中子散射[19–25] 以及电输运和热输运[26–29]等探测手段，能够揭示共形场论的部分性质。近期可编程模拟和数字量子模拟器的发展，使人们能够探测量子相变[30–34] ，并结合互补的操控与读出技术，为更精确的共形场论实验表征提供了途径。在此背景下，实验已尝试制备量子临界周期性里德堡链的基态[35]。此外，在通过斜坡调节穿越量子相变时，人们还探测了动力学性质——例如 Kibble–Zurek标度和晚期量子粗化[36–39]。然而，尽管共形场论丰富的激发谱具有根本性的重要意义，对其进行直接测量仍未实现，无论是在固态系统中还是在量子模拟器中。

在此，我们利用可编程中性原子量子模拟器，测量一维量子相变处的有限尺寸多体激发谱。这些相变由二维（1+1维时空）伊辛和三临界伊辛（TCI）共形场论所支配。为此，我们开发了一种调制光谱技术，可在处于目标对称性扇区的多体态之间实现相干控制。在伊辛情形下，我们通过实验分辨出激发能，其比值及其随系统尺寸的标度与开放链中伊辛共形场论的普适预言高度吻合。在三临界伊辛点，我们进一

* 这些作者对本研究的贡献相同

† mendres@caltech.edu

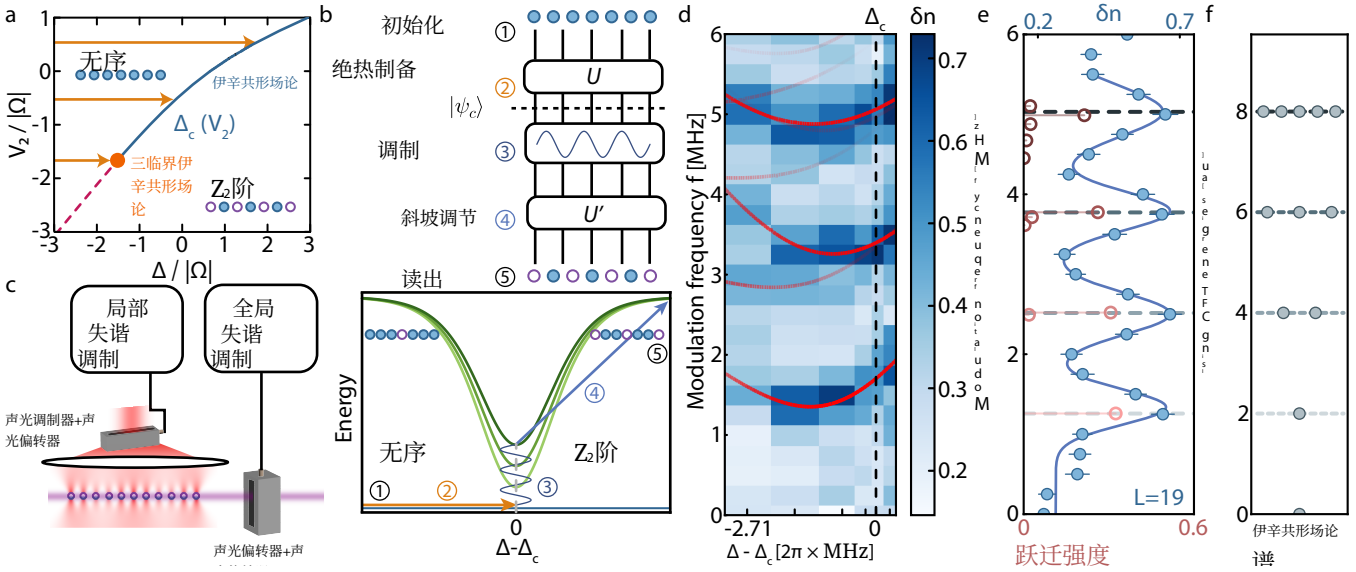


图 1 | 多体光谱学与伊辛共形场论谱。(a) Fendley-Sengupta-Sachdev 哈密顿量的相图，转载自参考文献[16]。箭头表示绝热扫描轨迹，终点为本研究探测的临界点。 **(b)** 调制光谱方案（上）及相应的示意性谱演化（下）。我们将初始无序态绝热演化至伊辛临界性，随后施加调制以激发一个低能激发态；之后进行失谐扫描至 $|0\rangle$， δn，并到达$\mathbb{Z}_2$序相/无序相，随后读出原子数的变化。 **(c)** 调制光谱的实验装置。我们使用声光偏转器和声光调制器，通过里德伯激光器频率和光镊诱导光移来控制全局和局域失谐调制。 **(d)** 在19原子阵列上测量多体哈密顿量的谱，并在不同失谐 Δ下施加调制。红色实线为式（1）激发态能量的数值计算结果，透明度表示基态与各激发态之间的跃迁强度。虚线表示数值确定的临界失谐 Δ_c。 **(e)** 在19 原子链的临界失谐 Δ_c 下进行光谱测量。我们观察到扫描后激发数增加（δn）（蓝色，上方坐标轴），其频率与激发态能量相符。实线是由四个高斯函数之和构成的拟合，并标示拟合范围。虚线表示共形场论预测能量比。红色圆点为跃迁强度的数值计算结果 $|\langle g|\hat{K}|e\rangle|^2$ （下方坐标轴）。颜色表示本征能量接近的态簇；根据伊辛共形场论的预测，在热力学极限下这些态将变得简并。 **(f)** 通过精确解析计算得到的偶宇称伊辛共形场论谱预测。伊辛共形场论能级具有普适比值2:4:6:8。

步通过在链的边缘施加额外的局域失谐，探究谱对边界条件的依赖性，揭示出与施加三种不同固定点边界条件的三临界伊辛共形场论相符的特征。为克服大系统中态密度较高、难以识别单个激发能这一困难，我们采用一种改进的调制光谱方法，测量调谐至伊辛临界性的系统的动力学结构因子，从而以实验方式探测底层场关联[6]的普适标度函数。本研究确立了量子模拟器中的调制光谱学是一种研究一般量子相变的有力工具，包括经典模拟面临挑战且临界性质可能先验未知的参数区域。

我们的实验采用一维晶格，其中包含 L相互作用的里德堡原子[40]。每个量子比特编码在 $|0\rangle$ 基态 $|1\rangle$和里德堡态之间 $|1\rangle$。这些态由全局拉比频率 Ω 和失谐 Δ耦合。当一对位于 r_i, r_j 的原子都处于 $|1\rangle$时，它们通过天然的范德华势 $V_{ij} \propto |r_i - r_j|^{-6}$相互作用。我们工作在里德堡阻塞区内，此时$V_1 \equiv V_{i,i+1} \gg \Omega$ Δ，从而有效禁止相邻原子同时进入 $|1\rangle$ 态。此外，我们还可以施加位点依赖失谐$_{\delta\Delta_i}$[38,41,42] （方法）。我们用于描述该实验装置的有效哈密顿量为

$$\hat{H} = \sum_i \left[\frac{\Omega}{2}\hat{P}_{i-1}\hat{X}_i\hat{P}_{i+1} - (\Delta + \delta\Delta_i)\hat{n}_i\right] + \sum_{j-i\geq 2} V_{ij}\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{H}_2, \quad (1)$$

其中 $\hat{P}_i = |0\rangle_i\langle 0|_i$、$\hat{X}_i = |1\rangle_i\langle 0|_i + |0\rangle_i\langle 1|_i$、$\hat{n}_i = |1\rangle_i\langle 1|_i$对应 $i = 1$、2、……、L，而 H_2包含由有限 V_1 引起的高阶修正（方法）。除非另有说明，以下均取$\delta\Delta_i = 0$ 。

上述哈密顿量在取 $V_1 \to \infty$、保留有限的次近邻相互作用 $V_2 \equiv$后，约化为 Fendley-Sengupta-Sachdev[43] （FSS）模型

$V_{i,\ i+2}$，并忽略次近邻相互作用。在这一简化极限下，相应的相图包含一个平庸的无序相和一个 $\mathbb{Z}_2$有序电荷密度波（CDW）相（图 1a）。这两个相由一条延展的二阶相变线分隔，该相变线由伊辛共形场论描述，并在某处$V_2 < 0$ 终止于一个由三临界伊辛共形场论描述的三临界点，随后转变为一级相变（图 1a 中的虚线）。利用准绝热扫描[33]，我们将系统制备在相变附近、接近基态的状态。天然的范德瓦耳斯相互作用使我们能够进入排斥区域 $V_2 > 0$。通过反向扫描方案，我们实现了探测三临界点所必需的有效吸引相互作用 $V_2 < 0$：在里德伯阻塞区域，我们以系统的最高激发态为目标，而不是基态（方法）。

多体调制光谱

为探测临界点附近的激发谱，我们开发了一种调制光谱技术（即调制-斜坡-探测序列）。简而言之，我们将系统制备在接近临界失谐 Δ_c的基态，对系统施加调制以耦合到激发态，将系统斜坡调节至$\mathbb{Z}_2$ 有序相或无序相，然后探测转移到激发态的布居数（图1b）。

我们进行两种调制：调制全局失谐 Δ 和局域失谐 $\delta\Delta_i$ （图1c，方法）。全局失谐调制通过以下方式扰动哈密顿量：

$$\delta\hat{H}_{\text{global}}(t) = A\cos(2\pi ft+\varphi)\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{w^2}}\sum_i \hat{n}_i, \qquad (2)$$

其中， A 为调制振幅， f 为调制频率， φ为调制的初始相位， w 为高斯包络的宽度。

我们通过测量最终态 $|0\rangle$中原子数来读取布居转移，$\hat{n}_g = \sum_i |0\rangle_i\langle 0|_i$此时系统已斜坡调节至$\mathbb{Z}_2$ 有序相或无序相。向低能激发态的跃迁表现为 $\langle \hat{n}_g\rangle$ 相较于多体基态对应值的变化，我们将其记为 δn。对于一个 $L = 7$ 较小的系统，我们观察到 δn随时间振荡，这表明基态与某个选定激发态之间存在相干振荡（方法，扩展数据图1）。

为了探测更大系统的谱，我们以较弱的驱动作用于系统，持续时间不到半个拉比振荡周期。在此范围内， δn 近似表示为一系列高斯函数，它们位于基态与低能激发态之间的能量差处，且其权重为
跃迁矩阵元（方法）：

$$\delta n \propto A^2w^2\sum_{e\neq g} e^{-2\pi^2w^2\left(\frac{E_e-E_g}{h}-f\right)^2}\left|\langle g|\hat{K}|e\rangle\right|^2, \qquad (3)$$

其中， h 是普朗克常数，$\hat{K} \equiv \sum_i \hat{n}_i$ 是调制算符，$|g\rangle$ 是能量为 E_g的多体基态，而 $|e\rangle$ 遍历能量为 E_e的多体激发态。

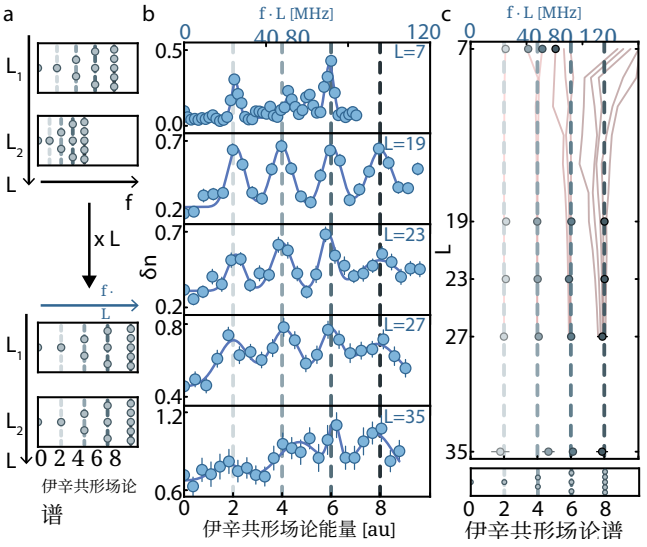


图 2 | 有限尺寸谱的标度。（a）调制频率随系统尺寸变化的标度示意图。当将频率乘以系统尺寸时，不同系统尺寸对应的本征值会坍缩，并得到由共形场论预测的普适比值。**（b）**临界失谐处的光谱学 Δ_c，对应不同的系统尺寸。横轴上的调制频率 f 按系统尺寸进行标度 L。虚线为数值外推得到的本征值，对应于普适比值为 2:4:6:8 的偶宇称伊辛共形场论谱。实线为对数据进行的多高斯拟合，并标示拟合范围。（c）前四个谱峰位置 f，经 L重标度后对应各个系统尺寸。实线为数值计算得到的重标度偶宇称态能量，颜色与图 1e 中相同。虚线为外推的重标度能量。

方程（3）表明，当 f 与基态和某个激发态之间的能量差相重合时，布居数会发生转移，其速率与跃迁矩阵元的平方成正比——重要的是，该矩阵元受到反射对称性的约束。具体而言，在空间反射下，所有哈密顿量本征态要么保持不变（偶宇称），要么获得一个（−1）因子（奇宇称）。由于基态和全局调制都具有偶宇称，跃迁矩阵元到奇宇称激发态时为零。下文详述的局域失谐调制则使我们还能访问奇宇称扇区。

伊辛共形场论谱的观测

利用这种全局调制技术，我们首先探测相互作用强度为正时，接近临 $V_2/\Omega = 0.51$界点处的偶宇称激发谱。该处的临界行为由伊辛共形场论描述，系统位于长度为 $L = 19$ （图 1d、1e）的链中。我们以准绝热方式将系统制备在接近基态的状态，并改变 Δ，其中包括临界失谐 Δ_c；该失谐对应于数值预测的热力学极限临界点

（方法、扩展数据图 2）。对于每个 Δ，我们扫描全局调制频率 f。我们发现，在与数值计算得到的激发态能量相符的调制频率处，布居转移增强（图 1d中的蓝色阴影；图 1d中的红线表示数值计算的激发态能量）。此外，布居转移与数值确定的跃迁强度相关 $|\langle g|\hat{K}|e\rangle|^2$（图 1d中红线的不透明度）。这些结果表明，我们能够将系统制备在接近基态的状态，并分辨出各个激发态能量，这与精确数值预测一致。

为了研究共形场论谱，以下我们聚焦于在临界点测得的激发能，$\Delta = \Delta_c$。我们分辨出四个谱峰，其中心频率与跃迁强度最大的四个本征态能量一致（图 1e）。这四个谱峰对应偶宇称伊辛共形场论谱中的四个能级，其普适能量比为 2:4:6:8[14,44]（图1f，方法，表 I）。尽管伊辛共形场论谱中存在简并度，但有限尺寸系统中的非相关微扰会解除简并；在全局调制作用下，只有理想简并态中的一个能与基态强烈耦合（图 1e）。

共形场论谱的能量预计与系统尺寸成反比 L；因此，将激发频率乘以 L后，不同系统尺寸对应的峰位置应当重合（图 2a）。我们通过在临界失谐 Δ_c 下重复进行全局调制光谱实验，探测这种标度行为；链长范围从 $L = 7$到 35，并比较以 $f \cdot L$ 为横轴绘制的光谱（图 2b）。根据方程（3），我们将这些光谱拟合为高斯函数之和，并提取峰位置——对于 $L \geq 19$，再次发现其与前四个偶宇称能级的普适伊辛共形场论比值 2:4:6:8 一致（图2c）。然而，$L = 7$ 谱并未收敛到普适比值，因为即使是第二个偶宇称激发态的能量也超过了拉比频率，因此超出了低能共形场论描述的适用范围。

为进一步探测奇宇称谱，我们结合全局和局部失谐调制，生成在反射下呈反对称的整体调制图样（图 3a）。具体而言，我们实现了（方
ods)

$$\delta\hat{H}(t) = A[1+\cos(2\pi ft+\varphi)]e^{-\frac{t^2}{w^2}}\sum_i \cos\left[\frac{\pi(i-1)}{L-1}\right]\hat{n}_i. \quad (4)$$

在这种奇宇称调制下，出现了一组明显不同的谱峰，位于偶宇称峰之间（图 3b）。这些峰与奇宇称伊辛共形场论谱相符，其普适能量比为 3:5:7（方法，表I）。

实验中观测到的普适能量比，源于无质量、呈线性色散的马约拉纳费米子激发；这些激发涌现于伊辛相变处——

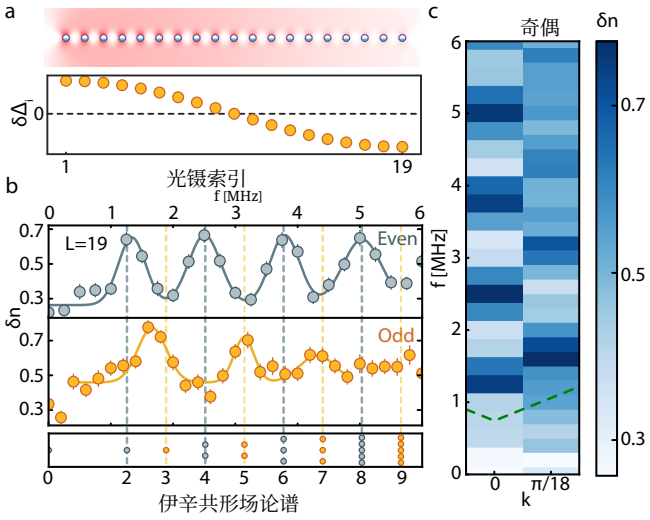


图 3 | 局域控制下的宇称分辨伊辛共形场论谱。（a）施加的奇宇称局域失谐调制轮廓，其波矢为 $k = \pi/18$。**（b）**调至伊辛临界性的19原子阵列的偶宇称和奇宇称谱。测量光谱与伊辛共形场论预测的普适能量比 2:3:4:5:6:7:8 一致。实线为数据的高斯拟合，并标示拟合范围。虚线为重新缩放后的伊辛共形场论预测。**（c）**动量分辨谱。此前的测量可分别解读为 $k = 0$ 处的偶扇区和 $k = \pi/18$ 处的奇扇区。虚线的斜率表示数值确定的光锥速度。

（方法）。具体而言，伊辛共形场论预言，涌现费米子携带激发能 $E_n = \hbar v k_n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$；这里，v 是非普适速度，而$k_n = \frac{\pi}{L}(n+1/2)$ 是长度为 L 的开放边界链的有限尺寸量子化动量。物理态由对基态施加偶数个马约拉纳费米子算符得到，从而产生图3b底部为 $L = 19$ 所示的能级、简并度和反射性质。偶数-L 链也呈现出密切相关的能级模式，我们同样在实验中观测到了这一模式（方法，扩展数据图3）。线性色散与费米子填充约束对于我们解析出的普适比值至关重要，因此，我们的实验为伊辛共形场论的这两个关键特征提供了有力证据。通过以有限波矢 k 进行调制，可进一步证实涌现费米子的线性色散：只有当调制频率f 超过阈值 f_{th} 时，系统才会产生强响应，而该阈值与 k 呈线性关系（方法，扩展数据图4）。通过在不同k下进行测量，可以提取非普适的光锥速度 $v = 2\pi|\mathrm{d}f_{th}/\mathrm{d}k|$。图3b中的宇称分辨谱可解释为观测到了线性色散的起始，这与数值计算所得的速度（图3c）高度吻合。

