arXiv:2601.16433v1 [math.AT] 23 Jan 2026

拟射影幂零流形

TAITO SHIMOJI

摘要。设 $M = V \setminus D$ 是某个光滑射影簇 V 去掉一个具有正规交叉的除子 D 后得到的光滑拟射影簇。假设 M 与某个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$微分同胚。我们证明，若 V的第一上同调 $H^1(V)$消失，则 M 与环面 T^n上的平凡纤维丛$T^n \times \mathbb{R}^m$ 微分同胚。此外，一般而言，我们证明 M与一个以 $b_1(M)$ 维环面 $T^{b_1(M)}$为底空间的平凡纤维丛 $T^{b_1(M)} \times \mathbb{R}^m$ 微分同胚，或者与一个平凡纤维丛 $E \times \mathbb{R}^m$微分同胚，其中 E是以环面 $T^{b_1(M)}$为底空间的环面丛 $E \to T^{b_1(M)}$。反过来，我们考察非紧致幂零流形是否与光滑拟射影簇微分同胚。我们确定了维数不超过 8、且其对应的非紧致幂零流形可能与光滑拟射影簇微分同胚的李群。

1. 引言

设 $M = V \setminus D$ 是某个光滑射影簇 V（称为 M 的紧化）去掉一个具有正规交叉的除子 D 后得到的光滑拟射影簇。在 [Del71], 中，Deligne 证明了实上同调 $H^*(M)$ 的复化 $H^*(M)_{\mathbb{C}}$ 具有混合霍奇结构的双分次（$H^*(M)$ F， W）

$$H^k(M)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p,q)\in I_k} H^k_{p,q}(M)$$

使得

$$\overline{H^k_{p,q}(M)} \equiv H^k_{q,p}(M) \mod \bigoplus_{s+t<p+q} H^k_{s,t}(M)$$

对所有 $k \geq 0$ ，其中

$$I_k := \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid k \leq p+q \leq 2k\}.$$

例如， $H^1(M)_{\mathbb{C}} = H^1_{1,0}(M) \oplus H^1_{0,1}(M) \oplus H^1_{1,1}(M)$（参见定义3.1和定理 3.1）。

设 N 是一个单连通幂零李群， Γ 是 N 的一个离散子群。假设商空间 $M = \Gamma\backslash N$ 是紧的。众所周知，当且仅当 N 是阿贝尔李群时， M 才是光滑拟射影簇；此时 M 与一个环面微分同胚（参见 [BG88],[Has89] 和 [Has05]）。我们考虑商空间 $M = \Gamma\backslash N$ 不紧的情形。在这种情况下，我们称 M 为非紧致幂零流形。已知每个非紧致幂零流形 $\tilde{}$ $\tilde{}$ M 都可以写成某个（紧致）幂零流形 $\sim$ $\Gamma\backslash N$ 与整数 m 的乘积 $M = \Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$ （参见 [Mal49]）。我们考虑以下问题。

问题 1.1. 什么情况下，光滑拟射影簇与非紧致幂零流形微分同胚?

例如，考虑 $M = \Gamma\backslash H_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$，其中 $H_3(\mathbb{R})$ 是三维海森堡群，而 Γ 是 $H_3(\mathbb{R})$ 中的一个格。我们看到，M 是环面 T^2 上的主 $\mathbb{C}^*$纤维丛。为 T^2赋予复结构后，M 是一个光滑拟射影簇（参见例 3.1 和 [Mor78]）。

首先，利用光滑拟射影簇上同调的混合霍奇结构条件，我们得到如下结果。我们将光滑拟射影簇 M 的第一贝蒂数 $b_1(M)$ 定义为

$$b_1(M) := \dim\, H^1(M)$$

其中，$H^1(M)$ 是 M 的实上同调。注意，$b_1(M) = b_1(\Gamma\backslash N)$。

定理 1.1（定理 4.1）。设 $M = V \setminus D$ 是一个光滑拟射影簇。假设 M 与一个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$微分同胚。若对于 M的紧化 V，有 $H^1(V) = \{0\}$，则 M与环面 T^n上的平凡丛 $T^n \times \mathbb{R}^m$ 微分同胚，其中 $n =$维数 N。特别地，M与 $T^{b_1(M)} \times \mathbb{R}^m$ 在b_1（M）维环面上的平凡丛微分同胚。

一般而言，我们证明如下结果。证明与上述结果采用相同的论证。

定理 1.2 (定理 4.2)。设 M 是一个光滑拟射影簇。假设 M 与一个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$微分同胚。那么 M 与一个平凡丛 $T^{b_1(M)} \times \mathbb{R}^m$ 微分同胚，其底空间是一个 $b_1(M)$ 维环面 $T^{b_1(M)}$；或者与一个平凡丛 $E \times \mathbb{R}^m$ 微分同胚，其中 E 是一个以环面 $T^{b_1(M)}$为底空间的环面丛 $E \to T^{b_1(M)}$。特别地，基本群$\pi_1(M, x)$ 是无挠幂零群，且幂零类至多为二。

