arXiv:2601.16339v1 [math.AC] 22 Jan 2026

理想与模的正规性

NAOKI ENDO、SHIRO GOTO、JOOYOUN HONG 和 BERND ULRICH

ABSTRACT. 我们研究正则局部环中整闭的 $\mathfrak{m}$-一次理想的 Rees代数何时是 Cohen–Macaulay正规整环。尽管在维数为二时这一性质总是成立，但在更高维数下一般并不成立，因此我们着手寻找该理想的充分条件。我们证明，若一个整闭理想包含一组长度为 $d-2$的正则参数系中的部分参数，其中 d 是正则局部环的维数，则其 Rees代数是 Cohen–Macaulay 且正规。我们还推广了 Goto 和 Ciuperc˘a 的结果，证明当一个理想的最小生成元个数不超过 $d+2$时，同样的结论成立。此外，我们研究由 $d+3$ 齐次多项式生成的整闭零维理想。最后，利用一般 Bourbaki 理想，我们将这些结果推广到有限余长的整闭无挠模。

1. INTRODUCTION

本文研究了以下条件：正则局部环（R, $\mathfrak{m}$）中维数为 d 的整闭$\mathfrak{m}$-初等理想 I 的 Rees代数是 Cohen-Macaulay 正规整环。由于当 $d \leq 1$ 时该结论显然成立，我们主要关注 $d \geq 2$ 的情形。回顾一下，交换环 R 中理想 I 的 整闭包 I 是所有r 关于 I 整的元素的集合，即满足如下形式多项式方程的元素：

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_j r^{m-j} + \cdots + a_m = 0,$$

其中 $a_j \in I^j$。如果 $I = I$，则称理想 I 为 整闭 。此外，如果对于每个正整数 n 都有$I^n = I^n$ ，则称 I 为 正规 。另一种表述是，我们考虑 I 的 ***Rees***代数 $\mathcal{R}(I)$，它是由下式定义的多项式环 $R[t]$ 的子代数：

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n.$$

$\mathcal{R}(I)$ 在 $R[t]$ 中的整闭包 $\mathcal{R}(I)$ 也是一个分次代数，其分次分量是 I 的所有幂的整闭包：

$$\overline{\mathcal{R}(I)} = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n} t^n.$$

若 R 是正规整环，则其分式域中 $\mathcal{R}(I)$ 的整闭包与 $\mathcal{R}(I)$ 重合。因此，若 $\mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(I)$，则称 Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是正规的。于是，理想 I 是正规的，当且仅当其 Rees代数是正规的。

2020数学主题分类。13H10, 13B22, 13B25, 13A30。关键词与短语。Rees代数，Cohen-Macaulay环，正规环，一般 Bourbaki 理想。第一作者部分获得了日本学术振兴会科学研究费助成金（C）23K03058 的资助。第四作者部分获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2502706。

Zariski 证明了，在域上具有两个变量的多项式环中，任意两个整闭理想的乘积也是整闭的。这意味着 Rees代数是正规的（[18, 第二部分，第 12] 节）。尽管 Zariski 的原始结果是针对多项式环陈述的，但二维正则局部环中的类似性质已在 [19, 附录 5，定理 $2'$] 中得到证明。此外，Lipman 和 Teissier 证明，任意整闭的 $\mathfrak{m}$-primary 理想的约化数至多为一（[13, 命题 5.5]）。因此，Rees代数是 Cohen-Macaulay 的。所以，如果（R, $\mathfrak{m}$）是二维正则局部环，且 I 是一个整闭理想，那么 Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 确实是 Cohen-Macaulay 正规整环。此外，Lipman 证明，如果 R 是具有无限剩余域的二维有理奇点，那么 Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环（[11,第 7] 节）。

然而，当环的维数大于 2 时，整闭理想的 Rees代数未必是 Cohen-Macaulay 正规整环。例如，考虑域 k 上的形式幂级数环 $R = k[\![X, Y, Z]\!]$，并考察理想

$$Q = (X^7, Y^3, Z^2) \text{ and } I = \overline{Q} = (X^7, Y^3, Z^2, X^5Y, X^4Z, X^3Y^2, X^2YZ, Y^2Z).$$

在这种情况下，I 是整闭的，但 $I^2 \neq \overline{I^2}$，且 $I^2 = QI$。因此，$\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 的，但不是正规的。尽管人们可能会认为正态性意味着 Cohen-Macaulay 性质，但一般而言，这一蕴含关系并不成立。进一步假设 k 的特征不等于 3，并考虑

$$I = (X^4, X(Y^3 + Z^3), Y(Y^3 + Z^3), Z(Y^3 + Z^3)) + \mathfrak{m}^5$$

其中 $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$。于是，根据 [8, 定理 3.11],，理想 I 是正规的，但其伴随分次环 $\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ 不是 Cohen-Macaulay 的。因此，$\mathcal{R}(I)$ 是正规的，但不是 Cohen-Macaulay 的。这些例子表明，要使 Rees代数成为维数大于 2 的 Cohen-Macaulay 正规整环，就必须对基环或理想施加额外条件。由于在我们的设定中基环假定为正则环，因此我们着重于对理想施加条件。

我们从最小生成元个数的角度研究这类条件，记作 $\mu_R(\ )$。Goto 证明，当 $\mu_R(I) = d$ ——也就是说，当 I 是完全交理想时——Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环（[4, 推论 (1.3)]）。在同一篇著作中还证明了：正则局部环中的一个 $\mathfrak{m}$- 初等完全交理想是整闭的，当且仅当它包含一组长度为 $d-1$ 的正则参数系中的一部分（[4, 定理 (1.1)]）；等价地，这当且仅当 $v(R/I) \leq 1$，其中 $v(\ )$ 表示环的嵌入维数。此外，Ciuperc˘a 证明，即使当 $\mu_R(I) = d+1$，也有 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环；也就是说，此时 I 是几乎完全交理想（[1, 定理 1.1], [2, 节 4]）。在这种情况下还表明，如果 I 是整闭的且 $\mu_R(I) = d+1$，那么 I 必然包含一组长度为 $d-2$ 的正则参数系中的一部分（[1, 推论 3.3], [2, 节 4]）。后一条件等价于 $v(R/I) \leq 2$。

