拟一致空间与拟模空间中的局部反对称连通性

Philani Rodney Majozi

数学系　　纯粹与应用分析系，西北大学，南非马希肯

arXiv:2601.16361v1 [math.GN] 22 Jan 2026

摘要

拓扑学和分析学中的方向性概念自然引出拟度量、拟一致性和模空间等非对称结构。在这些情形下，基于对称一致性的经典连通性和完备化概念往往并不适用。本文在拟一致和拟模伪度量空间的框架下研究反对称连通性 和局部反对称连通性。我们为每个拟模伪度量族关联相容的正向与反向模拓扑及拟一致性，从而得到一个典范的双拓扑结构。在此框架下，我们建立局部反对称连通性的刻画与稳定性结果，包括该性质在子空间、一致连续映射和双完备化下的不变性。我们进一步探讨这些概念与 Smyth 完备性及 Yoneda 型完备化的关系，并说明预紧性与非对称完备性结合如何在并拓扑下导出紧致性。对非对称赋范空间和模空间的应用展示了这一理论。

关键词： 非对称赋范空间、拟度量空间、拟一致空间、准模空间、反对称连通性、局部反对称连通性、Smyth 完备化、Yoneda完备化

2020年数学主题分类：主要分类 46A16、54E15，次要分类 54D05、46B20

1. 引言

分析学和拓扑中的许多概念本质上具有方向性：代价不必对称，逼近可能是单向的，而收敛则可能取决于预先指定的邻近方向。这些概念可自然地用拟度量和拟一致结构来建模；由于缺乏对称性，由此产生了两种共轭的邻近概念。这自然导出一对关联拓扑，进而形成一个双拓扑环境 [10, 12, 16, 27]。这些拓扑的并产生一个对称包络，既有助于与经典理论进行比较，也有助于区分真正具有方向性的特征与在对称化后仍然保留的特征 [14, 37]。

非对称拓扑的一个核心主题是，完备化不再由单一的普适概念所支配。除了通过上确界一致性进行双完备化之外，还会遇到基于滤子对的概念，例如 D-完备性及其变体，以及单侧

电子邮件地址：Philani.Majozi@nwu.ac.za (Philani Rodney Majozi)

由左/右 K-柯西行为和 Smyth 型完备性条件[7, 10, 16]构造的概念。与此同时，由 Lawvere 开创并在富化范畴中发展的范畴论视角提供了统一的观点：拟度量结构可视为富化范畴，而 Yoneda 型构造则给出规范的完备化过程，并与 Smyth 完备化自然相连 [15, 21, 22]。计算和定量模型也进一步提供了研究动机：形式球及相关构造以一种兼容有向语义的方式刻画完备性和紧致性[30, 31, 32]；另见 [8, 35, 36]。

迄今为止，与度量及一致性情形相比，非对称情形下的连通性概念受到的关注明显较少。特别是，Javanshir 和 Yıldız [13] 近期的研究在非对称赋范实向量空间这一有限范围内，运用由范数生成的 T_0-拟度量所诱导的路径方法和分支理论方法，探讨了反对称连通性及局部反对称连通性。尽管这种方法在非对称范数层面提供了有价值的见解，却没有从拟一致或双拓扑视角探讨连通性，也未涉及完备化理论、双完备化不变性或模结构。

本文旨在构建一个更为一般的框架，以便在其中提出并研究方向连通性和方向完备化概念，并使之能够与成熟的拟一致、双拓扑及模理论顺畅衔接。在分析方面，我们研究拟模伪度量族，借鉴经典的模空间传统及其向模度量空间[2, 28, 29]的现代拓展。在拟模伪度量方法 [26], 的基础上，我们为给定的模族赋予正向与反向模拓扑，以及由其诱导的拟一致性和由此产生的双拓扑结构。

在这种方向性框架下，我们通过双拓扑分离原理而非基于路径的构造，引入反对称连通性和局部反对称连通性的概念。这使该理论能够应用于路径不存在或不足以发挥作用的情形，并使由此得到的概念在一致连续映射和双完备化等基本运算下保持稳定。

我们的贡献主要体现在概念和结构层面。首先，我们系统地阐明了从拟模伪度量族到相容的拟一致结构和双拓扑结构的过渡，并澄清了共轭与并拓扑在模框架中的作用。其次，我们引入了适用于这一框架的方向连通性概念，并分析其基本性质，包括分支分解、局部刻画，以及在子空间和像下的稳定性。第三，我们发展了适用于拟模框架并与非对称完备化范式相契合的完备化构造；特别是，我们确定了预紧性与 Smyth 型完备性相结合可导出紧致性的条件，并将这些结果与 Yoneda 式完备化及形式球视角联系起来 [16, 21, 32]。最后，我们指出这些结构性结果如何与非对称泛函分析情形相互作用；在这些情形中，非对称范数和单侧对偶概念提供了额外的研究动机 [4, 6]。

本文结构安排如下。第 2 节汇集了后文所需的拟度量、拟一致性及相关预备知识。第 3 节引入拟模伪度量族，并阐述其诱导拓扑和拟一致性。第 4 节讨论

与模框架相关的完备化机制，重点关注 Smyth 型完备性和 Yoneda视角。第 5 节和第 6 节分别阐述方向连通性及其局部对应概念。第 7 节和第 8 节介绍泛函分析后果及说明性示例，最后在第 9 节给出总结性评述并探讨开放方向。

2. 预备知识

本节汇集全文将用到的背景材料。按照引言（第 1 节）中阐述的方向性理念，非对称的邻近概念自然会产生两个共轭拓扑，因而形成一个典范的双拓扑环境。关于拟一致结构和拟度量结构，我们主要参考[10, 12, 16]。

2.1. 拟度量空间

拟度量保留了三角不等式，但舍弃了对称性，从而刻画方向性 邻近关系。这会立即产生两种拓扑：由前向球生成的前向 拓扑 τ_d

$$B_\varepsilon^+(x) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\},$$

以及由下列对象生成的后向 拓扑 $\tau_{d^{-1}}$

$$B_\varepsilon^-(x) := \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}, \qquad \text{where } d^{-1}(x,y) := d(y,x).$$

因此，恰当的柯西行为概念会因方向而异。左 K-柯西条件刻画网／序列的前向稳定化（沿前向读取时，尾部项会一致地彼此接近），与之相关的极限概念则是前向极限。这些单边概念构成非对称完备化过程的基础，并自然地与 Smyth/Yoneda 型构造 [16, 21] 以及 Lawvere的富集范畴观点 [15, 22]相联系。

定义 2.1。 设(X,d) 是一个拟伪度量空间（特别地，当(X,τ_d) 为 T_0时，是一个拟度量空间）。网$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 在 X 中称为左 K-柯西，如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\alpha_\varepsilon \in \Lambda$，使得对所有 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_\varepsilon$，我们都有

$$d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) < \varepsilon.$$

若同一条件对指标 $m \geq n \geq n_\varepsilon$成立，则序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为左 K-柯西：

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \textit{for all } m \geq n \geq n_\varepsilon.$$

等价地，若 $\mathcal{U}_d$ 表示由 d 诱导的拟一致性（其基本邻域为 $U_\varepsilon := \{(x,y) : d(x,y) < \varepsilon\}$），则$(x_\alpha)$ 是左 K- 柯西网，当且仅当

$$\forall U \in \mathcal{U}_d \ \exists \alpha_U \ \forall \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_U : \ (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in U.$$

定义 2.2. 设(X, d) 是一个拟伪度量空间，且$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是一个左 K-柯西网。若点 $x \in X$ 满足以下条件，则称其为前向极限 于(x_α)

$$\lim_\alpha d(x_\alpha, x) = 0, \quad i.e. \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_\varepsilon\ \forall\alpha \geq \alpha_\varepsilon :\ d(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

等价地，(x_α) 在后向拓扑中收敛到 x $\tau_{d^{-1}}$ （或者用拟一致术语来说，它相对于由共轭拟一致性诱导的拓扑 $\tau(\mathcal{U}_d^{-1})$ 收敛到 x）。