上述结果的证明由以下推论得出。利用 Nomizu [Nom54], 、Deligne [Del71] 和 Morgan [Mor78]的结果，可以证明以下推论。

推论 1.1 (推论 3.1)。设 M 是一个光滑拟射影簇。假设 M 与一个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$微分同胚。设 $\mathfrak{n}$ 是 N的李代数。那么，$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 具有混合霍奇结构的双分次 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,\, q\le 0,\ p+q\le -1} \mathfrak{n}_{p,\, q}$，使得对于诱导的双分次 $H^*(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p,\, q} H^*_{p,\, q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$，以下条件成立：

- $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \displaystyle\bigoplus_{(p,q)\in I_j} H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$
- $\overline{H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})} \equiv H^j_{q,p}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \mod \displaystyle\bigoplus_{s+t<p+q} H^j_{s,t}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$

对于所有 $0 \le j \le$维数 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$，其中 I_j 由下式给出

$$I_j := \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid j \le p + q \le 2j, 0 \le p, q \le j\}.$$

反过来，我们考察非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$ 是否与某个光滑拟射影簇微分同胚。根据定理 1.2（定理 4.1）的证明，我们给出非紧致幂零流形不与光滑拟射影簇微分同胚的一个充分条件。

推论 1.2 (推论 4.1)。 设 N 是一个单连通幂零李群。假设 N 的李代数 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ 是 $(3 \leq)t$ 步幂零，或者是 2 步幂零且不同构于某个 2 步幂零李代数 $\tilde{\mathfrak{n}}$ 与阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^n$ 的 $\tilde{\mathfrak{n}} \oplus \mathbb{R}^n$，使得

$$\dim\ H^1(\mathfrak{n}) \notin 2\mathbb{Z}.$$

那么，对于任意格 Γ *in* N和整数$m > 0$, $M = \Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$ 都不是光滑拟射影簇。

此外，在推论 5.1 和定理 5.1 中，我们确定了这样一些幂零李群：相应的非紧致幂零流形可能与光滑拟射影簇微分同胚。我们使用推论 1.2 以及维数不超过 8 的二步幂零李代数分类，见 [Gon98]和 [YD13]（或 [RZ11]）。

1.1. 与我们先前工作的比较。（第 6 节）在 [Shi25], 中，我们借助 [Mor78, 定理 (9.4)] 中 Morgan 的结果，探讨能否证明光滑拟射影簇的无挠幂零基本群是阿贝尔的或二步幂零的。我们证明，秩不超过 7 的光滑拟射影簇的基本群的幂零类至多为 2（见 [Shi25, 定理 1.2]）。此外，我们确定了维数不超过 7 且其格可能与光滑拟射影簇的基本群同构的李群（见 [Shi25, 定理 1.3 和 1.4]）。然而，从秩 8 起，我们无法确定光滑拟射影簇基本群的幂零类。本文聚焦于光滑拟射影簇与非紧致幂零流形交集这一类对象。在这一情形下，我们能够证明任意维数下基本群幂零类所受的限制。

1.2.致谢。作者感谢其导师、名古屋大学的 Hisashi Kasuya 教授建议作者考虑问题 1.1。本研究得到 JSTSPRING 资助，项目编号为 JPMJSP2138。

2. 幂零流形的上同调

本节首先回顾微分分次代数（DGA）和极小模型的定义。域 $\mathbb{K}$ 上的分次代数 $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ 若其特征为零，则称为分次交换，如果

$$xy = (-1)^{ij} yx \text{ for all } i \in A^i, y \in A^j.$$

A 上的微分是一个线性映射 $d; A \to A$，满足 $d \circ d = 0$，且对所有 $i \geq 0$，有 $d(A^i) \subset A^{i+1}$。$\mathbb{K}$-DGA $(A,\ d)$是由特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上的分次交换分次代数 A 和 A 上的微分 d 组成的一对，并满足以下条件：

- A 的 $\mathbb{K}$-代数结构由 $\mathbb{R} \hookrightarrow A^0$给出。
- 莱布尼茨法则成立：对于所有 $a \in A^i,\ b \in A^j$，都有 $d(ab) = d(a)b + (-1)^i ad(b$。

i 阶上同调由微分分次代数 (A, d) 给出

$$H^i(A, d) := \frac{\text{Ker } (d : A^i \to A^{i+1})}{\text{Im } (d : A^{i-1} \to A^i)}.$$

设 (A, d_A) 和 (B, d_B) 是 $\mathbb{K}$-微分分次代数。若一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $f\colon A \to B$ 满足：对于所有 $i \geq 0$ 和 $d_B \circ f = f \circ d_A$，均有 $f(A^i) \subset B^i$，则称其为$\mathbb{K}$-微分分次代数的态射。若一个 $\mathbb{K}$-微分分次代数的态射 $f\colon A \to B$ 所诱导的映射 $f^*\colon H^*(A, d_a) \to H^*(B, d_B)$ 是同构，则称该态射为拟同构。

定义 2.1 ([Boc16])**.** 设 $V = \bigoplus_{i\geq 1} V^i$ 是一个分次向量空间，且 V 由某个良序集 I 对应的一组元素 $\{a_k \mid k \in I\}$ 张成。假设 $k < l$ 蕴含 $|a_k| \leq |a_l|$，其中 $|a| := i$ 对 $a \in V^i$ 成立。若以下条件成立，则 $\mathbb{K}$-微分分次代数 $(\bigwedge V, d)$ 是 $\mathbb{K}$-微分分次代数 (A, d_A) 的一个极小模型：