接下来，我们采用类似的方法，探测一种本质上具有强相互作用、无法由自由粒子描

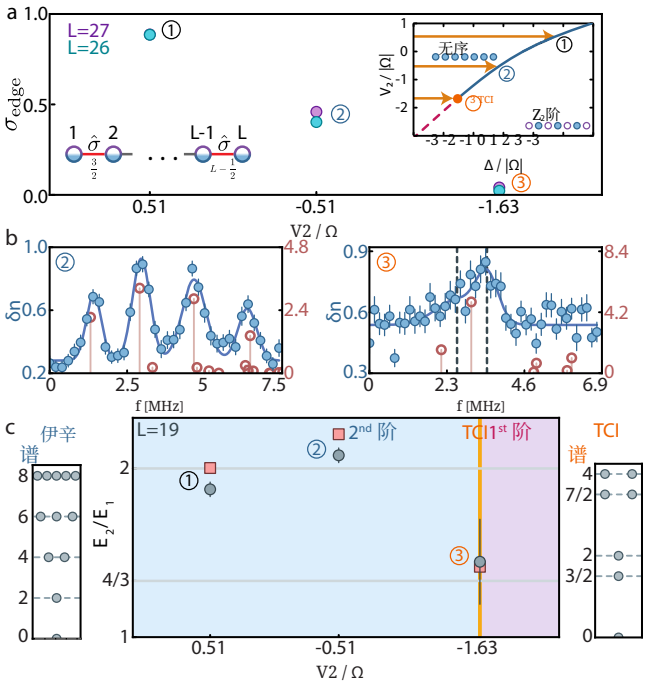


图 4 | 趋近三临界伊辛点。(a) 边界场 $\sigma_{\rm edge}$ 与相互作用强度的关系。边界 $\sigma_{\rm edge}$向三临界伊辛点逐渐减弱，显示了从伊辛共形场论到三临界伊辛共形场论的相变。右侧插图（与图 1a 相同）展示了三种相变构型及其在相边界上的位置；左侧插图为链的位点和键标记示意图。 **(b)** 19原子阵列在 $V_2/\Omega < 0$ 处的偶宇称谱。我们用高斯函数之和（实线）拟合谱（蓝色，左轴）。对于三临界谱，高斯函数的中心以虚线标示。红色圆点表示跃迁强度的数值计算结果 $|\langle g|\hat{}K|e\rangle|^2$ （右轴）。**(c)** 第二个与第一个偶宇称激发态之间的能量比 E_2/E_1 。灰色圆点根据实验光谱数据提取。红色方块根据前两个强跃迁的数值计算结果提取。具有“固定”边界条件的伊辛共形场论谱（左）和具有“自由”边界条件的三临界伊辛谱（右）分别给出 $E_2/E_1 = 2$ 和 $4/3$。

描述。

迈向三临界点

图中二级相边界终止处出现的三临界伊辛共形场论 1a，其场和标度维数均与伊辛共形场论截然不同。因此，三临界伊辛点处的有限尺寸能谱具有不同的普适比值，而这些比值又与边界条件密切相关。在我们的体系中，伊辛共形场论只有一种稳定边界条件，通常称为“固定”边界条件；在这种条件下，边缘会强烈诱发电荷密度波序，并使其延伸至体区。相比之下，三临界伊辛共形场论不仅存在稳定的固定边界条件，也存在稳定的“自由”边界条件；在后者下，由边缘诱发的电荷密度波序会受到显著抑制。我们可以诊断出哪种通过测量电荷密度波序参量，并更直接地通过光谱分辨其特征性普适能量比，可以观察到边界条件。

我们通过测量处于临界失谐且具有吸引性次近邻相互作用的链，实验探究从伊辛共形场论到三临界伊辛共形场论的演变$V_2/\Omega = -0.51$ 和 -1.63 （图4a 插图中的构型 2 和 3 ）。根据数值模拟确定的条件，后一种构型预计能够实现三临界伊辛点；在该条件下，前几个激发态能量比与三临界伊辛共形场论预言一致（方法）。首先，我们评估经准绝热态制备后、即未进行调制时 $L = 26$的27 条链边缘处成核的电荷密度波序。算符 $\hat{}\sigma_{i+1/2} = (-1)^{i+1}(\hat{}n_i - \hat{}n_{i+1})$ 定义了一个局域电荷密度波序参量，我们在边界处测量该参量，得到 $\sigma_{\rm edge} \equiv \left(|\langle\hat{}\sigma_{3/2}\rangle| + |\langle\hat{}\sigma_{L-1/2}\rangle|\right)/2$，对应图4a 中的构型 1、2 和 3。随着逐渐接近三临界伊辛点，我们观察到边缘电荷密度波序减弱，并最终几乎完全消失——这与具有自由边界条件的三临界伊辛共形场论的出现相一致（图4a 主图）。

作为进一步的证据，我们对一条 $L = 19$ 链进行全局调制光谱学。在具有吸引性的$V_2/\Omega = -0.51$下，偶宇称谱仍然与伊辛共形场论预测相一致（图4b，左）。作为衡量指标，实验提取的第二和第一偶宇称激发态能量之比为$E_2/E_1 = 2.08$（4），与预期的伊辛共形场论普适比值 2 一致。相比之下，在三临界伊辛点，我们仅观察到一个偏斜的谱特征，该特征可以用两个高斯函数之和进行拟合，其中心分别与偶宇称能量 E_1 和 E_2 相关联（图4b，右）。此处提取的比值为 $E_2/E_1 = 1.45$（25）——这与我们的模拟结果（图4b、c 中的红色数据点）以及预测 $E_2/E_1 = 4/3$ 的自由边界条件三临界伊辛共形场论一致（图4c，方法，表II）。

自由边界条件下三临界伊辛共形场论的出现表明，仅靠边缘显式破坏平移对称性，无法在三临界伊辛点注入电荷密度波序。正如下文将展示的，我们仍然可以通过修改哈密顿量，进一步促进链的边缘处的电荷密度波序，从而在实验上调控三临界伊辛共形场论的边界条件。

三临界伊辛共形场论边界调控H

这里我们将展示了通过调控里德堡阵列上的边界失谐，可以揭示三临界伊辛共形场论的更多普适特征。我们可以在链的两端各添加两个辅助原子，从而确保最大的边缘电荷密度波序[16]——将最外侧的辅助原子钉扎在 $|1\rangle$，并且由于里德堡阻塞，将相邻的辅助原子钉扎在 $|0\rangle$ （图5a，上方）。尽管这些辅助原子完全被冻结，被钉扎的 $|1\rangle$ 格点会通过范德华相互作用影响链其余部分中的“活跃”自由度。这些相互作用可以在一条没有这些

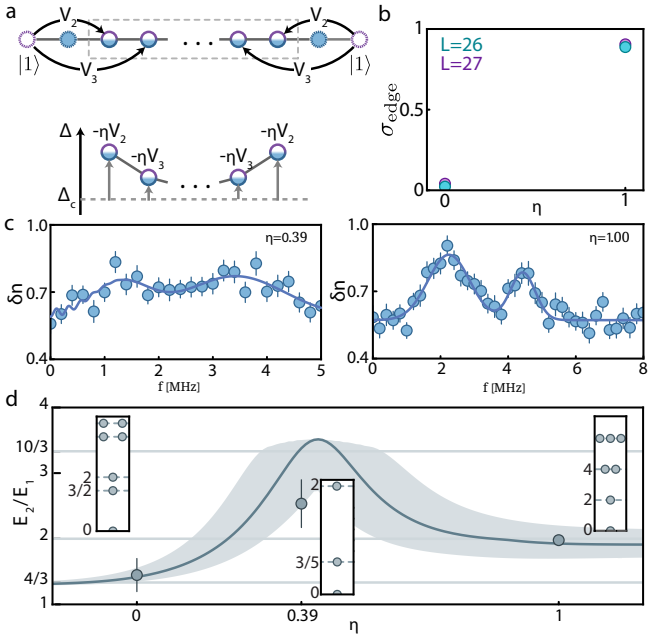


图 5 | 探测 TCI 的不同固定点边界条件。(a) 通过局域失谐控制边界条件。我们对每个原子施加局域失谐，以模拟辅助自旋对边界的影响。整体失谐强度由无量纲参数 η 重新缩放。**(b)** 边界场 σ_{edge} 与边界失谐强度 η 的关系。在边界失谐 $\eta = 1$ 存在时，会出现非平庸的 σ_{edge}，这表明边界失谐产生了固定边界条件。**(c)** $\eta = 0.39$ 和 $\eta = 1.00$ 处的阵列 $L = 19$ 的谱。实线是对用于提取激发态能量的理论模型（方法）的拟合。**(d)** 不同边界失谐下阵列 $L = 19$ 的激发态能量比。插图为具有三种不同边界条件（自由、中间和固定）的 TCI 共形场论对应的谱。这三种边界条件分别给出 4/3、10/3、2。我们从 (c) 所示的谱中实验提取该比值。实线为数值计算结果，阴影区域表示由 V_2 导致的不确定性。

用于播种电荷密度波的辅助原子、通过施加空间变化的失谐扰动来精确模拟

$$\delta\Delta_i = -64V_2\left[(i+1)^{-6} + (L+2-i)^{-6}\right] \qquad (5)$$

对于格点 i（图 5a，下方，以及扩展数据图 5）。

我们希望通过平滑地开启 $\delta\Delta_i$，在实验上评估自由边界条件三临界伊辛共形场论将如何演变。因此，我们将系统制备在哈密顿量的基态附近

$$\hat{H}_\eta = \hat{H}_{\mathrm{TCI}} - \eta\sum_i \delta\Delta_i\,\hat{n}_i, \qquad (6)$$

其中 $\hat{H}_{\mathrm{TCI}}$ 对应于在 TCI 点处计算的方程（1），而 $\eta \in [0,1]$ 用于表征边界失谐分布的强度。首先，我们考虑以下极限 $\eta = 1$，这对应于边界失谐完全“开启”的情形。对 σ_{edge} 在 $L = 26$ 条链和 27 条链上的测量结果均接近 1（图 5b），强烈表明我们的边界失谐已产生固定边界条件。针对一个 $L = 19$ 阵列中的偶宇称激发态进行调制光谱学测量，进一步支持了这一结论：提取出的 $E_2/E_1 = 1.98(6)$ 值与固定边界条件下三临界伊辛共形场论预测的比值 2 一致（图 5c 右图、d）。

实验上分别在 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$处展示的稳定自由边界条件和固定三临界伊辛共形场论边界条件，由一种不稳定不动点边界条件隔开；该条件具有另一种特征性普适能谱。我们通过数值模拟一个 $L = 19$ 阵列，并追踪最低两个偶宇称态的能量比 E_2/E_1 随 η 变化的情况（实线，图 5d）。在$\eta \equiv \eta_c \approx 0.39$处，我们发现其与不稳定三临界伊辛共形场论边界条件的解析预测 $E_2/E_1 = 10/3$ 最为吻合。随后，我们在 η_c 处实验测量能谱（图 5c 左图），并提取能量比 $E_2/E_1 = 2.5$（4）——显著高于自由和固定边界条件对应的数值（图 5d）。模拟值与测量值之间的差异主要归因于原子间距较小时 V_2 的实验不确定性。我们在数值模拟中纳入了 V_2（1.7%）的不确定性，发现测量结果落在考虑该不确定性的区域内（图 5d，阴影区域）。

三临界伊辛共形场论还预测了 E_1 在自由、中间和固定边界条件下获得的能隙之间的普适比值：$E_1^{\mathrm{intermediate}}/E_1^{\mathrm{free}} = 2/5$ 以及 $E_1^{\mathrm{fixed}}/E_1^{\mathrm{free}} = 4/3$ (方法，表II)。我们通过光谱测量得到的能隙给出 $E_1^{\mathrm{intermediate}}/E_1^{\mathrm{free}} = 0.57$（15）（接近共形场论预测），以及$E_1^{\mathrm{fixed}}/E_1^{\mathrm{free}} = 0.91$（15）（偏差较大，但仍在考虑 V_2 不确定性后所覆盖的范围内）（扩展数据图6）。淬火至三临界伊辛点后的补充能隙测量，进一步支持了光谱学中观察到的能隙趋势（方法，扩展数据图6）。

在具有固定边界条件的伊辛相变线上，我们只能探测到由偶数个涌现费米子算符作用于基态所产生的玻色激发。类似地，三临界伊辛共形场论的固定边界条件谱源自偶数个（相互作用的）费米子；而自由和中间边界条件则揭示了更丰富的场内容，其中既有玻色算符也有非玻色算符。事实上，实验反推出的分数 E_2/E_1以及能隙比源自非玻色 TCI 场的标度维数（方法）——这体现了我们的调制光谱学方法能够提取非平凡共形场论数据。

大系统中的普适动力学响应

尽管我们已经成功采用了

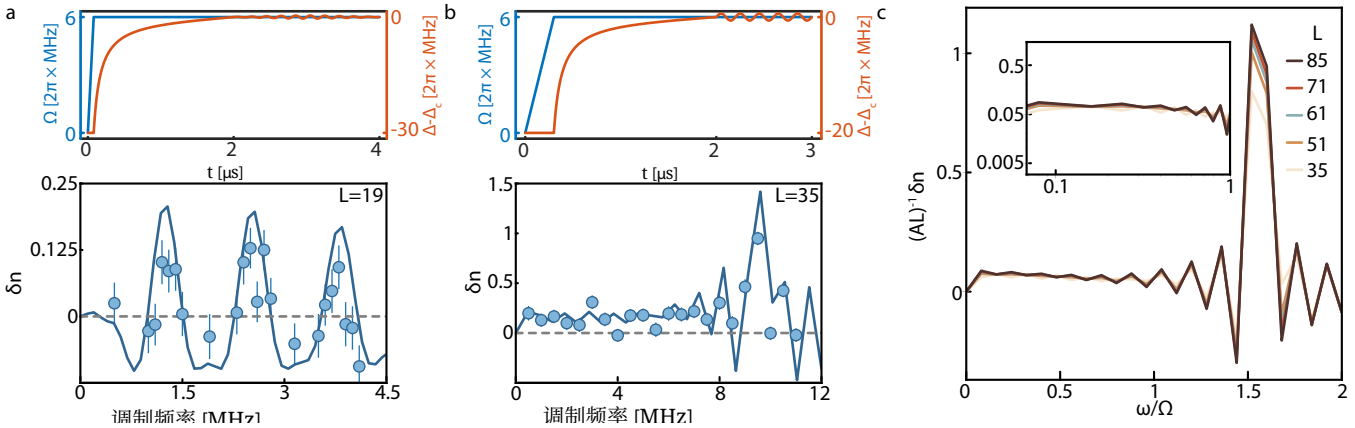


图 6 | 动力学结构因子的线性响应与普适标度。(a) 高斯包络调制下 $L = 19$ 阵列的峰分辨响应 δn。（上）实验扫描。实验包括从无序相到临界点的绝热扫描，随后施加高斯包络调制。（下）测得的响应。实线表示 Fendley-Sengupta-Sachdev 模型响应的张量网络模拟结果，其峰值能量经过重标度，以匹配里德堡哈密顿量测得的本征能量。**(b)** $L = 35$ 阵列在连续极限下的方波脉冲调制响应。（上）实验扫描。在临界点施加的调制具有方脉冲包络。（下）测得的响应。我们观察到，在低调制频率下，响应 δn 有限且几乎恒定。实线表示使用张量网络对 Fendley-Sengupta-Sachdev 模型进行的数值模拟。**(c)** 方波脉冲调制响应的标度塌缩。通过用 $(AL)^{-1}$对响应进行重标度，不同系统尺寸的低能响应塌缩在一起，并且在低频下近乎恒定（插图）。

调制-斜坡-探测序列来提取普适的有限尺寸共形场论谱，但在更大的系统中分辨单个能级会变得更加困难：激发态之间的能级间距会随着 L^{-1}的增加而减小，因此调制光谱学需要通过延长调制时间来提高频率分辨率 T。或者，如果我们将 T 保持在能级间距倒数以下，那么激发态将有效地模糊成能量连续谱。在这一 regime 中，实验仍然可以获取动力学结构因子这一物理量；它编码了临界性处共形场论主场的普适关联[6]。

在这一连续极限（“大-L、短-T”极限）下，调制-斜坡-探测序列测得的响应确实与动力学结构因子成正比，但仅在零温和低能量极限下成立。更准确地说，调制频率f 必须处于前 O个$L^2(2\pi f/)$激发态的能量范围内，因为我们在序列末尾将系统斜坡至乘积态，以探测转移的布居。在伊辛共形场论的情形下，这一判据给出$2\pi f/\Omega \lesssim O(\log^2 L/L)$（方法）。现在，我们设计一种测量动力学结构因子的序列，该序列不依赖这些条件，并且通常适用于任意哈密顿量。

为此，我们提出并展示了一种替代调制方案的原理验证——调制-探测序列 （方法）——在临界点进行调制后立即测量系统随频率变化的响应，无需中间的斜坡过程（图 6a，上图）。随后，当使用同一算符进行调制并测量时——

算符 $\hat{K} = \sum_j \cos(kj)\hat{o}_j$ （k 是算符 $\hat{K}$ 的波矢，$\hat{o}_j$ 是一个局域算符），变化量 $\langle \delta K \rangle = \langle K(T) \rangle - \langle K(0) \rangle$ 与频率 $\omega = 2\pi f$处的动力学结构因子 $S(k, \omega)$成正比（方法）。在实验中，我们施加全局调制 $\hat{K} = \sum_i \hat{n}_i \approx \frac{1}{2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i$，其中 $\hat{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{n}_i + \hat{n}_{i+1}$是标度维数为 $\Delta_\varepsilon = 1$的共形场论初级场[16] ε的晶格对应项。调制后，我们测量里德堡态中原子总数的变化， $\delta n \equiv \langle \delta \hat{K} \rangle$。

在峰分辨极限下，该序列测量的是激发态能量，因为响应会在相应的激发能处出现谱峰。利用全局调制，我们测量了一个 $L = 19$阵列在零波矢处的 $k = 0$谱，并观察到代表激发态的清晰谱峰（图6a，下）。然而，对于与 K 中相当数量的投影调制-斜坡-探测序列测量相比，调制-探测序列的信噪比较低。这种降低源于基态不再是可观测量 K的本征态，从而导致量子投影噪声增大。因此，调制-斜坡-探测序列更适合测量分辨的激发能，而调制-斜坡序列则更适合测量普适的动力学结构因子，尽管它还增加了复杂性：需要在两个不同的调制相位下测量响应（我们利用这一点来抑制高阶响应；方法），并且前述信噪比较低。

在连续极限下，该序列测量的是共形场论中该算符的动力学结构因子—

动力学结构因子。伊辛共形场论预测，在零温下，该动力学结构因子

$$S_\varepsilon(k=0,\omega)\sim\omega^{\Delta_\varepsilon-1}=\omega^0 \tag{7}$$

在低频下是一个常数，$\omega\ll\Omega$（方法）。将这一技术应用于 $L=35$ 调至伊辛临界性的系统（图4a 插图中的构型 1），我们确实发现响应在低频（$\omega\lesssim\Omega$）下几乎保持恒定（图6b），我们的张量网络模拟也支持这一结果，这些模拟采用含时变分原理（TDVP）方法[45]（图6b 中的实线）。为证明频率依赖关系符合普适标度函数，我们对多个系统尺寸下调制后的响应进行了数值模拟，系统尺寸从$L=35$ 到 $L=85$（图6c）。按（AL）$^{-1}$缩放后，其中 A是调制振幅，不同系统尺寸的响应塌缩到一个普适标度函数；该函数在 $\omega/\Omega\lesssim0.3$附近近似为常数——这与共形场论预测一致（图6c，插图）。

