arXiv:2601.16311v1 [math.CV] 22 Jan 2026

抛物型内爆的非自治模型

KATELYNN HUNEYCUTT、SAMANTHA SANDBERG-CLARK 和 LIZ VIVAS

Abstract. 正交多项式自然出现在研究 M¨obius 变换复合的过程中。本文考察了若干类与抛物型 M¨obius 映射的非自治扰动相关的正交多项式。我们的结果可视为非自治抛物型内爆的实例，其中包括一种几乎必然收敛的随机扰动区域。

1. Introduction引言

从 Lavaurs [8]，的工作开始，对抛物型内爆的研究对一复变元动力学产生了显著影响。近年来，这项研究已相当成功地拓展到多复变量。

多变量中的抛物型内爆已在多种情形下得到发展。从具有半吸引不动点的映射出发，Bedford、Smillie 和 Ueda [5] 描述了一种抛物型内爆现象，随后 Dujardin 和 Lyubich [7] 对其作了推广。同样，Bianchi 研究了二维空间中一类与恒等映射相切的映射的抛物型内爆 [6]。

抛物型内爆得到推广的另一种情形，是切于恒等映射的斜乘积映射。Astorg、Buff、Dujardin、Peters 和 Raissy 的近期工作 [3] 利用了这一情形中的抛物型内爆现象，证明了游荡Fatou分支的存在。Astorg 与 Boc-Thaler [4] 以及 Astorg 与 Bianchi [2]也得到了类似结果。

尽管我们的核心估计是一维的，但其设计目的是将其应用于 $\mathbb{C}^2$中的斜乘积动力学，从而描述抛物型内爆的新情形。我们沿用 Vivas 的方法，研究映射 $F(z) = \frac{z}{1-z}$ 及其扰动。与 [9], 中一样，我们将问题转化为矩阵乘法问题，并运用正交多项式理论。需要指出的是，在我们的新设定中，所需的正交多项式类别不同于 [9]中使用的类别。更多详情见第 3 节。

让我们先更详细地描述我们的结果。Lavaurs经典定理涉及对任意给定映射 f 进行如下扰动。

定理1 (Lavaurs)。 设 f 在原点的某个邻域 V 上定义，并具有如下形式 $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$。考虑如下对 f 的扰动：给定 $\epsilon > 0$，令 $f_\epsilon(z) := f(z) + \epsilon^2$。若我们取一列数 $N_\epsilon \to \infty$ 和 $\epsilon \to 0$，使得 $N_\epsilon - \frac{\pi}{\epsilon} \to 0$，则得到如下结果：

$$(f_\epsilon)^{N_\epsilon} \to \mathcal{L}_f$$

在 f的吸引盆上在紧集上一致。这里， $\mathcal{L}_f$是 f的 *Lavaurs*映射。

f 的 Lavaurs映射是一种变换，用于描述 f 在其各自的入盆和出盆上的入向与出向线性化坐标之间的差异。对于 f，我们将这一现象称为自治抛物 *implosion*。

1.1. 非自治扰动。

自然会问，如果扰动在每一步都发生变化，会出现什么情况。给定一个序列 $\{\epsilon_k\}_{k=1}^N$，定义 $f_k(z) := f(z) + \epsilon_k^2$。我们感兴趣的是， $\{\epsilon_k\}_{k=1}^N$ 满足什么条件时，

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \to \mathcal{L}_f.$$

在研究多变量中的抛物型内爆时，自然会出现这种“非自治”的抛物型内爆。实际上，Astorg 等人 [2, 3, 4] 已经证明了这类结果。

在 [9], Vivas 重点研究初始映射为 $f(z) = z/(1-z)$ 的情形，因为在这种情况下，每个扰动也都是 M¨obius 变换，且 Lavaurs映射是恒等映射。

1.2. 我们的结果。 我们通过允许对模型映射进行乘法和加性扰动，扩展了 [9] 的结果。具体而言，给定序列 $\{\rho_k, \epsilon_k\}_{k=1}^N$，我们考虑

$$f_k(z) := \rho_k \frac{z}{1-z} + \epsilon_k^2, \qquad \rho_k = e^{2\pi i \theta_k},\ \theta_k \in \mathbb{C},$$

并探讨复合在什么条件下

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1$$

收敛到恒等映射。

我们的主要定理表明，在几种情形下，这种收敛性仍然成立：

- 纯乘法扰动（$\epsilon_k = 0$）。若序列 $\{\theta_k\}$ 近似 $1/N$ 得足够好，且误差项受到控制，则收敛成立（定理 A）。
- 乘法与加法组合扰动。当 $\{\theta_k\}$ 和 $\{\epsilon_k\}$ 同时受到扰动时，会出现更一般的收敛序列族（定理 B）。
- 随机加法扰动（$\rho_k = 1$）。如果加法误差以均值为 $\frac{\pi}{N}$ 随机波动，那么收敛性几乎必然成立（定理 D）。

这些结果凸显了非自治情形中的微妙平衡。量级为 $1/N^2$ 的误差就已经需要强相关性条件，但引入随机性后，便可以放宽这些限制。还要注意，尽管乘法扰动和加法扰动看起来可能相似，但二者不能直接相互转化：在加法情形下，每个扰动都可以共轭为一个旋转，但共轭会随 k 变化，因此无法从加法情形推导出乘法情形。

事实上，我们稍后将看到，旋转情形（$\rho_k \neq 1$）无法直接从加法扰动情形（即 $\rho_k = 1$）推导出来。

现在陈述我们的定理：

定理 A（乘法扰动）。设

$$f_k(z) := \frac{\rho_k z}{1-z}, \qquad \rho_k = e^{2\pi i \theta_k}, \qquad \theta_k \in \mathbb{C}.$$

假设 $\{\theta_k\}$ 满足以下任一条件：

(1) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$;

(2) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{c_k}{N^2}$ *with* c_k *uniformly bounded and* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for odd* k;

(3) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{Ce^{2\pi i k/N}}{N^2}$ *where* C *is any constant in* $\mathbb{C}$.

Then

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \longrightarrow \mathrm{Id}$$

如 $N \to \infty$，在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致成立。

定理 B（乘法与加法组合扰动）。设

$$f_k(z) := \frac{\rho_k z}{1-z} + \epsilon_k^2, \qquad \rho_k = e^{2\pi i \theta_k}, \quad \theta_k \in \mathbb{C}.$$

假设 $\{\theta_k\}$ 和 $\{\epsilon_k\}$ 满足以下任一条件：

(1) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$;

(2) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{c_k}{N^2}$ *with* c_k *uniformly bounded and* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for odd* k, *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$;

(3) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{Ce^{2\pi i k/N}}{N^2}$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$; *where* C *is any constant in* $\mathbb{C}$.

(4) $\theta_k = 0$ *and* $\epsilon_k = \dfrac{\pi}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$;

(5) $\theta_k = 0$ *and* $\epsilon_k = \dfrac{\pi}{N} + \dfrac{c_k}{N^2}$ *with* $c_k + c_{N-k} = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Then

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \longrightarrow \mathrm{Id}$$

当 $N \to \infty$ 时，在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致成立。

备注。 条件 (2)–(3) 表明，乘法相位 θ_k 中 $1/N^2$ 阶的误差是允许的，前提是它们满足求和/消去约束，而加法项仍保持在 $1/N^2$ 的尺度。条件 (4)–(5) 涵盖了临界尺度 π/N 附近、Lavaurs理论中熟知的纯加法机制，同样允许受对称性约束的 $1/N^2$级调制。

我们还将证明，加法情形与乘法情形在本质上有所不同。为此，我们给出一个例子，其中一个序列复合收敛到恒等映射；然而，一个共轭序列却不收敛到恒等映射。

定理 C （加法与乘法的区别）。 存在序列 $\{\epsilon_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 满足$1 \le k \le N$:

（*1*）对于每个 k，映射 $f_k(z) = \dfrac{\rho_k z}{1-z}$ 和 $g_k(z) = \dfrac{z}{1-z} + \epsilon_k^2$ 互为共轭。

（*2*）我们有 $g_N \circ g_{N-1} \circ \cdots \circ g_1$ 在紧集上一致收敛到恒等映射 .