定义 2.3. 拟伪度量空间(X, d) 称为前向完备的，若其中每个左K-柯西网 X 都在 X中有一个前向极限。若其中每个左 K-柯西序列 X 都在 X中有一个前向极限，则称其为序列前向完备的。

注 2.4. (i) 度量情形： 如果 d 是对称的，那么左 K-柯西与通常的柯西概念相同，而“前向极限”就是通常极限。因此，前向完备性归结为经典完备性。

(i) 双拓扑直观： 一般而言， τ_d 和 $\tau_{d^{-1}}$ 未必一致。左 K-柯西网旨在与 $\tau_{d^{-1}}$ 中的收敛（定义 *2.2*）良好地相互作用，因此单侧完备化理论确实不同于对称一致完备化 *[16]*。

(ii) 序驱动例子： 许多拟度量源自预序（例如 $d(x, y) = 0$若 $x \preceq y$ 且 $d(x, y) = 1$ 否则）。于是，左 K-柯西表示网最终与预序相容，而前向极限则是一个沿前向最终到达的点。

(iii) 富集视角： 拟度量空间可以视为一个以$(\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0, \geq)$ 为富集基的范畴，这是 ***Lawvere*** *[22]*意义下的理解。***Yoneda/Smyth*** 型完备化过程可以用富集可表性来描述，从而为定量域理论 *[15, 21]*搭建概念桥梁。

2.2. 拟一致空间

接下来，我们回顾拟一致情形，重点阐述共轭与诱导双拓扑。标准参考文献见 [10, 12, 16]。完备性术语主要采用 Doıtchinov [7], 的用法；关于旁拓扑群中完备化构造, 请参阅 [20] 。稳定性在若干拟一致构造中发挥着关键作用，参见 [17]。拟一致情形下的稠密子空间见 [18], ，而与左拟一致性相关的双完备化概念则在 [27]中占据显著地位。

定义 2.5. 设 X 为一个集合，且 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$。 X 上的一个拟一致性是 $X \times X$ 上的一个滤子 $\mathcal{U}$，满足

(i) 对每个 $U \in \mathcal{U}$，都有 $\Delta \subseteq U$，

(ii) 对于每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在 $V \in \mathcal{U}$使得 $V \circ V \subseteq U$，其中 $R \circ S = \{(x, z)$: $\exists y$，$(x, y) \in R$，$(y, z) \in S\}$。

称有序对$(X,\mathcal{U})$为拟一致空间，$\mathcal{U}$中的元素称为围邻。共轭拟一致性为

$$\mathcal{U}^{-1} := \{U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}, \qquad U^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in U\}.$$

所关联的上确界一致性是比 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}^{-1}$都更细的最粗一致性，记作

$$\mathcal{U}^{*} := \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}.$$

对于 $U \in \mathcal{U}$ 一个和 $x \in X$ 集合 $U(x)$：$= \{y \in X :\ (x,y) \in U\}$。由 $\mathcal{U}$诱导的拓扑为

$$\tau(\mathcal{U}) := \{O \subseteq X : \forall x \in O\ \exists U \in \mathcal{U}\ \textit{with}\ U(x) \subseteq O\}.$$

类似地，$\tau(\mathcal{U}^{-1})$由 $\mathcal{U}^{-1}$诱导，而$(X,\tau(\mathcal{U})\ \tau(\mathcal{U}^{-1}))$是诱导的双拓扑空间。我们也将 $\tau(\mathcal{U}^{*})$记作 $\mathcal{U}^{*}$ 的一致拓扑。

定义 2.6。设$(X,\mathcal{U})$为一个拟一致空间。

(1) 柯西滤子对与 D-完备性：$\mathcal{F}$ 上的滤子 X 若存在 X上的滤子 $\mathcal{G}$，使得对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在 $F \in \mathcal{F}$和 $G \in \mathcal{G}$满足 $G \times F \subseteq U$，则称其为 D-柯西。在这种情况下，$(\mathcal{F},\mathcal{G})$称为一个柯西滤子对。空间$(X,\mathcal{U})$若每个 D-柯西滤子都在拓扑 $\tau(\mathcal{U})$ *[7]*中收敛，则称其为 D-完备。

（***2***）双完备性：如果一致空间 $(X,\mathcal{U})$是完备的（按通常的一致性意义），则称空间 $(X,\mathcal{U})$双完备。等价地说，经过对称化一致性 $\mathcal{U}^{*}$ 后的完备性就是双完备性。

（***3***）通过伴网定义完备性：若存在网$(y_\beta)^{\beta\in B}$ 属于 X，使得对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在指标 $\alpha_U \in A$、$\beta_U \in B$ 满足以下条件，则称网$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 属于 X 是柯西网：

$$(y_\beta, x_\alpha) \in U \quad \textit{whenever}\ \alpha \geq \alpha_U,\ \beta \geq \beta_U.$$

任何这样的(y_β)都称为(x_α)的伴网。如果每个柯西网都在 $\tau(\mathcal{U})$ *[7]*中收敛，则称空间$(X,\mathcal{U})$完备（按 *Doitchinov* 的意义）。

定义 2.7。设$(X,\mathcal{U})$为一个拟一致空间。若滤子 $\mathcal{F}$ 在 X 上满足：对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得

$$A \subseteq U(B) \quad \textit{whenever}\ B \in \mathcal{F}, \qquad \textit{where}\ U(B) := \bigcup_{x\in B} U(x).$$

称空间 $(X,\mathcal{U})$为稳定的，如果其上的每个 D-柯西滤子都是稳定的。等价地，$(X,\mathcal{U})$稳定，当且仅当 $\mathcal{U}$有一个由稳定的围邻 *[17]*构成的子基。

命题 2.8. 设$(X,\mathcal{V})$是一个一致空间。若$(X,\mathcal{V})$完备且全有界，则 X 是紧的。

在拟一致情形下，相应的对称机制是：如果$(X,\mathcal{U}^{*})$是完备且全有界的，那么$(X,\mathcal{U}^{*})$作为一致空间是紧的，因此 $\tau(\mathcal{U}^{*})$是紧的*[12, 10, 16]*。

2.3. 非对称赋范空间

非对称赋范空间 是一个实向量空间 X ，配备泛函 $p : X \to [0, \infty)$，该泛函满足 $\lambda \geq 0$ 上的正齐次性和次可加性，但不要求对称性。按照 [3, 4, 6], ，可为 p定义典范拟度量

$$d_p(x, y) := p(y - x), \qquad x, y \in X,$$

它生成前向拓扑 τ_{d_p}。其共轭 $d_p(x,\ y) := d_p(y,\ x)$ 生成后向拓扑 $^{\tau}d_p$，二者共同给出自然的双拓扑 $(X,\ \tau_{d_p},\ {}^{\tau}d_p)$。对称化

$$d_p^s(x, y) := \max\{d_p(x, y), \overline{d}_p(x, y)\}$$

诱导并拓扑 $\tau_{d_p^s} = \tau_{d_p} \vee {}^{\tau}d_p$，其作用相当于对称包络 [4, 6] 上的经典拓扑。在这一背景下，完备性分化为若干彼此不同的概念（左/右 K-完备性、Smyth 完备性、双完备性等）；而在对称情形 [6] 下，这些概念则归结为通常的完备性概念。

注 2.9。 非对称赋范空间中的一项核心完备化原理，是通过对称化得到对称包络 。具体而言，若 p 是一个非对称范数，则考虑对称化规范

$$p^s := p \vee \overline{p}, \qquad equivalently \qquad d_p^s(x, y) = \max\{d_p(x, y), \overline{d}_p(x, y)\}.$$

(X, p) 的双完备化，便是对称结构 (X, p^s)（或 (X, d_p^s)）的通常完备化，可视为原方向几何*[4, 6]*的一种典范双侧完备化。这与拟一致观点相吻合：非对称距离会诱导一种拟一致性及其共轭；同时保留两个方向时，完备化最为稳定 *[16]*。