- $d(a_k) \in \bigwedge$ 对所有 $k \in I$，均有张成关系 $\{a_l \mid l < k\}$。
- 存在一个拟同构 $f\colon \bigwedge V \to A$。

2.1. **Nomizu 定理**。设 N 是一个单连通幂零李群，Γ 是 N 中的一个格（离散余紧子群）。齐性空间 $M = \Gamma\backslash N$ 称为幂零流形。Nomizu 给出了以下结果。

定理 2.1 ([Nom54])。设 $M = \Gamma\backslash N$ 是一个幂零流形。设 $\mathfrak{n}$ 是 N 的李代数。那么自然包含 $(\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}^*, d) \hookrightarrow (A^*(M)\ d)$ 诱导出一个同构

$$H^*(\mathfrak{n}) \cong H^*_{\mathrm{dR}}(M)$$

其中 $A^*(M)$ 由左不变形式组成。特别地，$(\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}^*, d)$ 是 $(A^*(M)\ d)$ 的一个极小模型，符合 *Sullivan* 的定义（参见 *[Sul77]*）。

因此，我们可以通过李代数上同调计算幂零流形的德拉姆上同调 .

注 2.1 ([Mal49],[Rag72])。设 N 是一个单连通幂零李群，$\mathfrak{n}$ 是 N 的李代数。假设 维数 $N = n$。那么 N 存在格，当且仅当存在一组基 $X_1, \ldots, X_n$，使得结构常数 $\{C_{ij}^k\}$ 满足

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k$$

都属于 $\mathbb{Q}$。

例 2.1. 令 $H_3(\mathbb{R})$ 为 3 维海森堡群。我们看到，李代数 $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R}) = \langle X_1, Y_1, Z\rangle$ 存在一组基，使得

$$[X_1, Y_1] = Z, [X_1, Z] = 0 = [Y_1, Z].$$

由于结构常数都属于 $\mathbb{Q}$，李群 $H_3(\mathbb{R})$ 存在一个格。例如，$H_3(\mathbb{Z})$ 是 $H_3(\mathbb{R})$ 中的一个格。

设 N 为单连通幂零李群，Γ 为 N 中的一个格。齐性空间 $M = \Gamma\backslash N$ 称为幂零流形。

例 2.2. 设 $M = H_3(\mathbb{Z})\backslash H_3(\mathbb{R})$ 是一个幂零流形，其中 $H_3(\mathbb{R})$ 是 3 维海森堡群。设 X_1、Y_1 和 Z 是 $H_3(\mathbb{R})$ 的一个基，如注 *2.1* 所述。那么其上同调为

$\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$由下式给出

$$\begin{aligned}
H^0_{\mathrm{dR}}(M) &\cong H^0(\mathfrak{n}) = \mathbb{R},\\
H^1_{\mathrm{dR}}(M) &\cong H^1(\mathfrak{n}) = \langle [x_1], [y_1]\rangle,\\
H^2_{\mathrm{dR}}(M) &\cong H^2(\mathfrak{n}) = \langle [x_1 \wedge z], [y_1 \wedge z]\rangle,\\
H^3_{\mathrm{dR}}(M) &\cong H^3(\mathfrak{n}) = \langle [x_1 \wedge y_1 \wedge z]\rangle,\\
H^j_{\mathrm{dR}}(M) &\cong H^j(\mathfrak{n}) = \{0\} \ \textit{for all } j > 3
\end{aligned}$$

其中 x_1、y_1 和 z 是 X_1、Y_1 和 Z 的对偶基。

3. Deligne's Mixed Hodge structures

定义3.1 ([Del71],[Mor78],[PS08])。 对于一个 $\mathbb{R}$-向量空间 V， $\mathbb{R}$-混合霍奇结构(V, W, F) 定义为以下数据:

- $W = \{W_k(V)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 V 上的有限递增滤过。
- $F = \{F^p(V_{\mathbb{C}})\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 是复化 $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ 的有限递减滤过，并在 V 上定义霍奇结构

$$Gr^W_k(V_{\mathbb{C}}) := \frac{W_k(V)\otimes\mathbb{C}}{W_{k-1}(V)\otimes\mathbb{C}}$$

权为 k，对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立。递减滤过由下式给出

$$F^p(Gr^W_k(V_{\mathbb{C}})) = \frac{F^p(V_{\mathbb{C}}) \cap (W_k \otimes \mathbb{C})}{W_{k-1}\otimes\mathbb{C}}.$$

即，存在一个双分次 $Gr^W_k(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_{p,q}$，使得

$$\overline{\mathcal{H}_{p,q}} = \mathcal{H}_{q,p} \quad \textit{for all } p, q \in \mathbb{Z} \textit{ with } p + q = k.$$

设 (V, W, F) 是一个混合霍奇结构。定义 $V_{\mathbb{C}}$ 的子空间 $V_{p,q}$ 为

$$V_{p,q} := F^p(V_{\mathbb{C}}) \cap W_{p+q}(V_{\mathbb{C}}) \cap \left(\overline{F^q(V_{\mathbb{C}})} \cap W_{p+q}(V_{\mathbb{C}}) + \sum_{i\geq 2} \overline{F^{q-i+1}(V_{\mathbb{C}})} \cap W_{p+q-i}(V_{\mathbb{C}}) \right)$$

