arXiv:2601.16435v1 [quant-ph] 23 Jan 2026

循环量子信道及其应用

Bing Xie* 和 LinZhang†

中国杭州 *310018*，杭州电子科技大学科学学院

摘要

本文介绍了一族循环量子信道——混合置换量子信道的一个子类，并研究了其关键的结构与操作性质。我们证明，循环量子信道的像恰好是循环矩阵的集合。这一刻画有助于分析任意 n阶 Bargmann 不变量。此外，我们证明该量子信道具有纠缠破坏性质，这意味着与一般的混合置换量子信道相比，消除量子关联所需的资源成本大幅降低。本文还讨论了该量子信道的应用，包括推导更紧的 ℓ_p-范数相干性下界，以及刻画其在双体系统中的作用。

*电子邮箱：xiebingjiangxi2023@163.com

†电子邮箱：godyalin@163.com

1 引言

量子信道是对量子信息传输或处理的数学描述，由完全正迹保持映射（CPTP）表示，可用于刻画量子系统之间的状态演化。量子信道在许多物理过程中发挥着重要作用，包括量子噪声 [1], 量子计算 [2], 量子通信 [3], 等。量子系统会受到实际环境中噪声的影响，而量子信道可以模拟退相干 [4]和振幅阻尼 [5] 等环境扰动对量子系统的影响。量子计算本质上是通过量子门的串行与并行组合来完成信息处理的，其中每个量子门 [6] 都对应一个确定的量子信道。在量子通信中，量子信道用于传输或保护量子信息。例如，在量子隐形传态中 [7], ，量子信道用于传输未知量子态；在量子密钥分发中 [8], ，编码后的量子态通过量子信道传输。

在 [9], 中，作者研究了一种特殊类型的量子信道，即所谓的混合置换信道。该信道借助S_d中的所有置换定义，其中d 表示互异元素的个数。对于任意相干性度量，量子态的相干性度量在混合置换信道作用下不会增加。因此，混合置换信道可用于估计量子相干性。在上述混合置换信道的定义中，他们使用了S_d中的所有置换。本文则使用S_d 的适当子集来定义一类特殊的混合置换信道。当所有系数均匀分布时，该信道可将任意矩阵变换为循环矩阵，我们称之为循环量子信道。对于 ℓ_p-范数($p = 1, 2$) 相干性 [10], ，循环量子信道也可用于估计相干性，且其估计效果优于 [9]中研究的混合置换信道。

循环矩阵在刻画巴格曼不变量方面发挥着至关重要的作用。正如[11], 所确立的，这些不变量可作为量子虚性的见证。数值证据强烈表明，对于四个纯态，巴格曼不变量集的边界与循环格拉姆矩阵的边界完全重合。对于三阶不变量，这种等价关系已在 [12], 中得到严格证明，并由此完整刻画了n个纯态的循环格拉姆矩阵。随后，研究者采用其他方法刻画了三阶和四阶不变量的边界 [13]。这些结果支持一个自然的猜想：对于任意n，n阶巴格曼不变量集等于循环格拉姆矩阵集。值得注意的是，循环量子信道为解决这一刻画问题提供了一个自然框架，因为它们能够重构 Xu 和 Pratapsi 等人 [14, 15] 的证明方法。

本研究旨在探究循环量子信道的基本性质及其具体表现。此外，我们运用这种量子信道重新表述了巴格曼不变量集的刻画结果，并将其用于估计量子相干性。我们证明，循环量子信道能够为以 ℓ_p-范数相干性度量衡量的量子相干性给出更紧的下界。最后，我们将循环量子信道的作用扩展到双体系统。我们发现，当循环量子信道在双体系统上局部作用时，双部量子态的纠缠会被完全破坏。

本文的组织结构如下。第2 节介绍必要的背景知识。第3节引入循环量子信道并研究其性质。第4节讨论这些量子信道的应用。第5节将循环量子信道的概念推广到双体系统。最后，我们在第6节给出结论。

2 预备知识

我们考虑位于d维欧几里得空间 $\mathbb{C}^d$ 中的量子系统，并将参考基固定为 $\{|i\rangle\}_{k=1}^{d}$。量子态由密度矩阵描述，即由迹为 1 的半正定矩阵描述。随后，我们将所有$d \times d$ 复矩阵的集合记为 $\mathrm{L}(\mathbb{C}^d)$，并将所有密度矩阵的集合记为 $\mathrm{D}\left(\mathbb{C}^d\right)$。

对于由n 个量子态组成的元组 $\Psi = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$，其巴格曼不变量定义为 $\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2\cdots\rho_n)$，该量在酉变换下保持不变。为了刻画$n$阶巴格曼不变量的集合，引入循环矩阵 [11]。在任意有限维量子系统中，巴格曼不变量的任何可取值都可以通过具有循环格拉姆矩阵的纯态 [14]实现。

一个$d \times d$ 循环矩阵$\boldsymbol{C}$ 是一种具有特殊结构的矩阵，其中每一行都是上一行循环移位后的结果，[16],形式如下：

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{d-1} \\ c_{d-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{d-2} \\ c_{d-2} & c_{d-1} & c_0 & \cdots & c_{d-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

This 这意味着最多只需d 个数即可确定一个循环矩阵 x.