2.4. 逼近空间

逼近空间提供了一个方便的环境范畴，同时包含拓扑空间和度量空间，并使我们能够将收敛与完备化和定量信息 [23, 24]结合起来表述。

定义 2.10。 一个逼近空间 是一个二元组(X, δ)，其中 $\delta\colon X \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ 为每个点 $x \in X$ 和子集 $A \subseteq X$ 赋予一个值 $\delta(x, A)$ ，该值可解释为从 x到集合 A的距离，并满足将邻域系和距离推广而来的公理。映射 $f\colon (X, \delta_X) \to (Y, \delta_Y)$ 称为压缩映射 ，如果

$$\delta_Y\big(f(x),\ f(A)\big) \ \leq \ \delta_X(x, A) \qquad (x \in X,\ A \subseteq X),$$

因此它是逼近空间范畴中的自然态射。

3. 拟模伪度量空间

拟模伪度量空间为 Chistyakov [1, 2]所开创、并植根于 Musielak [29]经典模理论的模度量框架提供了一个自然的非对称延拓。它们在保留对位移的尺度依赖控制的同时放弃对称性，从而刻画了对称模空间中无法显现的方向性概念。这一观点与拟一致空间和双拓扑理论 [10, 16] 自然契合，并在 [26]中得到系统发展。

3.1. 非对称模族

定义 3.1。 设 X 为非空集合。一个族

$$w = \{w_\lambda : X \times X \to [0, \infty]\}_{\lambda > 0}$$

若对所有 x、y、$z \in X$ 以及所有 λ、$\mu > 0$，以下条件均成立，则称其为拟模伪度量族：

(QM1) $w_\lambda(x, x) = 0$;

(QM2)（非对称模三角不等式）

$$w_{\lambda+\mu}(x, z) \le w_\lambda(x, y) + w_\mu(y, z);$$

(QM3) 对于 每个 x、$y \in X$，映射 $\lambda \mapsto w_\lambda(x, y)$ 单调不增且右连续 $s.$

若另外 $w_\lambda(x, y) = 0 = w_\lambda(y, x)$ 蕴含 $x = y$，则 w 称为拟模度量。

条件 (QM2) 通过允许方向依赖性，推广了 Chistyakov [1]的模公理；而 (QM3) 体现了凸模及 Orlicz 型构造 [2, 29]中固有的尺度单调性。

定义 3.2. 给定拟模伪度量族 w，其共轭族 w^- 定义为

$$w^-_\lambda(x, y) := w_\lambda(y, x),$$

其对称化定义为

$$w^{\mathrm{sym}}_\lambda(x, y) := \max\{w_\lambda(x, y), w_\lambda(y, x)\}.$$

这一构造与拟一致理论 [10, 16] 中的共轭相似；用富集范畴术语[15, 22]来说，它对应于先转到对偶范畴，再进行对称化。只要对称化族 w^{sym} 满足 (QM1)-(QM3) [26]，它就是 Chistyakov 意义下的（伪）模 w 。

命题 3.3. 设 w 是定义在 X上的拟模伪度量族。定义

$$d^+_w(x, y) := \inf\{\lambda > 0 : \ w_\lambda(x, y) \le 1\}, \qquad d^-_w(x, y) := d^+_w(y, x).$$

那么，d^+_w 和d^-_w 是 X上的拟伪度量，而对称化度量

$$d^{\mathrm{sym}}_w(x, y) := \max\{d^+_w(x, y), d^-_w(x, y)\}$$

是一个伪度量。

这一 Luxemburg 型构造将 Musielak 和 Chistyakov [2, 29]的经典模到度量机制推广到非对称情形，并构成相关拟一致结构和拓扑结构 [26]的基础。

3.2. 诱导拓扑与双拓扑结构

定义 3.4。 设 X 上有一个拟模伪度量族 w 。正向模拓扑 $\tau^+(w)$ 由以下子基生成：

$$B^+(x;\lambda,\varepsilon)=\{y\in X:\, w_\lambda(x,y)<\varepsilon\},$$

而 反向模拓扑 $\tau^-(w)$ 由以下集合生成：

$$B^-(x;\lambda,\varepsilon)=\{y\in X:\, w_\lambda(y,x)<\varepsilon\},$$

其中 λ、$\varepsilon>0$。

这对 $(\tau^+(w)\ \tau^-(w))$ 在拟一致理论 [10, 16] 的意义下为 X 配备了一个典范的双拓扑结构 。这些正向与反向模拓扑推广了 Chistyakov 的模拓扑 [2] ，并且在对称情形下二者重合。

Pro命题 3.5。 设 X 上有一个拟模伪度量族 w 。那么

$$\tau(w^{\mathrm{sym}})=\tau^+(w)\vee\tau^-(w),$$

也就是说，由对称化族诱导的模拓扑等于正向与反向模拓扑的上确界。

证明。 固定 $x\in X$。根据定义，

$$w_\lambda^{\mathrm{sym}}(x,y)=\max\{w_\lambda(x,y),w_\lambda(y,x)\}.$$

因此， x 在 $\tau(w^{\mathrm{sym}})$ 中的一个基本邻域为

$$B^{\mathrm{sym}}(x;\lambda,\varepsilon)=\{y:\, w_\lambda(x,y)<\varepsilon \text{ and } w_\lambda(y,x)<\varepsilon\}=B^+(x;\lambda,\varepsilon)\cap B^-(x;\lambda,\varepsilon).$$

由于并拓扑 $\tau^+(w)\vee\tau^-(w)$ 是由 $\tau^+(w)$-开集与 $\tau^-(w)$-开集的有限交生成的，上述恒等式表明，每个基本 $\tau(w^{\mathrm{sym}})$-邻域在 $\tau^+(w)\vee\tau^-(w)$ 中都是开集。因此

$$\tau(w^{\mathrm{sym}})\subseteq\tau^+(w)\vee\tau^-(w).$$

反过来，并拓扑中的每个邻域都包含一个上述形式的集合，因此

$$\tau^+(w)\vee\tau^-(w)\subseteq\tau(w^{\mathrm{sym}}).$$

□

这体现了一般原理：非对称结构的对称化，在拓扑意义上对应于取其关联双拓扑的并 [16, 26]。

3.3. 相关拟一致性

定义 3.6. 对于 r、$\lambda > 0$，定义围邻

$$E^+_{r,\lambda} := \{(x,y) \in X \times X : w_\lambda(x,y) < r\}, \qquad E^-_{r,\lambda} := (E^+_{r,\lambda})^{-1}.$$

Let $\mathcal{U}^+(w)$ 和 $\mathcal{U}^-(w)$ 表示由这些族生成的拟一致性。

这些构造在拟一致理论中是标准的 [10, 16]，并且当这些族具有可数基时，它们与由拟伪度量 d^+_w 和 d^-_w 生成的拟一致性相一致。

命题 3.7。拟一致性 $\mathcal{U}^+(w)$ 和 $\mathcal{U}^-(w)$ 分别与 $\tau^+(w)$ 和$\tau^-(w)$ 相容。此外，对称化一致性

$$\mathcal{U}^{\mathrm{sym}}(w) = \mathcal{U}^+(w) \vee \mathcal{U}^-(w)$$

诱导出拓扑 $\tau(w^{\mathrm{sym}})$。

证明。对于 $x \in X$,

$$E^+_{r,\lambda}(x) = \{y : w_\lambda(x,y) < r\} = B^+(x;\lambda,r),$$

因此 $\tau(\mathcal{U}^+(w)) = \tau^+(w)$。类似的论证表明 $\tau(\mathcal{U}^-(w)) = \tau^-(w)$。

上确界一致性由周围 $E^+_{r,\lambda} \cap E^-_{r,\lambda}$ 生成，它们在 x 处的截面等于

$$B^+(x;\lambda,r) \cap B^-(x;\lambda,r) = \{y : \max\{w_\lambda(x,y), w_\lambda(y,x)\} < r\},$$