我们的实验结果、数值模拟和解析共形场论预测彼此一致，这表明，通过测量临界点处系统对外部调制的响应随频率的变化，可以获得底层共形场论场的标度函数。我们的数值模拟还表明，调制-探测序列有望应用于更大的系统，这也为该技术的未来应用指明了方向，例如结合局域调制能力，测量普适的 σ-场关联（我们在方法部分概述了这一流程），以及研究更高维度的多体系统。

讨论与展望

我们的实验利用调制光谱学，直接探测了受伊辛和三临界伊辛普适类共同支配的临界里德堡链的激发谱，这些链具有各种可调的固定点边界条件。通过实验实施有限尺寸标度，我们恢复了临界性下能谱对系统尺寸的普适依赖关系。作为对共形场论预测的非平凡一致性检验，我们还提取了低能激发态之间的普适能量比——这些能量比编码了线性色散、对允许算符的约束以及标度维数。此外，我们开展了细致的理论研究，并直接测量了系统在临界点的响应，从而提取出由共形场论场关联所支配的动力学结构因子的频率依赖关系。

里德堡原子阵列的可编程性和位点分辨测量能力，也使我们能够探测共形场论的其他方面。一个自然的下一步是测量本文所研究固定点处的一点和两点关联函数，将其与普适共形场论预测进行比较，并量化由基态制备不完善和/或未能精确调至临界性等因素造成的偏差。通过测量按能量和动量分辨的关联函数，可以确定涌现共形场论的有效范围。近期理论研究提出，只需增加极少的实验开销，我们的装置便能进一步探索“测量改变的量子临界性”[46–51]——在这一过程中，测量引起的非幺正微扰会定性地改变普适共形场论预测[52,53]。除了本研究探索的伊辛和三临界伊辛普适类之外，类似的里德堡装置还可用于探测其他 (1 + 1)D 共形场论，例如 $c=4/5$ 三态 Potts 模型和 $c=1$ 阿什金-泰勒共形场论[54–56]。研究吉布斯态的制备及其在量子相变[57,58]处的性质，也具有重要的理论意义。此外，这些调制技术还可扩展用于探测更高维度量子临界点的动力学性质，这些性质难以通过数值方法研究，例如二维铁磁 XY 模型临界点处的动力学电导率；该模型可由反德西特/共形场论对应描述[59–61]。

[1]J. Maldacena，《超共形场论与超引力的大 N 极限》，《国际理论物理学杂志》**38**，1113（1999年）。[2] D. Friedan、E. J. Martinec 和 S. H. Shenker，共形不变性、超对称与弦理论，《核物理B》**271**，93（1986年）。[3] A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov，二维量子场论中的无限维共形对称性，《核物理B》**241**，333（1984年）。[4]J. L. Cardy，*Scaling and renormalization in sta-tistical physics*，《剑桥物理学讲义》（剑桥大学出版社，剑桥，1996年），网址：https://cds.cern.ch/record/318508。[5] P. Di Francesco、P. Mathieu 和 D. S´en´echal，*Con-formal Field Theory*，《当代物理学研究生教材》（施普林格，纽约，1997年），ISBN 978-0387947853.[6]S. Sachdev，*Quantum Phase Transitions*（剑桥大学出版社，剑桥，2011年），第2版，ISBN 978-0-521-51468-2，网址：https://www.cambridge.org/core/books/quantum-phase-transitions/33C1C81500346005E54C1DE4223E5562。[7] S. Sachdev 和 J. Ye，《无序量子海森堡磁体中的无能隙自旋液体基态》，PhysicalReview Letters **70**，3339（1993年）。[8] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma，《非阿贝尔任意子与拓扑量子计算》，《现代物理评论》**80**，10832008年（）。[9] A. Kitaev，《霍金辐射中的隐秘关联与热噪声》（2014年），网址：https://online.kitp.ucsb.edu/online/joint98/kitaev/

。[10] C. Holzhey、F. Larsen 和 F. Wilczek，《共形场论中的几何熵与重整化熵》，《核物理B》424，443（1994年）。[11] P. Calabrese 和 J. Cardy，《纠缠熵与共形场论》，《物理学A辑：数学与理论》42，504005（2009年）。[12] T. Giamarchi，*Quantum physics in one dimen-sion*，《物理学专著国际丛书》（克拉伦登出版社，牛津，2004年），网址：https://cds.cern.ch/record/743140 。[13] J. L. Cardy，《共形不变性与表面临界行为》，《核物理B》240，514（1984年）。[14] J. L. Cardy，《边界条件、融合规则与Verlinde公式》，《核物理B》324，581（1989年）。[15] J. L. Cardy，载于 *Encyclopedia of Mathematical Physics*，J. Fran˛coise、G. L. Naber 和 S. T. Tsou 编（爱思唯尔，牛津，2006年），第333–340页，ISBN 978-0-12- 512660-1。[16] K. Slagle、D. Aasen、H. Pichler、R. S. K. Mong、P. Fend- ley、X. Chen、M. Endres 和 J. Alicea，《里德堡链中伊辛共形场论的微观表征》，Physical Review B 104，235109（2021年）。[17] F. Pastawski、B. Yoshida、D. Harlow 和 J. Preskill，《全息量子纠错码：体/边界对应的玩具模型》，《高能物理学杂志》2015，149（2015年）。[18] J. L. Cardy，《二维共形不变理论的算符内容》，Nucl. Phys. B 270，186（1986年）。[19] D. A. Tennant、T. G. Perring、R. A. Cowley 和 S. E. Nagler，《 $s = 1/2$ 反铁磁链$KCuF_3$，中的非束缚自旋子》，Physical Review Letters 70，4003（1993年）。[20]R. Werner 和 A. Kl¨umper，《海森堡链中动力学关联函数的线形》，Physical Review B 64，174414（2001年）。[21] B. Lake、D. A. Tennant、C. D. Frost 和 S. E. Nagler，《量子反铁磁体的量子临界性与普适标度》，《自然·材料》4，329（2005年）。[22] E. E. Hirtenlechner，博士论文，ETH Z¨urich（2014年），dISS. ETH No. 22303。[23] K. Y. Povarov、D. Schmidiger、N. Reynolds、R. Bewley 和 A. Zheludev，《吸引性Tomonaga-Luttinger自旋液体中时间关联的标度》，Physical Review B 91，020406（2015年）。[24] B. Lake、D. A. Tennant、J.-S. Caux、T. Barthel、U. Schollw¨ock、S. E. Nagler 和 C. D. Frost，《近乎理想的海森堡链在零温和有限温度下的多自旋子连续谱》，Physical Review Letters 111，137205（2013年）。[25] M. Mourigal、M. Enderle、A. Kl¨opperpieper、J.-S. Caux、A. Stunault 和 H. M. Rønnow，《量子海森堡反铁磁链中的分数自旋子激发》，Nature Physics 9，435（2013年）。[26] M. Grayson、D. C. Tsui、L. N. Pfeiffer、K. W. West 和 A. M. Chang，《分数量子霍尔边缘的手征Luttinger液体连续谱》，Physical Review Letters 80，1062（1998年）。[27] A. M. Chang，《电子隧穿进入分数量子霍尔边缘时对手征Luttinger行为的观测》，Physical Review Letters 77，2538（1996年）。[28] M. Banerjee、M. Heiblum、V. Umansky、D. E. Feldman、Y. Oreg 和 A. Stern，《半整数热……的观测

霍尔电导，Nature 559, 205 (2018)。[29] L. A. Cohen, N. L. Samuelson, T. Wang, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. P. Zaletel, and A. F. Young，石墨烯分数量子霍尔点接触中的普适手性卢廷格液体行为，Science 382, 542 (2023)。[30] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. H¨ansch, and I. Bloch，超冷原子气体中从超流体到莫特绝缘体的量子相变，Nature 415, 39 2002( )。[31] W. S. Bakr, A. Peng, M. E. Tai, R. Ma, J. Simon, J. I. Gillen, S. F¨olling, L. Pollet, and M. Greiner，在单原子尺度探测超流体–莫特绝缘体相变，Science 329, 547 (2010)。[32] M. Endres, T. Fukuhara, D. Pekker, M. Cheneau, P. Schauß, C. Gross, E. Demler, S. Kuhr, and I. Bloch，二维超流体/莫特绝缘体相变中的“希格斯”振幅模，Nature 487, 454 (2012)。[33] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Om- ran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, et al.，利用51原子量子模拟器探测多体动力学，Nature 551, 579 (2017)。[34] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z.-X. Gong, and C. Monroe，利用53量子比特量子模拟器观测多体动力学相变，Nature 551, 601 (2017)。[35] F. Fang, K. Wang, V. S. Liu, Y. Wang, R. Cimmino, J. Wei, M. Bintz, A. Parr, J. Kemp, K.-K. Ni, et al.，利用原子阵列探测开放量子系统中的临界现象，Science 390, 601 (2025)。[36] A. Keesling, A. Omran, H. Levine, H. Bernien, H. Pich- ler, S. Choi, R. Samajdar, S. Schwartz, P. Silvi, S. Sachdev, et al.，可编程里德伯模拟器上的量子基布尔–祖尔克机制与临界动力学，Nature 568, 207 (2019)。[37] S. Ebadi, T. T. Wang, H. Levine, A. Keesling, G. Se- meghini, A. O mran, D. Bluvstein, R. Samajdar, H. Pich- ler, W. W. Ho, et al.，256原子可编程量子模拟器上的物质量子相，Nature 595, 227 (2021)。[38] T. Manovitz, S. H. Li, S. Ebadi, R. Samajdar, A. A. Geim, S. J. Evered, D. Bluvstein, H. Z hou, N. U. Koy- luoglu, J. Feldmeier, et al.，可编程模拟器上的量子粗化与集体动力学，Nature 638, 86 (2025)。[39] T. I. Andersen, N. Astrakhantsev, A. H. Karamlou, J. Berndtsson, J. Motruk, A. Szasz, J. A. Gross, A. Sc huckert, T. Westerhout, Y. Zhang, et al.，模拟–数字量子模拟器上的热化与临界性，Nature 638, 79 (2025)。[40] I. S. Madjarov, J. P. Covey, A. L. Shaw, J. Choi, A. Kale, A. Cooper, H. Pichler, V. Schkolnik, J. R. Williams, and M. Endres，碱土金属里德伯原子的高保真纠缠与探测，Nature Physics 16, 857 (2020)。[41] C. Chen, G. Bornet, M. Bintz, G. Emperauger, L. Leclerc, V. S. Liu, P. Scholl, D. Barredo, J. Hauschild, S. Chatterjee, et al.，二维里德伯阵列中的连续对称性破缺，Nature 616, 691 (2023)。[42] A. G. de Oliveira, E. Diamond-Hitchcock, D. M. Walker, M. T. Wells-Pestell, G. Pelegrí, C. J. Picken, G. P. A. Malcolm, A. J. Daley, J. Bass, and J. D. Pritchard，在一个

利用局域光移在里德堡原子阵列上实现加权图优化，PRX Quantum 6, 010301 (2025)。[43] P. Fendley, K. Sengupta, and S. Sachdev，一维硬玻色子模型中相互竞争的密度波序，Physical Review B 69, 075106 (2004)。[44] S. Iino, S. Morita, and N. Kawashima，经典自旋系统的边界共形谱与表面临界行为：一项张量网络重整化研究，Physical Review B 101, 155418 (2020)。[45] J. Hauschild and F. Pollmann，利用张量网络进行高效数值模拟：Tensor Network Python (TeNPy)，SciPost Physics Lecture Notes p. 005 (2018)。[46] S. J. Garratt, Z. Weinstein, and E. Altman，测量通过非局域协同作用重塑临界量子态，Phys. Rev. X 13, 021026 (2023)。[47] Z. Yang, D. Mao, and C.-M. Jian，测量后的一维临界态中的纠缠，Phys. Rev. B 108, 165120 (2023)。[48] S. Murciano, P. Sala, Y. Liu, R. S. K. Mong, and J. Alicea，测量改变的伊辛量子临界性，Phys. Rev. X 13, 041042 (2023)。[49] Z. Weinstein, R. Sajith, E. Altman, and S. J. Garratt，测量后临界量子伊辛链中的非局域性与纠缠，Phys. Rev. B 107, 245132 (2023)。[50] R. A. Patil and A. W. W. Ludwig，源于对临界基态进行量子力学测量所固有随机性的高度复杂新型临界行为——受控重整化群分析 (2024)，arXiv:2409.02107 [cond-mat],url: http://arxiv.org/abs/2409.02107 。[51] Y. Liu, S. Murciano, D. F. Mross, and J. Alicea，对无能隙量子态进行单轮测量所引发的边界相变，Physical Review Research 7, 023293 2025( )。[52] S. Naus, Y. Liu, S. Murciano, P. Sala, M. Endres, and J. Alicea，里德堡阵列中测量改变的临界性的实用路线图 (2025 2506 21963), [ ], 2506 21963 arXiv: . quant-ph url: http://arxiv.org/abs/ . .[53] A. Sarma, N. Myerson-Jain, R. G. Melko, and C. Xu，利用量子模拟器快照探测缺陷 (2025)，arXiv:2507.05379 [quant-ph], url: http://arxiv.org/abs/2507.05379 。[54] I. A. Maceira, N. Chepiga, and F. Mila，里德伯链中的共形相变与手征相变，Physical Re- view Research 4, 043102 (2022)。[55] N. Chepiga，多组分里德伯阵列中的可调量子临界性，Physical Review Letters 132, 076505 2024( )。[56] J. Zhang, S. H. Cant´u, F. Liu, A. Bylinskii, B. Braver- man, F. Huber, J. Amato-Grill, A. Lukin, N. Gemelke, A. Keesling, et al.，探测里德堡原子阵列中的量子浮动态，Nature Communications 16 (2025)。[57]J. Lloyd and D. A. Abanin，面向近期量子处理器的量子热态制备 (2025), arXiv:2506.21318 [quant-ph], url: http://arxiv.org/abs/2506.21318 。[58] K. L. Zhang and Z. Song，非零温度下量子伊辛链中的量子相变，Physical Review Letters 126, 116401 (2021)。[59] W. Witczak-Krempa, E. S. Sørensen, and S. Sachdev，量子蒙特卡洛与全息理论揭示的量子临界动力学，Nature Physics 10, 361 2014( )。[60]R. C. Myers、S. Sachdev 和 A. Singh，《无自对偶性的全息量子临界输运》，Physi- cal Review D 83, 066017 (2011年)。[61] K. Chen、L. Liu、Y. Deng、L. Pollet 和 N. Prokof'ev，《二维超流体-绝缘体量子临界系统中的普适电导率》，Physical Review Letters 112, 030402 (2014年)。[62] P. Scholl、A. L. Shaw、R. B.-S. Tsai、R. Finkelstein、J. Choi 和 M. Endres，《高保真里德堡量子模拟器中的擦除转换》，Nature 622, 273 (2023)。[63] A. L. Shaw、Z. Chen、J. Choi、D. K. Mark、P. Scholl、R. Finkelstein、A. Elben、S. Choi 和 M. Endres，《在 60原子模拟量子模拟器上对高度纠缠态进行基准测试》，Nature 628, 71 (2024)。[64] A. L. Shaw、P. Scholl、R. Finklestein、I. S. Madjarov、B. Grinkemeyer 和 M. Endres，《光镊阵列的暗态增强装载》，Phys. Rev. Lett. 130, 193402 2023( )。[65] J. P. Covey、I. S. Madjarov、A. Cooper 和 M. En- dres，《在钟跃迁魔术波长光镊阵列中对锶原子进行 2000 次重复成像》，Phys. Rev. Lett. 122, 173201 2019( )。[66] R. Finkelstein、R. B.-S. Tsai、X. Sun、P. Scholl、S. Di- rekci、T. Gefen、J. Choi、A. L. Shaw 和 M. Endres，《用于光镊钟的普适量子操作和基于辅助量子的读出》，Nature 634, 321 (2024)。[67] D. Bluvstein、A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Se- meghini、S. Ebadi、T. T. Wang、A. A. Michailidis、N. Maskara、W. W. Ho 等，《控制受驱动里德堡原子阵列中的量子多体动力学》，Science 371, 1355–1359 (2021年)。[68] A. Cooper、J. P. Covey、I. S. Madjarov、S. G. Porsev、M. S. Safronova 和 M. Endres，《光镊中的碱土原子》，Phys. Rev. X 8, 041055 (2018)。[69] P. Calabrese 和 J. Cardy，《 1 + 1维共形场论中的量子淬火》，Journal of Statis- tical Mechanics: Theory and Experiment 2016, 064003 (2016)。

方法

实验装置A

我们实验装置的详细描述已在先前的工作中给出[40,62,63]。简而言之，我们将单个 ^{88}Sr 原子囚禁在由声光偏转器（AOD）生成的可编程一维光镊阵列（813 纳米）中。原子被初始化于$5s^2\ ^1\mathrm{S}_0$ 态，并通过窄线宽红色跃迁 $5s^2\ ^1\mathrm{S}_0 \leftrightarrow 5s5p\ ^3\mathrm{P}_1$ （689 纳米）冷却至接近其运动基态。将原子重排为具有所需原子数的无缺陷阵列后，结合直接 π 脉冲（698 纳米）和非相干光抽运[62]，将所有原子驱动至 $5s5p\ ^3\mathrm{P}_0$ 钟态。受可用光镊总数（激光功率）的限制，对于 $L = 26$、27、35 的系统尺寸，我们最多进行两轮暗态增强装载（DSEL），以确保较高的无缺陷态制备保真度[64]。在我们的量子模拟器中，亚稳钟态 $5s5p\ ^3\mathrm{P}_0$被定义为基态 $|0\rangle$，它通过单光子跃迁（ 317 纳米）与里德堡态 $5s61s\ ^3\mathrm{S}_1 \equiv |1\rangle$ 耦合。在哈密顿量方程（1）演化后，施加自电离光束（408 纳米），将处于里德堡态的原子推出[40]。最后，通过 $5s^2\ ^1\mathrm{S}_0 \leftrightarrow 5s5p\ ^1\mathrm{P}_1$（461 纳米）跃迁[65]将剩余原子从钟态中光抽运出来并进行成像。

伊辛共形场论构型（图4中的构型（1）和（2）；数据见图 1-3和图 4b）的数据均在里德伯拉比频率 $\Omega = 2\pi \times 6.0$MHz 下采集（图 1d 中所示数据除外，其对应的 $\Omega = 2\pi \times 7.5$MHz），近邻相互作用为 $V_2 = 2\pi \times 3.06(1)$ MHz，伊辛相变时晶格间距为 $a = 3.3\,\mu$m。对于三临界伊辛点（构型（3）），数据是在 $\Omega = 2\pi \times 5.5$MHz、 $V_2 = 2\pi \times 8.96(15)$ MHz 的条件下采集的，三临界伊辛点对应的晶格间距为 $a = 2.8\,\mu$m。我们还通过实验测得伊辛情形下，晶格间距为 $a = 3.3\,\mu$m 时的近邻相互作用为$V_1 = 2\pi \times 164.6(9)$ MHz。构型（1）、（2）和（3）的临界失谐分别为 $\Delta_c = 2\pi \times 10.2,\ -0.9,\ -8.3$MHz。