对于 $\pi \in S_d$，在集合 $\{1,\ldots$ 上的一个置换，$d\}$，我们可以定义一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}_\pi$

$$\boldsymbol{P}_\pi = \sum_{i=1}^{d} |\pi(i)\rangle\langle i|. \tag{2.2}$$

按照约定，我们将 $\mathrm{P}_\pi^0 \equiv \mathbb{1}_d$ 记为 $\mathbb{C}^d$ 上的单位矩阵。显然可见 [9]，对于任意 π 和 σ 属于 S_d，有 $\mathrm{P}_\pi\mathrm{P}_\sigma = \mathrm{P}_{\pi\sigma}$ 以及 $\mathrm{P}_\pi^\dagger = \mathrm{P}_\pi^\intercal = \mathrm{P}_{\pi^{-1}} = \mathrm{P}_\pi^{-1}$。于是，循环矩阵可以表示为 $\mathrm{C} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{d-1} \mathrm{c}_k \mathrm{P}_{\pi_0}^k$，其中 $\pi_0 = (\mathrm{d}, \cdots, 2, 1) \in \mathrm{S}_d$，且 $\mathrm{P}_{\pi_0}^d = \mathbb{1}_d$。

在下文中，我们使用如下记号

$$s \oplus t := \begin{cases} s+t, & s+t \leqslant d \\ s+t-d, & d < s+t \end{cases}, \; s \ominus t := \begin{cases} s-t, & 0 \leqslant s-t \\ s-t+d, & s+t < 0 \end{cases}.$$

在此记号下，由于 $\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k = \sum_{i=1}^d |i\rangle\langle i \oplus k|$，对于 $k = 0, \cdots, d$，我们有

$$\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{d} \langle i_1 | \pi_0(i_2) \rangle \cdots \langle i_{k-1} | \pi_0(i_k) \rangle | \pi_0(i_1) \rangle\langle i_k| = \sum_{i_k=1}^{d} |\pi_0^k(i_k)\rangle\langle i_k|.$$

3 循环量子信道

量子信道是一种完全正且保迹的线性映射，它将一个密度矩阵映射为另一个密度矩阵。所有合法的量子信道都有克劳斯表示：$\Xi(\cdot) = \sum_\mu K^\mu(\cdot)K_\mu^\dagger$，其中 $\sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}_d$。

接下来，我们将识别并系统分析循环信道，将其视为量子资源理论中一个自然且具有重要操作意义的子类。尽管更广泛的混合置换信道类别已被引入用于相干性估计等任务 [9]，但对其施加循环子群限制——由此得到循环结构——尚未作为独立的资源理论对象得到明确发展。这一缺口值得关注，因为循环信道具有独特的对称性和代数性质，使其成为研究量子态空间几何结构的有力工具。

现在我们考虑以下特殊的混合置换信道，并探讨其性质和应用。

定义 3.1. 固定 $\pi_0 = (d, \cdots, 2, 1) \in S_d$. 对任意 d 维概率向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1})$，权重为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的循环量子信道记为 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}$，定义如下：

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{X}) := \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \boldsymbol{P}_{\pi_0}^k \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}. \tag{3.1}$$

特别地，当 $\boldsymbol{\lambda} = (\,^1\!/_d, \ldots, \,^1\!/_d)$ 时，$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}$ 简记为 Φ。也就是说，

$$\Phi(\boldsymbol{X}) := \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \boldsymbol{P}_{\pi_0}^k \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}. \tag{3.2}$$

这称为均匀权重循环量子信道。

根据定义，我们有以下性质：

命题 3.2。成立的是

(i) Φ_λ 是保单位的，即 $\Phi_\lambda(\mathbb{1}_d) = \mathbb{1}_d$。

(ii) Φ_λ 关于希尔伯特–施密特内积不是自伴的。

(iii) $[\Phi_\lambda(\boldsymbol{X})]^\intercal = \Phi_\lambda(\boldsymbol{X}^\intercal)$.