它们构成 $\tau(w^{\mathrm{sym}})$ 的邻域基。 □

因此，拟模伪度量空间自然地融入 Isbell 和 Fletcher-Lindgren 的经典拟一致情形 [10, 12]。

注 3.8。拟模伪度量族确定了一个以卷积量化幺半环为富集结构的范畴，其同态对象由规范 $w_\lambda(x,y)$给出。从这一视角来看，前向完备性和后向完备性分别对应于加权余极限和余极限，而对称化完备化与相关拟度量空间的 *Yoneda*完备化一致*[15, 21, 22, 26, 32]*。

4. 拟模框架中的完备化构造

4.1. Smyth 完备性与预紧性

非对称环境中的完备化本质上具有方向性。在拟模框架中，适当的单侧柯西性概念由模族所诱导的前向拟一致性决定。回顾一下，左 K-柯西网最初是在定义 2.1 中针对拟伪度量空间引入的；其拟一致性表述恰好由前向拟一致性（定义 2.5）编码，并可原样应用于定义 3.6 中的 $\mathcal{U}^+(w)$。

定义 4.1。 设(X, w)为一个拟模伪度量空间，并令 $\mathcal{U}^+(w)$表示由 w （定义 *3.6*）诱导的前向拟一致性。若网$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 属于 X ，且对于每个围邻 $U \in \mathcal{U}^+(w)$ ，都存在 $\alpha_U \in A$ 使得左 K-柯西

$$(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in U \quad whenever\ \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_U.$$

如果对指标 $m \geq n \geq n_U$ 满足相同的条件，则称一个序列为左 K-柯西。

定义 4.2。 如果每个左 K-柯西网都关于由共轭拟一致性（定义 *2.5*）诱导的拓扑 $\tau(\mathcal{U}^{-1})$ 收敛，则称拟一致空间 $(X,\mathcal{U})$ 为 Smyth 完备 。等价地，每个左 K- 柯西网都有一个极限，且该极限按照 *Doıtchinov [7]* 的意义是向后稳定的。

如果与拟模伪度量空间 (X, w) 相关联的拟一致空间 $(X,\mathcal{U}^+(w))$ *Smyth* 完备，则称该拟模伪度量空间为Smyth 完备 ； 其中 $\mathcal{U}^+(w)$ 如定义 *3.6* 所述。

以下由 Künzi 提出的紧致性原理，是一致空间经典“预紧 +完备”紧致性定理的非对称类比（参见命题 2.8），也是拟一致方法研究非对称紧致性 [10, 16] 的关键工具。

定理 4.3. 设$(X,\mathcal{U})$是一个 T_0拟一致空间。若$(X,\mathcal{U})$是预紧且 *Smyth* 完备的，则其对称化一致空间$(X,\mathcal{U}^*)$是紧的。特别地，并拓扑

$$\tau(\mathcal{U}) \vee \tau(\mathcal{U}^{-1})$$

是紧的。

*4.2. Yoneda*完备化与幂等性

范畴方法为拟度量和拟模框架中的完备化提供了互补且统一的视角。特别是，Yoneda完备化确定了一种典范的完备化过程，它与 Smyth 完备性相容，并且在富化范畴构造下保持稳定。

定义 4.4. 设(X, d) 是一个拟度量空间。Yoneda完备化 是通过 *Yoneda*嵌入将 X 嵌入正向柯西权空间而得到的；将(X, d) 视为一个按$(\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0)$ 富化的范畴（按 *Lawvere [22],*的意义），并关于诱导的 *Lawvere*度量取闭包。此构造定义了拟度量空间范畴上的一个完备化函子，由 *Künzi*和*Schellekens [21]*发展，并以富化范畴的一般理论 *[15]*为基础。

下一个结果表明，Smyth 完备性是与非对称度量结构 [16] 相容的最大稳定完备化概念。

定理 4.5。 *Smyth*可完备化拟度量空间构成了在 *Yoneda*完备化下具有幂等性的最大类。特别地，拟度量空间上的任意幂等完备化函子都分解通过 *Smyth* 完备化。

定理 4.6。 对于每个拟度量空间(X, d)，*Yoneda*完备化与 *Smyth* 完备化在等距同构意义下相同。因此，在拟度量情形下，通过 *Yoneda*嵌入实现的范畴完备化与通过 *Smyth* 完备性实现的解析完备化是一致的*[16, 21]*。

注 4.7。 *Yoneda*完备化可通过形式球构造得到一种具体实现，其中元素是满足广义距离不等式的有序对(x, r)，其中 $x \in X$ 和 $r \geq 0$。这种由 *Rutten* *[32]*, 提出的方法，为完备化提供了计算和序理论上的诠释，并与伊斯贝尔共轭自然关联。*Romaguera* 和 *Valero* *[30, 31]*进一步探讨了相关改进及其在定量模型和计算模型中的应用。从域论和局部框架的角度看，*Flagg* 和 *Sünderhauf* *[8, 9]*, 、*Sünderhauf* *[34,35]*, 以及 *Vickers* *[36]*, 研究了相关的完备化过程，揭示了非对称度量、域论与点自由拓扑之间的深刻联系。

5. 对称与反对称连通性

5.1. 双拓扑／拟一致环境中的连通性

设 (X, τ^+, τ^-) 是由拟一致或拟模结构导出的双拓扑空间，并记

$$\tau^\vee := \tau^+ \vee \tau^-$$

为拓扑的并（上确界）。在拟模框架中，如果 (X, w) 如第 3 节所述，则

$$\tau^\vee = \tau^+(w) \vee \tau^-(w) = \tau(w^{\mathrm{sym}})$$

根据命题 3.5。

定义 5.1。 称空间 X 为对称连通，如果拓扑空间$(X, \tau^\vee)$ 是连通的，也就是说，如果 X 不能表示为两个不相交的非空$\tau^\vee$-开集的并。

这是将经典的连通性概念直接应用于对称包络拓扑，并且与对称情形（均匀或度量情形）中的通常定义一致 [14, 37]。

定义 5.2。 空间 X 称为

- 前向连通 当且仅当 (X, τ^+) <style id='8}是连通的;
- 后向连通 当且仅当 (X, τ^-) 是连通的。

这些概念是非对称和拟一致情形所固有的，反映了底层结构的方向性 [10, 16, 27]。

注 5.3. 一般而言，$(X, \tau^\vee)$ 的连通性无法决定(X, τ^+) 或 (X, τ^-)的连通性，反之亦然。因此，经典连通性对拟一致空间中固有的方向性概念并不敏感。这促使人们引入明确利用双拓扑结构、而非仅由对称化得到的连通性概念 *[16]*。

5.2. 反对称连通性

我们现在引入一个能够刻画不可约方向凝聚性的连通性概念。

定义 5.4。 如果一个双拓扑空间 (X, τ^+, τ^-) 不存在满足下述条件的非空子集 A、$B \subseteq X$，则称其为反对称连通：

$$X = A \cup B,$$

其中 A τ^+-开且 B τ^--开，并且 $A \cap B = \varnothing$。

等价地，X 不能被一个前向开集和一个后向开集分离。

命题 5.5。 对于双拓扑空间 (X, τ^+, τ^-)，以下各项等价：

1. X 是反对称连通的；
2. 不存在非空集合 $A \in \tau^+$ 和 $B \in \tau^-$，使得 $A \cap B = \varnothing$ 和 $X = A \cup B$；
3. 对所有非空的 $U \in \tau^+$ 和 $V \in \tau^-$，

$$U \cap V = \varnothing \implies U \cup V \neq X.$$

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 由定义 5.4 立即可得。

(2) $\Rightarrow$(3)。令 $U \in \tau^+$ 和 $V \in \tau^-$ 为满足 $U \cap V = \varnothing$ 的非空集合。若 $U \cup V = X$，则我们有一个划分 $X = U \cup V$，其中 $U \in \tau^+$、$V \in \tau^-$ 和 $U \cap V = \varnothing$，这与 (2) 矛盾。因此，$U \cup V \neq X$。

(3) $\Rightarrow$(2)。若 (2) 不成立，则存在非空集合 $A \in \tau^+$ 和 $B \in \tau^-$，使得 $A \cap B = \varnothing$ 和 $X = A \cup B$。取 $U = A$ 和 $V = B$ 将与 (3) 矛盾。因此，(2) 成立。 □