（*3*）复合 $f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1(z)$ 对任意 z都不收敛到 z。

最后，我们研究进行随机复合时会发生什么。如果允许使用一列均值为 0 的相互独立且有界随机变量作为$1/N^2$的缩放因子，我们就可以放宽条件。更明确地说:

定理 D （随机扰动）。对于固定的 N，令 $\{\eta_k\}_{k=1}^{N+1}$ 为相互独立、有界且零均值的随机变量，并设

$$\epsilon_k = \frac{\pi}{N} + \frac{\eta_k}{N^{1+\delta}} \quad (\delta > 0), \qquad f_k(z) = \frac{z}{1-z} + \epsilon_k^2.$$

Then

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \longrightarrow \mathrm{Id}$$

当 $N \to \infty$ 时，在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛，且概率为 *1*。

备注。随机定理表明，将误差尺度减小至 $N^{-(1+\delta)}$ （任意 $\delta > 0$），并且仅要求有界性和零均值，就足以保证几乎处处收敛，无需确定性 $1/N^2$ 尺度情形所要求的算术相关性。

本文的组织结构如下：第 2 节将线性变换序列的迭代与正交多项式联系起来。第 3 节回顾正交多项式的相关结果。第 4 节证明定理A和定理B。第 5 节讨论定理 C 所述的加法与乘法情形之间的差异。第 6 节给出一些偏斜抛物映射的例子，并在这些映射上应用定理A和定理B。第 7 节证明定理 D。

2. Compositions of Linear Transformations

本节中，我们描述线性分式变换的复合如何用正交多项式表示。

引理 1. 给定

$$f_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k},$$

一个非平凡线性分式变换的无限序列 $k \ge 1$ （即，假设对所有 k， $\alpha_k\delta_k \neq \beta_k\gamma_k$ ）。假设对所有 k， $\gamma_k \neq 0$ 。

记 $F_N := f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1$。则有如下公式:

$$F_N(z) = \frac{A_N z + B_N}{C_N z + D_N},$$

其中系数由以下递推公式给出:

$$C_{k+1} = \left(\delta_{k+1} + \frac{\gamma_{k+1}\alpha_k}{\gamma_k}\right) C_k - \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}\left(\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k\right) C_{k-1}, \qquad C_0 = 0, \qquad C_1 = \gamma_1;$$

$$(1) \qquad D_{k+1} = \left(\delta_{k+1} + \frac{\gamma_{k+1}\alpha_k}{\gamma_k}\right) D_k - \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}\left(\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k\right) D_{k-1}, \qquad D_0 = 1, \qquad D_1 = \delta_1;$$

and

$$A_k = \frac{1}{\gamma_{k+1}}(C_{k+1} - \delta_{k+1}C_k);$$
$$B_k = \frac{1}{\gamma_{k+1}}(D_{k+1} - \delta_{k+1}D_k). \tag{2}$$

证明。对于所有 k，根据 C_k 和 D_k的定义

$$C_{k+1} = \gamma_{k+1}A_k + \delta_{k+1}C_k;$$
$$D_{k+1} = \gamma_{k+1}B_k + \delta_{k+1}D_k.$$

通过求解 A_k 和 B_k，我们得到（2）。 C_{k+1} 和 D_{k+1} 的公式可通过写出 C_{k+1} 和 D_{k+1}的定义，分别代入 A_k 和 B_k 的定义，最后再使用方程（2）中的公式替换新的A_{k-1} 和 B_{k-1} 项而得到。重新整理剩余项即可得到结果。□

备注。

（1）注意，我们也可以像在方程（1）中一样，将 A_k 和 B_k 表示为递推方程。

（2）由于每个分式变换的表示方式具有一定的自由度，我们总可以对其进行归一化，使得 f_k 上的某个系数为给定常数（除非该系数一开始就是 0）。在下文中，我们将对每个矩阵进行归一化，使得对于所有 k，当 $\gamma_k \neq 0$ 时，所有 γ_k 都相等。

(3) 现在，如果我们令每个 $f_k(z) = \frac{z}{1-z} + \epsilon^2$，即 $\alpha_k = 1 - \epsilon^2$，$\beta_k = \epsilon^2$，$\gamma_k = -1$，$\delta_k = 1$ 对所有 k 均成立，那么我们便得到关于 C_k 和 D_k的以下方程：

$$C_{k+1} = (2-\epsilon^2)C_k - C_{k-1}, \qquad C_0 = 0, \qquad C_1 = -1;$$
$$D_{k+1} = (2-\epsilon^2)D_k - D_{k-1}, \qquad D_0 = 1, \qquad D_1 = 1.$$

如 [9], 中所述，这些恰好是经典切比雪夫多项式，将这些变换的迭代与正交多项式理论联系起来。

现在我们将引理 1 应用于引言中提到的映射族。

引理 2。 设 $(\epsilon_k, \rho_k)_{k\geq 1}$ 为复数序列。考虑映射 $f_k(z) = \frac{\rho_k z}{1-z} + \epsilon_k^2$。按照上述方式记 $F_N := f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1$。则：

$$F_N(z) = \frac{A_N z + B_N}{C_N z + D_N},$$

其中系数由以下递推公式给出：

$$A_k = q_{k+1} - q_k;$$
$$B_k = r_k - r_{k+1};$$
$$C_k = -q_k;$$
$$D_k = r_k;$$

for:

$$q_{k+1} = (1 + \rho_k - \epsilon_k^2)q_k - \rho_k q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1;$$
$$r_{k+1} = (1 + \rho_k - \epsilon_k^2)r_k - \rho_k r_{k-1}, \qquad r_0 = 1, \qquad r_1 = 1.$$

证明。 这是将引理 1 特化于 $\alpha_k = \rho_k$, $\beta_k = \epsilon_k^2$, $\gamma_k = -\rho_k$, $\delta_k = 1$的结果，经过直接计算即可得到。 □

当所有 ϵ_k 均等于 0 时，我们得到：

推论 1。设 $(\rho_k)_{k\geq 1}$ 个复数序列。考虑映射 $f_k(z) = \dfrac{\rho_k z}{1-z}$。按照上文，将 $F_N := f_N \circ \underline{f_{N-1}} \circ \cdots \circ f_1$ 记为上述形式。那么：

$$F_N(z) = \frac{A_N z}{C_N z + 1},$$

其中，系数由以下递推公式给出：

$$\begin{aligned} A_k &= q_{k+1} - q_k; \\ C_k &= -q_k; \end{aligned}$$

其中：

$$q_{k+1} = (1+\rho_k)q_k - \rho_k q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1.$$

下一节将着重详细研究这些递推关系。

3. Orthogonal Polynomials

现在我们研究由引理 2 中的递归数列所产生的正交多项式。回顾该序列：

$$q_{k+1} = (1+\rho_k - \epsilon_k^2)q_k - \rho_k q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1,$$

其中系数取决于序列 $(\rho_k,\ \epsilon_k)$。我们的目标是了解，在对 ρ_k 和 ϵ_k 施加哪些条件时，数值 q_N 会在 N 趋于无穷时趋于 0。

以往研究：Vivas [9], 对 $\rho_k \equiv 1$ 的情形进行了详细研究，并得到了扰动 $\epsilon_k = \pi/N + \alpha(k)/N^2$ 满足何种条件才能保证 $q_N = O(1/N)$。其主要工具是将 q_k 与切比雪夫多项式进行比较：序列 U_k，由 $U_{k+1} = (2-\epsilon^2)U_k - U_{k-1}$ 给出。

然而，当允许 ρ_k 在单位圆上或其附近变化时，这种方法便不再奏效。在这种情况下，与切比雪夫多项式 U_k 进行比较无法得到有用的界，也无法反映新递推关系的结构。

新序列：鉴于此，我们将每个 q_k 与自主旋转情形下产生的递归族进行比较（见推论 1），也就是说，其中每个 $\rho_k = \rho$。将此序列记为 T_k，定义如下：

$$T_{k+1} = (1+\rho)T_k - \rho T_{k-1}, \qquad T_0 = 0, \qquad T_1 = 1.$$

通过归纳法，我们可以证明

$$T_k = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{k-1} = \frac{1-\rho^k}{1-\rho}.$$

特别地，当 $\rho = e^{2\pi i/N}$ 时，我们可以改写为：

$$T_k = e^{\frac{i\pi(k-1)}{N}} \frac{\sin(\pi k/N)}{\sin(\pi/N)}. \tag{3}$$

根据这个公式，我们将经常引用以下结论：如图1所示，$T_N = 0$ 和 $T_{N+1} = 1$；并且，当 $k = \frac{N}{2}$ 时，$|T_k|$ 达到最大值，当 N 较大时，最大值约为 N/π 。

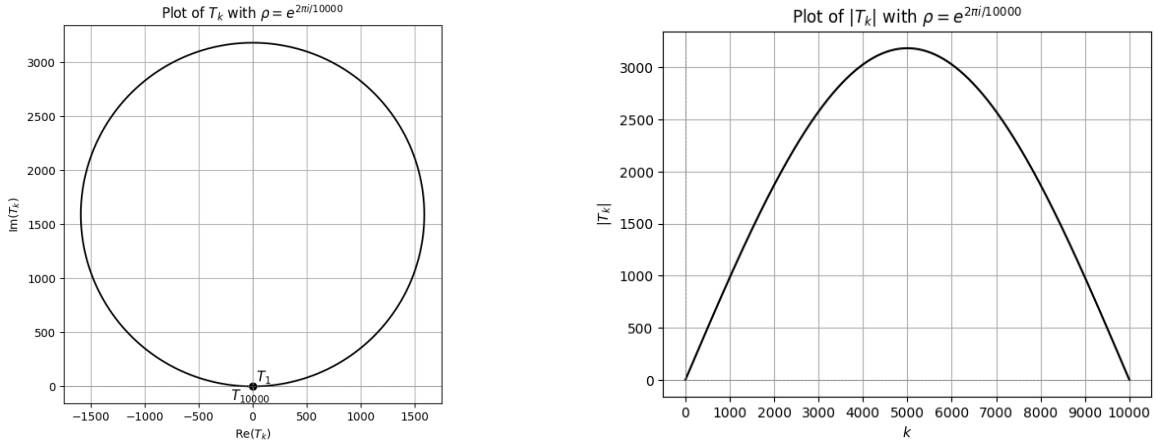

FIGURE 1. T_k 和 $|T_k|$ 在 $N = 10{,}000$处的图。

作为第一个应用，我们来看下面的例子：

例 1. 设对所有 $k \geq 1$， $f_k(z) = \dfrac{\rho z}{1-z}$，其中 $\rho = e^{2\pi i/N}$ 对应一个固定的 N。那么根据推论 1 和方程 (3)，F_N 的系数为

$$A_N = T_{N+1} - T_N = 1,\ B_N = 0,\ C_N = -T_N = 0,\ D_N = 1.$$

因此， $F_N(z) = z$。

我们使用正交多项式 T_k ，为序列 q_k推导有意义的界。我们通过一个公式实现这一点，该公式表示 q_k 与 T_k之差。我们首先以一般形式陈述这一结果，将 a_k,和 b_k 在 $\mathbb{C}$ 中的任意序列视为递归公式中系数的加性扰动。