在这些结果的基础上，我们进一步拓展研究范围，证明即使在 $\mu_R(I) > d+1$ 的情况下（见定理 2.1），只要满足更一般的条件 $v(R/I) \leq 2$，Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 仍是 Cohen-Macaulay 正规整环。此外，我们拓展了 Goto 和 Ciuperc˘a 的结果，证明若 $\mu_R(I) \leq d+2$，则其 Rees代数是 Cohen-Macaulay 正规整环。我们的主要定理如下：

定理 2.2 设（R, $\mathfrak{m}$）是维数为 $d \geq 3$ 的正则局部环，且 I 是 R 的一个整闭$\mathfrak{m}$-初等理想。若 μ_R（I）$\leq d+2$，则 I 包含一组长度为 $d-2$ 的正则参数系中的一部分。特别地，*Rees*代数 $\mathcal{R}$（I）是 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

对于由至多 $d+3$ 个元素生成的理想，我们分析由齐次多项式生成的零维理想，并得到以下结果。

定理 3.4 设 k 是特征为零的域，$R = k[X_1, \ldots, X_d]$ 是多项式环，I 是由 $d+3$ 个齐次多项式生成的零维 R 理想。若 I 是整闭的，则 *Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

设 R 是诺特环，E 是具有秩的有限生成 R模。模 E 的 Rees代数 $\mathcal{R}(E)$ 定义为对称代数 $\mathcal{S}(E)$ 除以 R—挠子。如果 E 是无挠的，则它可以嵌入自由模 R^e 中。在这种情况下，$\mathcal{R}(E)$ 是由所有线性形式 $a_1t_1+\cdots+a_et_e$ 生成的多项式环 $R[t_1, \ldots, t_e]$ 的 R 子代数，其中 $(a_1, \ldots, a_e)$ 是 E 中一个元素在该嵌入下于 R^e 中的像。特别地，当 $E = I \subseteq R$ 是理想时，此处的 Rees代数定义与引言开头给出的定义一致。E 在 R^e 中的整闭包 E 是 R^e 的最大子模，其 Rees代数在 $\mathcal{R}(E)$ 上整。若 $E = E$，则称 E 是整闭的。利用一般 Bourbaki 理想的概念，我们将关于理想的结果推广到模。对于一个 R模 M，我们用 $\ell_R(M)$ 表示 M 的长度，并用 $d(M)$ 表示 M 的偏差（见 [15, 第 633] 页）。

定理 4.2 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 3$ 的正则局部环，且 E 是一个具有秩 $e > 0$ 的有限生成无挠 R-模。设 E 是整闭的，并且 $\ell_R(R^e/E) < \infty$。如果 $\mu_R([E + \mathfrak{m}R^e]/E) \leq 2$ 或 $d(E) \leq 2$，则 *Rees*代数 $\mathcal{R}(E)$ 是 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

2. Cohen-Macaulay normal Rees algebras

维数为 d 的局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 若极大理想 $\mathfrak{m}$ 恰好可由 d 个元素生成，则称其为正则 环。在这种情况下，$\mathfrak{m}$ 的最小生成元系称为正则参数系。注意，当且仅当 $\ell_R((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) \geq d-2$ 时，一个 R-理想 I 包含长度为 $d-2$ 的正则参数系的一部分。

定理 2.1。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 2$ 的正则局部环，且 I 是一个 R 的整闭 $\mathfrak{m}$-*primary* 理想。假设 I 包含长度为 $d-2$ 的正则参数系的一部分。那么 *Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

证明。如有必要，通过忠实平坦扩张 $R \to R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$，我们可以假设剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是无限的。我们对 d 使用归纳法来证明该断言。

设 $d = 2$，并设 Q 是 I 的一个极小约化参数理想。由 [13, 命题 5.5]（另见 [9, 定理 5.1]），可得 $I^2 = QI$。于是由 [16, 推论 2.7]，伴随分次环 $\mathrm{gr}_I(R)$ 是 Cohen-Macaulay 的。因此，由 [5, 注 (3.10)],，Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 的。此外，由 [19, 附录 5，定理 $2'$]（另见 [9, 定理 3.7]），Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是正规的。

现在假设 $d \geq 3$，且该断言对 $d-1$ 成立。写作 $I = (a_1, a_2, \ldots, a_{d-2}, \ldots, a_n)$，其中 $a_1, \ldots, a_{d-2}$ 构成一个长度为 $d-2$ 的正则参数系的一部分。设 $R' = R[z_1, \ldots, z_n]$ 是一个以 z_i为不定元的多项式环。令

$$R'' = R'_{\mathfrak{m}R'}, \quad I'' = IR'', \quad \mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}R'', \quad x = \sum_{i=1}^{n} z_i a_i \in I''.$$

由于自然映射 $\mathcal{R}(I) \to R'' \otimes_R \mathcal{R}(I) \cong \mathcal{R}(I'')$ 忠实平坦，因此只需证明 $\mathcal{R}(I'')$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环。

由于 $I \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, $x \notin (\mathfrak{m}'')^2$。因此，$(R''/(x)\ \mathfrak{m}''/(x))$ 是维数为 $d-1$ 的正则局部环，而理想 $I''/(x)$ 是 $\mathfrak{m}''/(x)$- 准素的。根据 [7, 推论 2.3],

$$\overline{(I''/(x))} = \overline{I''}/(x) = I''/(x).$$

也就是说， $I''/(x)$ 是整闭的。此外，我们得到如下结论。

$$\begin{aligned}
\ell_{R''}\left(\frac{I''/(x) + (\mathfrak{m}''/(x))^2}{(\mathfrak{m}''/(x))^2}\right) &= \ell_{R''}\left(\frac{I'' + (\mathfrak{m}'')^2}{(\mathfrak{m}'')^2 + (x)}\right) \\
&= \ell_{R''}\left((I'' + (\mathfrak{m}'')^2)/(\mathfrak{m}'')^2\right) - \ell_{R''}\left(((\mathfrak{m}'')^2 + (x))/(\mathfrak{m}'')^2\right) \\
&= \ell_{R''}\left(R''/(\mathfrak{m}'')^2\right) - \ell_{R''}\left(R''/(I'' + (\mathfrak{m}'')^2)\right) - \ell_{R''}\left(((\mathfrak{m}'')^2 + (x))/(\mathfrak{m}'')^2\right) \\
&= \ell_R\left(R/\mathfrak{m}^2\right) - \ell_R\left(R/(I + \mathfrak{m}^2)\right) - 1 \\
&= \ell_R\left((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2\right) - 1 \\
&\geq d - 3
\end{aligned}$$