注意，反对称连通性是一个位拓扑概念：它取决于 τ^+ 与 τ^- 之间的相互作用，而不仅仅取决于并拓扑。

5.3. 分支：对称与反对称

定义 5.6。令 $x \in X$。

- x 的对称分支是 x 在 $(X, \tau^\vee)$ 中的连通分支。
- x 的反对称分支是包含 x 的 X 的极大反对称连通子集。

定理 5.7。 如果 $\tau^+ = \tau^-$（特别是在对称或一致情形下），则对称分支与反对称分支重合。

证明。 假设 $\tau^+ = \tau^- =: \tau$。那么

$$\tau^\vee = \tau^+ \vee \tau^- = \tau.$$

在这种情况下，反对称连通性退化为通常的连通性：用一个 τ^+-开集和一个 τ^--开集对某个子集进行分离，恰好等同于用两个 τ-开集进行分离。因此，包含 x 的极大反对称连通子集与 τ 中的 x 的通常连通分支相同。 □

命题 5.8。 X 的每个 $\tau^{\vee}$-连通子集都是反对称连通的。特别是，每个对称分支都包含于反对称分支中。

证明。设 $C \subseteq X$ 是 $\tau^{\vee}$-连通的。若 C 是反对称不连通的，则存在不相交的非空集合 $A,\ B \subseteq C$，其中 $C = A \cup B$ 是相对于 C 在 τ^{+} 中开集，而 B 是相对于 C 在 τ^{-} 中开集。由于 $\tau^{+} \subseteq \tau^{\vee}$ 和 $\tau^{-} \subseteq \tau^{\vee}$，$A$ 和 B 都是子空间 C 中的 $\tau^{\vee}$-开集，这与 C 在 $\tau^{\vee}$ 中的连通性相矛盾。

□

命题 5.9。 存在一些双拓扑空间，其中反对称分支严格大于对称分支。

证明。设 $X = \{0, 1, 2\}$ 并定义

$$\tau^{+} = \{\varnothing, X\}, \qquad \tau^{-} = \{\varnothing, \{2\}, \{0, 1\}, X\}.$$

于是 $\tau^{\vee} = \tau^{+} \vee \tau^{-} = \tau^{-}$，因此（$X$，$\tau^{\vee}$）是不连通的（例如，$\{2\}$ 和 $\{0, 1\}$ 是不相交的非空 $\tau^{\vee}$-开集，其并集为 X）。因此，对称分支为 $\{2\}$ 和 $\{0, 1\}$。

另一方面，X 是反对称连通的：任意 τ^{+}-开集要么是 $\varnothing$，要么是 X，因此不存在满足 $X = A \cup B$的互不相交的非空集合 $A \in \tau^{+}$和 $B \in \tau^{-}$。因此，每个点的反对称分支都是整个空间 X。

因此，反对称分支严格大于对称分支。 □

这表明，反对称连通性能够捕捉一种方向性凝聚，而这种凝聚在并拓扑 $\tau^{\vee}$中是不可见的。

6. 局部反对称连通性

6.1. 局部定义

全文中，$(X,\ \tau^{+},\ \tau^{-})$ 是一个双拓扑空间，且

$$\tau^{\vee} = \tau^{+} \vee \tau^{-}$$

表示第 5 节中的并拓扑。反对称连通性按照定义 5.4 的含义理解。

定义 6.1。 若空间 (X, τ^{+}, τ^{-}) 满足以下条件，则称其在点 $x \in X$ 处是局部反对称连通的：对于每个 x 的 $\tau^{\vee}$-邻域 U，都包含 x 的某个 $\tau^{\vee}$-邻域 V，使得V 是反对称连通的。

定义 6.2。 若空间 X 在每一点处都是局部反对称连通的，则称其为局部反对称连通。

6.2. 刻画与判据

定理 6.3。 设$(X,\mathcal{U}^+)$是一个拟一致空间，并记作 $\tau^+ = \tau(\mathcal{U}^+)$、 $\tau^- = \tau((\mathcal{U}^+)^{-1})$以及 $\tau^\vee = \tau^+ \vee \tau^-$ （定义 *2.5*）。那么， X是局部反对称连通的，当且仅当每一点都有一个周围基，使其诱导的 $\tau^\vee$-邻域是反对称连通的。

证明。 首先假设 X 是局部反对称连通的。固定 $x \in X$，并令 U 为 x的任意一个 $\tau^\vee$-邻域。根据 $\tau^\vee$的定义，存在围邻 E， $F \in \mathcal{U}^+$，使得

$$E(x) \cap F^{-1}(x) \subseteq U.$$

由于 X 在 x处局部反对称连通，因此存在一个 $\tau^\vee$-邻域 V，它是 x的邻域，且满足

$$x \in V \subseteq E(x) \cap F^{-1}(x),$$

其中 V 是反对称连通的。再次根据 $\tau^\vee$的定义，存在围邻G， $H \in \mathcal{U}^+$，使得

$$G(x) \cap H^{-1}(x) \subseteq V.$$

那么 $G(x) \cap H^{-1}(x)$ 是 x 的一个 $\tau^\vee$-邻域，且为反对称连通。由于U 是任意的，此类邻域构成了 x 处的一个基。

反过来，假设对每个 $x \in X$，都存在一个基 $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}^+$，使得对每个$E \in \mathcal{B}_x$，集合

$$E(x) \cap E^{-1}(x)$$

是反对称连通的。令 U 为 x 的任意 $\tau^\vee$-邻域。则存在围邻 F， $G \in \mathcal{U}^+$，使得

$$F(x) \cap G^{-1}(x) \subseteq U.$$

选取 $E \in \mathcal{B}_x$，使得 $E \subseteq F \cap G$。于是

$$E(x) \cap E^{-1}(x) \subseteq F(x) \cap G^{-1}(x) \subseteq U,$$

并且根据假设， $E(x) \cap E^{-1}(x)$ 是反对称连通的。因此， X 在 x 处是局部反对称连通的。由于 x 是任意的， X 是局部反对称连通的。

□

命题 6.4。 设 (X, w) 是定义 *3.1* 意义下的拟模伪度量空间，配备定义 *3.4* 中的正向与反向模拓扑 $\tau^+(w)$ 和 $\tau^-(w)$，并记 $\tau^\vee(w) = \tau^+(w) \vee \tau^-(w)$。则，局部反对称连通性等价于存在任意小的正向与反向模球交集，且这些交集是反对称连通的。

证明。 首先假设 $(X,\ w)$ 是局部反对称连通的。固定 $x \in X$，并令U 为 x 的任意 $\tau^\vee(w)$-邻域。根据并拓扑的定义，存在 $\lambda > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$B^+(x;\lambda,\varepsilon) \cap B^-(x;\lambda,\varepsilon) \subseteq U.$$

Lo在 x 处的局部反对称连通性给出了一个 $\tau^\vee(w)$-邻域 V，其中 h

$$x \in V \subseteq B^+(x;\lambda,\varepsilon) \cap B^-(x;\lambda,\varepsilon),$$

其中 V 是反对称连通的。再次根据 $\tau^{\vee}(w)$ 的定义，存在 $\mu > 0$ 和 $\delta > 0$，使得

$$B^+(x;\mu,\delta) \cap B^-(x;\mu,\delta) \subseteq V.$$

因此，交集

$$B^+(x;\mu,\delta) \cap B^-(x;\mu,\delta)$$

是反对称连通的，并且包含于 U 中。

反过来，假设对于每个 $x \in X$ 以及 x 的每个 $w(\tau^{\vee})$-邻域 U，都存在 $\lambda > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$x \in B^+(x;\lambda,\varepsilon) \cap B^-(x;\lambda,\varepsilon) \subseteq U,$$

该交集是反对称连通的。那么，x 的每个 $\tau^{\vee}(w)$-邻域都包含一个反对称连通的 $\tau^{\vee}(w)$-邻域，因此 (X, w) 是局部反对称连通的。