其中 $W_k(V_{\mathbb{C}}) := W_k \otimes \mathbb{C}$，我们得到双分次

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q} V_{p,q}$$

使得

$$\overline{V_{p,q}} \equiv V_{q,p} \mod \bigoplus_{s+t<p+q} V_{s,t},$$

$$W_k(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q\leq k} V_{p,q},$$

and

$$F^p(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{s\geq p, t\in\mathbb{Z}} V_{s,t}.$$

在 [Del71], Deligne 中证明了以下定理。

定理 3.1 ([Del71])。设 M 是一个代数簇。对于所有 $1 \leq j \leq$ 维数 M，上同调 $H^j(M)$ 都具有混合霍奇结构 $(H^j(M)\ F, W)$，使得诱导的双分次$H^j(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} H^j_{p,q}(M)$ 由下式给出

$$H^j(M)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p,q)\in I_j} H^j_{p,q}(M)$$

其中 I_j 由下式给出

$$I_j := \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid j \leq p+q \leq 2j, 0 \leq p,q \leq j\}.$$

在 [Mor78], 中，Morgan 证明了以下结果。该结果对光滑拟射影簇的基本群施加了限制。

定理 *3.2*（[*Mor*78],定理 *(8.6)*）。设 M 是一个光滑拟射影簇。设 *(A, d)* 是一个 $\mathbb{R}$-微分分次代数。若 *(A, d)* 是复形 *($A^\bullet(M)$ d)* 的极小模型，则其复化$A_{\mathbb{C}}$ 具有混合霍奇结构的双分次 $A_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q,p+q\geq 0} A_{p,q}$，使得诱导的双分次 $H^*(A_{\mathbb{C}}, d) = \bigoplus_{p,q,p+q\geq 0} H^*_{p,q}(A_{\mathbb{C}})$ 与 $H^*(M)$ 上 *Deligne* 的混合霍奇结构的双分次相容。

结合 Nomizu（定理 2.1）、Morgan（定理 3.2）和 Deligne（定理 3.1）的结果，我们得到以下推论。

推论 3.1. 设 M 是一个光滑拟射影簇。假设 M 与一个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$微分同胚。设 $\mathfrak{n}$ 是 N的李代数。则 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 具有混合霍奇结构的双分次 $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,\ q\leq 0,\ p+q\leq -1} \mathfrak{n}_{p,\ q}$，使得对于诱导的双分次 $H^*(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p,\ q} H^*_{p,\ q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$，以下条件成立：

- $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{(p,q)\in I_j} H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$
- $\overline{H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})} \equiv H^j_{q,p}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \mod \bigoplus_{s+t<p+q} H^j_{s,t}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$

对于所有 $0 \leq j \leq$ 维数 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$，其中 I_j 由下式给出

$$I_j := \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid j \leq p+q \leq 2j, 0 \leq p,q \leq j\}.$$

因此，我们得到如下结论。

推论 3.2. 设 N 是一个单连通幂零实李群。如果李代数 $\mathfrak{n}$ 的复化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 不具有推论 *3.1* 中的双分次，那么对于 N 中的任意格 Γ 及整数 $m > 0$，非紧致幂零流形 $M := \Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$ 都不是光滑拟射影簇。

例 3.1. 设 $\mathfrak{n} = \langle X_1, ..., X_n\rangle$ 为李代数，满足 $[X_1, X_i] = X_{i+1}$ 当 $2 \leq i \leq n-1$ 时成立，而对于其他 $i < j$，$[X_i, X_j] = 0$ 成立。设 N 为一个李代数同构于 $\mathfrak{n}$的单连通幂零李群。对于 N 中的任意格 Γ，根据 *[Shi25, Corollary3.1]*, ，我们可知$M := \Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^m$ 是光滑拟射影簇，当且仅当存在某个 $m > 0$ 使得 $n = 2,3$。拟射影簇结构由下式给出

$$M = \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2m}$$

and

$$M = \Gamma\backslash N \times \mathbb{R}^{2m+1} = (\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2m}$$

其中 $\Gamma\backslash N \times \mathbb{R}$ 是环面 T^2上的主 $\mathbb{C}^*$-纤维丛。

例 3.2. 令 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$。我们定义 $\mathfrak{n}_{-1,\ -1} : = \mathbb{C}^n$。于是有 $H^p(\mathbb{C}^n) = H^{p,\ p}_p(\mathbb{C}^n)$因此，根据推论 *3.1*， $\mathbb{C}^n$ 具有一个双分次。

例 *3.3.* 令 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{2k+1}(\mathbb{C})$，其中 $k \geq 1$。令 $X_1, \ldots, X_k, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_k}, Z$ 为 $\overline{\mathfrak{n}_{2k+1}}(\mathbb{C})$ 的一组基，使得对于 $1 \leq i \leq k$， $[X_i, \overline{X_i}] = Z$。我们定义 $\mathfrak{n}_{-1,0} := \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$, $\mathfrak{n}_{0,-1} := \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$ 以及 $\mathfrak{n}_{-1,-1} := \langle Z\rangle$。于是，该双分次满足推论 *3.1* 中的条件。例如，我们考虑 $\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})$ 上的一个双分次。 $\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})$ 的上同调上的双分次为