为分析实验数据，我们根据四个方面应用后选择协议。首先，根据重排成功情况进行后选择，保留包含正确系统尺寸的无缺陷阵列的实验拍次。其次，根据擦除检测结果进行后选择。在实验序列中，我们进行了两次擦除检测：第一次在初始态制备后立即进行，第二次在里德堡脉冲[62]之后进行。如果在擦除图像中检测到原子，则表明原子泄漏到了 $5s^2\ ^1\mathrm{S}_0$ 态，该态不属于量子比特子空间。这些拍次会在后选择过程中被舍弃。第三，我们舍弃可能发生了双里德伯激发的测量轮次。由于我们工作在里德伯阻塞区间（$V_1 \gg V_2$, $\Omega\ \Delta$），两个最近邻原子同时被激发到里德伯态的可能性很低。我们舍弃里德堡脉冲后连续格点上均未检测到原子的所有拍次。请注意，由于读出方案的缘故，我们无法区分里德堡占据与原子损失，因此这一步也会筛除在 $5s^2\ ^1\mathrm{S}_0$之外发生损失的拍次。最后，我们根据里德堡脉冲是否成功输出进行后选择。实验期间，我们用光电二极管监测脉冲，并用示波器记录；由于任意波形发生器板卡未能输出已编程的射频波形， $\sim 0.6\%$的拍次中未检测到里德堡脉冲，因此这些拍次被舍弃[63]。对于正文中展示的数据， $20-70\%$的实验轮次经过后选择后用于分析。

对于绝热扫描，我们使用声光偏转器调制全局里德堡激光束的拉比频率和失谐。系统中的里德堡相互作用在工作磁场$V_{ij} > 0$下为排斥相互作用（$B = 70$G）。在这种情况下，全局失谐经过整形，使其从较大的负值开始，并按照时间的正切函数演变至临界点；这样可以确保越接近临界点，失谐扫描速率越慢。初始时所有原子均处于态 $|0\rangle$，通过这种方式，我们在临界点制备基态。要在同一系统中实现式（$V_{ij} < 0$ 1 $|i-j| \geq 2$）中有效吸引相互作用（1，适用于$\Delta - \Delta_c$）的扇区，可以将哈密顿量中所有项的符号翻转，也就是说，在扫描过程中将失谐相对于临界点的符号反转（ V_1 ）。由于近邻相互作用 $\sim V_1$远大于哈密顿量中的其他任何能量，本征能量会聚集成若干扇区，各扇区之间由 σ 隔开。随后，我们在完整原生哈密顿量的无阻塞违背扇区内制备最高能态；该态是将相互作用和失谐的符号反转后的阻塞约束哈密顿量式（1）的基态。我们将这一过程称为反向扫描。根据实验需求，之后将全局失谐设为保持在临界点（用于$_2$测量），或在调制后以对称方式扫描至 $\mathbb{Z}B = 70$/无序相（用于光谱学）。这些选择与扫描参数一同经过优化，使系统在扫描后具有尽可能少的激发。

对于在里德堡脉冲期间需要特定局域失谐项（$\delta\Delta_i$ 在哈密顿量中）的实验，我们使用与囚禁时相同的一组光镊（813 纳米）。作为参考，对于不需要局域失谐项的实验，里德堡脉冲到来前，我们会用快速声光调制器[66] 关闭光镊光，原因有二：首先，光镊中的强度噪声会转化为里德堡量子比特流形上的非预期失谐噪声；其次，里德堡态在 813 纳米光中会受到反囚禁。光镊光会在 $5s5p\ ^3\mathrm{P}_0 \leftrightarrow 5s61s\ ^3\mathrm{S}_1$ 跃迁上产生光移，且可通过控制局域光强来调节。我们通过实验测得，对于每个光斑功率为 1.4(2) mW、束腰为 unerquicklich

0.75(5) μ米。由于里德堡态在该光镊陷阱强度下的反囚禁而导致的原子损失时间常数测得为 63(12) μ秒。我们在采集数据前，使用拉姆齐序列为每个光镊图案校准局域失谐。扩展数据图 5展示了在 $L = 26$处于带固定边界条件的三临界点情况下的校准示例。

确定临界点To为确定沿伊辛临界线制备实验装置所需的参数，我们对式（1）中的有效哈密顿量进行精确对角化。具体而言，我们考虑二阶 PXP 哈密顿量，该哈密顿量最初通过施里弗-沃尔夫变换在文献[67]，中推导得到。所得哈密顿量对应于式（1），其中 $\delta\Delta_i = 0$,

$$V_{ij} = \begin{cases} V_1 & |i-j| = 1 \\ \dfrac{64V_2}{|i-j|^6} & |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 \;=\; -\frac{\Omega^2}{4V_1}\Bigg[\sum_i \Big(2\hat{n}_i - \frac{3}{2}\hat{n}_{i-1}\hat{n}_{i+1} \\ + \big(\hat{P}_{i-1}\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_{i+1}\hat{P}_{i+2} + \text{h.c.}\big)\Big)\Bigg] \end{aligned} \tag{8}$$

^ ^ 其中， b_i 是硬核玻色子算符，定义为 $b_i = |0\rangle_i\langle 1|_i$。

遵循文献[16]，提出的曲线交叉法，我们计算不同失谐 $\langle\hat{\sigma}_{L/2}\rangle$下基态在链中间位置的 Δ 期望值，同时保持其他所有哈密顿量参数固定。通过对重标度观测量 $\sigma_{RS} = \langle\hat{\sigma}_{L/2}\rangle \cdot \sin(\pi/(L+2))^{-1/8}$ 在不同 L值下的交叉点进行有限尺寸标度分析，我们得以确定热力学极限下的临界点。扩展数据图 2a 展示了对两组实验参数 $V_2/\Omega = \pm 0.51$进行有限尺寸标度分析的结果。

定位TCI点需要对两个独立的哈密顿量参数进行成本更高的扫描。因此，我们采用一种更直接的方法来识别这一多临界点：通过数值确定参数（V_2 和 Δ_c），使所得谱与三临界伊辛共形场论预言一致。对于固定的相互作用强度 V_2，我们计算不同失谐下激发态 i的能量与第一激发态能量（相对于基态）的比值 E_i/E_1。例如，扩展数据图2b 显示了在 $V_2/\Omega = -1.63$时， $L = 15$ 从 27 到 27 时第二激发态与第一激发态之间的能量比。我们根据每对系统尺寸 Δ_X和 E_i/E_1 对应曲线的交点确定 $L-1$和 $L+1$的取值，然后将其外推至热力学极限 $1/L \to 0$。随后改变 V_2，将外推后的能量比与自由边界TCI谱 3:4:5:6:7:8: 进行比较，$\cdots$并确定临界相互作用强度 V_2 （扩展数据图 2c）。在 $V_2/\Omega = -1.63$时， E_2/E_1 和 E_3/E_1 分别最符合 $4/3$ 和 $5/3$的预言比值。在这一相互作用强度下，不同能级对应的失谐 Δ_X 在热力学极限下也收敛于同一数值；我们得到 $\Delta_c/\Omega = -1.51$ （扩展数据图 2d）。

多体态的相干控制

在正文中，我们使用调制技术测量激发态谱。当系统被制备在基态，且调制频率与基态和某个选定激发态之间的能量差共振时，布居数便会转移到该激发态。正如我们将要展示的，布居转移是基态与激发态之间的相干振荡（拉比振荡）。在这里，我们针对一个略微偏离临界点的哈密顿量，分离出基态和第一激发态，并施加调制以观察拉比振荡。此外，我们制备基态与第一激发态的等权叠加态，并通过拉姆齐干涉测量相干时间。

我们首先概述驱动两个多体态之间相干振荡的方案。假设系统被初始化在哈密顿量 H的基态 $|g\rangle$ ，该哈密顿量可以写成对角形式：

$$\hat{H} = E_g|g\rangle\langle g| + (E_g + E_1)|e_1\rangle\langle e_1| + \cdots \tag{9}$$

其中省略号包含与所有其他态之间的矩阵元，这些态均与 $|g\rangle$ 和第一激发态 $|e_1\rangle$正交。现在，我们用 $\delta H = A\cos(E_1 t + \varphi)K$ 对系统 ^ ^ 进行微扰调制。接下来，我们变换到由 $\hat{U} = \sum_j e^{-iE_j t}|e_j\rangle\langle e_j|$定义的旋转参考系，在此参考系中，有效哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{U}^\dagger(\hat{H} + \delta\hat{H})\hat{U} \\ &= E_g + \frac{A}{2}\left(\langle g|\hat{K}|e_1\rangle e^{-i\varphi}|g\rangle\langle e_1| + h.c.\right) + \cdots . \end{aligned} \tag{10}$$

当第一激发态非简并，且不存在能量比第一激发态高 E_1 的态时，省略号中仅包含无关的快速振荡项，可以将其舍去。此时，动力学被限制在一个两能级系统中，其多体拉比频率为 $\Omega_{\text{MB}} = A\left|\langle g|\hat{K}|e_1\rangle\right|$。

这里我们描述了在7原子阵列上测量拉比振荡的实验序列。实验开始时，所有原子均初始化于电子基态 $|0\rangle$，该状态近似为无序相中的多体基态。随后，我们将失谐绝热提升至 $\Delta = 2\pi \times 8.8$ MHz，以制备处于该失谐下的多体基态。这一失谐

略微偏离临界点，因为在临界点处，从第一激发态到更高激发态的跃迁与 E_1几乎共振。然后，我们施加频率为 $\omega = 2\pi \times 2.83$ MHz（通过调制光谱学测得）的全局失谐调制，持续可变时间 t。最后，我们绝热地进入$\mathbb{Z}_2$ 有序相，并读出基态中原子的总数$\hat{} O' = \sum_i (1 - \hat{} n_i)$。基态和第一激发态分别绝热转移至 $|1010101\rangle$和 $|1001001\rangle$。因此，我们定义 $\delta n \equiv \langle O' \rangle - 3$。当最终态为基态时，$\delta n = 0$；当最终态为第一激发态时，$\delta n = 1$。改变调制时间$t$ 时，我们观察到 δn 的振荡（扩展数据图1a）。我们用高斯衰减振荡拟合数据，得到振荡频率为0.506(5)MHz，初始对比度为0.83(3)，以及 $1/e$相干时间为5.5(5) μs。

接下来，我们对第一激发态能量 E_1 进行精确测量，并通过拉姆齐干涉序列表征多体相干性。制备好基态后，我们通过驱动四分之一周期的拉比振荡，施加一个 $\pi/2$ 脉冲。这使系统制备在 $(|g\rangle + |e_1\rangle)/\sqrt{2}$。随后，我们关闭调制，让系统在 $H\hat{}$ 作用下演化 t 时间。系统在 H 作用下演化 t 时间后的状态为$|\psi(t)\rangle = \left(|g\rangle + e^{-iE_1 t}|e_1\rangle\right)/\sqrt{2}$。接着，我们施加另一个初始相位固定的 $\pi/2$ 脉冲。若不存在任何退相干，激发态的布居数为 $P_e(t) = [1 + \cos(E_1 t)]/2$。在实验中，我们观测到振幅衰减的振荡，其初始对比度为 0.58(2)，振荡频率为 2.81(3) MHz（扩展数据图 1b）；这一结果与通过调制光谱学测得的第一激发态能量 $E_1 = h \times 2.83(4)$ MHz 一致。我们用高斯函数拟合衰减曲线，得到相干时间为 0.75(4) μs。我们推测，拉比振荡和拉姆齐振荡的对比度衰减，主要由里德伯激光器的强度噪声和频率噪声造成。

调制光谱学

在正文中，我们采用了两种类型的调制光谱序列：调制-斜坡-探测序列，主要用于测量哈密顿量的激发态能量；以及调制-探测序列，主要用于测量哈密顿量的动力学结构因子。顾名思义，前一种序列仅在斜坡演化至电荷密度波相或平凡相后测量里德伯占据数，而后一种序列则直接在调制态上进行测量。这两种序列还可以在两种不同区间运行：探测态分辨谱时，调制时间 T 足够长，可以分辨各个能级（峰分辨区间，$T \gg E_\Delta^{-1}$，其中 E_Δ 是作为特征能量尺度的能隙）；而测量动力学结构因子时，我们采用较短的调制时间，使激发态有效地模糊成能量连续谱（连续区间，$T \ll E_\Delta^{-1}$）。尽管两种序列都能测量激发谱和动力学结构因子，但根据具体任务，其中一种序列往往比另一种更合适，原因将在本节中说明。

在下文中，我们首先利用微扰理论推导两种调制光谱学序列的信号，然后讨论这些信号与本节稍后引入的动力学结构因子之间的关系。

调制-斜坡-探测序列

调制-斜坡-探测序列揭示多体哈密顿量 H 的激发态与基态之间的能量差，以及这些态之间的跃迁强度。该序列背后的核心思想是施加正弦调制，并测量在 H 的本征基中为对角形式的可观测量 O 的二次响应。当调制频率等于某个激发态与基态之间的能量差时，O 将发生显著变化。在实验中，我们只测量局部里德伯激发 $\{\hat{} n_i\}$。然而，这些算符的线性组合通常无法与我们想要探测的 H 同时对角化。因此，我们绝热地斜坡调节至哈密顿量 H'，在该哈密顿量中，$\{\hat{} n_i\}$ 可与 H' 同时对角化，然后进行测量。在实验中，我们选择测量基态中的原子总数，即 $\hat{} O' = \sum_i (1 - \hat{} n_i)$；该可观测量与描述系统处于深平凡相或深电荷密度波相时的哈密顿量 H' 同时对角化。正如本节稍后将展示的，这等价于测量可观测量 O；该可观测量在 H 的本征基中为对角形式。

我们首先计算调制后信号 $\delta\langle \hat{} O \rangle$，$\hat{} 它是 \langle O \rangle$ 有调制和无调制两种情况下的差值。假设我们制备了 H 的基态 $\hat{} \hat{} \hat{} |g\rangle$，并施加调制 $\delta H = A(t) K$。这里，我们选择调制轮廓 $A(t)$ 为叠加了高斯包络的正弦脉冲：

$$A(t) = A\, e^{-\left(\frac{t - T/2}{w}\right)^2} \cos(\omega t + \varphi),\ t \in [0, T], \qquad (11)$$

其中，A 是调制振幅，φ 是随机相。重要的是，由于 O 在 H的本征基底中已对角化，变化 $\delta\langle O \rangle$与激发态中的占据数成正比。因此，$\delta\langle \hat{} O \rangle$ 的首阶项关于 A是二次的。我们使用二阶含时微扰理论计算 $\delta\langle O \rangle$:

$$\delta\langle\hat{O}\rangle = \frac{\pi w^2 A^2}{4}\sum_e (O_{ee}-O_{gg})|K_{ge}|^2\left[e^{-\frac{w^2}{2}(\omega+\Delta E_{eg})^2}+e^{-\frac{w^2}{2}(\omega-\Delta E_{eg})^2}+2e^{-\frac{w^2}{2}(\omega^2+\Delta E_{eg}^2)}\cos(2\varphi)\right], \tag{12}$$

其中，$\Delta E_{eg}=E_e-E_g$ 是激发态与基态之间的能量差，$O_{ee}\equiv\langle e|\hat{O}|e\rangle$ 和 $O_{gg}\equiv\langle g|O|g\rangle$ 是 O的对角矩阵元，$|K_{ge}|^2\equiv\left|\langle g|\hat{K}|e\rangle\right|^2$ 是这两个态之间的非对角跃迁矩阵元。

为了分辨每个单独态的能量，我们在峰分辨区间内进行研究；在该区间中，每个激发态响应（$\Delta\omega=\sqrt{2\ln 2}w^{-1}$）的频率宽度都窄于能级之间的间距。在此区间内，式（12）的第一项和第三项都呈指数级小，因此可以忽略。变化量 $\delta\langle O\rangle$于是简化为一系列高斯函数之和，每个高斯函数都以 E_e-E_g为峰值：

$$\delta\langle\hat{O}\rangle = \frac{\pi w^2 A^2}{4}\sum_e (O_{ee}-O_{gg})|K_{ge}|^2 e^{-\frac{w^2}{2}(\omega-\Delta E_{eg})^2}. \tag{13}$$

为了测量激发态谱，我们应选择 $\hat{O}$，使得 O_{gg} 与所有激发态的 O_{ee} 均不相同。

现在我们来介绍与上述形式体系相对应的实验序列。实验首先通过绝热态制备，制备 $\hat{}$哈密顿量 H 的多体基态，具体方法见上一节。扫掠曲线如扩展数据图3a 所示。接下来，我们按照前文所述施加调制。最后，为进行测量，我们将失谐绝热提升至无序 / $\mathbb{Z}_2$ 相，并测量里德堡态 / 基态中的原子数，分别记为 $\hat{O}'=\sum_i\hat{n}_i$或 $\sum_i(1-\hat{n}_i)$。我们将说明，这实际上是在测量一个可观测量 O，它在临界哈密顿量的本征基中为对角形式，并且 O_{gg} 与所有 O_{ee}均不相同。将其与基态的期望值进行比较，定义 O'的变化为δn。假设这一点成立，测得信号中的峰就表明布居数已从基态转移至激发态。因此，我们可以拟合实验数据并提取峰中心，并将其确定为激发态能量。

现在我们说明，测量方案等价于在调制后立即测量算符 O。为此，我们首先确定算符 O' 的结构。在无序相深处或 $\mathbb{Z}_2$ 有序相深处（$|\Delta|\gg|V_2|$，$|\Omega|$），哈密顿量可以近似为

$$\hat{H}'\simeq-\Delta\sum_i\hat{n}_i=|\Delta|\hat{O}'+E_0, \tag{14}$$

其中 E_0 是常数能量。在这一范围内，$\hat{O}'$ 在 H' 的本征基中是对角的。在无序相中，基态是唯一的，$|0\rangle^{\otimes L}$，而第一激发流形由单激发态$|0\cdots010\cdots0\rangle$ 构成，简并度为 L。将范围限制在由基态 $|g'\rangle\hat{}$ 和单激发态 $|e'\rangle$ 张成的低能子空间后，算符 $O'\hat{}$ 具有形式 $O'=C+\sum_{e'\neq g'}|e'\rangle\langle e'|$，其中 $C=\hat{}\langle g'|O'|g'\rangle$是一个仅取决于系统尺寸 L 和斜坡所到达的相的常数。因此，在低能极限下，测量 $\hat{}O'$ 等价于测量 $\hat{}$ $O\equiv C+\sum_{e\neq g}|e\rangle\langle e|$，其中 $|e\rangle$ 表示哈密顿量 H 的激发态。

我们将失谐后的绝热斜坡建模为一个幺正算符 U。根据绝热定理，U 会将哈密顿量 H 的基态 $|g\rangle$ 映射为哈密顿量 H' 的基态 $|g'\rangle$，并将低能激发态 $|e\rangle$ 映射为第一简并激发子空间中的一个态 $|e'\rangle$。因此，可观测量 O 在海森堡绘景中变为

$$\begin{aligned}\hat{O}_H&=\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\\&=C+\sum_e U|e\rangle\langle e|U^\dagger\\&=C+\sum_{e'}|e'\rangle\langle e'|\\&=\hat{O}'.\end{aligned} \tag{15}$$

这进一步表明，在斜坡调节进入无序相后测量 O'，等价于在调制后立即测量 O:

$$\langle\psi'|\hat{O}'|\psi'\rangle=\langle\psi|\hat{U}^\dagger(\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger)\hat{U}|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle. \tag{16}$$