(iv) Φ_λ 保持厄米性，也就是说，$\Phi_\lambda(\boldsymbol{X}) = \Phi_\lambda(\boldsymbol{X})^\dagger$ 对于$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\dagger$。

(v) $\Phi \circ \Phi = \Phi$，也就是说 $\Phi(\Phi(\boldsymbol{X})) = \Phi(\boldsymbol{X})$ 对于任意作用于 $\mathbb{C}^d$的矩阵$\boldsymbol{X}$。

证明。(1) 由于 $\Phi_\lambda(\mathbb{1}_d) = \sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0} = \mathbb{1}_d$， Φ_λ 是保单位的。

(2) 由于

$$\langle \boldsymbol{X}, \Phi_\lambda(\boldsymbol{Y})\rangle \;=\; \langle \boldsymbol{X}, \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0}\rangle = \langle \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{k}_{\pi_0}, \boldsymbol{Y}\rangle = \langle \Phi^\dagger_\lambda(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{Y}\rangle,$$

我们有 $\Phi^\dagger_\lambda(\boldsymbol{X}) = \sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{k}_{\pi_0} \neq \Phi_\lambda(\boldsymbol{X})$。
(3)$[\Phi_\lambda(\boldsymbol{X})]^\intercal = \left(\sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0}\right)^\intercal = \sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0} = \Phi_\lambda(\boldsymbol{X}^\intercal)$.

(4) $[\Phi_\lambda(\boldsymbol{X})]^\dagger = \left(\sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0}\right)^\dagger = \sum^{d-1}{}_{k=0}\, \lambda_k \boldsymbol{P}^k_{\pi_0}\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{P}^{-k}_{\pi_0} = \Phi_\lambda(\boldsymbol{X})$ 对于 $\forall \boldsymbol{X} \in Herm(\mathbb{C}^d)$。（5）事实上，

$$\Phi \circ \Phi(\boldsymbol{X}) \;=\; \frac{1}{d^2}\sum_{p,q=0}^{d-1} \boldsymbol{P}^{p+q}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-(p+q)}_{\pi_0}$$

令 $p+q = k$，并用 $N(k)$ 表示 k 出现的次数，

$$N(k) = \begin{cases} k+1, & 0 \leqslant k \leqslant d-1 \\ 2d-1-k, & d \leqslant k \leqslant 2(d-1) \end{cases}. \tag{3.3}$$

由于 $\boldsymbol{P}^d_{\pi_0} = \boldsymbol{P}^0_{\pi_0}$，我们有 $\Phi \circ \Phi(\boldsymbol{X}) = {}^1\!/_{d^2} \sum_{p,q=1}^{d} \boldsymbol{P}^{p\oplus q}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-(p\oplus q)}_{\pi_0}$。因此，我们得到 $p \oplus q = k' \in \{1, \cdots, d\}$，且对于 $\forall k'$，有 $N(k') = d$。此外，有

$$\Phi \circ \Phi(\boldsymbol{X}) \;=\; \frac{1}{d^2}\sum_{p,q=1}^{d} \boldsymbol{P}^{p\oplus q}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-(p\oplus q)}_{\pi_0} = \frac{1}{d}\sum_{k'=1}^{d} \boldsymbol{P}^{k'}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-k'}_{\pi_0} = \Phi(\boldsymbol{X}).$$

至此，证明完毕。 □

这里，我们给出量子信道 Φ_λ 的输出像表达式。

Theo注 3.3. 对于任意矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right)$，相应的输出像 $\Phi_\lambda(\boldsymbol{X})$ 为

$$\Phi_\lambda(\boldsymbol{X}) = \sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}^{-(j-1)}_{\pi_0}\Lambda\boldsymbol{P}^{i-1}_{\pi_0}\boldsymbol{X}\right)|i\rangle\langle j|,$$

其中 $\Lambda :=$ 对角$(\lambda_0, \cdots, \lambda_{d-1})$ 是由 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})$构成的对角矩阵。

证明。 我们首先将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 分解为 $\boldsymbol{X}=\sum_{m,n=1}^{d}x_{m,n}|m\rangle\langle n|$，然后

$$\begin{aligned}
\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{X}) &= \sum_{k=0}^{d-1}\lambda_k\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{k}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}=\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{i,j,m,n=1}^{d}\lambda_k x_{m,n}\langle i\oplus k|m\rangle\langle n|j\oplus k\rangle|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{i,j,m,n=1}^{d}\lambda_k x_{m,n}\langle (i-1)\oplus(k+1)|m\rangle\langle n|(j-1)\oplus(k+1)\rangle|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{m,n=1}^{d}\lambda_k x_{m,n}|(k+1)\oplus(j-1)\rangle\langle(k+1)\oplus(i-1)||m\rangle\langle n|\right)|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{p=1}^{d}|p\oplus(j-1)\rangle\langle p|\sum_{k=0}^{d-1}\lambda_k|k+1\rangle\langle k+1|\sum_{q=1}^{d}|q\rangle\langle q\oplus(i-1)|\sum_{m,n=1}^{d}x_{m,n}|m\rangle\langle n|\right)|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-(j-1)}\Lambda\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{i-1}\boldsymbol{X}\right)|i\rangle\langle j|.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