引理 3. 考虑递归多项式

$$\begin{aligned} &T_{k+1} = (1+\rho)T_k - \rho T_{k-1}, && T_0 = 0, && T_1 = 1; \\ &q_{k+1} = (1+\rho+a_k)q_k - (\rho+b_k)q_{k-1}, && q_0 = 0, && q_1 = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

它们的差为

$$q_k - T_k = \sum_{j=1}^{k-1} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] T_{k-j}, \quad k \geq 2.$$

证明。 这可通过将两个关系式相减并作归纳法得出。 □

备注。 在应用此引理时，序列 b_k 表示乘法旋转偏离单位根 $e^{2\pi i/N}$的程度；也就是说， $b_k = \rho_k - \rho$。序列 a_k 由 $a_k = b_k - \epsilon_k^2$定义。

当对所有 k都有 $\epsilon_k \equiv 0$ 时， a_k 的表达式可简化为 $a_k = b_k$。否则，序列 a_k包含一个额外的扰动项 ϵ_k^2。

我们将在以下引理中反复使用上述估计。

3.1. **二次误差**。 固定 $\rho = e^{2\pi i/N}$。我们的目标是确定 a_k 和 b_k 需满足的条件，以保证这些误差

$$|q_N| = |q_N - T_N| \quad \text{and} \quad |q_{N+1} - 1| = |q_{N+1} - T_{N+1}|$$

保持较小。

注意，若我们假设 $a_k = b_k$ 且

$$\rho + b_k = \rho + a_k = e^{2\pi i/(N+1)},$$

则 $a_k = b_k = O(1/N^2)$。我们将这种对 a_k 和 b_k 的选择称为二次的，或称由此得到的正交多项式具有二次误差。此时，递推关系给出

$$q_{k+1} = (1 + e^{2\pi i/(N+1)})q_k - e^{2\pi i/(N+1)}q_{k-1},$$

这使我们能够显式计算公式 $q_k = e^{\frac{i\pi(k-1)}{N+1}} \sin(\pi k/(N+1)) \sin(\pi/(N+1))$ 以及以下数值:

$$|q_N| = 1 \quad \text{and} \quad q_{N+1} = 0.$$

特别地，仅有条件 $b_k, a_k = O(1/N^2)$ 并不足以确保 $|q_N - T_N| = o(1)$.

然而，当 a_k 和 b_k 都是二次的且彼此可比时，我们仍然可以对连续差值建立一致控制。

引理 4. 固定 $N \in \mathbb{N}$ 并令 $\rho = e^{2\pi i/N}$。考虑递推关系 (4)

$$q_{k+1} = (1 + \rho + a_k)q_k - (\rho + b_k)q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1,$$

对于 $1 \le k \le N + 1$。假设存在一个常数 $C > 0$，它与 N 无关，使得对所有 k

$$a_k = \frac{c_k}{N^2} + E_{1,k}, \qquad b_k = \frac{c_k}{N^2} + E_{2,k},$$

其中 $|c_k| \le C$ 和 $|E_{j,\,k}| \le C/N^4 (j = 1,\ 2)$。

那么:

- 存在一个常数 $C > 0$，它与 k 和 N 均无关，使得

$$|q_k - q_{k-1}| \le \tilde{C} \quad \textit{for all } 1 \le k \le N + 1.$$

- 存在一个常数 $C' > 0$，它与 k 和 N 无关，使得

$$|q_k - T_k| \le C' \quad \textit{for all } 1 \le k \le N + 1.$$

证明。设 $\tilde{C} > 2$ 满足 $\frac{\max_\ell |c_\ell|}{N} \cdot \tilde{C} + \frac{4C}{N} \le \tilde{C}$，并使用归纳法。首先注意到，对于某个 $0 < \epsilon < 1$，有 $|a_j| < \epsilon$。对于基础情形，注意到 $q_0 = 0$、$q_1 = 1$ 和 $q_2 = 1 + \rho + a_1$，由此可得$|q_0| = 0 \le 2N$、$|q_1| = 1 \le 2N$ 和 $|q_2| \le 1 + \epsilon < 2N$。我们还有

$$|q_1 - q_0| = 1 < \tilde{C},$$
$$|q_2 - q_1| = |\rho + a_1| \le 1 + \epsilon < \tilde{C}.$$

~ ~步骤1: $|q_j| \le 2N$ 对所有 $1 \le j \le k$ 成立，意味着 $|q_{k+1} - q_k| \le C$。现在假设 $|q_j| \le 2N$ 且对所有 $1 \le j \le k$都有 $|q_j - q_{j-1}| \le C$。然后利用引理 3和归纳法,

$$\begin{aligned}
|q_{k+1} - q_k| &= |(q_{k+1} - T_{k+1}) + (T_{k+1} - T_k) + (T_k - q_k)| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] T_{k+1-j} + \rho^k - \sum_{j=1}^{k-1} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] T_{k-j} \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] \rho^{k-j} + \rho^k \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{c_j}{N^2} (q_j - q_{j-1}) \right] \rho^{k-j} + \sum_{j=1}^{k} [E_1 q_j - E_2 q_{j-1}] + \rho^k \right| \\
&\le N \cdot \frac{\max_\ell |c_\ell|}{N^2} \cdot \tilde{C} + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{C}{N^4} \cdot |q_j| + \frac{C}{N^4} \cdot |q_{j-1}| \right) \\
&\le \frac{\max_\ell |c_\ell|}{N} \cdot \tilde{C} + \frac{4C}{N^2} \\
&< \tilde{C}.
\end{aligned}$$

˜步骤 2：在相同假设下，对所有 $1 \le j \le k$都有 $|q_j| \le 2N$ 和 $|q_j - q_{j-1}| \le C$，并利用引理 3，

$$\begin{aligned}
|q_{k+1}| &= \left| T_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (a_j q_j - b_j q_{j-1}) T_{k+1-j} \right| \\
&= \left| T_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{c_j}{N^2}(q_j - q_{j-1}) + E_1 q_j - E_2 q_{j-1} \right] T_{k+1-j} \right| \\
&\le N + N \cdot \left[\frac{\max_\ell |c_k|}{N^2} \cdot \tilde{C} + \frac{2C}{N^2} \right] \cdot N \\
&= N + \max_\ell |c_\ell| \tilde{C} + 2C \\
&< 2N,
\end{aligned}$$

当 N 充分大时。

˜因此我们得出 $|q_j| \le 2N$，并且 $|q_j - q_{j-1}| \le C$ 对所有 $1 \le j \le k+1$ 均成立。由归纳法可知，$|q_j| \le 2N$ 并且 $|q_j - q_{j-1}| \le C$ 对所有 $1 \le j \le N+1$ 均成立。□

3.2. **三次误差**。现在，当误差为三次时，即 $a_k,\ b_k = O\left(\frac{1}{N^3}\right)$，我们使用上述估计。

命题 1。设 $N \in \mathbb{N}$，并令 $\rho = e^{2\pi i/N}$。考虑 (4) 中的递推关系：

$$q_{k+1} = (1 + \rho + a_k) q_k - (\rho + b_k) q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1,$$

其中，对每个 $1 \le k \le N+1$:

$$a_k = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \qquad b_k = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

其中 $c_k \in \mathbb{C}$ 和 $|c_k| < C$，某个常数 $C > 0$ 与 N 和 k无关，且 $O(\frac{1}{N^4})$ 的界对 k和 N一致。于是存在一个与 N无关的常数 $C' > 0$，使得

$$|q_N| \le \frac{C'}{N} \quad and \quad |q_{N+1} - 1| \le \frac{C'}{N}.$$

证明。 利用引理 3 可得

$$\begin{aligned}
q_k - T_k &= \sum_{j=1}^{k-1} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] T_{k-j} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \left[\left(\frac{c_j}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) q_j - \left(\frac{c_j}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) q_{j-1} \right] T_{k-j} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j}{N^3}(q_j - q_{j-1}) T_{k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[O\left(\frac{1}{N^4}\right) q_j - O\left(\frac{1}{N^4}\right) q_{j-1} \right] T_{k-j}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