□

推论 6.5. 每个局部反对称连通空间在并拓扑 $\tau^{\vee}$ 中都是局部连通的，但反之未必成立。

证明. 设 $x \in X$，并令 U 为 x 的一个 $\tau^{\vee}$-邻域。根据局部反对称连通性（定义 6.1），存在 x 的一个 $\tau^{\vee}$-邻域 V，满足 $V \subseteq U$，且 V 是反对称连通的。根据命题 5.8，每个 $\tau^{\vee}$- 连通集都是反对称连通的；因此，不能保证反对称连通性在一般情况下严格强于 $\tau^{\vee}$-连通性。尽管如此，V 尤其不会被两个 $\tau^{\vee}$-开集分离，因此 V 是 $\tau^{\vee}$-连通的。于是，X 在 $\tau^{\vee}$ 中是局部连通的。 □

6.3. 稳定性

命题 6.6. 局部反对称连通性在取 $\tau^{\vee}$-开子空间以及具有非空交集的反对称连通子空间的有限并下保持不变。

证明. 设 (X, τ^+, τ^-) 是一个双拓扑空间。

假设 X 是局部反对称连通的，且 $U \subseteq X$ 是 $\tau^{\vee}$-开的。取定 $x \in U$，并设 W是子空间 U中 x的一个 $\tau^{\vee}$-邻域。于是 $W = O \cap U$，其中 $O \subseteq X$是一个 $\tau^{\vee}$-开集。由 X 在 x 处的局部反对称连通性可知，存在一个 x的 $\tau^{\vee}$-邻域 V，使得

$$x \in V \subseteq O,$$

且 V反对称连通。于是 $V \cap U$是 U中 x的一个 $\tau^{\vee}$-邻域。若 $V \cap U$在 U中反对称不连通，则这将诱导出 V在 X中的相应反对称非连通分解，与 V的反对称连通性矛盾。因此，U 是局部反对称连通的。

现在设 A 和 B 是 X 的反对称连通子空间，且满足 $A \cap B \neq \varnothing$。如果 $A \cup B$ 不反对称连通，则存在两个不相交的非空子集 H 和 K，使得

$$A \cup B = H \cup K,$$

在子空间拓扑中分别为 H 前向开和 K 后向开。A 与 B的反对称连通性，加上 $A \cap B \neq \varnothing$，迫使二者完全包含在 H 或 K之一中，这与两个集合均非空相矛盾。因此，$A \cup B$ 是反对称连通的。

□

命题 6.7。 拟一致空间之间的一致连续映射保持局部反对称连通性。

证明。 设 $(X,\mathcal{U}_X^+)$ 和 $(Y,\mathcal{U}_Y^+)$ 是拟一致空间，且 $f\colon X\to Y$ 一致连续。记其诱导的双拓扑为

$$(\tau_X^+,\tau_X^-)=\big(\tau(\mathcal{U}_X^+),\tau((\mathcal{U}_X^+)^{-1})\big),\qquad (\tau_Y^+,\tau_Y^-)=\big(\tau(\mathcal{U}_Y^+),\tau((\mathcal{U}_Y^+)^{-1})\big),$$

并拓扑为 $\tau_X^\vee$ 和 $\tau_Y^\vee$。

假设 X 是局部反对称连通的。固定 $x\in X$，并设 W 是 $f(x)$ 的一个 $\tau_Y^\vee$-邻域。根据 $\tau_Y^\vee$ 的定义，存在周围 $V_1,V_2\in\mathcal{U}_Y^+$，使得

$$V_1(f(x))\cap V_2^{-1}(f(x))\subseteq W.$$

一致连续性给出周围 $U_1,U_2\in\mathcal{U}_X^+$，使得

$$(f\times f)(U_1)\subseteq V_1,\qquad (f\times f)(U_2)\subseteq V_2.$$

因此

$$f\big(U_1(x)\cap U_2^{-1}(x)\big)\subseteq V_1(f(x))\cap V_2^{-1}(f(x))\subseteq W.$$

由 x 处的局部反对称连通性，存在一个 x 的 $\tau_X^\vee$-邻域 N，使得

$$x\in N\subseteq U_1(x)\cap U_2^{-1}(x),$$

且 N是反对称连通的。那么 $f(N)\subseteq W$和 $f(N)$ 是反对称连通的（否则， $f(N)$ 的前向/后向分离将会拉回为 N 的前向/后向分离）。因此， Y 在$f(x)$ 处是局部反对称连通的。

□

命题 6.8. 如果$(X,\mathcal{U}^+)$ 是局部反对称连通的，那么它的双完备化也具有此性质。

证明。 设 $(X,\mathcal{U}^+)$ 表示 $(X,\mathcal{U}^+)$ 的双完备化，并设 $i\colon X\hookrightarrow X$为典范一致连续嵌入。记诱导的前向与后向拓扑为 $\widehat{\tau}^+$和 $\widehat{\tau}^-$，并且 $\widehat{\tau}^\vee=\widehat{\tau}^+\vee\widehat{\tau}^-$。

固定$\hat{x}\in X$ 并令 W 为 $\hat{x}$的一个 $\widehat{\tau}^\vee$-邻域。那么存在一些周围 $\widehat{U}_1,\widehat{U}_2\in$

$$\widehat{U}_1(\hat{x})\cap\widehat{U}_2^{-1}(\hat{x})\subseteq W.$$

选取周围 $V_1,\ V_2\in\mathcal{U}^+$ 使得

$$\widehat{V}_1\circ\widehat{V}_1\subseteq\widehat{U}_1,\qquad \widehat{V}_2\circ\widehat{V}_2\subseteq\widehat{U}_2.$$

由于 (i) 在 $(X,\ \widehat{\tau}^\vee)$ 中稠密，因此存在 $x\in X$ 使得

$$i(x)\in\widehat{V}_1(\hat{x})\cap\widehat{V}_2^{-1}(\hat{x}).$$

由 X 在 x处的局部反对称连通性，存在一个 $\tau^\vee$-邻域 N，使得 x 满足 N 是反对称连通的，并且足够小，从而

$$i(N)\subseteq\widehat{V}_1(i(x))\cap\widehat{V}_2^{-1}(i(x)).$$

于是，对于每个 $y \in i(N)$，根据复合性质，我们有 $(\hat{x}, y) \in \widehat{U}_1$ 以及 $(y, \hat{x}) \in \widehat{U}_2^{-1}$，因此

$$i(N) \subseteq \widehat{U}_1(\hat{x}) \cap \widehat{U}_2^{-1}(\hat{x}) \subseteq W.$$

由于 $i(N)$ 是反对称连通的，且 $i(N) \subseteq W$，我们得出 X 在 $\hat{x}$ 处局部反对称连通。 □

7. 泛函分析推论

本节阐述反对称连通与局部反对称连通的框架如何与泛函分析中的经典主题相互作用，尤其是在非对称赋范空间和模空间中。重点关注完备化机制、紧致性原理，以及在线性算子中保留方向拓扑而非通过对称化消除它时所呈现的行为。

7.1. 完备性机制与紧致性传递

命题 7.1. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个非对称赋范空间，并定义其对称化范数

$$\|x\|^{\vee} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}.$$

那么，$(X, \|\cdot\|)$ 的双完备化（等价地，相关拟一致性 $\mathcal{U}^+$ 的双完备化）在线性等距同构意义下与赋范空间 $(X, \|\cdot\|^{\vee})$的巴拿赫空间完备化一致。

证明。 在非对称赋范空间中，序列 (x_n) 是双完备柯西的充要条件是它关于对称化范数 $\|\cdot\|^{\vee}$ 是柯西的。事实上，

$$\|x_n - x_m\|^{\vee} = \max\{\|x_n - x_m\|, \|x_m - x_n\|\},$$

因此，在 $\|\cdot\|^{\vee}$ 中收敛等价于在非对称范数下同时满足正向与反向柯西控制。因此， X 中的双完备柯西序列类与 $\|\cdot\|^{\vee}$-柯西序列类相同。

Let $\widehat{X^{\vee}}$ 表示（X， $\|\cdot\|^{\vee}$）的巴拿赫空间完备化，它由 $\|\cdot\|^{\vee}$-柯西序列对 $\|\cdot\|^{\vee}$-零序列取商得到。典范嵌入 $\iota : X \hookrightarrow X^{\vee}$ 关于对称化范数是线性的等距映射。