当 $\boldsymbol{\lambda}=(\frac{1}{d},\cdots,\frac{1}{d})$ 时，这个混合置换信道可简化为循环量子信道——这是一类限制更严格的量子信道，它将任意输入矩阵映射为循环矩阵。

推论 3.4. 对于任意输入矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right)$，循环量子信道 Φ 对应的输出像 $\Phi(\boldsymbol{X})$ 是一个循环矩阵

$$\Phi(\boldsymbol{X})=\sum_{k=0}^{d-1}c_k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{k}, \tag{3.4}$$

其中 $c_k(\boldsymbol{X}):=\frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\boldsymbol{X}\right)$。此外，$[\Phi(\boldsymbol{X}),\Phi(\boldsymbol{Y})]=\boldsymbol{0}$ 对于任意作用于 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的 $\mathbb{C}^d$。

证明。 由于 $\boldsymbol{\lambda}=(\frac{1}{d},\cdots,\frac{1}{d})$，即 $\Lambda=\frac{1}{d}\mathbb{1}_d$，我们有

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{X}) &= \sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-(j-1)}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{i-1}\boldsymbol{X}\right)|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-(j\ominus i)}\boldsymbol{X}\right)|i\rangle\langle j| \\
&= \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\boldsymbol{X}\right)|i\rangle\langle i\oplus k| \\
&= \sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{k}.
\end{aligned}$$

因此得证。 □

若 $\mathrm{d}=2$，则 $\Phi(\mathrm{X})=\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\mathrm{X})\mathbb{1}+\mathrm{Tr}(\sigma_1\mathrm{X})\sigma_1)$，其中 σ_1 是泡利矩阵。这与混合置换信道 $\Delta(\mathrm{X}):=\frac{1}{\mathrm{d}!}\sum_{\pi\in S_d}\mathrm{P}_\pi\mathrm{X}\mathrm{P}_\pi^\dagger$[9]一致。当输入矩阵 X 取量子态 $\rho\in\mathrm{D}\left(\mathbb{C}^d\right)$时，输出态可解析地表征如下。由于所有密度矩阵都是厄米的，$\mathrm{c}_m(\rho)$ 必须是实数，其中 $\mathrm{d}=2\mathrm{m}$。

推论 3.5。 对于任意量子态 $\rho = \sum_{i,\ j=1}^{d} \rho_{ij}|i\rangle\langle j| \in \mathrm{D}\left(\mathbb{C}^d\right)$，相应的输出态$\Phi(\rho)$ 在该量子信道下为

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{d-1} c_k(\rho) \boldsymbol{P}_{\pi_0}^k, \tag{3.5}$$

其中 $c_0 = {}^1 d$ 和 $c_k\ (\rho)\ = {}^1 d \sum_{i=1}^{d} \rho_{i,\ i\oplus k}$ 满足 $c_r\ (\rho)\ = c_{d-r}\ (\rho)$，其中 $r = 1,\ \cdots,\ d-1$。

对于每个量子信道 $\Xi: \mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right) \to \mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right)$，都存在一个自然表示 $\mathrm{K}(\Xi) \in \mathrm{L}\left(\mathbb{C}^{d^2}\right)$，使得 $\mathrm{vec}(\Xi(\mathrm{X})) = \mathrm{K}(\Xi)\,\mathrm{vec}(\mathrm{X})$，其中 $(\mathrm{K}(\Xi))^{ij} = \mathrm{Tr}(\mathrm{E}_i^\dagger \Xi(\mathrm{E}j))$，这里给定一组矩阵基 $\{\mathrm{E}_i \in \mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right)\}$ [17]。此外，根据 Ξ 的 Klaus 表示，我们可以将线性超算子写作 $\mathrm{K}(\Xi) = \sum_\mu \mathrm{K}_\mu \otimes \mathrm{K}_\mu$ [18]。量子信道 Ξ 的谱定义为特征多项式 $\det(\mathrm{K}(\Xi) - \lambda \mathbb{1})$ 的根所构成的列表，其中每个根按照其简并度 [17] 计重数。如果 $\lambda = 1$ 是 Ξ 的一个特征值，那么所有满足 $\Xi(\mathrm{X}) = \lambda \mathrm{X} = \mathrm{X}$ 的算子 X 构成 Ξ 的不动点集。

推论 3.6. 循环量子信道 Φ（定义见式(3.2)）的不动点集合恰好是所有循环矩阵的集合。

证明。 根据推论 3.4，对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$，有 $(\Phi(\boldsymbol{X}))_{p,q} = \sum_{=0}^{d-1} {}_k x_{p\oplus k, q\oplus k}$。设 $\boldsymbol{X}$ 是 Φ的不动点，则 $x_{p,q} = (\Phi(\boldsymbol{X}))_{p,q}$。因此

$$x_{i,i\oplus k} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} x_{j,j\oplus k} \text{ for } \forall i \in \{1,2,\cdots,d\},\ \forall k \in \{0,1,\cdots,d-1\}.$$