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) &= \langle [x_1]\rangle_{1,0} \oplus \langle [y_1]\rangle_{0,1}, \\ H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) &= \langle [x_1 \wedge z]\rangle_{2,1} \oplus \langle [y_1 \wedge z]\rangle_{1,2}, \\ H^3(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) &= \langle [x_1 \wedge y_1 \wedge z]\rangle_{2,2}. \end{aligned}$$

此外，我们看到，如上所述的 $\mathfrak{n}_{2k+1}(\mathbb{C})$ 上的双分次对于其他 k 满足推论 *3.1* 中的条件。

例 3.4. 设 $\mathfrak{n}_7^{142}$和 $\mathfrak{n}_7^{143}$是由以下给出的李代数:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_7^{142} &= \langle X_1, \ldots, X_7\rangle : [X_1, X_i] = X_{i-1} \text{ for } i=3,5,7\ , [X_3, X_5] = X_4, [X_5, X_7] = X_2, \\ \mathfrak{n}_7^{143} &= \langle X_1, \ldots, X_7\rangle : [X_1, X_i] = X_{i-1} \text{ for } i=3,5,7\ , [X_3, X_5] = X_6, [X_5, X_7] = X_2. \end{aligned}$$

根据七维幂零李代数的分类 *[Gon98]*, ，我们有同构$\mathfrak{n}_7^{142} \cong (37D)$ 和 $\mathfrak{n}_7^{143} \cong (37B)$ ，其中 $(37D)$ 和 $(37B)$ 由以下给出:

$$\begin{aligned} (37D) &= \langle e_1, \ldots, e_7\rangle : [e_1, e_2] = e_5 = [e_3, e_4], [e_1, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, \\ (37B) &= \langle e_1, \ldots, e_7\rangle : [e_1, e_2] = e_5, [e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = e_7 \end{aligned}$$

其中基变换由以下给出:

$$\begin{aligned} &(37D) : e_1 := -X_7 + i(X_1 - X_3), e_2 := X_3 - iX_5, e_3 := \overline{e_1}, e_4 := \overline{e_2}, e_5 := -2iX_6, e_6 := 2iX_2, e_7 := 2iX_4, \\ &(37B) : e_1 := X_3 + iX_7, e_2 := X_1 - iX_5, e_3 := \overline{e_2}, e_4 := \overline{e_1}, e_5 := -2(X_2 + iX_6), e_6 := 2(X_2 - iX_6), e_7 := 2iX_4. \end{aligned}$$

通过与例 *3.2* 和例 *3.4* 中相同的论证，我们看到李代数 $(37D)$和 $(37B)$ 满足推论 *3.1* 中的条件。
可以在 $(37D)$ 和 $(37B)$上定义双分次如下:

$$\begin{aligned} (37D) &= \langle e_1, e_2\rangle_{-1,0} \oplus \langle e_3, e_4\rangle_{0,-1} \oplus \langle e_5, e_6, e_7\rangle_{-1,-1}, \\ (37B) &= \langle e_1, e_3\rangle_{-1,0} \oplus \langle e_2, e_4\rangle_{0,-1} \oplus \langle e_5, e_6, e_7\rangle_{-1,-1}. \end{aligned}$$

4. 主要结果

在本节中，我们考虑以下问题。

问题 4.1。 光滑拟射影簇何时与一个非紧致的幂零流形微分同胚?

我们首先考虑 M 的第一上同调仅反映除子信息的情形。

定理 4.1. 设 $M = V \setminus D$ 是一个光滑拟射影簇。假设 M 与一个非紧致幂零流形 $\Gamma\backslash N\times\mathbb{R}^m$ 微分同胚。若对于 M的紧化V，有 $H^1(V) = \{0\}$，则 M与环面 T^n上的平凡丛 $T^n\times\mathbb{R}^m$微分同胚，其中 $n=$维数 N。特别地， M与一个 $b_1(M)$维环面上的平凡丛 $T^{b_1(M)}\times\mathbb{R}^m$微分同胚。

证明。 设 $\mathfrak{n}$ 是 N的李代数。由同构

$$H^1(M)_{\mathbb{C}} = H^1_{1,1}(M) \cong H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

以及推论 3.1，我们在 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$上得到一个双分次

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{-1,-1} \oplus \mathfrak{n}_{-i_1,-i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-i_k,-i_k}$$

以及诱导的双分次

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^1_{1,1}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{n}^*_{-1,-1},$$
$$H^p(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^p_{p,p}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

对于所有 $p \geq 2$均成立。设 $x^j_1, \ldots, x^j_{m_j}$是 $\mathfrak{n}^*_{-i_j,-i_j}$的一组基，其中 m_j =维数 $\mathfrak{n}^*_{-i_j,-i_j}$且 $\mathfrak{n}^*_{-i_0,-i_0} := \mathfrak{n}^*_{-1,-1}$。由于 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 是一个幂零李代数，上同调类

$$[x^1_1 \wedge \cdots \wedge x^1_{m_1} \wedge \cdots \wedge x^k_{m_k}]$$

在 $H^{\dim\ \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}_{n\ n\ \ \ \

证明。设 $\mathfrak{n}$ 是 N的李代数。根据推论 3.1，存在一个双分次 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q\leq -1, p,q\leq 0} \mathfrak{n}_{p,q}$，使得对于诱导的双分次 $H^*(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q\geq 1, p,q\geq 1} H^*_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$，有

$$H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{(p,q)\in I_j} H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}),$$

$$\overline{H^j_{p,q}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})} \equiv H^j_{q,p}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \mod \bigoplus_{s+t<p+q} H^j_{s,t}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