˜ ˜利用引理 4，$|q_j - q_{j-1}| \le C$对于某个 $C > 0$，并且对于所有 $|q_j| \le 2N$ $1 \le j \le N+1$。因此，对于 $k \le N+1$，方程 (5) 变为

$$\begin{aligned}
|q_k - T_k| &= \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j}{N^3}(q_j - q_{j-1}) T_{k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[O\left(\frac{1}{N^4}\right) q_j - O\left(\frac{1}{N^4}\right) q_{j-1} \right] T_{k-j} \right| \\
&\le \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{c_j}{N^3} \right| |q_j - q_{j-1}| |T_{k-j}| + \sum_{j=1}^{k-1} \left[O\left(\frac{1}{N^4}\right) |q_j| + O\left(\frac{1}{N^4}\right) |q_{j-1}| \right] |T_{k-j}| \\
&\le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|c_j|}{N^3} \tilde{C} N + \sum_{j=1}^{k-1} O\left(\frac{1}{N^3}\right) N \\
&\le O\left(\frac{1}{N}\right).
\end{aligned}$$

由于 $T_N = 0$ 且 $T_{N+1} = 1$，我们知道

$$|q_N| = |q_N - T_N| = O\left(\frac{1}{N}\right) \qquad \text{and} \qquad |q_{N+1} - 1| = |q_{N+1} - T_{N+1}| = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

□

3.3. 收敛性的显式条件。 如果希望误差达到二次阶，就必须对其施加一些条件。我们有如下结论：

命题 2。 令 $N \in \mathbb{N}$，并设 $\rho = e^{2\pi i/N}$。考虑 (4) 中的递推关系：

$$q_{k+1} = (1 + \rho + a_k)q_k - (\rho + b_k)q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1,$$

其中，对每个 $1 \le k \le N + 1$:

$$a_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),\ b_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

其中，所有 $c_k \subset \mathbb{C}$ 在 N 中均一致有界，且 $O(\frac{1}{N^4})$ 项关于 k 和 N 一致。如果此外存在一个常数 $C > 0$，且与 N 无关，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{N-1} a_k T_k\right| \le \frac{C}{N} \tag{6}$$

那么存在 $C' > 0$，且与 N 无关，使得

$$|q_N| \le \frac{C'}{N} \quad and \quad |q_{N+1} - 1| \le \frac{C'}{N}.$$

证明。 假设 $a_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ 和 $b_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$，因此 $b_k = a_k + O(1/N^4)$。然后注意到，引理 3 给出

$$\begin{aligned} q_k - T_k &= \sum_{j=1}^{k-1} [a_j q_j - b_j q_{j-1}] T_{k-j} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} a_j (q_j - q_{j-1}) T_{k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} (a_j - b_j) q_{j-1} T_{k-j}. \end{aligned}$$

取模中的第二个加项，我们有

$$\left|\sum_{j=1}^{k-1} (a_j - b_j) q_{j-1} T_{k-j}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k-1} O(1/N^4) q_{j-1} T_{k-j}\right| \le O(1/N).$$

因此，接下来我们只处理第一个求和 $\sum_{j=1}^{k-1} a_j (q_j - q_{j-1}) T_{k-j}$。令 $k = N$，并注意到 (3) 给出

$$\begin{aligned} T_{N-j} &= e^{i\pi(N-j-1)/N} \frac{\sin((N-j)\pi/N)}{\sin(\pi/N)} \\ &= -e^{-i\pi(j+1)/N} \frac{\sin(j\pi/N)}{\sin(\pi/N)}. \end{aligned}$$

我们还有

$$q_j - q_{j-1} = (\rho + a_{j-1}) q_{j-1} - (\rho + b_{j-1}) q_{j-2} = (\rho + a_{j-1})(q_{j-1} - q_{j-2}) + O\left(\frac{1}{N^4}\right) q_{j-2}.$$

我们首先在 $a_k = b_k$ 这一简化假设下证明该估计。随后我们将证明，$b_k - a_k = O(1/N^4)$ 将贡献一个足够小阶的项。由于 $a_k = O(1/N^2)$，我们可以选择一支

对数分支用于 $\rho + a_k$。于是:

$$\begin{aligned} q_j - q_{j-1} &= \prod_{k=1}^{j-1}(\rho + a_k) = \prod_{k=1}^{j-1} e^{(2\pi i/N + c_k/N^2 + O(1/N^4))} \\ &= \exp\left\{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{2\pi i}{N} + \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{2\pi i(j-1)}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{j-1} c_k + O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j(q_j - q_{j-1})T_{N-j}\right| &= \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j e^{2\pi i(j-1)/N + \sum_{k=1}^{j-1} c_k/N^2 + O(1/N^3)} e^{-i\pi(j+1)/N} \frac{\sin(\pi j/N)}{\sin(\pi/N)}\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j e^{\pi i(j-1)/N} \frac{\sin(\pi j/N)}{\sin(\pi/N)} e^{\sum_{k=1}^{j-1} c_k/N^2 + O(1/N^3)}\right| \\ &\le \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j \left(1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j\right| + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

因此,

$$|q_N| = |q_N - T_N| \le \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j\right| + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

且 $|q_N| \le \frac{C'}{N}$ if $\left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j\right| \le \frac{C}{N}$。

可以用类似的论证证明:

$$|q_{N+1} - 1| = |q_{N+1} - T_{N+1}| \le \frac{C'}{N}.$$

现在来讨论一般情形，其中 $b_k - a_k = O(1/N^4)$。于是 $q_j - q_{j-1} = (\rho + a_{j-1})(q_{j-1} - q_{j-2}) + (b_{j-1} - a_{j-1})q_{j-2}$。为简便起见，记 $r_{j-1} := (b_{j-1} - a_{j-1})q_{j-2}$。由引理 4 以及关于 a_j 和 b_j 的条件可知，每个 q_j 的阶至多为 N，且 $b_{j-1} - a_{j-1} = O(1/N^4)$。因此，每一项 $|r_j| < C/N^3$ （其中 C）都是一致的。因此,

$$q_j - q_{j-1} = \prod_{k=1}^{j-1}(\rho + a_k) + R_{j-1}$$

其中 $R_{j-1} := r_{j-1} + r_{j-2}(\rho + a_{j-1}) + r_{j-3}(\rho + a_{j-2})(\rho + a_{j-1}) + \cdots + r_1(\rho + a_2)(\rho + a_3)\cdots(\rho + a_{j-1})$。由于 $|\rho + a_{j-1}| = 1 + O(1/N^2)$，任何由少于 N 个此类项构成的乘积都是 $O(1)$ 阶。因此，对于每个 $1 \le i < j \le N-1$，我们得到:

$$|r_{j-i}\prod_{k=1}^{i-1}(\rho + a_{j-k})| < C/N^3,$$

这意味着 $|R_{j-1}| < C'/N^2$。

Then

$$\left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j(q_j - q_{j-1})T_{N-j}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j R_{j-1} T_{N-j}\right| + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

我们可以验证

$$\left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j R_{j-1} T_{N-j}\right| < N\frac{C}{N^2}\frac{C'}{N^2}N = O(1/N^2).$$

□

在以下推论中，我们给出满足求和条件（6）的序列（c_k）的例子。

推论 2. 设$(c_k) \subset \mathbb{C}$是一个有界序列，使得 $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ 对于 k 为奇数成立。那么系数 $a_k = \frac{c_k}{N^2}$ 满足条件(6)。 —

证明. 设 $(c_k) \subset \mathbb{C}$ 有界，且满足 $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ 对于 k 为奇数成立。展开表达式（6）

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{N-1} a_j T_j\right| &= \frac{1}{N^2}\left|\sum_{j=1}^{N-1} c_j T_j\right| = \frac{1}{N^2}\left|\sum_{1\le j\le N-1, j \text{ odd}} (c_j T_j + c_{j+1}T_{j+1})\right| \\ &= \frac{1}{N^2}\left|\sum_{1\le j\le N-1, j \text{ odd}} (c_j + c_{j+1})T_j + c_{j+1}(T_{j+1} - T_j)\right| \\ &\le \frac{1}{N^2}\left(\sum_{1\le j\le N-1, j \text{ odd}} |c_j + c_{j+1}||T_j| + \sum_{j=1}^{N-1} |c_{j+1}||T_{j+1} - T_j|\right) \\ &\le \frac{1}{N^2}\left(N\frac{C}{N}N + NC\right) = \frac{2C}{N}.\end{aligned}$$

□

类似地，我们有：

推论 3. 设$(c_k) \subset \mathbb{C}$ 满足 $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$ 对于 $C \in \mathbb{C}$ 成立。那么系数 $a_k = \frac{c_k}{N^2}$ 满足条件(6)。—

证明。 我们可以将 $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$ 改写为 $c_k = C\rho^k$，因为 $\rho = e^{2\pi i/N}$。回想一下， $T_k = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}$。于是，(6) 中的表达式变为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} a_k T_k &= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} C\rho^k \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} \\ &= \frac{C}{N^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\rho^{2k}}{\rho - 1} - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{\rho^k}{\rho - 1}\right) = 0.\end{aligned}$$

□

3.4. **旋转与平移的组合**。

命题 3. 设

$$q_{k+1} = (1 + \rho + b_k - \epsilon_k^2)q_k - (\rho + b_k)q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1,$$