根据归纳假设，Rees代数 $\mathcal{R}(I''/(x))$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环。于是，根据 [5, 注记 (3.10)]，伴随分次环 $\mathrm{gr}_{I''/(x)}(R''/(x))$ 是 Cohen-Macaulay。

考 虑 $R''[t, t^{-1}]$中 I'' 的扩张Rees代数的 $\mathcal{A}$ 整闭包 :

$$\overline{\mathcal{A}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{(I'')^n} t^n.$$

根据 [7,引理1.1（c）], 元素 xt在 $\mathcal{A}/t^{-1}\mathcal{A}$上是正则的。于是等式

$$\overline{(I'')^n} :_{R''} x = \overline{(I'')^{n-1}}$$

对所有 $n \geq 1$ 都成立。此外，由于 $\mathcal{R}(I''/(x))$ 是正规的，我们有

$$\overline{(I''/(x))^n} = (I''/(x))^n.$$

因此，对所有 $n \geq 1$, $(I'')^n \subseteq (I'')^n + (x)$。现在，我们用归纳法证明，对所有 $n \geq 1$ ，$\overline{(I'')^n} = \overline{(I'')^n}$。当 $n = 1$ 时显然成立。令 $n \geq 2$ ，并假设该断言对 $n-1$ 成立。那么

$$\begin{aligned}
\overline{(I'')^n} &= \big((I'')^n + (x)\big) \cap \overline{(I'')^n} \\
&= (I'')^n + \big((x) \cap \overline{(I'')^n}\big) \\
&= (I'')^n + x\big(\overline{(I'')^n} :_{R''} x\big) \\
&= (I'')^n + x\overline{(I'')^{n-1}} \\
&= (I'')^n + x(I'')^{n-1} \\
&= (I'')^n
\end{aligned}$$

因此，Rees代数 $\mathcal{R}(I'')$ 是正规的。

由于 xt 在 $\mathcal{A}/t^{-1}\mathcal{A}$ =伴随分次环$_{I''}(R'')$ 上是正则的，因此

$$\mathrm{gr}_{I''}(R'')/(xt)\mathrm{gr}_{I''}(R'') \cong \mathrm{gr}_{I''/(x)}(R''/(x)).$$

由于伴随分次环$_{I''/(x)}$ $(R''/(x))$ 是 Cohen-Macaulay 的，所以伴随分次环$_{I''}(R'')$ 是 Cohen-Macaulay 的。因此，由 [12, 定理（5）], 可知，Rees代数 $\mathcal{R}(I'')$ 是 Cohen-Macaulay 的。□

下述定理推广了 Goto 关于完全交理想的定理（[4, 推论（1.3）]），以及 Ciuperc˘a 关于几乎完全交理想的结果（[1, 定理 1.1]¡2,节）。

定理 2.2。设（R, $\mathfrak{m}$）是一个维数为 $d \geq 3$ 的正则局部环，且 I 是 R 的一个整闭$\mathfrak{m}$-初等理想。若 $\mu_R(I) \leq d+2$，则 I 包含一组长度为 $d-2$ 的正则参数系的一部分。特别地，*Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$是一个 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

证明。如有必要扩大剩余类域 $R/\mathfrak{m}$of R ，我们可以假设 $R/\mathfrak{m}$是无限的。设 $I \subseteq \mathfrak{m}^2$。由于 I 是 $\mathfrak{m}$- 满的（[4, 定理 (2.4)]），根据 [17, 定理 3] （另见 [4, 引理 (2.2)]），我们得到如下结果。

$$d+2 \geq \mu_R(I) \geq \mu_R(\mathfrak{m}^2) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

化简不等式并利用 $d \geq 3$后，我们得到

$$0 \geq d^2 - d - 4 \geq 2.$$

这就产生了矛盾。因此， $I \not\subseteq \mathfrak{m}^2$。

现在我们对 d使用归纳法来证明该定理。令 $d = 3$。由于 $I \not\subseteq \mathfrak{m}^2$，理想 I 包含一个长度为 1 的正则参数系的一部分。

令 $d \geq 4$，并假设断言对 $d-1$成立。取满足 $x \notin \mathfrak{m}^2$的 $x \in I$。根据 [2,引理 4.2], ，我们得到

$$\overline{(I/(x))} = \overline{I}/(x) = I/(x).$$

现在， $R/(x)$ 是一个维数为 $d-1$ 的正则局部环，而理想 $I/(x)$ 是整闭的且为 $\mathfrak{m}/(x)$-primary。此外，

$$\mu_{R/(x)}(I/(x)) = \mu_R(I) - 1 \leq (d+2) - 1 = (d-1) + 2.$$

根据归纳假设， $I/(x)$ 包含一个长度为 $d-3$ 的正则参数系的一部分。等价地， $\ell_R\left((I+\mathfrak{m}^2)/(\mathfrak{m}^2+(x))\right) \geq d-3$。因此，

$$\begin{aligned}\ell_R\left((I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2\right) &= \ell_R\left((I+\mathfrak{m}^2)/(\mathfrak{m}^2+(x))\right)+\ell_R\left((\mathfrak{m}^2+(x))/\mathfrak{m}^2\right)\\ &\geq (d-3)+1=d-2,\end{aligned}$$

这证明了 I 包含一个长度为 $d-2$ 的正则参数系的一部分。 □

例2.3。 设 $R=k[\![X,Y,Z]\!]$ 是域 k 上的形式幂级数环， $\mathfrak{m}=(X,Y,Z)$ 是 R的极大理想。下列理想的 Rees代数是 Cohen-Macaulay 正规整环。