在无序相中，O_{gg} 确实与所有O_{ee} 激发态不同，因为无序相的基态是唯一的。

实际上，出于两个原因，在奇数链上斜坡调节至 $\mathbb{Z}_2$ 相进行测量更为可取（扩展数据图3a）。首先，奇数链处于$\mathbb{Z}_2$相时，基态仍是唯一的（$|1010\cdots0101\rangle$），而第一激发能级包含所有通过产生一对畴壁形成的状态，其简并度为（$L+3$）（$L+1$）/8，高于斜坡调节进入无序相时的简并度。这扩大了式（3）成立的能量范围。其次，在探测临界谱时，由于有限系统尺寸下能隙在无序相中达到最小值，之后斜坡调节至$\mathbb{Z}_2$ 相可避免两次经过小能隙；这会减少斜坡调节的非绝热性所产生的激发数，从而提高信号的对比度。此外，由于 $O_{ee}-O_{gg}=1$，无论斜坡调节至何种相，我们都可以略去式（ O）中依赖于该参数的因子，式子由此化为正文中的式（3）。因此，我们可以将谱峰的高度解释为跃迁强度 $|K_{ge}|^2$。

对于偶数链，由于处于$\mathbb{Z}_2$相时基态是简并的，我们必须斜坡调节回无序相，才能探测激发态（扩展数据图3a）。$L = 20$链的结果见扩展数据图3b。将调制频率$\omega = 2\pi f$乘以系统尺寸L后，我们发现奇数链$L = 19$和偶数链的偶宇称峰位置$L = 20$收敛到同一组数值。这是因为共形场论预测奇数链和偶数链的结果相同，但偶数链中还会多出一个归一化能量为 1 的奇宇称态，该态只会出现在格点数为偶数的链中（扩展数据图3c）。

调制-探测序列

调制-探测序列也采用了调制技术，用以揭示哈密顿量H的结构。其思路是在调制H的本征基中未对角化、但可在H处直接测量的算符Q的线性响应。

在调制K下。在峰值分辨区间，它还揭示了H的谱；在连续极限下，测量信号与动力学结构因子相关。

与上一节类似，我们计算调制后的信号$\delta\langle Q\rangle$。我们选择使用$\delta\hat{H} = A(t)\hat{K}$调制系统，其中调制轮廓$A(t)$是归一化包络函数$f(t)$（例如，高斯函数或方脉冲）与正弦振荡的乘积，并由总振幅A缩放：

$$A(t) = A\, f(t)\cos(\omega t + \varphi),\ t \in [0, T]. \tag{17}$$

假设我们制备了基态，调制会产生基态与激发态的叠加态。因此，$\delta\langle Q\rangle$的主导阶贡献来自非对角矩阵元$K_{ge}Q_{eg}$。主导阶响应与A呈线性关系。更一般地，假设初始态为逆温度为β的吉布斯态，则$\langle Q\rangle$的变化在A的一阶近似下为

$$\delta\langle\hat{Q}\rangle(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}A}{\mathcal{Z}}\sum_{m,n}(e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n})\mathrm{Im}\left[Q_{mn}K_{nm}F\left(\omega - (E_n - E_m)\right)e^{i(E_m - E_n)T}e^{-i\varphi}\right], \tag{18}$$

其中，对H的所有本征态对（$|m\rangle$，$|n\rangle$）求和；$F(\omega)$是时间包络函数$f(t)$的傅里叶变换。对于常见的包络函数（方脉冲、高斯函数等），$|F(\omega)|$在$\omega = 0$处出现峰值。因此，在峰分辨区间内，当调制频率ω与一对态之间的能量差$E_n - E_m$共振时，也会产生强响应。

尽管调制-探测序列也可以测量激发能，但可观测量Q无法与H同时对角化，因此会产生更大的投影噪声，因为初态不是$\hat{Q}$的本征态（图 6a）。相反，可观测量在调制-斜坡-探测序列中，按照构造，$\hat{}$在H的本征基下对角化；因此，最好使用调制-斜坡-探测序列来测量激发能。

当调制时间固定而系统尺寸增大时，激发态之间的能级间距相较于$F(\omega)$的宽度会变得更小。在这里，我们考虑另一种极端情况：$F(\omega)$的宽度内包含许多态，即连续极限。在此极限下，对于频率ω，我们需要对连续态的贡献求和。$\langle Q\rangle$的响应则为

$$\delta\langle\hat{Q}\rangle^{\mathrm{cont.}}(\omega) = \frac{\pi A f(T^-)}{\mathcal{Z}}(1 - e^{-\beta\omega})\sum_{m,n}e^{-\beta E_m}\mathrm{Im}\left[Q_{mn}K_{nm}e^{-i(\omega T + \varphi)}\right]\delta(\omega - (E_n - E_m)), \tag{19}$$

其中，$f(T^-)$是时间T处时间包络函数的左极限。现在，响应$\delta\langle\hat{Q}\rangle^{\mathrm{cont.}}$明确写成费米黄金法则的形式，并且可以与系统的动力学结构因子联系起来。

现在，我们描述一种实验方案，用于测量式（18）和（19）中的线性响应。与调制-斜坡-探测序列一样，我们首先在无序相中制备基态，并进行绝热将系统绝热地缓慢调节至临界点；理想情况下，这会将系统初始化为临界哈密顿量的基态。随后，我们施加调制$\hat{}\,\delta H$，并在调制后立即对Q进行测量，其中Q是局部$\hat{n}_i$的函数。线性响应取决于调制的最终相位$\varphi + \omega T$，因此原则上需要改变φ，才能获得$Q_{mn}K_{nm}$的振幅和相位信息（或实部和虚部）。

为了获得 $\delta\langle\hat{Q}\rangle$ 的线性响应，需要选择一个较小的 A，使得高阶响应（我们未将其纳入方程（18）和（19））小于线性阶项。然而，这样的 A可能小到使实验无法获取足够大的线性响应信号。在此，我们采用以下方案来消除所有偶数阶响应（其主要由二阶响应主导）。注意，在方程（18）和（19）中，当我们将相位 φ 改为 $\varphi+\pi$ 时，响应会带上一个负号。然而，φ 对二阶响应的依赖是 $e^{i2\varphi}$的多项式，因此将 φ 改为 $\varphi+\pi$ 不会影响二阶响应（以及所有偶数阶响应（响应）。因此，将带有 φ 和 $\varphi+\pi$ 的两种测量信号相减后，所有偶数阶响应都会相互抵消，$\hat{}$ 而线性响应则保留下来。对于与实验相关的 $Q=K$，选择 φ 为 $\pm\pi/2-\omega T$，以使响应最大化。

动力学结构因子

动力学结构因子是系统时空关联的傅里叶变换，它编码了系统中激发的动量和频率信息。这里，我们首先定义局部“场”算符 $\hat{o}_i$ 的动量和频率依赖的动力学结构因子：

$$\begin{aligned} S(k,\omega) &= \frac{1}{L\mathcal{Z}}\sum_{j,l}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{-ik(j-l)+i\omega t}\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}\hat{o}_j(t)\hat{o}_l(0)] \\ &= \frac{1}{L\mathcal{Z}}\sum_{m,n}\sum_{j,l}e^{-\beta E_m}e^{-ik(j-l)}(o_j)_{mn}(o_l)_{nm}\delta(\omega-(E_n-E_m)). \end{aligned} \tag{20}$$

我们可以通过代入 $\hat{Q}=\sum_j e^{-ikj}$式 (19) 和式 (20) 来关联起来。o_j 和 $\hat{K}=\hat{Q}^\dagger$此外，我们选择调制末相位 $\omega T+\varphi=-\pi/2$ 以使线性响应最大化。于是，我们得到

$$\begin{aligned} S(k,\omega) &= \frac{1}{L\mathcal{Z}}\sum_{m,n}e^{-\beta E_m}Q_{mn}K_{nm}\delta(\omega-(E_n-E_m)) \\ &= \frac{1}{\pi f(T^-)AL(1-e^{-\beta\omega})}\delta\langle\hat{Q}\rangle^{\mathrm{cont.}}(\omega), \end{aligned} \tag{21}$$

这表明，在连续极限下，调制-探测序列测得的线性响应与动力学结构因子成正比。

最后，我们证明，在满足一定条件时，不仅调制-探测序列，调制-斜坡-探测序列也能在连续极限下测得低频处的普适动力学结构因子。注意到，斜坡调节后的第一激发态高度简并；如果我们取式（13）的低能极限，只对第一激发简并态流形中的激发态求和，那么可以将 $O_{ee}-O_{gg}$ 替换为 1，公式在连续极限下便化简为：

$$\delta\langle\hat{O}\rangle^{\mathrm{cont.}}=\frac{\sqrt{2\pi^3}wA^2}{4}\sum_e|K_{ge}|^2\delta(\omega-(E_e-E_g)). \tag{22}$$

当我们选择 $\hat{K}=\sum_j e^{-ikj}\hat{o}_j$ 时，那么 $\delta\langle\hat{O}\rangle^{\mathrm{cont.}}\propto S(k,\omega)$的零温情形。Th

接下来，我们考虑更大的系统尺寸。此时，各态占据近似连续的能量谱，逐一分辨激发态能量变得不切实际，因此可以将两种调制技术都用于测量具有物理意义的动力学结构因子；我们将证明，该因子在临界点符合普适的共形场论预测。然而，调制-斜坡-探测序列只有在零温（通常模拟量子模拟器难以达到）和低能极限下，才能重现 S；具体而言，在伊辛共形场论情形下，只有在 $\omega/\Omega\lesssim O(\log^2 L/L)$时，响应才与动力学结构因子成正比。因此，我们将采用调制-探测序列来测量动力学结构因子，因为它的限制较少。

测量光谱分析

我们使用调制-斜坡-探测序列提取相对于基态能量的激发态能量。为此，我们将测量光谱拟合到一个试探函数上。在图1、2、3和4所示的数据中，我们将数据拟合为若干高斯函数之和，

$$\delta n(f)=a_0+\sum_i a_i e^{-\left(\frac{f-E_i/h}{w_i}\right)^2} \tag{23}$$

并将中心 $E_i>0$ 称为激发态能量。在图5c 中，我们选择较短的调制时间，并将谱拟合为

$$\delta n(f) = a_0 + \sum_i a_i \left[e^{-\left(\frac{f-E_i/h}{w_i}\right)^2} + e^{-\left(\frac{f+E_i/h}{w_i}\right)^2} + 2e^{-\frac{f^2+(E_i/h)^2}{w_i^2}} \cos(2\varphi_f) \right] \tag{24}$$

其中 φ_f 是我们在调制过程中选择的相。

我们通过最小化$\chi^2 = \sum_j [\delta n_{\mathrm{exp}}(f_j) - \delta n_{\mathrm{model}}(f_j)]^2/\sigma_j^2$来求得最优拟合参数，其中$\sigma_j$ 是对 f_j下采集的数据进行实验时的统计不确定性。为提取拟合不确定性，我们对数据进行自助法：依据正态分布 $\mathcal{N}(\delta n_{\mathrm{exp}}(f_j)\ \sigma_j^2)$对数据重采样，并用模型拟合生成的数据集。拟合参数的不确定性以重采样数据集所得最优拟合参数的标准差表示。

利用这种拟合方法，我们检验如下假设：图 2c 中所示的临界谱可由伊辛共形场论谱描述。对于拟合频率，我们在模型预测不含自由参数的情况下计算卡方 $\chi^2 = \sum_i (f_{\text{拟合}_j} - f_j^{\mathrm{model}})^2/(\sigma_j^{\mathrm{fit}})^2$,。当纳入所有满足 $L \geq 19$ 的数据时，我们发现所有数据与模型预测的偏差均在 3σ以内，约化卡方为 $\chi^2/\nu = 0.98$。这表明，系统尺寸为 $L \geq 19$ 的临界谱与伊辛共形场论谱一致，说明我们的系统由伊辛共形场论描述。

低能伊辛与 TCI 激发谱A

沿着二级伊辛相变边界，低能激发由涌现的右行和左行马约拉纳费米子 $\gamma_{R/L}(x)$ 产生，其中 x 是粗粒化位置。从微观角度看，这些费米子源自电荷密度波序参量与一个“无序参量”的乘积；后者对应于一种产生电荷密度波畴壁的非局域弦算符[16]。长度为 L 的开放边界里德堡链，其有效低能哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Ising}} = \int_{-L/2}^{L/2} dx(-i\hbar v\gamma_R\partial_x\gamma_R + i\hbar v\gamma_L\partial_x\gamma_L) \tag{25}$$

其中 v 是非普适速度。微观里德堡链哈密顿量还会产生高阶导数项和相互作用项，我们未将其纳入 $\mathcal{H}_{\mathrm{Ising}}$，但这些项是无关的，因此在讨论低能激发时可以忽略。为便于下文讨论反射对称性，我们将链定义在从 $x = -L/2$ 到 $+L/2$ 的区间上。当右行模式撞上边界时，必须反散射为左行模式（反之亦然）；因此，$\gamma_{R/L}$ 在 $\pm L/2$ 处必须满足某些关系，而这些关系受到 $\gamma_{R/L}$ 的厄米性以及希尔伯特空间可数性的严格约束。我们采用如下约定：

$$\gamma_R(-L/2) = \gamma_L(-L/2), \quad \gamma_R(L/2) = -\gamma_L(L/2). \tag{26}$$

最后一个方程中的负号至关重要：如果我们在两个端点都取 $\gamma_R = \gamma_L$，谱将只有一个马约拉纳零模——这无法构成合理的希尔伯特空间，因为马约拉纳零模总是成对出现。

对式（25）进行对角化，得到（相差一个常数）

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Ising}} = \sum_{k_n>0} \hbar v k_n \Gamma_{k_n}^\dagger \Gamma_{k_n}, \tag{27}$$

其中 $\Gamma_{k_n}^\dagger$ 产生一个动量为

$$k_n = \frac{\pi}{L}(n + 1/2), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{28}$$

、能量为 $\hbar v k_n$的激发。将右动子和左动子合并为一个在周长为 $2L$的圆周上手征费米子，并根据式（26）施加反周期边界条件，即可高效地重新得到上述动量量子化条件。

为考察能量本征态的反射性质，我们将 Γ_{k_n} 通过$\gamma_{R/L}$ 分解为

$$\Gamma_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx[e^{-ik_n x}\gamma_R - i(-1)^{n+1}e^{ik_n x}\gamma_L]. \tag{29}$$

反射会交换右动子和左动子，并将

$$\begin{aligned} R_x : \gamma_R(x) &\to -i(-1)^{L+1}\gamma_L(-x)G \\ \gamma_L(x) &\to i(-1)^{L+1}\gamma_R(-x)G. \end{aligned} \tag{30}$$

为使式（26）在反射下保持不变，顶部和底部变换必须具有相对符号差异。我们利用数值计算得到的反射本征值来确定约定，使顶部变换带有额外的负号。$(-1)^{L+1}$ 因子的出现，是因为偶数 L对应键中心反射，而奇数 L 对应格点中心反射。在相应的反射下，粗粒化的电荷密度波序参量变换为[16] $\sigma(x) \to (-1)^{L+1}\sigma(-x)$。费米子再次由序参量和无序参量的乘积构成，因此继承了上述符号，如式（30）所示。算符 G 用于体现反射会改变费米子微观定义中非局域弦算符的取向；计数全局费米子宇称的G则会将其取向转回。最后，G 和 $\gamma_{R,\ L}$ 反对易，因此需要 i 因子来保持马约拉纳算符的厄米性。由此可得

$$R_x : \Gamma_{k_n} \to -(-1)^n(-1)^{L+1}\Gamma_{k_n}G, \tag{31}$$

由此我们可以推断具有任意数量费米子激发的多体态相对于基态的反射性质。

关键在于，哪些费米子填充对应物理态，取决于共形场论的边界条件——这与式（26）中不可更改的费米子边界条件不可混为一谈。在我们的链中，伊辛共形场论具有唯一稳定的（固定）边界条件，此时电荷密度波序参量在每个边缘都被钉扎。此外，两个边缘上序参量的相对符号取决于格点数 L 是偶数还是奇数。这种奇偶效应也源于偶数 L （键中心）链与奇数 L （格点中心）链所保持的反射对称性略有不同。因此，对称性要求边缘电荷密度波序参量在奇数$\langle \hat{\sigma}_{i+1/2}\rangle = \langle \hat{\sigma}_{L+1/2-i}\rangle (i \in \{1,\cdots,L\})$时满足，而在偶数 L 时满足$\langle \hat{\sigma}_{i+1/2}\rangle = -\langle \hat{\sigma}_{L+1/2-i}\rangle$。 L。

对于 L 为奇数的链，两端非零序参量期望值相等，这意味着链的体区只能容纳偶数个畴壁。考虑到每个费米子都会产生一个畴壁，因此此时的物理态包含偶数个费米子激发。举例来说，可以从基态出发，再施加一个费米子算符。该费米子所携带的无序参量弦算符会翻转一端电荷密度波序参量的符号，进而产生与低能谱所施加的边界条件不相容的构型，因此这类态会被排除。对于 L 为偶数的情况，两条边缘上的序参量期望值符号相反，因此必须有奇数个畴壁。相应地，此时的物理态包含奇数个费米子激发。原则上，通过精细调节，可以找到一种不稳定的（自由）伊辛边界条件，在这种条件下，边缘处的平移对称性破缺不会产生显著的电荷密度波序。此时，低能下的畴壁数不受约束，物理谱中既包含偶数也包含奇数个费米子激发。

我们的实验无法分辨这种平移。边界条件决定了允许出现的初级场，进而决定谱中呈现的算符。给定边界固定点的算符内容可由对应于“边界态”的主场的融合规则推导得出。首先考虑固定边界条件，令$\tilde{}$和 $|+\rangle \equiv |\mathbb{I}\rangle$ 以及 $|-\rangle \equiv |\tilde{\varepsilon}\rangle$ 表示分别对应于主场 I 和 ε的两个 Cardy态。从物理上说， $|+\rangle$和 $|-\rangle$ 表示某一边缘上符号分别为 $+$ 和 $-$ 的电荷密度波序参量钉扎。方程（32）中的允许初级场 α 由链两端各自对应 Cardy态的场融合后可能得到的结果决定。当每个边缘处的电荷密度波序参量符号相同（对应的边界条件通常标记为（$+$， $+$）和（$-$，$-$））时，融合规则 $\mathrm{I} \times \mathrm{I} = \mathrm{I}$ 和 $\varepsilon \times \varepsilon = \mathrm{I}$ 表明，只有 $\alpha = \mathrm{I}$ 且 $h_{\mathbb{I}} = 0$ 会出现。因此，谱为 $E_{\mathbb{I},J} \sim \frac{\pi\hbar v}{L} J$。除去中心荷带来的能量偏移后，该谱与表 I 中奇数 L对应的低能级几乎一致，区别在于后者缺少 $J = 1$ 能级。事实上， $J = 1$能级确实消失了，因为由共形变换生成元——Virasoro生成元——作用所产生的相应态范数为零。（Virasoro代数的不可约表示仅由范数非零的态构成。）当序参量在两个边缘处符号相反（边界条件为（$+$， $-$）和（$-$， $+$））时，融合规则 $\mathrm{I} \times \varepsilon = \varepsilon$规定，只有 $\alpha = \varepsilon$ 且 $h_\varepsilon = 1/2$ 会出现。由此得到的能谱为 $E_{\varepsilon,J} \sim \frac{\pi\hbar v}{L}(1/2 + J)$，与表 I 中偶数-$L$、奇费米子数的谱一致。最后，对于不稳定的自由边界条件，相关的 Cardy态为 $|0\rangle \equiv |\tilde{\sigma}\rangle$。融合规则 $\sigma \times \sigma = \mathrm{I} + \varepsilon$ 意味着 $\alpha = \mathrm{I}$ 和 $\alpha = \varepsilon$ 会出现；因此，方程–(32）预言的谱由两个共形塔 $E_{\mathbb{I},J}$ 和 $E_{\varepsilon,J}$组成。