对于 $k \ge 2$。如果 ϵ_k 和 b_k 满足条件 *(i)–(iii)* 中的任一条件，其中 $c_k \in \mathbb{C}$ 和 c_k 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 有界；则 $q_N \to 0$ 和 $q_{N+1} \to 1$ 当 $N \to \infty$ 时。

i) $b_k = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ *for bounded* $c_k \in \mathbb{C}$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$*; or*

ii) $b_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ *such that* $c_k \in \mathbb{C}$ *is bounded,* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for* k *odd and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$*;*
or

iii) $b_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ *where* $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$ *for* $C \in \mathbb{C}$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

证明。 i) 使用命题 1，其中 $b_k = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ 和

$$a_k := b_k - \epsilon_k^2 = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) - O\left(\frac{1}{N^4}\right) = \frac{c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

我们有 $q_N \to 0$ 和 $q_{N+1} \to 1$.

ii) 和 iii) 序列 b_k 和 $a_k := b_k - \epsilon_k^2$ 具有命题 2 所要求的形式，因此我们只需检查 c_k 是否满足条件（6）。对于 (ii)，推论 2 给出了证明；对于 (iii)，推论 3 给出了证明。

□

3.5. **不同的初始条件**。 现在我们来考虑引理 2 中的另一个递归多项式：

$$r_{k+1} = (1 + \rho + a_k)r_k - (\rho + b_k)r_{k-1}, \qquad r_0 = 1, \qquad r_1 = 1.$$

请注意，该递归多项式的起始项 r_0 初始化为 1 而非 0，因此先前的结果不再适用。不过，我们可以将 r_k 重写为两个递归多项式之差，从而对先前的结果加以调整。与之前一样，我们将多项式写成更一般的形式。

引理 5。 考虑以下序列

$$q_{k+1} = (1 + \rho + a_k)q_k - (\rho + b_k)q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1;$$
$$r_{k+1} = (1 + \rho + a_k)r_k - (\rho + b_k)r_{k-1}, \qquad r_0 = 1, \qquad r_1 = 1;$$

对于 $k \geq 2$。那么

$$r_k = q_k - (\rho + b_1)s_{k-1}$$

其中，序列 s_k 由条件 $s_0 = 0, s_1 = 1$ 给出，并且对于 $k \geq 2$，我们有

$$s_{k+1} = (1 + \rho + a_{k+1})s_k - (\rho + b_{k+1})s_{k-1}.$$

证明。该 只需写出 $r_k - q_k$ 并检查初始条件，即可立即得到证明 . □

我们将通过计算 q_k 和 s_k的极限，证明当 $N \to \infty$ 时， $r_N \to 1$ 和 $r_{N+1} \to 1$ 。根据命题 3，我们知道 q_k 的极限。通过指定序列 a_k 和 b_k，可以确定序列 q_k 和 r_k 。这决定了相应的序列 s_k，其形式与 q_k 相同，但取决于序列 a_{k+1}和 b_{k+1}。如果序列 a_{k+1} 和 b_{k+1} 满足命题 3 的条件，那么 s_k的收敛性便随之成立。我们将在下一个命题的证明中验证这一点。

命题 4。设

$$r_{k+1} = (1 + \rho + b_k - \epsilon_k^2)r_k - (\rho + b_k)r_{k-1}, \qquad r_0 = 1, \qquad r_1 = 1.$$

如果 $\{b_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{\epsilon_k\}_{k\geq 1}$ 满足条件 *(i)-(iii)* 中的任意一个。假设对所有 $k \in \mathbb{N}$， $c_k \in \mathbb{C}$ 和 (c_k) 有界。

i) $b_k = \frac{2\pi i c_k}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$*; or*

ii) $b_k = \frac{2\pi i c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ *such that* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for* k *odd and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$*; or*

iii) $b_k = \frac{c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ *where* $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$ *for* $C \in \mathbb{C}$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

那么当 $N \to \infty$ 时，

$$r_N \to 1 \quad \textit{and} \quad r_{N+1} \to 1.$$

证明。 由引理 5，

$$r_k = q_k - (\rho + b_1)s_{k-1},$$

由此我们将计算当 $N \to \infty$ 时的 $r_N \to 1$ 和 $r_{N+1} \to 1$ 。

首先，回顾一下我们在命题 1 和命题 2 中证明了

$$q_N \to 0 \quad \text{and} \quad q_{N+1} \to 1.$$

接下来，注意到 s_k 是 q_k ，但系数经过了平移，也就是说，序列 $\{b_k\}_{k=1}^N$ 满足命题 3 的条件；因此，命题 1 和命题 2 中关于 q_k 的论证适用于 s_k ，由此可得

$$|s_{N-1}+\rho^{-1}| = |s_{N-1}-T_{N-1}| \le O\left(\frac{1}{N}\right)$$
$$|s_N| = |s_N - T_N| \le O\left(\frac{1}{N}\right)$$

其中， $N-1$ 情形的证明与 N 和 $N+1$ 情形类似；在情形 (iii) 中，我们结合 $C=\rho$ 使用推论 3。由此可以得出

$$r_N = q_N - (\rho+b_1)s_{N-1} \to 0 - (\rho+0)\left(-\rho^{-1}\right) = 1$$

and

$$r_{N+1} = q_{N+1} - (\rho+b_1)s_N \to 1 - (\rho+0)(0) = 1,$$

如 $N\to\infty$。 □

4. Non-Autonomous Implosions

本节证明所有与非自治抛物型爆破相关的定理。我们使用第 3 节中得到的估计，以及第 2 节中阐述的结果，这些结果将 M¨obius 变换复合的系数联系起来。

我们将定理分为两类。与前面一样，从映射 $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ 出发，我们首先研究对 f 的乘法扰动。在第二类定理中，我们关注同时具有乘法和加法形式的扰动。

定理 A. 设

$$f_k(z) := \frac{\rho_k z}{1-z},$$

其中 $\rho_k = e^{2\pi i\theta_k}$ 和 θ_k 满足以下任一条件:

(1) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + O\left(\dfrac{1}{N^3}\right)$; *or*

(2) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{c_k}{N^2}$ *where* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for* k *odd; or*

(3) $\theta_k = \dfrac{1}{N} + \dfrac{c_k}{N^2}$ *where* $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$ *for* $C\in\mathbb{C}$.

则:

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \to Id$$

当 $N\to\infty$ 时，在 $\mathbb{C}$的紧集上一致收敛。

证明. 由推论 1,

$$F_N := f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1(z) = \frac{A_N z}{C_N z + 1}$$

其中 $A_N = q_{N+1} - q_N$ 和 $C_N = -q_N$ 其中:

$$q_{k+1} = (1+\rho_k)q_k - \rho_k q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1.$$

我们将证明，给定上述 θ_k ，正交多项式 q_k 中的系数满足命题 3，从而得到

$$|A_N| = |q_{N+1} - q_N| \to 1 \text{ as } N\to\infty, \text{ and}$$
$$|C_N| = |q_N| \to 0 \text{ as } N\to\infty.$$

因此，当 $N\to\infty$.时， $F_N \to$ Id

我们有 $\epsilon_k \equiv 0$ 和 $b_k := \rho_k - \rho$。因此，上述序列 q_k 变为

$$q_{k+1} = (1+\rho+b_k-\epsilon_k^2)q_k - (\rho+b_k)q_{k-1}, \qquad q_0 = 0, \qquad q_1 = 1.$$

因此，我们处于命题 3 的情形。

命题 3 的条件 $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 显然成立，因此我们只需证明 b_k 条件成立。对于 $\theta_k = \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$，我们有 — —

(1) 若 $\theta_k = \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$，则

$$\begin{aligned} b_k = \rho_k - \rho &= e^{2\pi i\left(\frac{1}{N}+O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)} - e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{N}}\left(e^{2\pi i O\left(\frac{1}{N^3}\right)} - 1\right) \\ &= O\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

这满足命题 3 的条件 (i)。

(2) 如果 $\theta_k = \frac{1}{N} + \frac{c_k}{N^2}$ 和 $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$，那么

$$\begin{aligned} b_k = \rho_k - \rho &= e^{2\pi i\left(\frac{1}{N}+\frac{c_k}{N^2}\right)} - e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{N}}\left(e^{2\pi i \frac{c_k}{N^2}} - 1\right) \\ &= \frac{2\pi i c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right), \end{aligned}$$

满足命题 3 的条件 (ii)。

(3) 如果 $\theta_k = \frac{1}{N} + \frac{c_k}{N^2}$ 和 $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$，那么

$$\begin{aligned} b_k = \rho_k - \rho &= e^{2\pi i\left(\frac{1}{N}+\frac{C}{N^2}e^{2\pi ik/N}\right)} - e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{N}}\left(e^{\frac{2\pi iC}{N^2}e^{2\pi ik/N}} - 1\right) \\ &= \frac{2\pi iC}{N^2}e^{2\pi ik/N} + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \end{aligned}$$

满足命题 3 的条件 (iii)。

□

定理 B. 设

$$f_k(z) := \frac{\rho_k z}{1-z} + \epsilon_k^2,$$

其中 $\rho_k = e^{2\pi i\theta_k}$. 假设 θ_k 和 ϵ_k 满足以下任一条件:

(1) $\theta_k = \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

(2) $\theta_k = \frac{1}{N} + \frac{c_k}{N^2}$ *where* $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ *for odd* k, *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

(3) $\theta_k = \frac{1}{N} + \frac{c_k}{N^2}$ *where* $c_k = Ce^{2\pi ik/N}$, *and* $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

(4) $\theta_k = 0$, *and* $\epsilon_k = \frac{\pi}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$.