非对称范数 $\|\cdot\|$ 唯一延拓为 $\widehat{X^{\vee}}$，定义为

$$\widehat{\|[x_n]\|} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

这是良定义的，因为

$$\|x_n - x_m\| \le \|x_n - x_m\|^{\vee}$$

确保对前向柯西性的控制。共轭非对称范数以类似方式扩展，因此 $\widehat{X^{\vee}}$ 继承了一种自然的非对称范数结构，其对应的对称范数恰好是 $\|\cdot\|^{\vee}$。

如果 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是任意一个双完备非对称赋范空间，且 $T: X \to Y$ 关于非对称范数是线性且连续的，那么 T 关于对称化的 $\widehat{\ }$ 范数是有界的，因此可唯一延拓为连续线性算子 $T: X^{\vee} \to Y$。这一泛性质刻画了 $X^{\vee}$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 的双完备化。 □

定理 7.2。 设 $(X,\ w)$ 是一个拟模伪度量空间，并设 $\mathcal{U}^+(w)$ 是由 w（定义 *3.6*）诱导的前向拟一致性。假设 $(X,\ \mathcal{U}^+(w))$ 是 *Smyth* 完备的（定义 *4.2*）。如果 $(X,\ \mathcal{U}^+(w))$ 是预紧的，那么并拓扑

$$\tau^{\vee}(w) = \tau^{+}(w) \vee \tau^{-}(w) = \tau(w^{\mathrm{sym}})$$

是紧的。

证明。 根据定理 4.3，若一个 T_0 拟一致空间是预紧且 Smyth 完备的，则其对称化一致空间是紧的。将此应用于 $(X,\ \mathcal{U}^+(w))$，可得

$$(X, \mathcal{U}^+(w) \vee \mathcal{U}^-(w))$$

作为一致空间是紧的。根据命题 3.7，由该对称化一致性诱导的拓扑恰好是 $\tau(w^{\mathrm{sym}})$，并且根据命题 3.5，有 $\tau(w^{\mathrm{sym}}) = \tau^{\vee}(w)$。因此，$\tau^{\vee}(w)$ 是紧的。

□

7.2. 线性算子与连通性不变性

命题 7.3。 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是非对称赋范空间，且令$T\colon\ \ X \to Y$为线性的。若 T相对于前向拓扑 τ_X^+和 τ_Y^+是连续的，则 T 相对于所诱导的拟一致性是一致连续的。

证明。 前向拓扑 τ_X^+ 是平移不变的，并由前向球生成

$$B_X^+(0,\varepsilon) = \{x \in X : \|x\|_X < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

对 τ_Y^+ 也同理。线性意味着连续性等价于在原点处连续。因此，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|x\|_X < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\|_Y < \varepsilon.$$

令$\mathcal{U}_X^+$ an d $\mathcal{U}_Y^+$表示所诱导的拟一致性。$\mathcal{U}_Y^+$的一个基本围邻是

$$U_\varepsilon^Y = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y : \|y_1 - y_2\|_Y < \varepsilon\}.$$

由线性可知,

$$(x_1, x_2) \in U_\delta^X \quad \Longrightarrow \quad (Tx_1, Tx_2) \in U_\varepsilon^Y,$$

因此，对于 $\mathcal{U}_Y^+$的每个围邻，都存在 $\mathcal{U}_X^+$的一个围邻，其在 $T \times T$下的像包含于其中。因此，T 是一致连续的。 □

定理 7.4。 设 $T : X \to Y$ 是准一致空间之间的一致连续线性算子。若 X 是局部反对称连通的，则在由 Y诱导的子空间双拓扑下，$T(X)$ 是局部反对称连通的。

证明。 根据命题 6.7，一致连续映射保持局部反对称连通性。因此，在由沿 T 传输的拟一致性所诱导的前向与后向拓扑下，$T(X)$ 是局部反对称连通的。这些拓扑与从 Y 继承的子空间前向与后向拓扑一致，因此 $T(X)$ 在子空间双拓扑下是局部反对称连通的。

□

7.3. 对偶性、分离与方向泛函

备注 7.5。 在非对称赋范空间中，对偶空间自然分解为前向连续线性泛函和后向连续线性泛函。这种方向对偶性反映了范数内在的非对称性，并导致拓扑 τ^+和 τ^-具有不同的分离与延拓概念。详情参见 *[4, 5]*。

命题 7.6。 设 X是一个非对称赋范空间， A和 $B \subset X$是互不相交的 $\tau^\vee$-闭凸集。若 A 和 B可由一个 τ^+-连续线性泛函分离，则 X 的任何反对称连通子集都不会同时与 A 和 B相交。

证明。 设 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个 τ^+-连续线性泛函，且 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足

$$f(a) \le \alpha < f(b) \qquad \text{for all } a \in A,\ b \in B.$$

Then

$$U = \{x \in X :\ f(x) < \alpha\}, \qquad V = \{x \in X :\ f(x) > \alpha\}$$

分别为 τ^+-开集和 τ^--开集，其中 $A \subseteq U$、 $B \subseteq V$和 $U \cap V = \varnothing$。

若子集 $C \subseteq X$同时与 A和 B相交，则 $C \cap U$和 $C \cap V$构成了以一个前向开集和一个后向开集对 C的分离。因此， C 不可能是反对称连通的。该结论适用于每个同时与 A 和 B相交的子集，证明完毕。 □

8. 例子与应用

8.1. 非对称赋范序列空间

例 8.1. 令 $1 \le p < \infty$，并考虑由实数序列 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成的向量空间 ℓ^p。定义非对称范数

$$\|x\|_p^+ = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^+)^p\Big)^{1/p}, \qquad x_n^+ = \max\{x_n, 0\}.$$

共轭非对称范数为

$$\|x\|_p^- = \|-x\|_p^+ = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^-)^p\Big)^{1/p}, \qquad x_n^- = \max\{-x_n, 0\},$$

并且对称化满足

$$\|x\|_p^\vee = \max\{\|x\|_p^+, \|x\|_p^-\} = \|x\|_p.$$

所诱导的前向与后向拓扑与非对称泛函分析中研究的经典上拓扑和下拓扑一致。特别地，相关的并拓扑与由 $\|\cdot\|_p^\vee$ 诱导的通常范数拓扑相符，体现了第 *2.3* 节和命题 *7.1* 所述的一般对称化原理。此外，局部反对称连通性是相对于双拓扑 (τ^+, τ^-)而言的，其含义见定义 *5.4* 和 *6.2*。此例说明，反对称连通性能够检测到在对称层面消失的真正单向特征；参见 *[4]*。

8.2. 有向图与成本模型

例 8.2. 设 $G=(V,E,w)$ 为一个有向图，其顶点集为 V，边集为 $E\subseteq V\times V$，权函数为 $w: E\to[0,\infty]$。定义

$$d(x,y)=\inf\Big\{\sum_{i=0}^{n-1} w(v_i,v_{i+1}):\ x=v_0\to v_1\to\cdots\to v_n=y\Big\},$$

其中 $d(x,y)=\infty$ 若不存在从 x 到 y的有向路径。

函数 d是一个 *Lawvere* 准度量，它诱导出第 *2.1* 节所述的前向与后向拓扑。相关的并拓扑 $\tau^{\vee}=\tau_d\vee\tau_{d^{-1}}$刻画了对称化包络（定义 *5.1*），而反对称连通性（定义 *5.4*）则表示不存在由一个前向开集和一个后向开集构成的分离。在此情形下，除非图是强连通的，否则反对称连通性通常不同于对称化度量中的连通性。此模型支撑了优化、传输和计算语义学方面的应用；参见 *[22]*。