因此，对于所有 i,j，$\mathrm{x}_{i,i\oplus k} = \mathrm{x}_{j,j\oplus k}$。也就是说，X 是循环矩阵。另一方面，若 $\mathrm{X} = \sum^{d-1} \mathrm{k}{=}0\ \mathrm{a}_k\ \mathrm{P}_{\pi_0}^k$ 是循环矩阵，则 $\Phi(\mathrm{X}) = \sum^{d-1} \mathrm{k}{=}0\ \mathrm{c}_k(\mathrm{X})\mathrm{P}_{\pi_0}^k = \mathrm{X}$，其中 $\mathrm{c}_k(\mathrm{X}) = {}^1 \mathrm{d} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{x}_{i,i\oplus k} = \mathrm{a}_k$。

□

经计算可得 $K(\Phi) = {}^1 {}_d \sum^{d-1} {}_{k=0}\ \boldsymbol{P}_{\pi_0}^k \otimes \boldsymbol{P}_{\pi_0}^k$。我们将 $\boldsymbol{P}_{\pi_0}$ 对角化为

$$\boldsymbol{P}_{\pi_0} = \boldsymbol{F}\Omega\boldsymbol{F}^\dagger, \quad \Omega := \mathrm{diag}(1, \omega, \cdots, \omega^{d-1}) \tag{3.6}$$

其中 $\omega := \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}\right)$，且 $\boldsymbol{F}$ 是离散傅里叶变换（DFT）矩阵 [19]。于是，

$$K(\Phi) = (\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F}) \left(\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \Omega^k \otimes \Omega^k \right) (\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F})^\dagger,$$

其中

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \Omega^k \otimes \Omega^k = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \equiv 0 (\mod d)}}^{d-1} |ij\rangle\langle ij|. \tag{3.7}$$

注意到 $K(\Phi)$ 与方程（3.7）局部酉等价。因此，由方程（3.3）和（3.7），可得 $K(\Phi)$ 的谱为 $\{1_{(d)}, 0_{(d^2-d)}\}$，这也是量子信道 Φ的谱。这意味着量子信道 Φ 的不动点空间维数为 d。推论 3.6 表明，该不动点空间恰好是循环矩阵的集合。

4 循环量子信道的应用

利用循环量子信道的具体表达式，我们展示了它在表征巴格曼不变量和量化量子相干性方面的用途。作为一个示例，我们表明，这些量子信道能够为 ℓ_p-范数（$p = 1,2$）相干性度量给出更紧的下界。

4.1 重述巴格曼不变量的相关结果

对于 $\mathbb{C}^d$ 上的 n 元组量子纯态 $\Psi = (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle)$，$\Psi$ 的格拉姆矩阵为 $\boldsymbol{G}(\Psi) := (\langle\psi_i, \psi_j\rangle)_n$。显然，$\boldsymbol{G}(\Psi)$ 是半正定的，且主对角线元素均为 1。对应于 Ψ 的巴格曼不变量为

$$\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle\psi_i, \psi_{i\oplus 1}\rangle = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{G}(\Psi)_{i,i\oplus 1},$$

其中 $\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$。利用循环信道 Φ，我们可以重现 [14]中的结果。为求完整起见，我们用自己的表述方式重新阐述这些结果及其证明。

推论 4.1 ([14])。给定 $\mathbb{C}^d$ 中任意一个由复单位向量组成的 n 元组，$\Psi = (|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle)$ 满足$\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) \neq 0$，其中 $\psi_k \equiv |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$，则存在一个由单位向量组成的 n 元组 $\widetilde{\Psi} = (|\tilde{\psi}_1\rangle, \ldots, |\tilde{\psi}_n\rangle)$，使得格拉姆矩阵 $\boldsymbol{G}(\widetilde{\Psi}) = (\langle\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j\rangle)_{n\times n}$ 是一个循环矩阵，且

(i) $\langle\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2\rangle = \langle\tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3\rangle = \cdots = \langle\tilde{\psi}_{n-1}, \tilde{\psi}_n\rangle = \langle\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_1\rangle$,

(ii) $\arg \mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) = \arg \mathrm{Tr}\,(\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n)$,

(iii) $|\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n)| \leqslant |\mathrm{Tr}\,(\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n)|$，其中 $\arg z \in [0, 2\pi)$ 是复数 z 的主辐角。