(5) $\theta_k = 0$, *and* $\epsilon_k = \frac{\pi}{N} + \frac{c_k}{N^2}$ *where* $c_k + c_{N-k} = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Then

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \to Id$$

当 $N \to \infty$ 时，在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。

证明。当 $\epsilon_k \neq 0$ 时，由引理 2 可得,

$$F_N := f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1(z) = \frac{A_N z + B_N}{C_N z + D_N}$$

其中 $A_N = q_{N+1} - q_N$、$B_N = r_N - r_{N+1}$ $C_N = -q_N$ 和 $D_N = r_N$其中

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= (1+\rho_k - \epsilon_k^2)q_k - \rho_k q_{k-1}, & q_0 &= 0, & q_1 &= 1; \\ r_{k+1} &= (1+\rho_k - \epsilon_k^2)r_k - \rho_k r_{k-1}, & r_0 &= 1, & r_1 &= 1. \end{aligned}$$

同样，由于 $b_k := \rho_k - \rho$，我们处于命题 3 以及命题 3 和 4 的情形。对于情况 (1)、(2) 和 (3) 中的 θ_k，我们在定理 A 的证明中计算得出 b_k：

(1) $b_k = O\left(\frac{1}{N^3}\right)$,

(2) $b_k = \frac{2\pi i c_k}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ where $c_k + c_{k+1} = O\left(\frac{1}{N}\right)$, and

(3) $b_k = \frac{2\pi i C}{N^2} e^{2\pi i k/N} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$.

由于 $\epsilon_k = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 以及每个 b_k 都满足命题 3 中相应的条件 (i)-(iii)，因此 $q_N \to 0$ 和 $q_{N+1} \to 1$ 为 $N \to \infty$。命题 4 对 b_k 和 ϵ_k 的假设完全相同。因此，也可推出 $r_N \to 1$ 和 $r_{N+1} \to 1$ 为 $N \to \infty$。综合命题 3 和命题 4 的结果，我们可以得出

$$\begin{aligned} |A_N| &= |q_{N+1} - q_N| \to 1 \\ |C_N| &= |q_N| \to 0 \\ |B_N| &= |r_N - r_{N+1}| \to 0 \\ |D_N| &= |r_N| \to 1 \end{aligned}$$

为 $N \to \infty$。以上结果再次意味着 $F_N \to$Id 为 $N \to \infty$.

情形 (4) 和 (5) 已在 [9]中计算，为完整起见，这里一并列出。 □

5. Difference with the Additive Condition

在前一节 我们分析了乘法情形，其中形如

$$f_k(z) = \frac{\rho_k z}{1 - z}$$

的映射的复合会表现出微妙的收敛性质，具体取决于序列 $\{\rho_k\}$。现在我们将其与加法情形进行对比；后者乍看之下似乎与前者密切相关，但其渐近行为却截然不同。

回顾以下映射族：

$$g_k(z) = \frac{z}{1 - z} + \epsilon_k^2$$

其中固定 N。 [9] 中研究了这类映射，并证明：

$$g_N \circ g_{N-1} \circ \cdots \circ g_1 \to \mathrm{Id},$$

在序列 $\{\epsilon_k\}$ 满足特定条件时。

每个单独的 g_k 都与形如 f_k 的映射解析共轭

$$f_k(z) = \frac{\rho_k z}{1 - z},$$

只要参数满足

$$\sqrt{\rho_k} + \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} = 2 - \epsilon_k^2.$$

然而，以下定理表明，即使这些映射两两共轭，其复合的收敛性也可能表现得截然不同。

定理 C。存在序列 $\{\epsilon_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$，对于 $1 \le k \le N$，使得：*(1)* 对于每个 k，映射 $f_k(z) = \frac{\rho_k z}{1 - z}$ 和 $g_k(z) = \frac{z}{1 - z} + \epsilon_k^2$ 是共轭的。*(2)* 我们有 $g_N \circ g_{N-1} \circ \cdots \circ g_1$ 在紧集上一致收敛于恒等映射。*(3)* 复合 $f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1(z)$ 对于任何 $z \neq 0$都不逐点收敛于 z。

此例说明，单个映射层面的共轭并不意味着在复合下具有可比的渐近行为。

Proof. 与单变量情形一样，共轭关系在满足以下条件时成立 en:

$$\rho_k = \exp(2i\theta_k) \text{ and } \epsilon_k = 2\sin(\theta_k/2).$$

为简化起见，假设 $N = 2m$。我们选择： $\theta_k = \frac{\pi}{N-1}$ 用于 $1 \leq k \leq m$ ，以及 $\theta_k = \frac{\pi}{N+1}$ 用于 $m+1 \leq k \leq 2m = N$。

在 [9], 中已证明：若 $\epsilon_k = \frac{\pi}{N} + \frac{\alpha_k}{N^2}$ 满足 $\alpha_k + \alpha_{N-k} = O(1/N)$，则 (2) 成立。显然，选择 ϵ_k 满足此条件。事实上，选择 ϵ_k 意味着，如果 ( ) 且 $m+1 \leq k \leq 2m.$，那么 $\alpha_k = \begin{cases} \pi + O(& 1/N \quad 1 \leq k \leq m) \\ -\pi + O & 1/N \end{cases}$。因此，

$\alpha_k + \alpha_{N-k} = O(1/N)$，且 (2) 成立。

现在我们证明（3）。为简单起见，令 $s = \exp(2i\pi/(N-1))$ 和 $t = \exp(2i\pi/(N+1))$ 分别重新记为.....我们使用关于 q_N 的公式 $q_{k+1} = (1+\rho_k)q_k - \rho_k q_{k-1}$，并得到

$$\begin{aligned} q_N &= 1 + s + s^2 + \ldots + s^{m-1} + s^m \left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{m-1}\right) \\ &= \frac{s^m - 1}{s-1} + s^m \frac{t^m - 1}{t-1}. \end{aligned}$$

对于第一项，我们有：

$$\frac{s^m - 1}{s-1} = \frac{e^{iN\pi/(N-1)} - 1}{e^{2i\pi/(N-1)} - 1} = \frac{i}{\pi}(N-1) + \frac{1}{2} + O(1/N).$$

同理：

$$\frac{t^m - 1}{t-1} = \frac{e^{iN\pi/(N+1)} - 1}{e^{2i\pi/(N+1)} - 1} = \frac{i}{\pi}(N+1) + \frac{3}{2} + O(1/N).$$

结合以上结果以及 $s^m = -1 - \frac{i\pi}{N} + O(1/N^2)$ 这一事实： —

$$q_N = -\frac{2i}{\pi} + O(1/N).$$

因此，

$$|q_N - T_N| \geq \frac{1}{\pi}.$$

当 N 足够大时。因此，我们并未得到收敛到恒等映射。 □

6. Bifurcations for Skew-Products

高维非自治抛物现象的一种标准产生方式，是通过斜积映射

$$F(z, w) = (f_w(z), g(w)),$$

其中，基动力学 $w \mapsto g(w)$ 生成参数序列 w_0，w_1，.....，w_{N-1}，从而在纤维中产生非自治复合映射，

$$f_{w_{N-1}} \circ \cdots \circ f_{w_1} \circ f_{w_0}.$$

在抛物背景下，人们关注的是这样的区域：纤维映射是模型抛物 Möbius 映射 $z \mapsto \frac{z}{1-z}$ 的小扰动，且诱导的非自治复合映射会随着基点 $w_0 = w_0(N) \to 0$ 和迭代次数 $N \to \infty$ 呈现类似分岔的效应。

第4节的结果提供了一种灵活的机制来构造这类例子：如果沿着基轨道，可以将纤维映射写成如下形式

$$f_k(z) = \rho_k \frac{z}{1-z} + \epsilon_k^2, \qquad \rho_k = e^{2\pi i \theta_k},$$

其中 $\theta_k = \frac{1}{N} + O(N^{-2})$（或在加性缩放区域中为 $\theta_k = 0$），且 $\epsilon_k = O(N^{-2})$ 属于定理A–B中的某种可容许模式，那么诱导的 N 步纤维复合映射收敛到恒等映射。特别地，在下面的每个例子中，我们都选取一个基映射 g 和一个初始参数 $w_0 = w_0(N)$，使得所得序列 $\{\theta_k, \epsilon_k\}$ 满足我们某个定理的条件，从而得到

$$F^N(z, w_0) \longrightarrow (z, 0) \text{ as } N \to \infty,$$

在 z–变量的紧子集上一致收敛。

例 2（恒定基参数）。 考虑

$$F(z,w)=\left(e^{2\pi iw}\frac{z}{1-z},\,w\right).$$

则 $F^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$ 对于 $w_0=\frac{1}{N}$。

证明。 若 $w_0=\frac{1}{N}$，则基坐标为常数： $w_k=w_0$ 对所有 k 均成立。因此，每一步的纤维映射为

$$f(z)=e^{2\pi i/N}\frac{z}{1-z}.$$

因此

$$F^N\left(z,\frac{1}{N}\right)=\left(f^{\circ N}(z),\frac{1}{N}\right)=\left(z,\frac{1}{N}\right)$$