8.3. Orlicz 型模设置

例 8.3. 设 (Ω,Σ,μ) 是一个测度空间，并设 $\Phi:\Omega\times\mathbb{R}\to[0,\infty]$ 是一个 *Musielak-Orlicz* 函数，它关于第二个变量是凸且递增的，但不一定是偶函数。定义模

$$\rho(f)=\int_{\Omega}\Phi(\omega,f(\omega))\,d\mu(\omega),$$

并设

$$w_\lambda(f,g)=\rho\!\left(\frac{g-f}{\lambda}\right),\qquad \lambda>0.$$

族 $w=(w_\lambda)_{\lambda>0}$ 按照定义 *3.1* 的意义构成一个拟模伪度量结构，并具有定义 *3.2* 中的共轭与对称化。它生成正向与反向模拓扑 $\tau^{+}(w)$ 和 $\tau^{-}(w)$（定义 *3.4*），以及相容的拟一致性 $\mathcal{U}^{+}(w)$ 和 $\mathcal{U}^{-}(w)$（定义 *3.6* 和命题 *3.7*）。局部反对称连通性反映了定义 *6.2* 意义下对模位移的单侧控制，并且通常不会在对称化下保持，除非 $\Phi(\omega,t)=\Phi(\omega,-t)$。这一例子将当前理论与模分析学和非线性函数空间联系起来；参见 *[2, 26, 29]*。

8.4. 旁拓扑群和半群

注 8.4. 旁拓扑群和半群提供了自然的代数环境，在这些环境中，左一致性与右一致性并不相同。相关的双拓扑结构刻画了代数上的不对称性，而反对称连通性则区分了代数可达性与经典拓扑连通性（定义 *5.4* 和 *5.1*）。在这一背景下，完备化与紧致性的概念，与拟一致情形中的 *Doıtchinov* 完备性、*Smyth* 完备性、稳定性和双完备化理论密切相关；参见 *[16, 17, 20]*。

9. 结论与后续方向

本文为真正的不对称环境中的连通性建立了一个框架。在拟一致和拟模伪度量空间中，我们引入了反对称连通性 和局部反对称连通性，以刻画对称化为并拓扑后无法观察到的方向性凝聚 $\tau^{\vee} = \tau^{+} \vee \tau^{-}$。我们将这些概念与对称连通性联系起来，比较了相应的分支理论，并通过例子表明，反对称分支可能严格细于经典分支。我们还根据周围和模糊球给出了实用的局部刻画，并证明了这些性质在 $\tau^{\vee}$-开子空间、交集非空的有限并、一致连续像以及双完备化下的稳定性。

仍有若干问题尚待解决。一个自然的研究方向是探讨反对称连通性在其他完备化过程中（Doıtchinov 完备化和 Smyth 完备化）如何表现，在逼近空间的框架下寻求定量改进，并通过富化方法和形式球发展范畴论及域论解释。从分析学角度看，进一步研究或可阐明局部反对称连通性在不动点理论、变分原理以及非对称赋范空间和模空间上的非线性分析中的作用。

参考文献

[1] V. V. Chistyakov，《模度量空间 I：基本概念》，《非线性分析》**72**（2010年），1–14。[2] V. V. Chistyakov，《度量模糊空间》，施普林格，查姆，2015年。[3] S. Cobzaş，非对称范数空间上的紧算子，《匈牙利数学学报》**110**（2006年），219–239。[4] S. Cobzaş，《非对称赋范空间中的泛函分析》，比克豪泽/施普林格，巴塞尔，2013年。[5] S. Cobzaş，非对称赋范空间上线性算子的Hahn–Banach型延拓结果，*arXiv*预印本 arXiv:2412.10391，2024年。[6] S. Cobzaş，拟伪度量空间中的完备性——综述，《数学》**8**（2020年），第1279号文章。[7] D. Doitchinov，拟一致空间的完备性概念，《拓扑学及其应用》**38**（1991年），205–217。[8] R. C. Flagg 和 P. Sünderhauf，《定量形式下理想完备化的本质》，《理论计算机科学》**278**（2002年），第1–2期，141–158。[9] R. C. Flagg、P. Sünderhauf 和 K. R. Wagner，《定量域论的逻辑方法》，Topology Atlas预印本第23号（1996年）。[10] P. Fletcher 和 W. F. Lindgren，《拟一致空间》，Marcel Dekker，纽约，1982年。

[11] P. Foralewski、H. Hudzik 和 P. Kolwicz，拟模空间及其在拟赋范Calderón–Lozanovskiĭ空间中的应用，arXiv预印本 arXiv:2208.08970，2022年。[12] J. R. Isbell，《一致空间》，数学调查丛书第12号，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1964年。[13]N. Javanshir 和 F. Yıldız，非对称赋范实向量空间中的局部反对称连通性，《数学与应用通用期刊》6（2023年），第3期，100–105。[14] J. L. Kelley，《一般拓扑学》，施普林格，纽约，1955年。[15] G. M. Kelly，《富化范畴理论基本概念》，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[16] H.-P. Künzi，非对称距离及其关联拓扑，载于：《一般拓扑学史手册》第3卷，克吕维尔学术出版社，2001年，第853–968页。[17] H.-P. A. Künzi 和 H. J. K. Junnila，拟一致空间中的稳定性与逆问题，《拓扑学及其应用》49（1993年），175–189。[18] H.-P. A. Künzi 和 A. Lüthy，拟一致空间的稠密子空间，《匈牙利数学科学研究》30（1995年），289–301。[19]H.-P. Künzi 和 S. Romaguera，可赋权拟一致结构与拟伪度量，《拓扑学及其应用》79（1997年），257–273。[20] H.-P. A. Künzi、S. Romaguera 和 O. V. Sipacheva，正则旁拓扑群的Doitchinov完备化，《塞尔迪卡数学杂志》24（1998年），73–88。[21] H.-P. A. Künzi 和 M. P. Schellekens，关于拟度量空间的Yoneda完备化，《理论计算机科学》278（2002年），第1期，159–194。[22] F. W. Lawvere，度量空间、广义逻辑与闭范畴，《米兰数学与物理研讨会论文集》43（1973年），135–166。[23] R. Lowen，逼近空间：Top与度量空间的共同上范畴，《数学通讯》141（1989年），183–226。[24] R. Lowen，《逼近空间：拓扑–一致性–度量三元组中缺失的一环》，牛津数学专著，牛津大学出版社，1997年。[25] R. Lowen 和 B. Windels，量化完备化，《国际数学与数学科学杂志》23（2000年），第11期，729–739。[26] P. R. Majozi，关于拟模伪度量空间与非对称一致结构，arXiv预印本 arXiv:2510.25200，2025年。

[27] J. Marín 和 S. Romaguera，《旁拓扑群左拟一致性的双完备化》，《*Arch. Math. (Basel)*》**70**(1998年), 104–110。[28] Z. Mushaandja 和 O. Olela-Otafudu，《关于模度量拓扑》，《拓扑学及其应用》**372**(2025年), 109224。[29]J. Musielak，《奥利奇空间与模空间》，《数学讲义》第1034卷，施普林格，柏林，1983年。[30] S. Romaguera、P. Tirado 和 O. Valero，完备偏度量空间具有可部分度量化的计算模型，《Internat. J. Comput. Math.》**89**(2012), 第3期，284–290。[31] S. Romaguera 和 O. Valero，通过形式球为完备偏度量空间构建定量计算模型，《Math. Structures Comput. Sci.》**19** (2009), 第3期，541–563。[32] J. J. M. Rutten，广义度量空间中的加权余极限与形式球，《拓扑学及其应用》**89**(1998年), 179–202。[33] R. A. Stoltenberg，拟一致空间的一些性质，《Proc. London Math. Soc.》**17**(1967), 226–240。[34] P. Sünderhauf，定量域理论中的张量积与幂空间，《Electron. Notes Theor. Comput. Sci.》**6**(1997年), 327–347。[35] P. Sünderhauf，作为拟度量域的赋值空间，《Electron. Notes Theor. Comput. Sci.》**13** (1998年)。[36] S. J. Vickers，拟度量空间的局部化完备化，技术报告 DoC 97/2，帝国理工学院计算系，伦敦，1997年。[37] S. Willard，《一般拓扑学》，Addison–Wesley，马萨诸塞州雷丁，1970年。