应用共形场论规则，为推导有限尺寸伊辛临界里德堡链的能谱提供了另一条途径。伊辛共形场论的特征是中心荷 $c = 1/2$ 和三个主场 I_A， σ_A， ε_A（$A = R$， L 表示它们的手征性），其手征标度维数分别为 0， $1/16$ 和 $1/2$。在这一表述中，前文定义的手征费米子场$\gamma_{R,\ L}$ 分别对应于 ε_R 和 ε_L （自旋为 1/2，标度维数为 $1/2$）。还可以将手征初级场组合起来，得到电荷密度波序参量场 $\sigma \sim \sigma_R\sigma_L$ （标度维数为 $1/8$），以及一个对称场 $\varepsilon \sim \varepsilon_R\varepsilon_L$ （标度维数为 1），它会使链偏离二级伊辛相变边界。

每个初级算符都会生成一个具有如下能级的共形塔

$$E_{\alpha,J} \sim \frac{\pi\hbar v}{L}\left(h_\alpha + J - \frac{c}{24}\right), \qquad J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{32}$$

其中， h_α 表示由 α标记的主场的手征维数。下文中，我们忽略中心荷的贡献，因为它只会带来一个整体能量平移，而

共形场论框架还允许我们预测激发态（后代态）的空间宇称。每个处于第 J 层的后代态，都是通过以所有可能的组合施加维拉索罗升算符（L_{-n}），使总层级满足 $\sum_i n_i = J$而得到的。根据算符—态对应，这些算符的作用相当于对主场取 J 空间导数，每增加一个导数都会改变反射下的宇称。运用这一规则，结合主场自身的宇称性质，并牢记反射对于偶数和奇数L 链的含义不同，便可推导出能量本征态的反射本征值。这一推理得出了表I中所报告的反射性质。

而 $\mathcal{H}_{\mathrm{Ising}}$ 可用自由费米子描述，TCI 点则由强相互作用的共形场论所支配。尽管如此，我们仍可再次使用式（32）和共形场论规则来刻画低能 TCI 能级。TCI 共形场论的中心荷为 $c = 7/10$ ，并包含六个手征维数分别为 0、 $3/80$、 $1/10$、$7/16$、 $3/5$和 $3/2$ 的初级场，我们将它们记为 $\{\mathbb{I}_A$、 σ_A、 ε_A、σ'_A、 ε'_A、 $\varepsilon''_A\}$。

组合左行与右行模可得到若干值得关注的场[16]。主导的电荷密度波序参量场为$\sigma \sim \sigma_R\sigma_L$，其维数为 3/40。该 $\sigma' \sim \sigma'_R\sigma'_L$场具有相同的对称性，但相关性较弱，维数为 7/8。完全对称的场 $\varepsilon \sim \varepsilon_R\varepsilon_L$（维数 1/5）和 $\varepsilon' \sim \varepsilon'_R\varepsilon'_L$（维数 6/5）对应于图1a 中两个允许的相关微扰，可使系统偏离 TCI 点。手征费米子场为$\varepsilon'_R\varepsilon_L$ 和 $\varepsilon'_L\varepsilon_R$（自旋 1/2，维数 7/10），以及$\varepsilon''_{R/L}$（自旋3/2，维数3/2）。

我们所研究的 TCI 共形场论具有自由和固定边界条件，两者都实现了稳定不动点。这里，˜固定边界条件 Cardy 态 $|+\rangle \equiv |\mathbb{I}\rangle$ 和$|-\rangle \equiv |\varepsilon''\rangle$ 分别对应主场 I 和 ε''；与伊辛共形场论的情形一样，它们对应于+ 和 − 电荷密度波序参量钉扎。对于与奇数-L 链相关的 (+, +) 或 (–, –) 边界条件，融合规则 I ×I = I 和 $\varepsilon'' \times \varepsilon'' =$ I 意味着只有 $\alpha =$I 会出现，因此有 $E_{\mathbb{I},J} \sim {}^{\pi\hbar v}_{L} J$。出于与伊辛情形相同的原因，$J = 1$能级不会出现。对于与偶数 L相关的 (+, –) 和 (–, +) 边界条件，谱则由融合规则 I × ε'' = ε''决定；此时只有 $\alpha = \varepsilon''$ 会出现，因此利用 $h_{\varepsilon''} = 3/2$，能谱为$E_{\varepsilon'',J} \sim {}^{\pi v}_{L}(3/2+J)$。由于 ε'' 对应一个费米子算符，这一扇区符合此前指出的约束：在异号固定边界条件下，偶数-L 物理态包含奇数个费米子激发。对于稳定的自由边界条件，Cardy 态 $|0\rangle \equiv |\tilde{\sigma}'\rangle$ 与融合规则 $\sigma' \times \sigma' =$ I + ε'' 共同表明，$\alpha =$ I 和 $\alpha = \varepsilon''$会对谱作出贡献，从而得到两个共形塔 $E_{\mathbb{I},J}$ 和 $E_{\varepsilon'',J}$。

最后，我们考察稳定的固定边界条件与自由边界条件之间的不稳定不动点。在这种情况下，Cardy态为 $|0+\rangle \equiv |\varepsilon\rangle$ 和$|0-\rangle \equiv |\varepsilon'\rangle$。同样，+ 和 − 对应特定边缘处电荷密度波序参量的符号，而附加的“0”表示边缘也可以容纳电荷密度波序参量为零的构型。例如，中间不动点允许边缘构型 10 . . .（“较大”的边缘电荷密度波序参量）和 00 . . .（边缘电荷密度波序参量为零）具有显著权重。因此，畴壁的数量——也就是费米子激发的数量——不再受到限制，这与固定边界条件下的情况相反。对于适用于奇数 L的$(0+, 0+)$和$(0-, 0-)$，融合规则 $\varepsilon \times \varepsilon =\varepsilon' \times \varepsilon' =$I + ε'给出由两个共形塔组成的谱：$E_{\mathbb{I},J}$ 和$E_{\varepsilon',J} = {}^{\pi\hbar v}_{L}(3/5+J)$。对于适用于偶数 L的$(0+, 0-)$和$(0-, 0+)$，融合规则$\varepsilon \times \varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon''$ 给出两个不同的共形塔：$E_{\varepsilon,J} = {}^{\pi\hbar v}_{L}(1/10 + J)$和$E_{\varepsilon'',J}$。

表 II 总结了三临界伊辛共形场论的低能级结构和反射本征值（其获得方式与伊辛情形相同）。

光谱信号对调制波矢的依赖

在正文中，我们讨论了采用均匀全局调制的光谱学，以及采用波矢为 $k = \pi/(L-1)$ 的空间变化调制图样的光谱学，前者和后者分别对应于偶反射宇称和奇反射宇称的伊辛共形场论能级（图3）。更广泛地说，我们可以探讨在一般波矢 k下进行调制时，光谱学技术能够揭示哪些能级。由于开放链中平移对称性被破坏，动量不是一个好的量子数，因此人们可能会直观地认为，从定性上说，重要的只有调制的反射性质，而不是其精确的空间分布。在本节中，我们从理论上分析动量依赖的调制光谱，并证明恰恰相反，它通过信号对 k 的特征依赖，直接揭示了线性色散关系。

考虑依赖于 k 的调制哈密顿量

$$\delta\hat{H}_k(t) = A(t)\hat{K}_k,$$
$$\hat{K}_k \equiv \sum_{j=-\lfloor\frac{L-1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{L-1}{2}\rfloor} \cos(kj+\alpha)\hat{n}_j. \tag{33}$$

其中 $A(t)$ 是时间正弦调制分布（例如，式（11））。注意，当 $\alpha = 0$ 时，调制图样在反射下为偶函数，π 而当 $\alpha = \pm\pi/2$ 时，在反射下为奇函数。最终，我们关注的是施加 $\delta\langle K_k\rangle$ 后的响应 $\delta\hat{}H_k(t)$ 调制，因此我们聚焦于跃迁矩阵元

$$|K_{ge}|^2 = |\langle g|\hat{K}_k|e\rangle|^2 \tag{34}$$

它们决定了调制光谱信号强度；另见式（3）。

首先，我们在小 k 处对式（K_k）进行解析求值，此时可以将 $|e\rangle$ 展开为缓慢变化的费米子场，并利用前述方法部分，将 $|g\rangle$ 表示为作用于基态 n_j 的费米子算符。为实现前一目的，我们将 [16]

$$\hat{n}_j \sim (-1)^j c_\sigma\sigma + c_\varepsilon\varepsilon + \cdots; \tag{35}$$

c_σ，c_ε 是非普适常数，而省略号表示次领先贡献，以下我们将忽略这些贡献。忽略快速振荡的 $(-1)^j$ 项，利用 $\varepsilon = i\gamma_R\gamma_L$，并取连续极限，可得

$$\hat{K}_k \sim i\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \cos(kx+\alpha)\gamma_R(x)\gamma_L(x). \tag{36}$$

由于激发态自然地用 Γ_{k_n} 式（29）中定义的算符来表示，我们将进一步

ˆ利用变换重写 K_k

$$\gamma_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{k_n>0} (e^{ik_n x}\Gamma_{k_n} + e^{-ik_n x}\Gamma^\dagger_{k_n}), \tag{37}$$

$$\gamma_L(x) = \frac{i}{\sqrt{2L}} \sum_{k_n>0} (-1)^{n+1}(e^{-ik_n x}\Gamma_{k_n} - e^{ik_n x}\Gamma^\dagger_{k_n}). \tag{38}$$

由此我们得到

$$\hat{K}_k \sim \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \cos(kx+\alpha) \sum_{k_m,k_n} (-1)^{n+1} \left[e^{i(k_m-k_n)x}\Gamma_{k_m}\Gamma_{k_n} - e^{i(k_m+k_n)x}\Gamma_{k_m}\Gamma^\dagger_{k_n} + h.c.\right]. \tag{39}$$

暂且聚焦于奇数长度链，$|g\rangle$ 是一个没有有限能量 Γ_{k_n} 费米子占据的真空态；激发态 $|e\rangle$ 由加入偶数个费米子激发产生（见表I）。由于式（39）是费米子算符的二次形式，只有具有恰好两个占据费米子的态才可能对式（34）产生非平凡贡献。因此，我们专门考虑 $|e\rangle = \Gamma^\dagger_{k_a}\Gamma^\dagger_{k_b}|g\rangle$ 占据能级的动量标记为 k_a和 k_b的情形。相应的跃迁矩阵元计算结果为

$$\begin{aligned}\langle g|\hat{K}_k|e\rangle &= \langle g|\hat{K}_k\Gamma^\dagger_{k_a}\Gamma^\dagger_{k_b}|g\rangle \\ &\sim \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \cos(kx+\alpha)\left[(-1)^a e^{i(k_b-k_a)x} - (-1)^b e^{i(k_a-k_b)x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{[(-1)^a e^{i\alpha} - (-1)^b e^{-i\alpha}]\mathrm{sinc}\left[(k-(k_a-k_b))\frac{L}{2}\right] - (a\leftrightarrow b)\right\}.\end{aligned} \tag{40}$$

对于 $\alpha = 0$ 或 π （具有反射对称性的调制轮廓），量 $(-1)^a e^{i\alpha} - (-1)^b e^{-i\alpha}$ 仅在 $a - b \equiv 1 \pmod 2$ 时非零。对于 $\alpha = \pm\pi/2$（具有反射反对称性的轮廓），则 $(-1)^a e^{i\alpha} - (-1)^b e^{-i\alpha}$ 仅在 $a - b \equiv 0 \pmod 2$ 时非零。上述任一非平凡情形均可得出

$$|\langle g|\hat{K}_k|e\rangle|^2 \sim \left\{\mathrm{sinc}\left[(k-(k_a-k_b))\frac{L}{2}\right] + P(a\leftrightarrow b)\right\}^2 \tag{41}$$

其中，$P = +1$ 对应反射对称情形，$P = -1$ 对应反射反对称情形。

方程（41）通常预言，当调制波矢满足 $E = \hbar v(k_a + k_b)$ 时，跃迁振幅在能量为 $|k| = |k_a - k_b| = |a - b|\pi/L$的激发态处达到最大值。然而，对于均匀的反射对称调制，若满足 $k = 0$，则会出现一种特殊情形：跃迁振幅在 $|k_a - k_b| = \pi/L$处达到峰值。偶数长度链也可以采用非常相似的分析方法。只需记住，此时基态中 k_0 能级被占据，而激发态则由对该单费米子态作用偶数个费米子算符（例如 $\Gamma^\dagger_{k_a}\Gamma^\dagger_{k_b}$或$\Gamma_{k_0}\Gamma^\dagger_{k_b}$）产生。

现在，我们可以解释图 3c 中通过反射对称的 $k = 0$ 全局调制和反射反对称的 $k = \pi/18$ 调制在实验上观测到的能级。在 $k = 0$ 全局调制下，基态主要与满足 $|k_a - k_b| = \pi/L$ 的激发态耦合。更明确地说，这些态具有 $k_b = (b + 1/2)\pi/L$、 $k_a = (b + 3/2)\pi/L$ 以及 $E = 2(b + 1)\pi\hbar v/L$，其中 $b \in \mathbb{N}$。这些能量构成一个比值为 $2 : 4 : 6 : 8 : \cdots$ 的阶梯，并且（在我们的近似精度内）表现出相同的跃迁强度$|K_{ge}|^2$ （公式（41））。在我们的 $k = \pi/18$ 调制中，我们选择$\alpha = \pi/2$，使其仅作用于反射反对称激发态。在这种情况下，基态主要与满足 $|k_a - k_b| = 2\pi/L$ 的激发态耦合，即 $k_b = (b+1/2)\pi/L$、 $k_a = (b+5/2)\pi/L$ 以及 $E = (2b+3)\pi\hbar v/L$，其中同样有 $b \in \mathbb{N}$。由此得到的阶梯比值为 $3 : 5 : 7 : \cdots$；这里所有跃迁矩阵元也都相同。激发态能量的均匀间距，加上相同的跃迁矩阵元，使得我们以不同频率调制系统时产生恒定响应。这一特征与动力学结构因子的普适标度有关，我们将在后文讨论这一点。

虽然我们没有在实验上研究其他波矢，但从理论上探索更大的 k 很有意义。方程（41）预测，随着 k 增大，调制光谱学应当能够探测到“光锥”色散：当我们以 $k = m\pi/L$ （$m \in \mathbb{N}^*$）进行调制时，预计满足 $|k_a - k_b| = m\pi/L$ 的态会产生强响应。此时能够有效探测到的最低能量态具有能量 $E = \hbar v$（$m +$ （-1）$^{L+1}$）$\pi/L = \hbar v k + O$（L^{-1}）。扩展数据图 4a、b 展示了分析预测的激发态能量 E，以及我们的方法在调制波矢 $k = m\pi/L$下能够分辨的能量。我们还计算了响应

$$\frac{\pi w^2 A^2}{4} \sum_e |K_{ge}|^2 e^{-\frac{w^2}{2}(\omega - \Delta E_{eg}/\hbar)^2} \tag{42}$$

作为.....的函数 ω 以及 k 直接由式（1中的微观里德堡哈密顿量，针对 25 个原子和 20 个原子的阵列，在 $V_2/|\Omega| = 0.51$（扩展数据图 4c、d）处计算得到。预期的光锥结构在 $k = 0$ 附近清晰显现。此外，放大查看响应中小k、低能量的部分，我们发现峰位置与解析预测一致（扩展数据图 4e、f）。

我们推导式（41）时采用的解析处理假设 k较小，因此可以忽略式（-1）$^j\sigma$中的快速振荡项（35）。在 $k = \pi$附近，情况则相反：式（ ε35）中的^贡献变得无关紧要，而 K_k 式（36）则涉及标度维数较低的 σ场。尽管如此，我们对调制响应的数值计算（扩展数据图 4c、d）表明，在 $k = 0$和 $k = \pi$附近，分辨出的能级非常相似。有趣的是，后者具有一个潜在优势，值得在未来的实验工作中进一步探索：最低能态的信号在 $k = \pi$附近显著增强，但随着能量升高而减弱。

动力学结构因子与共形场论关联函数之间的关系

与场论的联系源于一维量子伊辛模型的时间响应与相关二维经典伊辛模型的关联函数之间的标准对应关系[6]。某个场 ϕ 的虚时间二点关联函数为

$$C(x,\tau) = \mathcal{Z}^{-1}\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}\hat{\phi}(x,\tau)\hat{\phi}(0,0)], \tag{43}$$

其中 $\tau > 0$和 ˆ $\phi(x,\tau) = e^{H\tau}$ˆ$\phi(x)e^{-H\tau}$。对 $C(x,\tau)$在空间和虚时间上进行傅里叶变换，可得到与动量和频率相关的关联函数

$$\chi(k, i\omega_n) = \int \mathrm{d}x \int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, e^{i(\omega_n\tau - kx)} C(x,\tau) \tag{44}$$

其中 $\omega_n = 2\pi n/\beta(n \in \mathbb{Z})$ 为松原频率，其离散化源于欧几里得时空构造，该构造要求满足 $C(x,\tau) = C(x, \tau + \beta)$。取 $\beta \to \infty$ 并假设 ϕ 映射为某个标量主场 ϕ 的标度维数为 Δ_ϕ，在热力学极限下，我们可以使用普适标度律$C(x,\tau) \sim (x^2 + v^2\tau^2)^{-\Delta_\phi}$得到

$$\chi(k, i\omega_n) \sim \left(\sqrt{v^2k^2 + \omega_n^2}\right)^{2\Delta_\phi - 2}. \tag{45}$$

（这里我们忽略开放链的边界效应，但将在下文重新考虑。）

为了将虚时间关联函数与实验可测的实时间性质联系起来，我们计算实时间关联函数 ˜tor $C(x,t)$ 的傅里叶变换，得到动力学结构因子

$$S(k,\omega) = \int \mathrm{d}^d x \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \tilde{C}(x,t) e^{-ikx + i\omega t}. \tag{46}$$

对 $\chi(i\omega_n \to \omega + i0^+)$ 进行解析延拓后，动力学结构因子便通过涨落耗散关系与 χ相关联

$$\begin{aligned} S(k,\omega) &\propto (1 - e^{-\beta\omega})^{-1}\mathrm{Im}(\chi(k,\omega)) \\ &\overset{\beta\to+\infty}{\propto} (\omega^2 - v^2k^2)^{\Delta_\phi - 1}\theta(|\omega| - v|k|), \end{aligned} \tag{47}$$

其中，$\theta(x)$表示Heaviside阶跃函数。对于伊辛共形场论的两个非平凡主场 ε 和 σ，它们的标度维数分别为 $\Delta_\varepsilon = 1$ 和 $\Delta_\sigma = 1/8$。因此，我们预期

$$S_\varepsilon(k,\omega) \propto \theta(|\omega| - v|k|), \tag{48}$$

$$S_\sigma(k,\omega) \propto (\omega^2 - v^2k^2)^{-\frac{7}{8}}\theta(|\omega| - v|k|). \tag{49}$$