由例1可知，结论得证。 □

例 3（交替乘法扰动）。 考虑

$$H(z,w)=\left(e^{2\pi i(\frac{1}{N}+w)}\frac{z}{1-z},\,-w\right).$$

那么，对于 $w_0=-\frac{1}{N^2}$， $H^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。

证明。 令 $w_0=-\frac{1}{N^2}$，并定义 $c_k\in\{\pm1\}$ 如下：

$$c_k=\begin{cases}1, & k\text{ odd},\\ -1, & k\text{ even}.\end{cases}$$

那么 $w_k=c_kw_0$ ，且第 k 个纤维映射为

$$f_k(z)=e^{2\pi i\theta_k}\frac{z}{1-z},\qquad \theta_k=\frac{1}{N}+w_k=\frac{1}{N}+\frac{c_k}{N^2}.$$

由于对所有 k， $c_k+c_{k+1}=0$ 成立，因此定理 A(2)适用，并得到 $f_N\circ\cdots\circ f_1\to\mathrm{Id}$。 此外， $w_N=(-1)^Nw_0\to0$。因此，对于□， $H^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。

例 4（旋转乘法扰动）。 考虑

$$G(z,w)=\left(e^{2\pi i(\frac{1}{N}+w)}\frac{z}{1-z},\,e^{2\pi i/N}\,w\right).$$

那么，对于 $w_0=\frac{e^{2\pi i/N}}{N^2}$， $G^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。

证明。 对于 $w_0=\frac{e^{2\pi i/N}}{N^2}$，我们有 $w_k=\frac{e^{2\pi i(k+1)/N}}{N^2}$。定义

$$\theta_k=\frac{1}{N}+\frac{e^{2\pi ik/N}}{N^2},\qquad f_k(z)=e^{2\pi i\theta_k}\frac{z}{1-z}.$$

于是 $\theta_k=\frac{1}{N}+w_{k-1}$，因此沿该轨道的第 k 个纤维映射恰好是 f_k。根据定理 A(3)， $f_N\circ\cdots\circ f_1\to\mathrm{Id}$。此外 $|w_N|=1/N^2\to0$，因此 $G^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。□

例 5（包括加性扰动：常值基底）。 考虑

$$F_1(z,w)=\left(e^{2\pi iw}\frac{z}{1-z}+w^4,\,w\right).$$

于是对 $w_0=\frac{1}{N}$， $F_1^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。

证明。 若 $w_0=\frac{1}{N}$，则对所有 k，都有 $w_k=w_0$ ，且每个纤维映射都等于

$$f(z)=\rho\frac{z}{1-z}+\epsilon^2,\qquad \rho=e^{2\pi i/N},\qquad \epsilon^2=w_0^4=\frac{1}{N^4}.$$

因此 $\theta=\frac{1}{N}$ 且 $\epsilon=O(N^{-2})$，故由定理 B(1)可得 $f^{\circ N}\to\mathrm{Id}$。 于是 $F_1^N(z,\ w_0)=\left(f^{\circ N}(z)\ w_0\right)\to(z,\ 0)$. □

例 6（包含加性扰动：交替基底）。 考虑

$$G_1(z,w)=\left(e^{2\pi i(\frac{1}{N}+w)}\frac{z}{1-z}+w^2,\,-w\right).$$

那么 $G_1^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$，对于 $w_0=-\frac{1}{N^2}$。

证明。 令 $w_0=-\frac{1}{N^2}$，并按照例3定义 c_k，于是 $w_k=c_kw_0$ 且 $w_k^2\equiv\frac{1}{N^4}$。诱导的纤维映射为

$$f_k(z)=e^{2\pi i\theta_k}\frac{z}{1-z}+\epsilon_k^2,\qquad \theta_k=\frac{1}{N}+w_k=\frac{1}{N}+\frac{c_k}{N^2},\qquad \epsilon_k^2=w_k^2=\frac{1}{N^4}.$$

由于 $c_k+c_{k+1}=0$ 且 $\epsilon_k=O(N^{-2})$，定理B（2）适用，从而得到 $f_N\circ\cdots\circ f_1\to\mathrm{Id}$。此外 $w_N=(-1)^Nw_0\to0$，因此 $G_1^N(z,\ w_0)\to(z,\ 0)$。□

上述例子说明，本文证明的抽象非自治收敛性结果如何自然地出现在斜乘积动力学的研究中。在每种情形下，基变量 w 的动力学都会在纤维中抛物型区域内产生受控漂移，从而形成非自治复合，其渐近行为由定理A和定理B所支配。

尽管这些例子本身并不能带来全局动力学结论，例如游荡Fatou分支的存在性，但它们揭示了高维复动力系统中这类构造所依赖的局部分岔机制。

这一视角补充了 Astorg 及其合作者的工作 [3, 4]，；在他们的工作中，类似的斜积构型虽未明言，却隐约浮现。这也表明，正交多项式技术或许能为研究更复杂的斜积分岔提供一个有用的分析框架，其中包括随机或弱相关扰动区域。

我们预计，这些方法还可以进一步推广到基动力学不再是周期性或确定性的情形，并有望在多个复变量中产生非自治抛物现象的新例子。

7. Random Compositions随机复合

本节回到 Vivas [9], 研究的纯加性情形，其中纤维映射定义为

$$f_k(z)\coloneqq\frac{z}{1-z}+\epsilon_k^2,$$

但现在我们允许扰动参数 $\{\epsilon_k\}_{k\geq1}$ 是随机的。我们的目标是证明，尽管临界尺度 $1/N^2$ 下的确定性扰动需要精细的算术抵消，引入随机性后，只需显著弱得多的假设便可恢复收敛性。

本节中，我们始终限于自治乘性情形 $\rho_k\equiv1$，因此动力学完全由加性扰动所支配。在这种情形下，第 N 次复合

$$F_N:=f_N\circ f_{N-1}\circ\cdots\circ f_1$$

可表示为一个莫比乌斯变换，其系数由两个递归数列$\{q_k\}$ 和 $\{r_k\}$确定。这种表示法在 [9], 中引入，使我们能够将 F_N的收敛性问题归结为对这些数列的定量估计。

当 $\rho_k\equiv1$ 时，对于所有 k，都有 $\rho_k=\rho+b_k\equiv1$，因此 $\rho+a_k=1-\epsilon_k^2$。将引理 2 专门应用于此情形，可得出 [9], 中的引理 1，它表明

$$F_N:=f_N\circ f_{N-1}\circ\cdots\circ f_1$$

是一个莫比乌斯变换，其系数由数列 $\{q_k\}$ 和 $\{r_k\}$ 确定，这两个数列定义如下

$$\begin{aligned}
q_{k+1}&=(2-\epsilon_k^2)q_k-q_{k-1}, & q_0&=0, & q_1&=1,\\
r_{k+1}&=(2-\epsilon_k^2)r_k-r_{k-1}, & r_0&=1, & r_1&=1.
\end{aligned}$$

$\{q_k\}$ 与 $\{r_k\}$ 之间的关系由引理 5 给出。特别是，当 $\rho_k\equiv1$时，这就化为 [9]的引理 6。

引理 6. 如果 $\rho_k \equiv 1$，那么

$$r_{k+1} = q_k - s_{k-1},$$

其中，辅助序列 $\{s_k\}$ 由 $s_0 = 0$、 $s_1 = 1$ 定义，并且

$$s_{k+1} = (2 - \epsilon_{k+1}^2)s_k - s_{k-1}.$$

关键思路是将 q_k 所满足的随机递推关系与确定性的切比雪夫递推关系进行比较，并证明随机波动以压倒性的概率保持得足够小。我们将序列 $\{q_k\}$ 与第二类切比雪夫多项式 $\{U_k\}$ 进行比较。

引理 7 ([9,引理 4])。设

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= (x + d_k)q_k - q_{k-1}, & q_0 &= 0, & q_1 &= 1, \\ U_{k+1} &= xU_k - U_{k-1}, & U_0 &= 0, & U_1 &= 1. \end{aligned}$$

设 $x = 2$余弦 θ。若存在 $\epsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{j=1}^{m-1} |d_j q_j| \le \epsilon \sin\theta,$$

则对所有 $1 \le n \le m$， $|q_n - U_n| \le \epsilon$ 。

证明从恒等映射开始

$$\sin\theta\,(q_n - U_n) = -\mathrm{Im}\left(\delta_n e^{-in\theta}\right), \qquad \delta_n := \sum_{j=1}^{n-1} d_j q_j e^{ij\theta}.$$

我们现在假设 系数 d_k 是随机的。在本节中，我们固定 $\delta > 0$ 并记作

$$d_k = \frac{\xi_k}{N^{2+\delta}}, \tag{7}$$

其中 ξ_k 是任意相互独立、有界的零均值随机变量。

引理 8。设

$$\delta_n := \sum_{k=0}^{n-1} d_k\, q_k\, e^{ik\theta}, \qquad n \ge 1.$$

那么， $\{\delta_n\}_{n\ge1}$ 关于滤子 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0$、……、 $\xi_{n-1})$是一个鞅。

*Pro*关于。 由于 q_k 仅依赖于 ξ_0、…、 ξ_{k-1}，因此变量 δ_n 是 $\mathcal{F}_n$-可测的。此外 ，

$$\mathbb{E}|\delta_n| \le \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(|d_k||q_k|) < \infty,$$