对所有 $j \geq 1$，其中 I_j 如推论 3.1 所述。由于 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 是幂零李代数，因此存在一个 $(\dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$-形式 ω，使得

$$0 \neq [\omega] \in H^{\dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}_{s,t}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}).$$

由于

$$s = \sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} (-p)\dim \mathfrak{n}_{p,q} \leq \dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} \dim \mathfrak{n}_{p,q}$$

and

$$t = \sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} (-q)\dim \mathfrak{n}_{p,q} \leq \dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} \dim \mathfrak{n}_{p,q},$$

我们有

$$\sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} (-p-1)\dim \mathfrak{n}_{p,q} \leq 0$$

and

$$\sum_{\mathfrak{n}_{p,q}\neq\{0\}} (-q-1)\dim \mathfrak{n}_{p,q} \leq 0.$$

因此 $\mathfrak{n}_{p,\ q} = \{0\}$，若 $(p,\ q) \neq (-1,\ 0), (0,\ -1)$ 且 $(-1,\ -1)$。因此 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 是阿贝尔或二步幂零的。由于 N 的李代数 $\mathfrak{n}$ 是二步幂零或阿贝尔的，幂零流形 $\Gamma\backslash N$微分同胚于环面 $T^{b_1(M)}$，或是一个纤维丛 $E \to T^{b_1(M)}$，其底空间为环面 $T^{b_1(M)}$（[PS61]）。因此定理 4.2 成立。□

因此，只需研究一个二步幂零李代数 $\mathfrak{n}$，使其复化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$具有一个双分次 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{-1,\ 0} \oplus \mathfrak{n}_{0,\ -1} \oplus \mathfrak{n}_{-1,\ -1}$，使得

$$C^1\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{-1,-1}$$

and

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^1_{1,0}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \oplus H^1_{0,1}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \text{ with } \overline{H^1_{1,0}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})} = H^1_{0,1}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}).$$

因此，我们得到以下推论。

推论 4.1. 设 N 是一个单连通幂零李群。假设 N 的李代数$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ 是$(3 \leq) t$步幂零的，或者是2步幂零且不同构于某个2步幂零李代数 $\tilde{\mathfrak{n}}$与阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^n$ 的直和，其中

$$\dim H^1(\mathfrak{n}) \notin 2\mathbb{Z}.$$

那么，对于 N 中的任意格 Γ 和整数$m>0$， $M=\Gamma\backslash N\times\mathbb{R}^m$ 都不是光滑拟射影簇。

5. dim $N\leq 8$ 的情形

在本节中，我们考察一个非紧致幂零流形是否微分同胚于某个光滑拟射影簇。首先，结合 [Shi25、定理 1.3、定理1.4] 和推论 4.1 的结果，我们可以很容易地确定维数不超过 7 的李代数，使得相应的非紧致幂零流形可能微分同胚于光滑拟射影簇。此外，满足推论 3.1 中条件的双分次见例 3.2、例 3.3 和例 3.4。

推论 5.1。 设 $M=\Gamma\backslash N\times\mathbb{R}^m$ 是一个非紧致幂零流形。假设 M 微分同胚于某个光滑拟射影簇。若 维数 $N\leq 7$，则李代数 $\mathfrak{n}$的复化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 同构于以下代数之一：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C} && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=1\\
&\mathbb{C}^2 \text{ or } \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=2\\
&\mathbb{C}^3 \text{ or } \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C} && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=3\\
&\mathbb{C}^4, \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^2, \mathfrak{n}_5(\mathbb{C}), \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}), \mathfrak{n}_7^{142} \text{ or } \mathfrak{n}_7^{143} && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=4\\
&\mathbb{C}^5, \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}, \mathfrak{n}_5(\mathbb{C}) \text{ or } \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^3 && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=5\\
&\mathbb{C}^6, \mathfrak{n}_3(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^4, \mathfrak{n}_5(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^2 \text{ or } \mathfrak{n}_7(\mathbb{C}) && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=6\\
&\mathbb{C}^7 && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=7
\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{n}_7^{142}$和 $\mathfrak{n}_7^{143}$由下式给出

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_7^{142}=\langle X_1,\dots,X_7\rangle :&[X_1,X_i]=X_{i-1} \text{ for } i=3,5,7\\
&[X_3,X_5]=X_4, [X_5,X_7]=X_2,\\
\mathfrak{n}_7^{143}=\langle X_1,\dots,X_7\rangle :&[X_1,X_i]=X_{i-1} \text{ for } i=3,5,7\\
&[X_3,X_5]=X_6, [X_5,X_7]=X_2.
\end{aligned}$$