(1) 设 $I=\overline{(X^3,Y^3,Z)}=(X^3,X^2Y,XY^2,Y^3,Z)$。则 I是 R 的一个整闭 $\mathfrak{m}$-primary 理想，且 $\mu_R(I)=5$。 (2) 设 $I=(X^4,Y^4,Z)=(X^4,X^3Y,X^2Y^2,XY^3,Y^4,Z)$。则 I是 R 的一个整闭 $\mathfrak{m}$- primary 理想，且 $\mu_R(I)=6>d+2$，但 $v(R/I)=2$。(3) 设对每个 $f\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$ 和 $n\geq 1$， $I=(f)+\mathfrak{m}^n$。则 I是 R 的一个整闭 $\mathfrak{m}$-primary 理想，且 $v(R/I)\leq 2$。

推论2.4. 设 R 是维数为 d的正则环，且 I 是 R 中的整闭理想，满足 $\mathrm{ht}_R(I)=d$。若 $\mu_R(I)\leq d+2$，则 ***Rees***代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 ***Cohen-Macaulay*** 正规整环。

证明. 在 R 中对包含 I的极大理想 $\mathfrak{m}$ 作局部化后，可假设 $(R,\mathfrak{m})$ 是正则局部环，且 I 是 $\mathfrak{m}$-primary。必要时扩张 R 的剩余类域 $R/\mathfrak{m}$，还可进一步假设 $R/\mathfrak{m}$ 是无限的。当 $d\leq 1$时，根据定义该断言显然成立。当 $d=2$时，由附录 5 中的定理 $2'$] 及命题 5.5]可得该结论。当 $d\geq 3$时，该结论是定理 2.2 的推论。□

3. The case where $\mu_R(I)=d+3$ for monomial ideals I

本节将探讨一类特殊理想的正态性，即多项式环中的齐次理想。借助齐次理想固有的代数结构，我们旨在刻画它们成为正规理想的条件。众所周知，单项式理想的整闭包本身也是单项式理想。对于实数 r，我们记$\lceil r\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}\mid r\leq n\}$。

引理 3.1. 设 $R=k[X,Z]$ 是域 k 上的多项式环。设 $J=(X^2,XZ^a,Z^c)$ 是一个 R-理想，其中 $a\geq 1$ 和 $c\geq 2$ 是满足 $a\leq\left\lceil\dfrac{c}{2}\right\rceil$ 的整数。那么 J 是正规环。

证明. 只需证明 J 是整闭的（[18, 第二部分，第 12] 节）。设 $f=X^\alpha Z^\beta$ 是整闭包 J 中的一个单项式，其中 $\alpha,\beta\geq 0$。我们分情况证明 $f\in J$。

假设 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$。那么

$$f=Z^\beta\in\overline{(Z^c)}=(Z^c)\subseteq J,\quad\text{or}\quad f=X^\alpha\in\overline{(X^2)}=\left(X^2\right)\subseteq J.$$

假设 $\alpha\geq 2$。那么

$$f=X^\alpha Z^\beta=X^2\cdot X^{\alpha-2}Z^\beta\in J.$$

假设 $\alpha = 1$ 且 $\beta \geq a$。那么

$$f = XZ^{\beta} = XZ^{a} \cdot Z^{\beta - a} \in J.$$

设 $\alpha = 1$ 且 $1 \leq \beta \leq a - 1$。那么存在正整数 ρ，使得

$$\left(XZ^{\beta}\right)^{\rho} = h \cdot \left(X^{2}\right)^{n_1} \left(XZ^{a}\right)^{n_2} \left(Z^{c}\right)^{n_3},$$

其中 h 是 R中的一个单项式，而 n_1，n_2，n_3 是非负整数，使得 $n_1 + n_2 + n_3 = \rho$。因此，

$$X^{\rho} Z^{\beta\rho} = h \cdot X^{2n_1 + n_2} Z^{an_2 + cn_3}.$$

Then

$$\rho \geq 2n_1 + n_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2n_1 + n_2 \quad \Rightarrow \quad n_3 \geq n_1.$$

此外，

$$\beta\rho \geq an_2 + cn_3 \quad \Rightarrow \quad \beta(n_1 + n_2 + n_3) \geq an_2 + cn_3$$

这意味着

$$0 \geq -\beta n_1 + (a - \beta)n_2 + (c - \beta)n_3 \geq (c - 2\beta)n_1 + (a - \beta)n_2.$$

根据假设，$a - \beta > 0$。另外，由于 $a \leq \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil$，我们得到

$$\beta \leq a - 1 < \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad c - 2\beta > 0.$$

因此 $n_1 = 0 = n_2$。这意味着 $\rho = n_3$ 和 $\beta\rho \geq cn_3$。于是 $\beta \geq c$。因此

$$f = XZ^{\beta} = Z^{c} \cdot XZ^{\beta - c} \in J.$$ □

在下面的定理中，我们考虑多元多项式环中的一个非常特殊的单项式理想。尽管这一情形看起来可能相当特殊，但它是后文建立更一般结果的关键基石。详细分析这个理想，有助于我们识别其结构性质和相关技巧，而这些对于将论证推广到更广泛的齐次理想类至关重要。

定理 3.2。设 $R = k[X, Y, Z]$ 是域 k上的多项式环。设

$$I = (X^{2},\, XY,\, Y^{2},\, Z^{c},\, XZ^{a},\, YZ^{b}),$$

其中 a、b、c 是满足 $1 \leq a \leq b$ 和 $c \geq 2$的整数。假设 I 是整闭的。那么$b \leq \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil$ 且 I 是正规的。

证明。设 $d = \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil$，并假设 $b > d$。设 $f = YZ^{d}$。那么 f不可能是 YZ^{b} 的倍数。注意，

$$d < \frac{c}{2} + 1 \leq c,$$

其中，最后一个不等式由 $c \geq 2$ 得出。于是，f 也不可能是 Z^{c} 的倍数。因此，$f \notin I$。然而，由于 $c \leq 2d$，我们得到

$$Z^{2d} = Z^{c} \cdot Z^{2d - c} \in I.$$

Then

$$\left(YZ^{d}\right)^{2} - Y^{2} \cdot Z^{2d} = 0,$$

其中 $Y^2 \cdot Z^{2d} \in I^2$。因此， $f \in \overline{I}$。矛盾。

要证明 I 是正规的，根据命题 3.1]，，只需证明 I^2 是整闭的。设 $f = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ 是整闭包 I^2 中的一个单项式，其中 α， β， $\gamma \geq 0$。我们分情况证明 $f \in I^2$。