在这里，我们发现 $S_\varepsilon(k = 0,\ \omega)$为常数，这与 $k = 0$ 处的恒定响应一致，如扩展数据图4c所示。此外，$S_\sigma(k = 0, \omega)$按 $\omega^{-\frac{7}{4}}$衰减。这对应于扩展数据图 $k = \pi$4c中 ω 处的响应，其中，随着增大而衰减的响应定性地反映了这种幂律标度。

原则上，要解析计算具有开放边界的链的动力学结构因子的普适标度函数，应使用存在固定 ++边界条件时的共形场论场关联函数结果，稍后我们将详细说明。或者，我们使用式（ ε20）解析计算g场的动力学结构因子。根据定义，系统的总响应等于单个能级的响应贡献乘以单位能量的能级数$\omega(= L/)2\pi v_\circ$ 要计算单个能级的贡献，我们可以使用式（41），并注意到在

热力学极限（$L \to \infty$）下，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{|e\rangle:E_e=\omega\}} |\langle g|\hat{K}_k|e\rangle|^2 \\
&\sim \sum_{\{k_a,k_b:k_a+k_b=\frac{\omega}{v}\}} \left\{\mathrm{sinc}\left[(k-(k_a-k_b))\frac{L}{2}\right]+P(a\leftrightarrow b)\right\}^2 \\
&= \begin{cases} 2,\ k=0, \\ 1,\ |k|>0 \text{ and } |k|<\dfrac{\omega}{v}, \\ 0,\ |k|>\dfrac{\omega}{v}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{50}$$

趋于常数，且与 L 无关。因此，零温 ε 场的动力学结构因子为

$$S(k,\omega) = C\cdot\theta(|\omega|-v|k|), \tag{51}$$

其中， C 是一个常数，与 ω 或 L无关。这证实了这样的预期：只要调制频率产生的激发位于光锥色散之上， $S(k,\ \omega)$ 就是常数。

或者，我们将通过对 ε动力学结构因子的直接场论推导说明，在这个特定的临界系统中，边界不会显著改变动力学结构因子中由体贡献产生的标度。当边界效应可以忽略且体贡献占主导时，可以通过测量动力学结构因子（式（47））在实验上确定标度维数。

开放链的动力学结构因子

这里我们计算开放链的动力学结构因子，并证明其主导阶行为与具有周期性边界条件的链相同；进一步证明，这两者具有相同的体关联函数标度。对于长度为 L 的开放链， ε 场的虚时间双点关联函数为 [16]

$$C(x_1,x_2,\tau) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\sin(\frac{\pi}{L}x_1)\sin(\frac{\pi}{L}x_2)}{[\cosh(\frac{\pi v}{L}\tau)-\cos(\frac{\pi}{L}(x_1-x_2))][\cosh(\frac{\pi v}{L}\tau)-\cos(\frac{\pi}{L}(x_1+x_2))]} \tag{52}$$

其中 v 是式（25）中出现的非普适速度。上述关联函数适用于足够长的距离，即 $|x_1-x_2| \gtrsim a$ 其中 a 是某个微观尺度，在该尺度以下，共形场论开始起作用。作为计算 $k=0$处动力学结构因子的初步步骤，我们对 C进行虚频傅里叶变换：

$$\chi(i\omega) = \frac{2L}{\pi v}\int_0^\infty d\tilde{\tau}e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}\int_0^\pi du\int_\lambda^u dy \frac{\sin(\frac{u+y}{2})\sin(\frac{u-y}{2})}{(\cosh\tilde{\tau}-\cos y)(\cosh\tilde{\tau}-\cos u)} \tag{53}$$

其中， $\tilde{\tau}=\pi v\tau/L$ 是归一化时间， $\tilde{\omega}=\omega/(\pi v/L)$是归一化频率， $u=\pi(x_1+x_2)/L$ 表示质心位置到边界的距离， $y=\pi(x_1-x_2)/L$ 表示两个格点之间的距离。这里， $\lambda=\pi a/L$是短程截断，用于调节场论描述失效处关联函数的发散。首先，我们说明对 u 的积分不会导致发散，也就是说，边界贡献不会改变 χ的标度。由于依赖于 u的积分始终有界于

$$\frac{\sin(\frac{u+y}{2})\sin(\frac{u-y}{2})}{\cosh\tilde{\tau}-\cos u} < \frac{\sin^2(\frac{u}{2})}{1-\cos u} = \frac{1}{2}, \tag{54}$$

因此，该积分可改写为

$$\chi(i\omega) = \frac{L}{\pi v}\int_0^\infty d\tilde{\tau}e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}\int_\lambda^\pi dy\frac{1}{\cosh\tilde{\tau}-\cos y}f(\tilde{\tau}), \tag{55}$$

其中 $f(\tilde{\tau})$是一个连续函数，由以下积分给出：

$$f(\tilde{\tau}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\left[\arctan\left(\frac{1-\cosh(\tilde{\tau})\cos(\theta)}{\sinh(\tilde{\tau})\sin(\theta)}\right)-\arctan\left(\frac{-1-\cosh(\tilde{\tau})\cos(\theta)}{\sinh(\tilde{\tau})\sin(\theta)}\right)\right]. \tag{56}$$

尽管这个函数可以用级数展开表示，但我们注意到，这个函数大致按以下方式标度

$f(\tilde{\tau}) \approx \pi e^{-\tilde{\tau}}$。由于 χ 的标度由被积函数的发散行为主导，作为有界函数的 $f(\tilde{\tau})$ 不会显著改变频率标度。因此，我们从现在起忽略它的贡献。更系统地说，由于被积函数在零附近由 $\tilde{\tau}$ 主导，可以近似为 $f(\tilde{\tau}) \approx f(0) = \pi$。采用这一近似后，我们注意到剩余积分是周期链关联函数的傅里叶变换

$$C_{\mathrm{PBC}}(y,\tilde{\tau}) = \frac{1}{\cosh\tilde{\tau} - \cos y}. \tag{57}$$

现在我们说明，在物理相关的ω范围内，虚频动力学磁化率与体相共形场论关联函数具有相同的标度行为。由于 $\pi v/L$ 是能隙的特征能量尺度，在连续极限下，调制频率 ω 应当与这一能量尺度相比足够大。因此，在下面的计算中，我们假设 $\tilde{\omega} \gg 1$ 。此外，我们将 $\omega_{\mathrm{UV}} = v/a$ 定义为最高能量尺度，超过该尺度后场论不再适用。因此，我们进一步假设 $\omega \ll \omega_{\mathrm{UV}}$，或等价地 $\tilde{\omega}\lambda \ll 1$。在这些极限下，当 $\tilde{\tau} \gtrsim 1$时，对 τ 的积分具有高度振荡性，并且可以由一个常数界定。对于 $\tilde{\tau} \lesssim 1$，被积函数的分母可以进行泰勒展开，而该展开与精确积分之间的差异同样可以由一个常数界定。由此我们得到

$$\chi(i\omega) \sim \frac{2L}{v}\int_0^\infty d\tilde{\tau} e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}} \int_\lambda^\infty dy \frac{1}{y^2+\tilde{\tau}^2}, \tag{58}$$

它是体关联函数的傅里叶变换

$$C_{\mathrm{bulk}}(y,\tilde{\tau}) = (y^2+\tilde{\tau}^2)^{-1}. \tag{59}$$

该积分的结果为

$$\chi(i\omega) = \frac{L}{v}\left\{[-\pi\log(\tilde{\omega}\lambda) + O(1)] + i\left[\frac{\pi^2}{2} + O(\tilde{\omega}\lambda\log(\tilde{\omega}\lambda))\right]\right\}. \tag{60}$$

最后，我们进行解析延拓，以得到实频关联函数

$$\chi(\omega+i\eta) = \frac{L}{v}\left\{[-\pi\log(-i(\tilde{\omega}+i\tilde{\eta})\lambda) + O(1)] + i\left[\frac{\pi^2}{2} + O(\tilde{\omega}\lambda\log(\tilde{\omega}\lambda))\right]\right\}. \tag{61}$$

动力学结构因子是实频 $\chi(\omega)$的虚部。因此， $S(k=0,\omega)$的首阶项为

$$S(k=0,\omega) = \frac{1}{L}\lim_{\eta\to 0^+}\mathrm{Im}[\chi(\omega+i\eta)] = \frac{\pi^2}{v}, \tag{62}$$

它与 L 无关，且不依赖于频率。

上述分析表明，在频率粗粒化下，开放边界临界链中 ε 场关联函数的频率标度与 $(1+1)D$ 体区伊辛共形场论中的情况相同。事实上，若接受近似标度关系 $f(\tilde{\tau}) \approx \pi e^{-\tau}$，就可以解析地计算开放链的动力学结构因子。首先，我们通过对周期边界关联函数进行傅里叶变换，计算虚频下周期链的关联函数

$$\begin{aligned}\chi(i\omega) &= \frac{L}{v}\int_0^\infty d\tilde{\tau} e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}\int_0^\pi dy \frac{1}{\cosh(\tilde{\tau}+\lambda)-\cos y} \\ &= \frac{2\pi L}{v}\frac{e^{-\lambda}{}_2F_1(1,\frac{1-i\tilde{\omega}}{2},\frac{3-i\tilde{\omega}}{2};e^{-2\lambda})}{i+\tilde{\omega}},\end{aligned} \tag{63}$$

其中， $\lambda \to 0^+$ 是用于调节发散的截断，而${}_2F_1$ 是超几何函数。对其进行解析延拓自然得到

$$S_{\mathrm{PBC}}(k=0,\omega) = \frac{\mathrm{Im}[\chi(\omega)]}{L} = \frac{2\pi^2}{v}\sum_{m=0}^\infty \delta(\tilde{\omega}-(2m+1)). \tag{64}$$

这是一个由等间距的 δ 函数组成的总和，各函数具有相同的振幅，且与系统尺寸无关 L。如果进行频率粗粒化，该函数就会变成常数。

现在我们来计算开放链的动力学结构因子。利用 $f(\tilde{\tau}) \propto e^{-\tilde{\tau}}$，开放边界动力学结构因子与周期边界情形的关系为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{OBC}}(k=0,\omega) &= S_{\mathrm{PBC}}\left(k=0,\omega-\frac{\pi v}{L}\right) \\ &= \frac{2\pi^2}{v}\sum_{m=0}^\infty \delta(\tilde{\omega}-2(m+1)),\end{aligned} \tag{65}$$

其具有相同的粗粒化频率依赖性。值得注意的是，这些 δ 函数的中心对应于边界共形场论预言的本征能量。因此，这个公式可以解释为以下各项之和：

各量子化能级的贡献相等，其能量比为 2 : 4 : 6 : ⋯。

线性响应的数值模拟

为了通过调制-探测序列测量实验中的共形场论场关联，我们需要选择调制 K 和可观测量 Q，使它们均为局域场算符之和。为此，我们首先确定主场 ε[16]: $\hat{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{n}_i + \hat{n}_{i+1}$（此后我们将省略下标中的$_{1\,2}$）。因此，- 全局失谐调制是一个 $k = 0\varepsilon$调制

$$\hat{K} = \sum_i \hat{n}_i = \frac{1}{2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i. \tag{66}$$

全局调制后，我们测量所有$\hat{n}_i$，以重构 $k = 0$ ε场算符 $Q = K$。具体而言，在连续极限下，K 的响应与 $k = 0$ 处 ε 场的动力学结构因子成正比。

我们将实验结果与基于张量网络的调制动力学数值模拟[45]进行比较。我们采用矩阵乘积态（MPS）表示临界态，并使用密度矩阵重整化群（DMRG）方法求得基态。为了高效模拟，我们在此研究FSS哈密顿量的动力学

$$\hat{H} = \frac{\Omega}{2}\sum_i \hat{P}_{i-1}\hat{X}_i\hat{P}_{i+1} - \Delta\sum_i \hat{n}_i + V_2\sum_i \hat{n}_i\hat{n}_{i+2}. \tag{67}$$

（将相互作用截断于距离 $|i-j| \le 2$可加快数值计算。）我们使用含时变分原理（TDVP）方法，计算系统在含时哈密顿量 $H_0 + A(t)K$作用下的态演化。最后，我们计算可观测量 $\langle K\rangle$.的期望值。

将数值模拟应用于19原子阵列后，我们比较了数值模拟得到的响应与实验结果（图6a）。由于模拟所用的哈密顿量与系统的哈密顿量不同，我们对模拟响应的频率进行重新标度，使第一个谱峰的中心与实验结果相匹配，并发现$\sum_i \hat{\varepsilon}_i$ 响应的峰高在定性上与实验结果一致。

对于在连续极限下进行的实验，为了证明图6b中低频处近乎恒定的响应，即使在热力学极限下仍然存在，我们对系统尺寸从 $L = 35$ 到 $L = 85$的系统进行动力学数值模拟。我们将响应按（AL）$^{-1}$ 重新标度，以提取零温动力学结构因子，并发现响应函数坍缩为一个普适函数（图6c）。响应中观察到的剩余振荡是有限调制时间导致的，并非动力学结构因子的物理特征。

局域失谐调制

局域失谐控制是测量波矢依赖谱和动力学结构因子以及 σ-场关联的重要组成部分。本节概述我们如何同步囚禁光镊光与全局里德伯激光器失谐调制，以测量依赖于 k 的谱。此外，我们还将说明测量 σ-场动力学结构因子所需的额外实验能力。

为获得依赖于 k 的谱，我们使用 $\delta\Delta_j \propto \cos(kj + \alpha)$ 对系统进行调制。为此，我们利用声光偏转器生成固定的光镊强度空间分布，并利用声光调制器控制和调制光镊的整体强度。每束独立光镊光束施加的局域失谐与强度成正比，表示为

$$\delta\Delta_{j,\,\mathrm{tw.}} = A(t)(c + \cos(kj + \alpha)), \tag{68}$$

其中，$A(t)$ 始终为负，且 $c \ge 1$，这是由于在囚禁波长 813nm 处，基态与里德堡态之间的相对光移符号所致。随后，我们将里德堡光束同步，以施加全局失谐

$$\delta\Delta_{\mathrm{gl.}} = -c\,A(t). \tag{69}$$

因此，整体局域失谐为

$$\delta\Delta_j = \delta\Delta_{j,\,\mathrm{tw.}} + \delta\Delta_{\mathrm{gl.}} = A(t)\cos(kj + \alpha). \tag{70}$$

在采集图中所示数据时3，全局强度调制选为

$$A(t) = A_0 f(t)(1 + \cos(\omega t + \varphi)), \tag{71}$$

其中，A_0 为负，$f(t)$ 为高斯包络函数。

为探测 σ场动力学结构因子，所需的调制模式为

$$\delta\Delta_j = A_0 f(t)\cos(\omega t + \varphi)\cos(\pi j + \alpha), \tag{72}$$

其中，$f(t)$为包络函数。这种调制的时间部分必须同时取正值和负值。因此，我们计划结合两组光镊和全局失谐调制

$$\begin{aligned}
\delta\Delta_{j,\,\mathrm{tw.}\,1} &= A_0 f(t)(1 + \cos(\omega t + \varphi))(c_1 + \cos(\pi j + \alpha)),\\
\delta\Delta_{j,\,\mathrm{tw.}\,2} &= -A_0 f(t)(c_2 + \cos(\pi j + \alpha)),\\
\delta\Delta_{\mathrm{gl.}} &= (c_2 - c_1)A_0 f(t)\cos(\omega t + \varphi),
\end{aligned} \tag{73}$$

未来，我们计划分别结合两组波长为 515 纳米[68] 和 813 纳米的光镊，以测量σ场动力学结构因子。

三临界伊辛点处的淬火动力学

除了平衡谱之外，对临界量子系统非平衡动力学的研究兴趣，也促使我们观测淬火动力学[69]。具体而言，由于 TCI 共形场论谱具有

一组有理数分数，系统会周期性地回到初始态，物理可观测量也应呈现振荡。对于低能初态，这些振荡中的主导频率分量应反映激发能隙，从而为测量第一激发态能量[38]提供一种互补方法。这里，我们通过将系统绝热扫变至接近三临界伊辛点，随后淬火失谐，制备了一个非平衡低能 TCI态 Δ_c (扩展数据图6a)。在三临界伊辛点保持不同时间后，我们测量局部场之和 $\sum_i \hat{}\sigma_i$，并观测到阻尼振荡（扩展数据图6b）。我们在边界失谐 $\eta = 0.5,\ 0$。75 时记录振荡，并用试探函数 $a + b\cos(\omega t + \varphi)e^{-t/\tau}$拟合数据；拟合结果 ω 被解释为激发能隙 E_1。为验证振荡频率与能隙之间的关系，我们对不同局域失谐强度下的淬火动力学进行了数值模拟 η。对于所有 $\eta \in [0, 1]$，我们都观测到长寿命振荡（扩展数据图6c），拟合得到的频率与第一激发态能量一致E_1 (扩展数据图6d）中的黄色数据点），这表明系统在共形场论基态与第一激发态之间振荡。

随后，我们从实验数据中提取能隙，并将其与数值计算得到的第一激发态能量进行比较。我们发现，拟合得到的振荡频率与哈密顿量的能隙相符（扩展数据图6d），但受的不确定性限制。尽管我们观察到了阻尼振荡（主要由噪声诱导的退相干所致），但我们认为，通过抑制激光噪声可以提高相干时间。结合调制光谱学的结果（扩展数据图6d 中的橙色数据点），所有测得的 E_1 值均与数值计算结果相符，但受实验不确定性的限制。这一吻合进一步支持了我们的结论：我们通过在三临界伊辛点施加局部失谐来调节边界条件。

致谢

我们感谢 Joonhee Choi、Soonwon Choi、Roland Far- rell、Paul Fendley、Ran Finkelstein、Yue Liu、Nandagopal Manoj、Daniel Mark、Pablo Sala、Thomas Schuster、Adam Shaw、Ning Su、Federica Surace 和 Cenke Xu 分享了富有启发性的讨论，也感谢 Elie Bataille、Kon Leung、Hannah Manetsch 和 Gyohei Nomura 为实验装置提供技术支持。我们还感谢 Erin Burkett 和 Divesh Soni 对稿件提出反馈。本研究工作得到美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心量子系统加速器的支持。此外，我们还获得了海辛-西蒙斯基金会（2024-4852）、美国空军科学研究办公室（FA9550-23-1-0625）、美国国家科学基金会量子信息科学与工程研究所计划（2016245）、量子信息与物质研究所（美国国家科学基金会物理前沿中心）、美国能源部（DE-SC0021951）、陆军研究办公室MURI计划（W911NF2010136）、美国国家科学基金会量子信息科学与工程研究所计划（OMA-2016245）以及技术创新研究院（TII）的支持。

质研究所（美国国家科学基金会资助编号 PHY-2317110）的支持。美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心量子科学中心支持了本研究的理论分析。SM 感谢加州理工学院沃尔特·伯克理论物理研究所。YL 感谢 AWS量子博士后奖学金的支持。RBST 感谢台湾—加州理工学院奖学金的支持。LP 感谢戴维与埃伦·李博士后奖学金的支持。MK 感谢德国研究联合会（DFG）在德国卓越战略项目 EXC–2111–390814868 项目下提供的支持，同时也感谢欧盟（拨款协议编号 101169765）以及慕尼黑量子谷的支持；后者由巴伐利亚州政府通过“巴伐利亚高科技议程 Plus”提供资金支持。