证明。我们首先清楚地说明如何调整第n阶 Bargmann 不变量 $\langle\psi_1, \psi_2\rangle\langle\psi_2, \psi_3\rangle \cdots \langle\psi_n, \psi_1\rangle = re^{\mathrm{i}\theta}$ 中内积因子的相位：我们将原本具有不同相位 $e^{\mathrm{i}\theta_k}$ 的 n 个因子 $\langle\psi_k, \psi_{k\oplus 1}\rangle = r_k e^{\mathrm{i}\theta_k}$（对于 $k \in \{1, \ldots, n\}$），变换为一组新的因子 $\langle\psi'_k, \psi'_{k\oplus 1}\rangle = r_k e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$，其中每个因子都具有相同且一致的相位 $e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$。随后，基于这种相位对齐，我们应用一个循环量子信道，使所有内积因子的模相等，同时保持其相位一致。此步骤将相应的格拉姆矩阵 $G(\Psi')$ 变换为循环矩阵；根据构造，该矩阵恰好是目标元组 $\tilde{\Psi}$ 的格拉姆矩阵。证明继续如下。

令 $\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) = re^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $r = |\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n)| > 0$，且 $\theta \in [0, 2\pi)$。令 $\langle\psi_k、\ \psi_{k\oplus 1}\rangle = r_k e^{\mathrm{i}\theta_k}$，其中 $r_k = |\langle\psi_k、\ \psi_{k\oplus 1}\rangle| > 0$ 以及 $\theta_k \in [0, 2\pi)$，对于 $k \in \{1, 2, \ldots\ldots n\}$。因此 $r = r_1 r_2 \cdots r_n$。

步骤 1：基于 Ψ，我们定义一个新的单位向量元组 $\Psi' = (|\psi'_1\rangle, \ldots, |\psi'_n\rangle)$。事实上，

$|\psi'_k\rangle = \mathrm{U}|\psi_k\rangle$ 当且仅当存在某个酉矩阵 $\mathrm{U} \in \mathrm{U(d)}$，使得 $\mathrm{G}(\Psi') = \mathrm{T}^\dagger \mathrm{G}(\Psi)\mathrm{T}$，其中 $\mathrm{T} \in \mathrm{U}(1)^{\times n}$ 是对角酉矩阵。因此，我们可以选择合适的 $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n})$，并通过定义 $|\psi'_k\rangle := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}|\psi_k\rangle$ 来构造 $\Psi' = (|\psi'_1\rangle, \ldots, |\psi'_n\rangle)$，其中 $\mathrm{k} \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$。我们要求新元组 Ψ' 满足所有连续内积具有相同相位的条件：

$$\arg\langle\psi'_1, \psi'_2\rangle = \arg\langle\psi'_2, \psi'_3\rangle = \cdots = \arg\langle\psi'_{n-1}, \psi'_n\rangle = \arg\langle\psi'_n, \psi'_1\rangle = \frac{\theta}{n}$$

这便导出了对相位角 $\{\alpha_k \mid k = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ 的以下约束：

$$\alpha_j = \alpha_1 + (j-1)\frac{\theta}{n} - \sum_{k=1}^{j-1}\theta_k, \quad j \in \{2, \ldots, n\}.$$

接下来，我们解释为什么可以这样做！也就是说，我们可以证明满足这些约束的 α_k' 的存在性。事实上，我们用两种方式改写 $\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) = re^{\mathrm{i}\theta}$：

$$\begin{cases} re^{\mathrm{i}\theta} = (r_1 e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}) \cdots (r_n e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}), \\ re^{\mathrm{i}\theta} = (r_1 e^{\mathrm{i}\theta_1}) \cdots (r_n e^{\mathrm{i}\theta_n}). \end{cases}$$

我们希望将 $r_k e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ 与 $r_k e^{\mathrm{i}\theta_k} \doteq \langle\psi_k, \psi_{k\oplus 1}\rangle$ *up to a phase factor* 对应起来。这便导出了如下定义 $|\psi'_k\rangle := e^{\mathrm{i}\alpha_k}|\psi_k\rangle$，其中 $\alpha_k \in \mathbb{R}$ *to be determined*。在这样的定义下，我们希望 $r_k e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} = \langle\psi'_k, \psi'_{k\oplus 1}\rangle$。假设这一点成立，-则可得

$$\begin{aligned} r_k e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} &= \langle\psi'_k, \psi'_{k\oplus 1}\rangle = e^{\mathrm{i}(\alpha_{k\oplus 1} - \alpha_k)}\langle\psi_k, \psi_{k\oplus 1}\rangle \\ &= e^{\mathrm{i}(\alpha_{k\oplus 1} - \alpha_k)} r_k e^{\mathrm{i}\theta_k} = r_k e^{\mathrm{i}(\alpha_{k\oplus 1} - \alpha_k + \theta_k)}. \end{aligned}$$