情况 *1*。 假设 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$。首先考虑 $\beta = 0$ 的情形。注意到，由于 $a \leq b$ 和 $b \leq \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil$，有 $\alpha \leq \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil$。根据引理 3.1，我们得到

$$f = X^\alpha Z^\gamma \in \overline{(X^2, XZ^a, Z^c)^2} = \left(X^2, XZ^a, Z^c\right)^2 \subseteq I^2.$$

类似地，如果 $\alpha = 0$，则 $f \in I^2$。

情况 *2*。 假设 $\alpha \geq 2$ 且 $\beta \geq 2$。于是

$$f = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = X^2 \cdot Y^2 \cdot X^{\alpha-2} Y^{\beta-2} Z^\gamma \in I^2.$$

情形 *3*. 假设 $\alpha = 1$ 且 $\beta \geq 3$。那么

$$f = XY^\beta Z^\gamma = XY \cdot Y^2 \cdot Y^{\beta-3} Z^\gamma \in I^2.$$

类似地，若 $\beta = 1$ 且 $\alpha \geq 3$，则 $f \in I^2$。

情形 *4*. 假设 $f = XYZ^\gamma$ 或 $f = XY^2Z^\gamma$ 或 $f = X^2YZ^\gamma$。设 $\varphi\colon R = k[X, Y, Z] \to S = k[t]$ 是任意的 k-代数映射，其中 $k[t]$ 是一个多项式环。由于 S 是一个主理想整环，我们得到：

$$\varphi(f) \in \varphi(\overline{I^2}) \subseteq \overline{\varphi(I^2)S} = \varphi(I^2)S.$$

注意到 $2a - 1 \leq 2b - 1 \leq c$。

情形 *4-1*. 假设 $a = b$ 且 $c \geq 2a$。设 $\varphi\colon R \to S = k[t]$ 是由 $\varphi(X) = t^a$、 $\varphi(Y) = t^a$ 和 $\varphi(Z) = t$ 给出的 k-代数映射。那么，由于 $c \geq 2a$，我们得到

$$\varphi(I)S = (t^{2a}, t^c) = (t^{2a}) \quad \text{and} \quad \varphi(I^2)S = (t^{4a}).$$

若 $f = XYZ^\gamma$，则 $\varphi(f) = t^{2a+\gamma} \in (t^{4a})$。因此， $2a + \gamma \geq 4a$，这意味着 $\gamma \geq 2a$。所以，

$$f = XYZ^\gamma = XZ^a \cdot YZ^a \cdot Z^{\gamma-2a} = XZ^a \cdot YZ^b \cdot Z^{\gamma-2a} \in I^2.$$

如果 $f = XY^2Z^\gamma$ 或 $f = X^2YZ^\gamma$，那么 $\varphi(f) = t^{3a+\gamma} \in (t^{4a})$，这意味着 $\gamma \geq a$。因此，

$$f = XY^2Z^\gamma = XZ^a \cdot Y^2 \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2 \quad \text{or} \quad f = X^2YZ^\gamma = XZ^a \cdot XY \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2.$$

情况 *4-2*. 假设 $a = b$ 和 $c = 2a - 1$。令 $\varphi\colon R \to S = k[t]$ 为由 $\varphi(X) = t^c$、 $\varphi(Y) = t^c$和 $\varphi(Z) = t^2$给出的 k-代数映射。那么，由于 $2c < c + 2a$，我们得到

$$\varphi(I)S = (t^{2c}, t^{c+2a}) = (t^{2c}) \quad \text{and} \quad \varphi(I^2)S = (t^{4c}).$$

如果 $f = XYZ^\gamma$，那么 $\varphi(f) = t^{2c+2\gamma} \in (t^{4c})$。因此， $2c + 2\gamma \geq 4c$，这意味着 $\gamma \geq c$。因此，

$$f = XYZ^\gamma = XY \cdot Z^c \cdot Z^{\gamma-c} \in I^2.$$

如果 $f = XY^2Z^\gamma$ 或 $f = X^2YZ^\gamma$，那么 $\varphi(f) = t^{3c+2\gamma} \in (t^{4c})$。因此， $3c + 2\gamma \geq 4c$，这意味着 $\gamma \geq a$。所以，

$$f = XY^2Z^\gamma = XZ^a \cdot Y^2 \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2 \quad \text{or} \quad f = X^2YZ^\gamma = XZ^a \cdot XY \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2.$$

情形 *4-3*。 设 $a < b$。如果 $f = XYZ^\gamma$，那么我们考虑由下式给出的 k-代数映射 φ：$R \to S = k[t]$ $\varphi(X) = t^q$, $\varphi(Y) = t^c$，以及 $\varphi(Z) = t^2$，其中 $q = 2(b-a) + c - 1$。则

$$\varphi(I)S = (t^{2q}, t^{q+c}, t^{2c}, t^{q+2a}, t^{c+2b}).$$

注意到 $q \geq c+1$。于是

$$2q \geq 2c+2 > 2c \quad \text{and} \quad q+c \geq 2c+1 > 2c.$$

另一方面，

$$q + 2a = 2b - 1 + c \leq 2c.$$

此外，我们有

$$c + 2b - (q+2a) = c + 2b - 2(b-a) - c + 1 - 2a = 1,$$

这表明 $q + 2a < c + 2b$。因此，

$$\varphi(I)S = (t^{q+2a}) \quad \text{and} \quad \varphi(I^2)S = (t^{2q+4a})$$

于是 $\varphi(f) = t^{q+c+2\gamma} \in (t^{2q+4a})$。因此，$q + c + 2\gamma \geq 2q + 4a$，这意味着 $\gamma \geq a + b$。所以，

$$f = XYZ^\gamma = XZ^a \cdot YZ^b \cdot Z^{\gamma-a-b} \in I^2.$$

最后，我们考虑由 $\varphi(X) = t^a$, $\varphi(Y) = t^a$，以及$\varphi(Z) = t$ 给出的 k-代数映射 φ：$R \to S = k[t]$。于是

$$\varphi(I)S = (t^{2a}, t^c, t^{a+b}).$$

注意，$2a < a + b \leq 2b - 1 \leq c$。因此，

$$\varphi(I)S = (t^{2a}), \quad \text{and} \quad \varphi(I^2)S = (t^{4a}).$$

若 $f = XY^2Z^\gamma$ 或 $f = X^2YZ^\gamma$，则 $\varphi(f) = t^{3a+\gamma} \in (t^{4a})$。因此，$\gamma \geq a$。所以，

$$f = XY^2Z^\gamma = XZ^a \cdot Y^2 \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2 \quad \text{and} \quad f = X^2YZ^\gamma = XZ^a \cdot XY \cdot Z^{\gamma-a} \in I^2. \qquad \square$$