利用 [YD13] 中关于 8 维二步幂零李代数的分类以及推论 4.1，我们可以确定这样的幂零李群：由其构造的非紧致幂零流形可能与光滑拟射影簇微分同胚。

定理 5.1。 设 $M=\Gamma\backslash N\times\mathbb{R}^m$ 是一个非紧致幂零流形。假设 M 与一个光滑拟射影簇微分同胚，且 N 的李代数 $\mathfrak{n}$ 是不可分解的。若维数 $N=8$，则该李代数的复化同构于以下之一：

$$\begin{aligned}
&N_1^{8,4} && \text{if } b_1(\Gamma\backslash N)=4,\\
&N_i^{8,2}(1\leq i\leq 5) && \text{如果 } b_1(\Gamma\backslash N)=6,\\
&\mathbb{C}^8 && \text{若 } b_1(\Gamma\backslash N)=8
\end{aligned}$$

其中， $1 \leq i \leq 5$对应的李代数 $N^{8,41}$、 $N^{8,i}{}^{2}$由下式给出

$$N_1^{8,4} = \langle X_1, X_2, \overline{X_1}, \overline{X_2}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\rangle : [X_1, \overline{X_1}] = Z_1, [X_1, \overline{X_2}] = Z_2, [X_2, \overline{X_1}] = Z_3, [X_2, \overline{X_2}] = Z_4,$$
$$N_1^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7, [x_3, x_4] = x_8, [x_5, x_6] = x_7 + x_8,$$
$$N_2^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_4, x_5], [x_1, x_3] = x_8 = [x_4, x_6],$$
$$N_3^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_4, x_5], [x_3, x_4] = x_8 = [x_5, x_6],$$
$$N_4^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_3, x_4] = [x_5, x_6], [x_4, x_5] = x_8,$$
$$N_5^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_3, x_4] = [x_5, x_6], [x_4, x_5] = x_8 = [x_2, x_3].$$

Proof. By [Shi25, Theorem1.1], we have

$$\dim H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \geq 4.$$

我们首先假设 $\dim H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = 4$。于是可见， $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 与下列李代数 $N^{8,41}$ 在 [YD13]中同构:

$$N^{8,1}{}^{4} = \langle X_1, X_2, \overline{X_1}, \overline{X_2}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\rangle : \quad [X_1, \overline{X_1}] = Z_1, [X_1, \overline{X_2}] = Z_2, [X_2, \overline{X_1}] = Z_3, [X_2, X_2] = Z_4.$$

由推论 4.1，接下来我们假设 $\dim H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = 6$。根据 [YD13], ，则 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ 与下列某个李代数同构:

$$N_1^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7, [x_3, x_4] = x_8, [x_5, x_6] = x_7 + x_8,$$
$$N_2^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_4, x_5], [x_1, x_3] = x_8 = [x_4, x_6],$$
$$N_3^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_4, x_5], [x_3, x_4] = x_8 = [x_5, x_6],$$
$$N_4^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_3, x_4] = [x_5, x_6], [x_4, x_5] = x_8,$$
$$N_5^{8,2} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\rangle : [x_1, x_2] = x_7 = [x_3, x_4] = [x_5, x_6], [x_4, x_5] = x_8 = [x_2, x_3].$$

□

注 5.1。 我们可以证明上述李代数存在双分次。例如，我们在 $N^{8,41}$ 上定义如下双分次

$$N_1^{8,4} = \langle X_1, X_2\rangle_{-1,0} \oplus \langle \overline{X_1}, \overline{X_2}\rangle_{0,-1} \oplus \langle Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\rangle_{-1,-1}.$$

那么，上同调 $H^*(N^{8,i}{}^{2}) = \bigoplus_{p,q} H^{*}_{p,q}(N^{8,i}{}^{2})$ 所诱导的双分次满足推论 *3.1* 中的条件。此外，我们将双分次定义在 $N^{8,i}{}^{2}$ 上，定义如下

$$N_i^{8,2} = \langle A_1, A_2, A_3\rangle_{-1,0} \oplus \langle \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\rangle_{0,-1} \oplus \langle B_1, B_2\rangle_{-1,-1}$$

其中基变换为

$A_1 := x_1 + ix_2, A_2 := x_3 + ix_4, A_3 := x_5 + ix_6, B_1 := -2ix_7, B_2 := -2ix_8$如果 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cong N^{8,21}$, $A_1 := x_1 + ix_4, A_2 := x_3 + ix_6, A_3 := -x_5 + ix_2, B_1 := -2ix_7, B_2 := -2ix_8$如果 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cong N^{8,22}$, $A_1 := x_1 + ix_2, A_2 := x_3 + ix_6, A_3 := x_5 + ix_4, B_1 := -2ix_7, B_2 := -2ix_8$如果 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cong N^{8,23}$ 或 $N^{8,24}$,

$A_1 := x_1 + ix_6, A_2 := x_3 + i(x_4 + x_6)$ $A_3 := x_5 + i(x_2 + x_4 + x_6)$ $B_1 := -2ix_7, B_2 := -2ix_8$若 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cong N^{8,25}$则上同调 $H^*(N^{8,i}{}^{2}) = \bigoplus_{p,q} H^{*}_{p,q}(N^{8,i}{}^{2})$ 上的诱导双分次满足推论 *3.1* 中的条件。

6. 与我们先前的工作比较

在 [Shi25], 中，我们考虑了以下问题。

问题 6.1。 设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑拟射影簇。假设其（拓扑）基本群 $\pi_1(X,x)$ 是无挠幂零群。那么 $\pi_1(X,x)$ 是阿贝尔群还是二步幂零群?