因为这些 ξ_k 有界。

最后，

$$\delta_n = \delta_{n-1} + d_{n-1}q_{n-1}e^{i(n-1)\theta}.$$

对 $\mathcal{F}_{n-1}$ 取条件期望，并使用 $\mathbb{E}(\xi_{n-1}) = 0$ ，得到

$$\mathbb{E}(\delta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \delta_{n-1},$$

因此 $\{\delta_n\}$是一个鞅。 □

回顾 [9] 的引理 5，关于 d_k 的条件立即给出界：以概率 1，对所有 $1 \le k \le N$， q_k 均被 N所界。因此我们有如下结论：

引理 9。 假设 $|\xi_k| \le M$ 几乎处处成立，且 $|q_k| \le N$ 以概率 *1* 成立，其中 $k \le n$。则对于任意$\lambda_n > 0$,

$$\mathbb{P}(|\delta_n| \ge \lambda_n) \le \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 N^{2(1+\delta)}}{2M^2 n}\right).$$

因此,

$$\mathbb{P}\big(|q_n - U_n| \ge \tfrac{\lambda_n}{\sin\theta}\big) \le \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 N^{2(1+\delta)}}{2M^2 n}\right).$$

证明。由于

$$|\delta_n - \delta_{n-1}| = |d_{n-1} q_{n-1}| \le \frac{M}{N^{1+\delta}},$$

Azuma不等式（例如参见 [1]）给出了所述的一致有界。 $|q_n - U_n|$ 的估计由上述恒等映射推出。□

命题 5。 设 $\theta = \pi/N$、 $x = 2$余弦 θ。其概率至少为 $1 -$指数$(-N^{\delta})$,

$$\begin{aligned} |q_{N-1} - 1| &= O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \\ |q_N| &= O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \\ |q_{N+1} + 1| &= O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \\ |s_{N-2} - 2\cos\theta| &= O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \\ |s_{N-1} - 1| &= O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big). \end{aligned}$$

证明。 设 $\theta = \pi/N$且 $x = 2$余弦θ。我们对其应用引理 9，并作如下选择

$$\lambda_n := \sqrt{2n}\, N^{-(3/2+\delta/2)}.$$

于是，对每个 $1 \le n \le N+1$，引理 9 给出

$$\mathbb{P}\big(|\delta_n| \ge \lambda_n\big) \le \exp\left(-c\,\frac{\lambda_n^2 N^{2(1+\delta)}}{n}\right) = \exp\big(-c\,N^{\delta}\big),$$

其中某个常数 $c > 0$ 仅取决于 $|\xi_k|$上的一致有界。

利用恒等映射 $\sin\theta\,(q_n - U_n) = -\mathrm{Im}(\delta_n e^{-in\theta})$，可得

$$|q_n - U_n| \le \frac{|\delta_n|}{\sin\theta}.$$

由于 $\sin(\pi/N) \sim 1/N$，存在常数 $C > 0$使得

$$|q_n - U_n| \le CN\,|\delta_n|.$$

因此，在事件 $\{|\delta_n| \le \lambda_n\}$ 上，我们有

$$|q_n - U_n| \le CN\lambda_n \le C\sqrt{2n}\, N^{-(1/2+\delta/2)} = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \qquad 1 \le n \le N+1.$$

对 $1 \le n \le N+1$应用并集界,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le n\le N+1} |\delta_n| > \lambda_n\Big) \le (N+1)\exp(-cN^{\delta}) \le \exp(-c'N^{\delta})$$

对某个 $c' > 0$ 以及所有充分大的 N，均成立。因此，以至少 $1 - \exp(-c'N^{\delta})$ 的概率，对所有 $1 \le n \le N+1$同时有

$$|q_n - U_n| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big).$$

现在使用 U_n 在 $\theta = \pi/N$处的显式取值:

$$U_{N-1}(2\cos(\pi/N)) = \frac{\sin((N-1)\pi/N)}{\sin(\pi/N)} = 1, \quad U_N(2\cos(\pi/N)) = \frac{\sin(\pi)}{\sin(\pi/N)} = 0,$$

$$U_{N+1}(2\cos(\pi/N)) = \frac{\sin((N+1)\pi/N)}{\sin(\pi/N)} = -1.$$

由此得到前三个估计:

$$|q_{N-1} - 1| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \quad |q_N| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \quad |q_{N+1} + 1| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big).$$

最后，同样的论证也适用于平移后的序列 s_n （如引理 8 之前的备注中所指出的），从而得到

$$|s_n - U_n| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big)$$

在同一个高概率事件上对 $n \le N+1$ 一致成立。特别地，

$$|s_{N-2} - U_{N-2}| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \qquad |s_{N-1} - U_{N-1}| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big).$$

由于

$$U_{N-2}(2\cos(\pi/N)) = \frac{\sin((N-2)\pi/N)}{\sin(\pi/N)} = \frac{\sin(2\pi/N)}{\sin(\pi/N)} = 2\cos(\pi/N),$$

且 $U_{N-1}(2\cos(\pi/N)) = 1$，我们得到

$$|s_{N-2} - 2\cos(\theta)| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big), \qquad |s_{N-1} - 1| = O\Big(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\Big),$$

如所声称的。 □

现在，我们准备证明本节的主定理。

定理 D. 对于固定的 N，设 $\{\eta_k\}_{k=1}^{N+1}$ 为相互独立、有界的零均值随机变量，并令

$$\epsilon_k = \frac{\pi}{N} + \frac{\eta_k}{N^{1+\delta}} \quad (\delta > 0), \qquad f_k(z) = \frac{z}{1-z} + \epsilon_k^2.$$

Then

$$f_N \circ f_{N-1} \circ \cdots \circ f_1 \longrightarrow \mathrm{Id}$$

以概率 *1*，在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛于 $N \to \infty$。

证明。 对于上述的 ϵ_k，我们有：

$$2 - \epsilon_k^2 = 2 - \frac{\pi^2}{N^2} - \frac{2\pi\eta_k}{N^{2+\delta}} - \frac{\eta_k^2}{N^{2+2\delta}}.$$

对于 $x = 2\cos(\pi/N)$，当.....时，我们有 $x + d_k = 2 - \epsilon_k^2$

$$d_k = -\frac{2\pi\eta_k}{N^{2+\delta}} - \frac{\eta_k^2}{N^{2+2\delta}} + O(1/N^4).$$

我们看到，这满足方程 7 的条件。对于线性变换的复合，我们使用引理 2

$$F_N(z) = \frac{A_N z + B_N}{C_N z + D_N},$$

with

$$A_N = q_{N+1} - q_N, \quad B_N = r_N - r_{N+1}, \quad C_N = -q_N, \quad D_N = r_N.$$

利用引理 6 和命题 5，我们得到

$$A_N \to -1, \quad B_N \to 0, \quad C_N \to 0, \quad D_N \to -1$$

几乎处处成立。因此， $F_N \to$Id 在紧集上一致收敛。

由于失败概率可求和，博雷尔–坎特利引理意味着这些界对所有充分大的 N 几乎处处成立。□

在随机情形下，独立性和零均值足以确保几乎处处收敛。这表明，非自治抛物型爆破可能对随机扰动具有鲁棒性，包括在高维情形下。

Acknowledgements

作者感谢 Hoi Nguyen 建议将 Azuma 引理作为证明随机情形下收敛性的工具。SS 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2231565 的资助，LV 部分获得了美国国家科学基金会 2453797 的资助。

References

[1] Noga Alon 和 Joel H. Spencer。 *The probabilistic method*。离散数学与优化 Wiley-Interscience 系列。John Wiley & Sons, Inc.，新泽西州霍博肯，第三版，2008 年。附有关于 Paul Erd˝os 生平与工作的附录。[2] Matthieu Astorg 和 Fabrizio Bianchi。半抛物 H´enon 映射的角映射。 *Math. Ann.*，392(1):837–860，2025 年。[3] Matthieu Astorg、Xavier Buff、Romain Dujardin、Han Peters 和 Jasmin Raissy。一个具有游荡法图分支的二维多项式映射。 *Ann. of Math. (2)*，184(1):263–313，2016 年。[4] Matthieu Astorg 和 Luka Boc Thaler。与恒等映射相切的斜积动力学。 *J. Eur. Math. Soc.*，2024 年。[5] Eric Bedford、John Smillie 和 Tetsuo Ueda。复维数二中的半抛物分岔。 *Comm. Math. Phys.*，350 1 1( ): –29，2017 年。[6] Fabrizio Bianchi。 $\mathbb{C}^2$ 的自同态的抛物型内爆。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，21(12):3709–3737，2019 年。[7] Romain Dujardin 和Mikhail Lyubich。 $\mathbb{C}^2$ *Invent.* 的 *Math.* 200 2 439 511, 2015

耗散多项式自同构的稳定性与分岔。 , ( ): – 。[8] Pierre Lavaurs。 *Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points périodiques paraboliques*。博士论文，巴黎-南大学（巴黎第十一大学），法国巴黎，1989 年。[9] Liz Vivas。非自治抛物分岔。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，148(6):2525–2537，2020 年。

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA*Email address*: huneycutt.13@osu.eduDepartment of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA *Email address*: sandberg-clark.1@osu.eduDepartment of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA*Email address*: vivas.3@osu.edu