在假设 $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ 存在的前提下，我们推导出以下约束：关于未知常数 α_k' 的要求由下式确定

$$\frac{\theta}{n} = \alpha_{k\oplus 1} - \alpha_k + \theta_k \Longleftrightarrow \alpha_{k\oplus 1} - \alpha_k = \frac{\theta}{n} - \theta_k,$$

这意味着

$$\alpha_{j\oplus 1} = \alpha_1 + (j-1)\frac{\theta}{n} - \sum_{k=1}^{j-1}\theta_k, \quad j \in \{2, \ldots, n\}.$$

注意，α_1 是任意选取的。令

$$g_j \equiv g_j(\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n) := (j-1)\frac{\theta}{n} - \sum_{k=1}^{j-1}\theta_k, \quad j \in \{2, \ldots, n\}.$$

因此 $\boldsymbol{T} = e^{\mathrm{i}\alpha_1}\mathrm{diag}\left(1, e^{\mathrm{i}g_2}, \ldots, e^{\mathrm{i}g_n}\right)$。因此，可以通过使用满足上述约束的此类常数 α_k's 来合理地定义 Ψ'。在这种情况下，对于 $\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(e^{\mathrm{i}\alpha_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\alpha_n}) \in \mathrm{U}(1)^{\times n}$，$G(\Psi') = \boldsymbol{T}^\dagger G(\Psi)\boldsymbol{T}$。

步骤 2：基于 Ψ'，我们定义一个新的波函数元组 $\tilde{\Psi} = (|\tilde{\psi}_1\rangle, \ldots, |\tilde{\psi}_n\rangle)$。将循环量子信道 Φ 作用于步骤 1 中构造的单位向量元组 Ψ' 的格拉姆矩阵 $G(\Psi')$，可得 $\mathbf{0} \leqslant \Phi(G(\Psi')) \in \mathcal{C}_n$。因此，存在某个单位向量元组 $\widetilde{\Psi} = (|\tilde{\psi}_1\rangle, \ldots, |\tilde{\psi}_n\rangle)$，使得 $G(\widetilde{\Psi}) = \Phi(G(\Psi'))$ [21]，，并且

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\psi}_j, \tilde{\psi}_{j\oplus 1}\rangle &= [G(\widetilde{\Psi})]_{j,j\oplus 1} = [\Phi(G(\Psi'))]_{j,j\oplus 1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\langle\psi'_k, \psi'_{k\oplus 1}\rangle = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k\right) e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

根据算术-几何平均不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n)| &= \left|\prod_{k=1}^{n}\langle\psi_k, \psi_{k\oplus 1}\rangle\right| = \prod_{k=1}^{n} r_k \\ \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k\right)^n &= \left|\prod_{k=1}^{n}\langle\tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_{k\oplus 1}\rangle\right| = |\mathrm{Tr}\,(\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n)|\,.\end{aligned}$$

此外，我们还可以看到

$$\begin{cases}\mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right) e^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{Tr}\,(\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k\right)^n e^{\mathrm{i}\theta}.\end{cases}$$

证明至此完成。 □

这里需要说明的是，为了保证本文逻辑上的完整性，我们在循环量子信道框架下重构了 Xu 对巴格曼不变量集的描述。根据推论 4.1，很容易证明 $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n|\mathrm{circ}}$，其中 $\mathcal{B}_n$ 是所有 n 阶 Bargmann 不变量的集合，而 $\mathcal{B}_{n|\mathrm{circ}} (\subset \mathcal{B}_n)$ 是由特殊纯态元组 [14] 所构成的循环格拉姆矩阵所产生的 n 阶 Bargmann 不变量子集。事实上，对于 $\mathrm{z} \in \mathcal{B}_n$，若 $\mathrm{z} = 0$，则显然 $\mathrm{z} = 0 \in \mathcal{B}_{n|\mathrm{circ}}$；若 $\mathrm{z} \neq 0$，则可将其表示为 $\mathrm{z} = \mathrm{Tr}\,(\psi_1 \cdots \psi_n)$，其中 $\Psi = (|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle)$ 是一个由单位向量构成的 n 元组。因此，根据推论 4.1，存在 $\tilde{\mathrm{z}} = \mathrm{Tr}\,(\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n)$，使得

$$z = \frac{\prod_{k=1}^{n} r_k}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k\right)^n}\tilde{z} \in \mathcal{B}_n|_{\mathrm{circ}}$$

虽然这里重新表述的是已知结论，而非提出新结论，但它提供了一个不同的视角，突显了循环量子信道在刻画这些不变集方面的用途。接下来，我们将介绍循环量子信道在相干性估计中的应用。