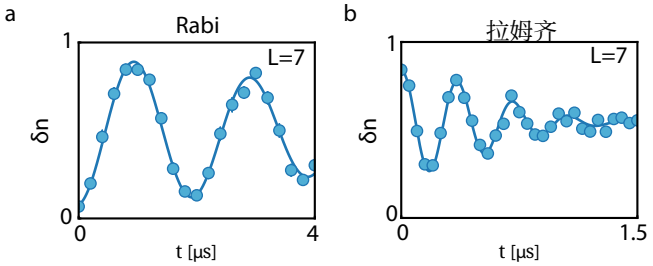
奇数 L			偶数 L		
占据 n	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**	**占据 n**	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**
$\varnothing$ (基态)	0	even	$\{0\}$ (基态)	1/2	even
$\{0,1\}$	2	even	$\{1\}$	3/2	odd
$\{0,2\}$	3	odd	$\{2\}$	5/2	even
$\{0,3\}$, $\{1,2\}$	4	even	$\{3\}$	7/2	odd
$\{0,4\}$, $\{1,3\}$	5	odd	$\{0,1,2\}$, $\{4\}$	9/2	even

表 I ｜伊辛临界里德堡链的最低多体能量 E，奇数和偶数L。 这些本征态分别对应偶数和奇数费米子宇称扇区。“占据 n”列出了占据的单粒子费米子模式集合。基态反射宇称通过精确对角化验证；随后根据式（31）确定激发态反射宇称。

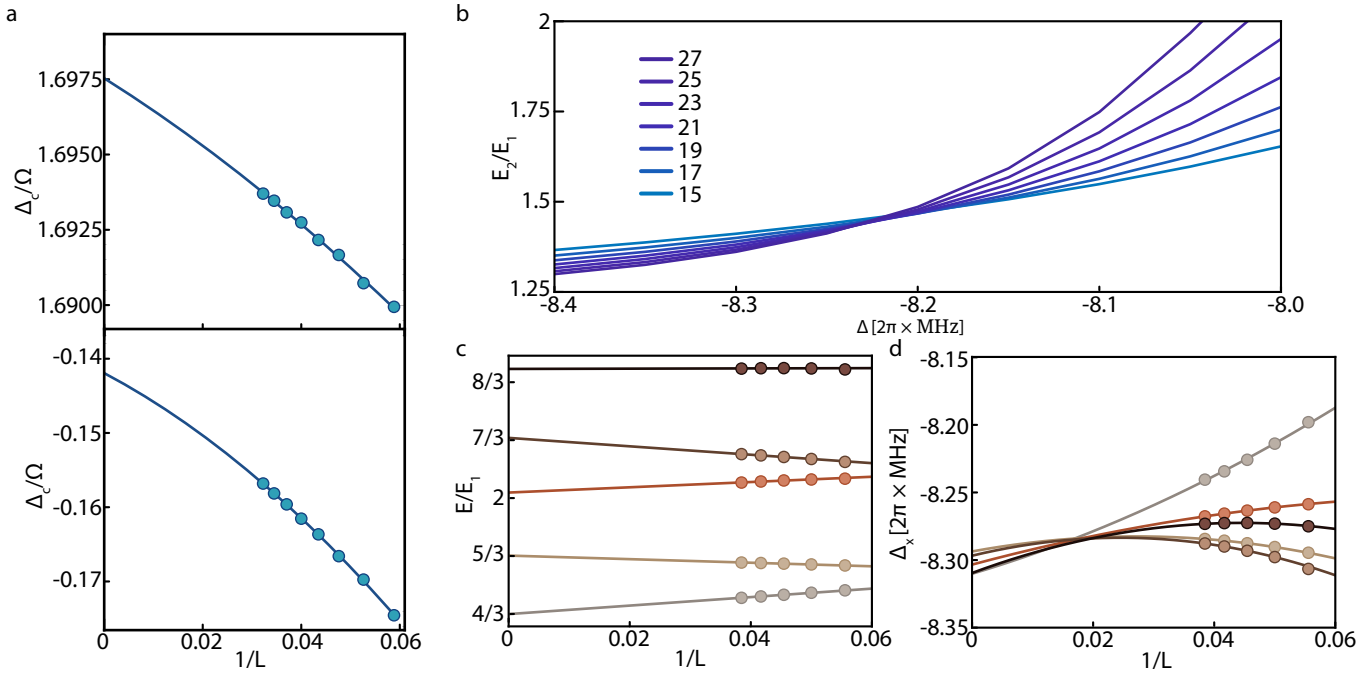
奇数 L								
Free			**中间**			**固定**		
主	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **奇偶性**	**主**	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**	**主**	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**
$\mathbb{I}$	0	even	$\mathbb{I}$	0	even	$\mathbb{I}$	0	even
ε''	3/2	even	ε'	3/5	even	$\mathbb{I}$	2	even
$\mathbb{I}$	2	even	ε'	$1+3/5$	odd	$\mathbb{I}$	3	odd
ε''	5/2	odd	$\mathbb{I}$	2	even	$\mathbb{I}$	4	even

偶数 L								
Free			**中间**			**固定**		
主	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **奇偶性**	**主**	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**	**主**	$E\times L/(\pi\hbar v)$	R_x **宇称**
$\mathbb{I}$	0	even	ε	1/10	even	ε''	3/2	even
ε''	3/2	odd	ε	$1+1/10$	odd	ε''	5/2	odd
$\mathbb{I}$	2	even	ε''	3/2	even	ε''	7/2	even
ε''	5/2	even	ε	$2+1/10$	even	ε''	9/2	odd

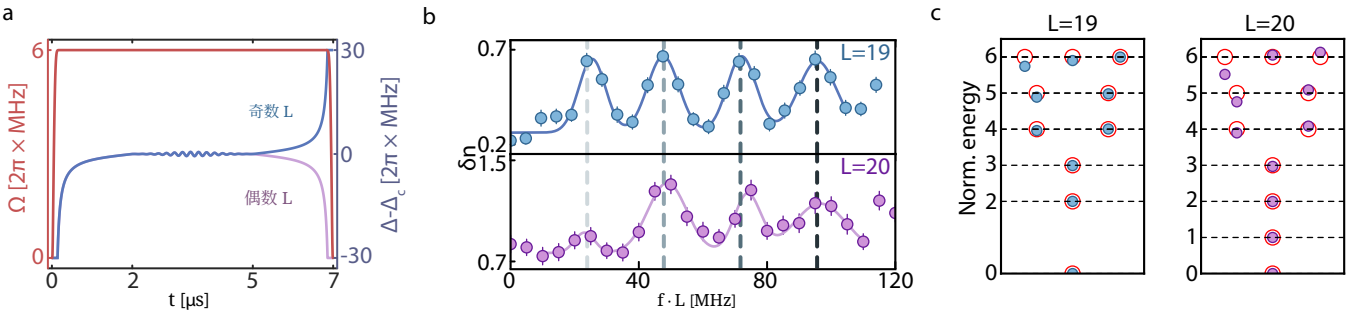
表 II ｜实现自由、中间和固定边界条件的奇数和偶数-L TCI临界里德堡链的最低多体能量 E 及反射宇称 R_x 。



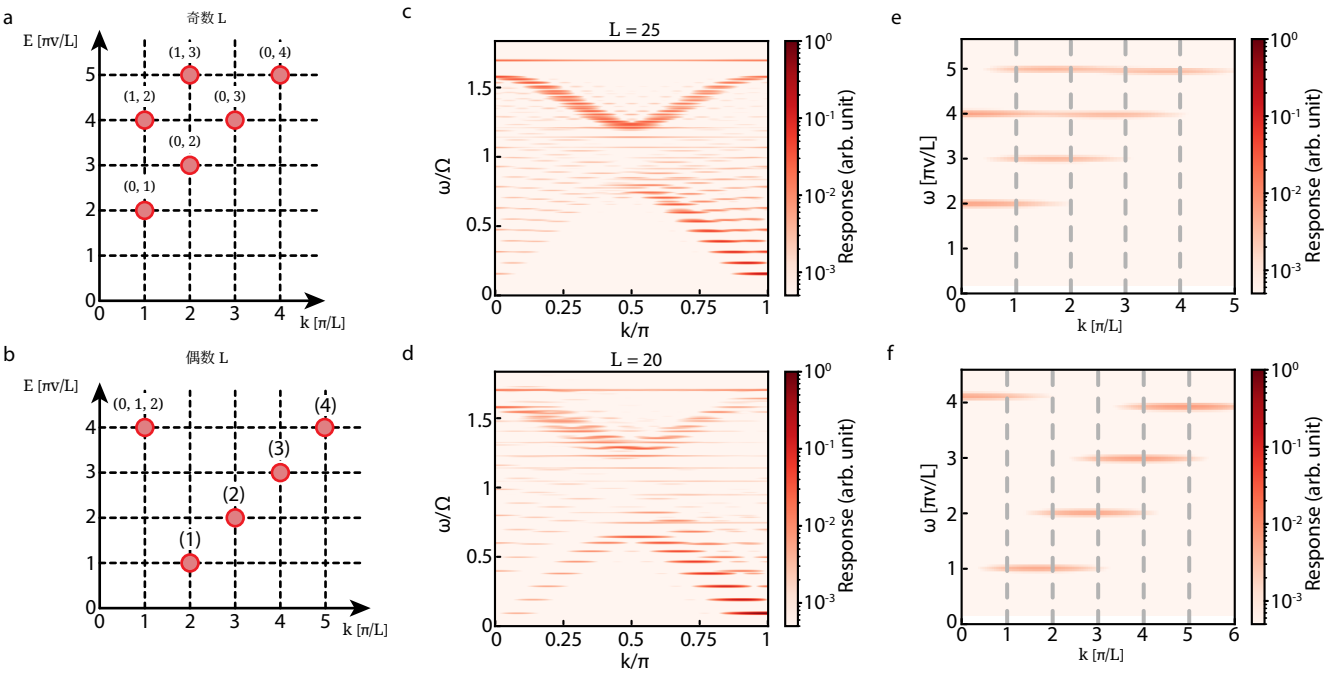
扩展数据图 1 ｜7原子阵列上的多体拉比振荡与相干性。（a）基态与第一激发态之间的拉比振荡。我们以等于这两个态之间能量差的频率调制系统，并测量斜坡调节进入 Z_2 相后的基态布居数最终变化量 δn。当 $\delta n=0/1$ 时，表明系统处于基态/激发态。实线是对衰减正弦振荡的拟合。**（b）**能隙的拉姆齐测量。利用从**（a）**中确定的多体拉比频率，我们施加两次 $\pi/2$ 旋转，其间隔时间为 t。拉姆齐序列结束后，系统被斜坡调节进入 Z_2 相以进行读出。我们观察到阻尼振荡，其振荡频率与能隙一致。实线是对衰减正弦振荡的拟合。



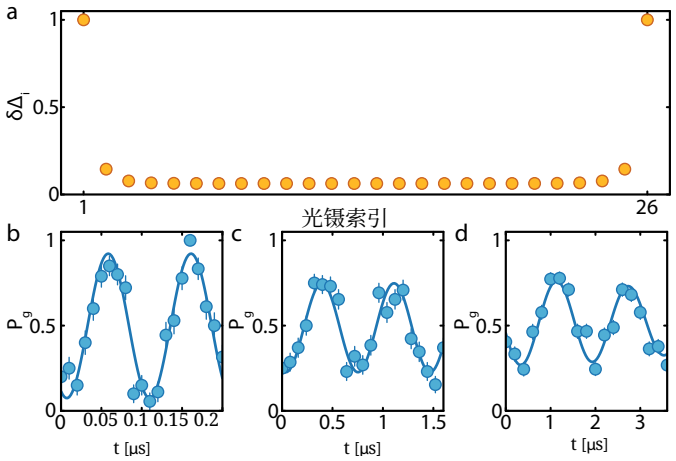
扩展数据图 2 | 定位伊辛和三临界伊辛临界点。（a）通过 σ_{RS} 的曲线交叉的有限尺寸标度定位伊辛临界点，其中（上）为 $V_2/\Omega = +0.51$，（下）为 $V_2/\Omega = -0.51$。每个数据点表示 Δ/Ω的位置，在该位置，长度为 $L-2$ 和 $L+2$的链的 σ_{RS} 具有相同的值。利用二次拟合，我们估计热力学极限下的临界点为 $1/L \to 0$, $\Delta_c(L\to\infty)/\Omega$。对于 $V_2/\Omega = +0.51,\ -0.51,$ $\Delta_c(L\to\infty)/\Omega \approx 1.6975(4)\ -0.142(2)$，分别为。**（b）**三临界点附近第二激发态与第一激发态之间能量比的曲线交叉。对于$\Omega = 2\pi\times 5.5\,\mathrm{MHz}$和$V_2 = 2\pi\times(-9.0)\,\mathrm{MHz}$（$V_2/\Omega = -1.63$），我们绘制了不同系统尺寸 L下能量比随失谐 Δ 的变化。我们发现两个相邻奇数系统尺寸 $L-1$和 $L+1$ 的交点（$\Delta_X,\ E_2/E_1$），并将其绘制于**（c）**和**（d）**中。**（c）**能量比的系统尺寸依赖性。我们绘制了 $i\in[2,6]$ 的交叉 E_i/E_1，并将其线性外推至 $L\to\infty$。在该 V_2处，我们发现前两个能量比与具有自由边界条件的TCI谱 $4/3$和 $5/3$分别具有最佳吻合。**（d）**交叉失谐 Δ_X的系统尺寸依赖性。我们绘制了低能量态的交叉 Δ_X，并将其二次外推至 $L\to\infty$。我们发现它们坍缩至 $\Delta_c = 2\pi\times(-8.3)\,\mathrm{MHz}$，并将其确定为临界失谐。



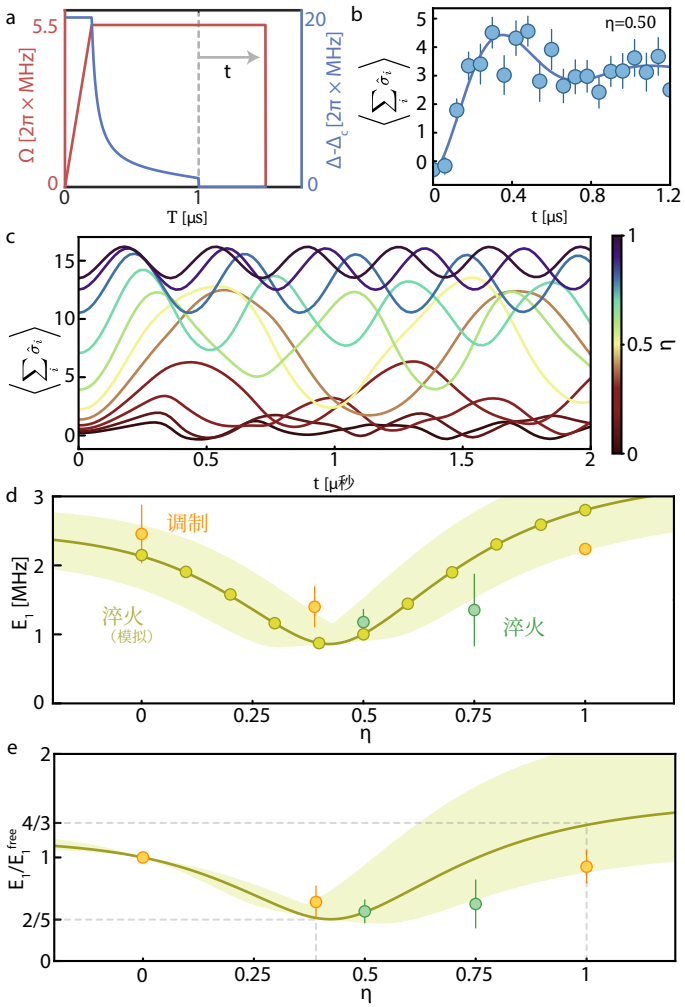
扩展数据图 3 | 伊辛临界性下奇数长度和偶数长度阵列的谱。(a) 奇数长度链和偶数长度链的调制-斜坡-探测序列中拉比频率和失谐曲线示例。**(b)** 对 $L=20$ 阵列谱的实验测量，并与 $L=19$ 阵列的谱进行比较。 x轴按系统尺寸 L进行重标度。重标度后，峰位置塌缩至相同的非普适值，其普适比值为 2:4:6:8。实线为数据的多高斯拟合，并标示拟合范围。**(c)** 激发态能量的数值计算。我们对调谐至伊辛临界性的 $L=19$ 和 $L=20$ 阵列的本征能量进行数值计算。数值计算得到的谱（蓝色和紫色圆点）按第一激发态与基态之间的能量差归一化，并与伊辛共形场论谱（红色空心圆点）进行比较。偶数阵列中还多出一个归一化能量为 1 的态，其余谱保持不变。



扩展数据图 **4** | 有限长度阵列中激发态的色散关系。(a) 奇数-L 阵列的激发态能量 E 及其生成动量（k_a、k_b）。 x轴 $k = |k_a - k_b|$ 表示预期的峰位置。(b) 偶数-L 阵列的激发态能量 E 及动量 k。(c)-(d) 在临界点处，(c) 一个 $L = 25$ 阵列和(d) 一个 $L = 20$ 阵列的依赖于 k 的计算响应（公式 (42)），其中 $V_2/\Omega = 0.51$。我们观察到，在 $k = 0$ 和 $k = \pi$ 附近呈现线性色散。在 $k = 0$ 处，低能激发态的响应近似为常数。(e)-(f) (e) $L = 25$ 和(f) $L = 20$ 的低能、小动量区域响应。 x轴以 π/L 为单位表示， y轴以 $\pi v/L$ 为单位表示，其中我们选择 v 以匹配第一激发态能量。我们观察到，响应峰出现在预期激发态的位置（见(a)和(b)）。



扩展数据图 5 | 校准 $L = 26$ 阵列的局域失谐。（a）归一化局域失谐调制，用于在 TCI 处实现 (++) 边界条件。 **（b）-（d）**在边界 ($i = 1$，26)、近边界 ($i = 2$，25) 及体区 ($i = 5$，11，17，23) 测得的拉姆齐振荡。实验数据为所测格点的平均值。实线是对具有高斯包络的正弦曲线的拟合。我们根据拟合所得振荡频率提取局域失谐。



扩展数据图 6 | 三临界点处的淬火动力学和第一激发态能量。（a）实验扫描。我们将失谐绝热提升至接近临界点，然后将其淬火至 Δ_{c0}。等待时间 t后，我们测量局域可观测量$\hat{n}_{i0}$。**（b）**淬火至$L=19$阵列的三临界点后，$\sum_i\hat{\sigma}_i$的振荡。实线是对 $a+b\cos(\omega t+\varphi)e^{-t/\tau}$的拟合。拟合频率 ω被解释为第一激发态能量 E_1。**（c）**在不同失谐强度 $\eta\in[0,1]$下淬火后 $\sum_i\hat{\sigma}_i$的数值模拟。**（d）**不同边界失谐下 $L=19$阵列第一激发态的能量。橙色和绿色数据点分别从调制数据和淬火数据中提取。黄色数据点是淬火动力学数值模拟的拟合结果。实线是精确对角化的结果，阴影区域表示由 V_2引起的不确定性。**（e）**不同 η下的第一激发态能量与 $\eta=0$（自由边界条件）下能量的比值。当 η从0增加时，测得的第一激发态能量先降至0.57(15)（$\eta=0.39$处），然后升至0.91(15)（$\eta=1$处）；将 V_2的不确定性纳入考量后，该结果与数值模拟一致（阴影区域）。实线是精确对角化的结果，其中我们在 $\eta=0.39$和 $\eta=1$处观察到普适比值。