在讨论更一般的齐次理想的正态性之前，我们先建立以下引理。它精确刻画了不含秩三二次型的齐次理想。这一刻画将成为后续分析中的关键工具，为接下来关于正态性的结果奠定基础。

引理 3.3. 设 k 为代数闭域，$R = k[X, Y, Z]$ 为 k上的多项式环，$\mathfrak{m}$ 为 R的齐次极大理想。设 I 为一个整闭的 $\mathfrak{m}$-*primary* 理想，使得$I \subseteq \mathfrak{m}^2$ 且 $\mu_R(I) = 6$。那么高度$(I_2R) \geq 2$，其中 I_2 是 I中所有二次型的集合。

证明. 假设 I_2R的高度为 $= 0$。那么，由于 R 是一个整环，$I_2R = (0)$。因此，$I \subseteq \mathfrak{m}^3$。由于 $I_\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$–full，我们得到如下结果：

$$6 \geq \mu_{R_\mathfrak{m}}(I_\mathfrak{m}) \geq \mu_{R_\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^3 R_\mathfrak{m}) = 10,$$

这与假设矛盾。

假设 I_2R 的高度为 $= 1$。则存在 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$，使得 $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ 且 $I_2R \subseteq \mathfrak{p}$。由于$R$ 是唯一分解整环，$\mathfrak{p}$ 是主理想，记作 $\mathfrak{p} = (g)$，其中 $g \in R$ 是某个非零非单位元。由于 k 是代数闭的，$g = g_1 g_2 \cdots g_t$，其中每个 g_i 都是 R 中次数为 1 的不可约多项式。

由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想，$g_t \in \mathfrak{p}$，其中某个 $t = 1, \ldots, l$。于是 $(0) \subsetneq (g_t) \subseteq \mathfrak{p}$ 且 $(g_t) \in \operatorname{Spec}(R)$。由于 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$，我们得到 $\mathfrak{p} = (g_t)$。我们用 R_2 表示 R 中所有二次型构成的集合。于是

$$I \subseteq I_2 R \cap R_2 + \mathfrak{m}^3 \subseteq \mathfrak{p} \cap R_2 + \mathfrak{m}^3 \subseteq g_t \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^3.$$

由于 $I_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$-full，我们得到如下结论：

$$6 \geq \mu_{R_{\mathfrak{m}}}(I_{\mathfrak{m}}) \geq \mu_{R_{\mathfrak{m}}}\left(\left(g_t \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^3\right) R_{\mathfrak{m}}\right) = 7,$$

这就产生了矛盾。 □

定理 3.4. 设 k 是特征为零的域，$R = k[X_1, \ldots, X_d]$ 是 k上的多项式环，I 是由 $d+3$ 个齐次多项式生成的零维 R-理想。若 I 是整闭的，则 *Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$ 是 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

证明。 我们可以假设 k 是代数闭的。此外，由于 [6, 定理 1]，只需证明 I 是正规的。我们还可以进一步假设 $d \geq 3$ 和 $\mu_R(I) = d + 3$。记 $\mathfrak{m}$为 R的齐次极大理想。若 $d \geq 4$，则利用 $I_{\mathfrak{m}}$ 的 $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$-full性质以及定理 2.2 的证明中给出的相同技巧，我们可以假设 $X_4, \ldots, X_d$是 I中长度为 $d-3$的正则参数系的一部分。于是，对于 $k[X_1, X_2, X_3]$的某个零维理想 J，可以写成 $I = (J, X_4, \ldots, X_d)$。由于 I 是整闭的（或正规的）当且仅当 J是整闭的（或正规的），我们可以假设 $I = J$ 且 $d = 3$。

设 $R = k[X, Y, Z]$, $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$，并设 $f_1, \ldots, f_6$ 是 I 的齐次极小生成集。若 $I \not\subset \mathfrak{m}^2$，则 I 含有一个长度为 1 的正则参数系中的元素。由定理 2.1，I 是正规的。因此，我们假设 $I \subseteq \mathfrak{m}^2$。

我们先处理 I_2 含有一个秩为 3 的二次型的情形。考虑纯超越域扩张 $k \subset k'' = k(T_1, \ldots, T_6)$，并设 $f = \sum_{i=1}^{6} T_i f_i$ 是环 $R'' = k''[X, Y, Z]_{(X,Y,Z)}$ 中 I 的一般元素。记 R'' 的极大理想为 $\mathfrak{m}''$。于是

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}''/(f)}(R''/(f)) = k''[X, Y, Z]/(f^*),$$

其中 f^* 是 f 的 2 次齐次分量。注意，f^* 是 I_2 的一般元素。由于 I_2 含有一个秩为 3 的二次型，因此我们可得 f^* 的秩也为 3。换言之，伴随分次环 $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}''/(f)}(R''/(f))$ 是一个孤立奇点。由于这个标准分次 k''-代数的 a 不变量为 -1，伴随分次环 $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}''/(f)}(R''/(f))$ 是一个有理奇点（见 [3, Satz 3.1]）。于是，根据 [3, Satz 3.5]，$R''/(f)$ 是一个 2 维有理奇点。另一方面，[7, 定理 2.1] 表明 $IR''/(f)$ 仍然是整闭的。由 [11, 定理 7.1]，$IR''/(f)$ 是正规的。现在，定理 2.1 的证明表明 I 是正规的。