利用 [Mor78 中关于李代数的 Morgan 的结果，即定理 (9.4)], ，我们证明了以下结果。

定理 6.1 ([Shi25])。 设 X 是一个光滑拟射影簇。假设 $\pi_1(X,x)$ 是无挠幂零群。若 $rk(\pi_1(X,x)) \leq 7$，则 $\pi_1(X,x)$ 是阿贝尔群或二步幂零群。

此外，我们确定了维数至多为 7 的李群，其格可能同构于光滑拟射影簇的基本群（见 [Shi25，定理 1.3 和 1.4]）。然而，从秩 8 开始，我们无法确定光滑拟射影簇基本群的 sat 类。事实上，存在一个有限生成无挠三步幂零群，它满足 Shi [中使用的 Morgan 的结果25]。该例是下述李群中的一个格

$$N(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_2 & y_1 & -z_2 & -z_1 & 0 & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 3b \\ 0 & 1 & x_2 & x_1 & 0 & \frac{1}{2}(x_1+x_2) & -z_2 & -z_1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & x_2 & -y_1 & -y_2 & 2z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_1 & -y_2 & -y_1 & 2z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2,a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

此外， $N(\mathbb{R})$ 的李代数由下式给出

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} := \langle X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, A, B \rangle : & [X_1,Y_1] = Z_1 = [X_2,Y_2], [X_2,Y_1] = Z_2 = [X_1,Y_2], \\ & [X_1,Z_1] = A = [X_2,Z_2], [Y_1,Z_1] = B = [Y_2,Z_2] \end{aligned}$$

而混合霍奇结构在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的双分次由下式给出

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \langle A_1, A_2 \rangle_{-1,0} \oplus \langle \overline{A_1}, \overline{A_2} \rangle_{0,-1} \oplus \langle B_1, B_2 \rangle_{-1,-1} \oplus \langle C_1 \rangle_{-2,-1} \oplus \langle \overline{C_1} \rangle_{-1,-2}$$

其中 $A_1 := X_1 + iY_1$， $A_2 := X_2 + iY_2$， $B_1 := -2iZ_1$， $B_2 := -2iZ_2$ 且 $C_1 := -2i(A+iB)$。Morgan [Mor78 的定理 (9.4)] 证明了该双分次满足相应条件。本文聚焦于光滑拟射影簇与非紧致幂零流形交集这一类对象。由此，我们可以给出任意维数下基本群幂零类的限制。因此，根据定理 4.2，我们得到以下推论。

推论 6.1. 设 N 是一个单连通幂零李群， Γ 是 N 中的一个格。假设 N 的李代数与上述李代数 $\mathfrak{g}$ 同构。若存在一个光滑拟射影簇 M，使得其基本群 $\pi_1(M,x)$ 与 Γ 同构，则 M 与任何非紧致幂零流形都不同胚。

参考文献

[BG88] C. Benson 和 C. S. Gordon。《幂零流形上的凯勒结构与辛结构》. Topology 27 (1988), 第 4 期, 513–518.[Boc16] C. Bock。《低维可解流形》.《亚洲数学杂志》20 (2016), 第 2 期, 199-262.[Del71] P. Deligne。《霍奇理论 II》. 高等科学研究所数学出版物 40 (1971), 5–57.[Gon98] M. P. Gong.《七维幂零李代数分类（在代数闭域及有理数域上）》，博士论文，滑铁卢大学，滑铁卢，1998.[Has89] K. Hasegawa。《幂零流形的极小模型》.《美国数学会会刊》106 (1989), 第 1 期, 65–71.[Has05]K. Hasegawa。《紧致可解流形上的复结构与凯勒结构》.《辛几何杂志》3 (2005), 第 4 期, 749–767.[Mal49] A. I. Malcev。《一类齐性空间》.《苏联科学院通报：数学辑》13 (1949), 9–32.[Mor78] J. W. Morgan。《光滑代数簇的代数拓扑》. 高等科学研究所数学出版物 48 (1978), 137–204.[Nom54] K. Nomizu，《紧致齐性空间的上同调》，Annals of Mathematics (2) 59 (1954), 531–538.[PS61] R. S. Palais 和 T. E. Stewart，《环面上的环面丛》，《美国数学会会刊》12 (1961), 26-29.[PS 08] C. A. M. Peters 和 J. H. M. Steenbrink。《混合霍奇结构》.《数学及其边界领域成果》第三辑，第 52 卷，施普林格出版社，柏林—海德堡，(2008).[Rag72] M. S. Raghunathan。《李群的离散子群》.《数学及其边界领域成果》第 68 卷，施普林格出版社，柏林—海德堡，(1972).[RZ11] B. Ren 和 L.S. Zhu。《中心为二维的八维二步幂零李代数分类》.《代数通讯》39 (2011), 2068-2081.[Shi25] T. Shimoji。《秩不超过七的光滑拟射影簇的无挠幂零基本群》. arXiv:2510.09026 (2025).[Sul77]D. Sullivan。《拓扑学中的无穷小计算》. 高等科学研究所数学出版物 47 (1977), 269–331.[YD13] Z. Yang 和 S. Deng，《八维二步幂零复李代数的分类》.《捷克斯洛伐克数学杂志》63,(2013), 第3期, 847-863 数学系，理学研究生院，大阪大学，日本大阪

电子邮箱地址：u215629i@ecs.osaka-u.ac.jp