现在假设 I_2 不包含秩为3的二次型。我们断言 I_2 包含一个秩为2的二次型。为证明这一断言，设 I_2 的每个非零元素的秩都为1。那么每个这样的元素都是某个线性形式的平方。由引理 3.3，$\operatorname{grade} I_2 R \geq 2$，这两个线性形式必定线性无关，因此它们的平方和的秩为2。这就产生了矛盾。因此，I_2 包含一个秩为2的二次型 g。经过线性变量变换

后，我们可以假设 $g = 2XY$。由于 $\operatorname{grade} I_2 R \geq 2$，存在 I_2 中的一个元素 h，使得 g 和 h 构成一个正则序列。二次型 h 可由一个矩阵表示

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & \nu \end{bmatrix}$$

其元素为 在 k 中。根据我们的假设，对于每个 $\lambda \in k$，$\operatorname{rank}(\lambda g + h) \leq 2$。等价地，

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & T+\beta & \gamma \\ T+\beta & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & \mu \end{bmatrix} = 0$$

对于变量 T。考虑该多项式中 T^2 和 T 的系数，我们得到 $\nu = 0$ 和$\epsilon\gamma = 0$。不失一般性，设 $\gamma = 0$。于是

$$0 = \det(M) = -\alpha\epsilon^2.$$

若 $\alpha = 0$，则 $h = 2\beta XY + \delta Y^2 + 2\epsilon YZ$，这与 g 和 h 构成正则序列的假设矛盾。因此，$\epsilon = 0$。换言之，$h \in k[X, Y]$。

因此，g 和 h 在 $k[X, Y]$ 中构成二次型的正则序列。因此，

$$(X, Y)^2 k[X, Y] = \overline{(g, h)k[X, Y]} \subseteq \overline{I} = I.$$

那么我们可以假设 $f_1 = X^2$、$f_2 = XY$ 和 $f_3 = Y^2$，并且 I 的其余生成元具有如下形式

$$f_4 = Z^c + l_4 Z^{c-1}, \quad f_5 = l_5 Z^a, \quad f_6 = l_6 Z^b,$$

其中 l_4、l_5、l_6 是 $k[X, Y]$、$c \geq 1$ 和 $a \leq b$ 中的线性形式。由于 $\mu_R(I) = 6$，可得 l_5 和 l_6 线性无关。因此，在 $k[X, Y]$ 中作线性变量变换后，我们得到

$$f_5 = XZ^a, \quad \text{and} \quad f_6 = YZ^b.$$

若 $a \geq c$，则

$$f_5 = XZ^{a-c} f_4 - X l_4 Z^{a-1} \in (X^2, XY, Y^2, f_4),$$

这与假设 $\mu_R(I) = 6$ 矛盾。因此，$a < c$，同理可得 $b < c$。现在，将 f_5 和 f_6 的适当倍数加到 f_4 上，可得 $f_4 = Z^c$。总之，我们已经证明

$$I = (X^2, XY, Y^2, Z^c, XZ^a, YZ^b),$$

其中 $1 \leq a \leq b \leq c - 1$。由定理 3.2，$I$ 是正规。 □

例 3.5. 令 $R = k[\![X, Y, Z]\!]$ 为域 k 上的特征零形式幂级数环。考虑 $I = (X^2,\ Y^2,\ Z^4) = (X^2,\ XY,\ Y^2,\ Z^4,\ XZ^2,\ YZ^2) \subseteq \mathfrak{m}^2$。则 I 是 R 的一个整闭 $\mathfrak{m}$-准素理想，并且 $\mu_R(I) = 6$，其中 $\mathfrak{m} = (X,\ Y,\ Z)$。定理 3.4 表明，Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。

4. Rees Algebra of Modules

设 $(R,\ \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。设 E 是一个有限生成的无挠 R-模，其秩为 $e>0$。假设对于所有满足深度条件 $\mathrm{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$ 的 $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)$，$E_{\mathfrak{p}}$ 都是自由的。则根据 $[7,\ \text{引理 } 4.1]$，，存在一个嵌入 $E\subset R^e$，使得当 $\mathrm{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$ 时，$(R^e/E)_{\mathfrak{p}}$ 是循环的。

记 $E=Ra_1+\cdots+Ra_n$，并令 $R'=R[\{z_{ij}\mid 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq e-1\}]$ 为以 z_{ij} 为不定元的多项式环。设

$$R''=R'_{\mathfrak{m}R'},\quad E''=R''\otimes_R E,\quad x_j=\sum_{i=1}^{n} z_{ij}a_i\in E'',\quad F=\sum_{j=1}^{e-1} R''x_j.$$

那么，F 是一个自由的 R''-模，其秩为 $e-1$，且 $E''/F\simeq I$，其中 I 是某个 R''-理想，满足高度$(I)>0$。这个理想 $I=I(E)$ 称为 E ([15, 的一般 ***Bourbaki*** 理想（命题 3.2，定义 3.3])。

假设 $\ell_R(R^e/E)<\infty$。那么，E 的偏差为 $d(E)=\mu_R(E)-e+1-d$。关于偏差的更一般定义，参见 $[15,$ 第 633]页。特别地，如果 $d(E)=0$ （分别为 $d(E)$=1），则称模 E 为完全交（分别称为几乎完全交）。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & E''/F\cong I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\simeq & & \downarrow i & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (R'')^{e-1} & \longrightarrow & (R'')^{e} & \longrightarrow & R'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Then $\ell_{R''}(R''/I)=\ell_{R''}((R'')^e/E'')=\ell_R(R^e/E)<\infty$。因此，$I$ 是 $\mathfrak{m}''$-primary。

注 4.1。 设 $(R,\ \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d\geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环。设 E 是一个有限生成的无挠 R-模，其秩为 $e>0$。假设对于所有 $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)$，$E_{\mathfrak{p}}$ 都是自由的，且 $\mathrm{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$，并且 $\ell_R(R^e/E)<\infty$。设 $I\simeq E''/F$ 是 E 的一般 Bourbaki 理想。则 $\mathrm{grade}(I)\geq 3$，且 $E''\simeq F\oplus I$ （参见 $[15,$ 注 3.4-(d)]的证明。）

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 2 的正则局部环。设 E 是一个有限生成的无挠R-模。若 E 是整闭的，则 Rees代数 $\mathcal{R}(E)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环（参见 $[7,$ 推论 3.8] 和 $[10,$ 定理 5.2]）。现在我们考虑维数大于 2 的正则局部环。

定理 4.2. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d\geq 3$ 的正则局部环。设 E 是一个有限生成的无挠 R-模，秩为 $e>0$。假设 E 是整闭的，且 $\ell_R(R^e/E)<\infty$。若 $\mu_R([E+\mathfrak{m}R^e]/E)\leq 2$ 或 $d(E)\leq 2$，则 ***Rees***代数 $\mathcal{R}(E)$ 是一个 ***Cohen-Macaulay*** 正规整环。

证明。 设 $I\simeq E''/F$ 是 E 的一般 Bourbaki 理想。由 $[7,$ 定理 4.4]，I 是整闭的。根据注 4.1，$E''\simeq F\oplus I$。假设 $\mu_R([E+\mathfrak{m}R^e]/E)\leq 2$。考虑如下同构:

$$[E''+\mathfrak{m}(R'')^e]/E''\simeq (F''\oplus\mathfrak{m})/(F''\oplus I)\simeq \mathfrak{m}''/I.$$

于是 $\mu_{R''}(\mathfrak{m}''/I)\leq 2$。等价地，$I$ 包含一个长度为$d-2$的正则参数系的一部分。于是，根据定理 2.1，Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。根据$[15,$ 定理 3.5]，，Rees代数 $\mathcal{R}(E)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。

假设 $d(E) \le 2$。那么

$$d(E) = \mu_R(E) - e + 1 - d = e - 1 + \mu_{R''}(I) - e + 1 - d = \mu_{R''}(I) - d \le 2.$$

由定理 2.2，Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。由 [15, 定理 3.5], ，Rees代数 $\mathcal{R}(E)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。□

例 4.3。 设 $R = k[\![X, Y, Z]\!]$ 是域 k 上的形式幂级数环。对每个 $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 和 $n \ge 1$，令 $I = (f) + \mathfrak{m}^n$。对每个 $e > 0$，令 $E = I \oplus \mathfrak{m}^{\oplus(e-1)}$。那么 E 是整闭的，$\ell_R(R^e/E) < \infty$，且 $\mu_R([E + \mathfrak{m}R^e]/E) \le 2$。因此， $\mathcal{R}(E)$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。

回忆一下，若存在一个嵌入 $E \subseteq R^e$ ，满足 $\ell_R(R^e/E) < \infty$，且 $\mu_R(E) = d + e - 1$ （或 $d(E) = 0$），则称 R-模 E 为参数模 。

推论 4.4。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \ge 2$ 的正则局部环，且 E 是一个参数模。若 E 是整闭的，则 $\mathcal{R}(E)$ 是一个 *Cohen-Macaulay* 正规整环。

References

[1] C. Ciuperc˘a, 《代数杂志》, “整闭几乎完全交理想”, 302（2006）, 720–728。[2] C. Ciuperc˘a, 《代数杂志》, “整闭包与一般元素”, 328（2011）, 122–131。[3] H. Flenner, “有理拟齐次奇点”, 《数学文献》36（1981）, 35–41。[4] S. Goto, “完全交理想的整闭性”, 《代数杂志》108（1987）, 151–160。[5] S. Goto 和 Y. Shimoda, “关于 Cohen-Macaulay 局部环的 Rees 代数”, 《交换代数》（弗吉尼亚州费尔法克斯, 1979）, 201–231, 《纯粹与应用数学讲义》, 68, Dekker, 纽约, 1982。[6] M. Hochster, “环面的不变量环、由单项式生成的 Cohen-Macaulay 环与多面体”, 《数学年刊》96（1972）, 第2期, 318–337。[7] J. Hong 和 B. Ulrich, “特化与整闭包”, 《伦敦数学学会杂志》90（2014）, 第2期, 861–878。[8] S. Huckaba 和 C. Huneke, “正则环中的正规理想”, 《纯粹与应用数学杂志》510（1999）, 63–82。[9] C. Huneke, “二维正则局部环中的完全理想”, 《交换代数》, 数学科学研究所出版物, 15（1989）, 325–338。[10] V. Kodiyalam, “二维正则局部环上的整闭模”, 《美国数学会汇刊》347（1995）, 3551–3573。[11] J. Lipman, “有理奇点及其在代数曲面与唯一分解中的应用”, 高等科学研究所数学出版物, 36（1969）, 195–279。[12] J. Lipman, “分次代数中的 Cohen-Macaulay 性”, 《数学研究快报》1（1994）, 149–157。[13] J. Lipman 和 B. Tessier, “伪有理局部环以及 Brian¸con–Skoda 关于理想整闭包的一个定理”, 《密歇根数学杂志》28（1981）, 97–116。[14] L. Reid、L. G. Roberts、M. A. Vitulli, “关于正规齐次理想的一些结果”, 《代数通讯》31（2003）, 4485–4506。[15] A. Simis、B. Ulrich 和 W. V. Vasconcelos, “模的 Rees 代数”, 《伦敦数学学会会刊》87（2003）, 第3期, 610–646。[16] P. Valabrega 和 G. Valla, “形式环与正则序列”, 《名古屋数学杂志》72（1978）, 93–101。[17] J. Watanabe, m-满理想, 《名古屋数学杂志》106（1987）, 101–111。[18] O. Zariski, “由无限邻近基点定义的多项式理想”, 《美国数学杂志》60（1938）, 第1期, 151–204。[19] O. Zariski 和 P. Samuel, 《交换代数》第二卷, Springer, 1960。

School of Political Science and Economics, Meiji University, 1-9-1 Eifuku, Suginami-ku, Tokyo168-8555, 电子邮箱地址：endo@meiji.ac.jp网址：https://www.isc.meiji.ac.jp/~endo/

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki 214-8571, Japan电子邮箱地址：shirogoto@gmail.com

Department of Mathematics, Southern Connecticut State University, 501 Crescent Street,New Haven, CT 06515-1533, USA电子邮箱地址：hongj2@southernct.edu

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907 USA电子邮箱地址：bulrich@purdue.edu