4.2 利用循环信道估计量子相干性

给定参考基 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$，若量子态的密度矩阵 ρ 在这组基下为对角矩阵，即 $\rho = \sum_{i=1}^{d} p_i |i\rangle\langle i|$，则称该态为非相干态。所有非相干态构成的集合记为 $\mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$。所谓非相干操作 $\mathcal{E}(*) = \sum_\nu K_\nu(*)K_\nu^\dagger$，是满足条件 $K_\nu \delta K_\nu^\dagger \mathrm{Tr}(K_\nu \delta K_\nu^\dagger) \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$ 的量子信道；对于所有 $\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$ 和所有 ν，它们都会将非相干态映射为非相干态。

对于循环量子信道，我们发现它会将任意非相干态映射为最大混合态。

推论 4.2. $\Phi(\rho)$ 对于任意非相干态 $\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |i\rangle\langle i| \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$，均为最大混合态 $\frac{1}{d}\mathbb{1}_d$。

证明。 由于 $\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k \rho \boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |\pi_0^k(i)\rangle\langle\pi_0^k(i)| \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$，因此

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |\pi_0^k(i)\rangle\langle\pi_0^k(i)| = \frac{1}{d}\mathbb{1}_d.$$

证毕。 □

对于每个 Kraus 算子 $P_{\pi_0^k}/\sqrt{d}$ 以及任意非相干态 $\delta = \sum_i^d \lambda_i |i\rangle\langle i| \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d)$，有

$$\frac{\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k}{\sqrt{d}} \delta \frac{\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}}{\sqrt{d}} / \mathrm{Tr}\left(\frac{\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k}{\sqrt{d}} \delta \frac{\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}}{\sqrt{d}} \right) = \sum_i^d \lambda_i |\pi_0(i)\rangle\langle\pi_0(i)| \in \mathcal{I}(\mathbb{C}^d),$$

因此， Φ 是一种非相干操作。对于任意相干性度量 C 和任意量子态 $\rho \in \mathrm{D}\left(\mathbb{C}^d\right)$， ρ 的量子相干性下界为 $\Phi(\rho)$的量子相干性，即$C(\rho) \geqslant C(\Phi(\rho))$。

考虑量子态$\rho = \sum_i$的 ℓ_1-范数相干性，$\sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| |i\rangle\langle j|$ 等于所有非对角元的模之和：

$$C_{\ell_1}(\rho) := \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| . \tag{4.1}$$

与 ℓ_1-范数相干性不同， ℓ_2-范数相干性定义为非对角元素的模的平方之和：

$$C_{\ell_2}(\rho) := \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|^2 . \tag{4.2}$$

循环量子信道 Φ 也可用于估计量子相干性，相比混合置换量子信道 ℓ_1-范数相干性和 ℓ_2-范数相干性，能够给出更紧的下界 $\Delta(\cdot) = \frac{1}{d!} \sum_{\pi \in S_d} \boldsymbol{P}_\pi(\cdot)\boldsymbol{P}_\pi^\dagger$ [9]。

推论 4.3。对于任意量子态 $\rho \in \mathrm{D}\left(\mathbb{C}^d\right)$，输出态的 ℓ_p-范数 $(p = 1,2)$ 相干性满足

$$C_{\ell_p}(\rho) \geqslant C_{\ell_p}(\Phi(\rho)) \geqslant C_{\ell_p}(\Delta(\rho)). \tag{4.3}$$

证明。 根据定义，我们有

$$C_{\ell_1}(\Phi(\rho)) = \sum_{k=1}^{d-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \rho_{i,i\oplus k} \right|, \quad C_{\ell_1}(\Delta(\rho)) = \left| \sum_{i\neq j} \rho_{i,j} \right|.$$

由三角不等式可得

$$C_{\ell_1}(\rho) \geqslant C_{\ell_1}(\Phi(\rho)) \geqslant C_{\ell_1}(\Delta(\rho)).$$

事实上，对于 $d = 2m+1$，$C_{\ell_1}(\Phi(\rho)) = \sum_{k=1}^{d-1} |c_k(\rho)| = 2d \sum_{i=1}^{m} |c_i(\rho)|$；对于 $d = 2m$，$C_{\ell_1}(\Phi(\rho)) = 2d \sum_{i=1}^{m-1} |c_i(\rho)| + d c_m(\rho)$。

由于 Φ 是非相干的，可得 $C_{\ell_2}(\rho) \geqslant C_{\ell_2}(\Phi(\rho))$。根据 ℓ_2-范数相干性的定义，我们得到

$$C_{\ell_2}(\Phi(\rho)) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \rho_{i,i\oplus k} \right|^2, \quad C_{\ell_2}(\Delta(\rho)) = \frac{1}{d(d-1)} \left| \sum_{i\neq j} \rho_{i,j} \right|^2.$$

利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\left| \sum_{i\neq j} \rho_{i,j} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \rho_{i,i\oplus k} \right| \right)^2 \leqslant (d-1) \sum_{k=1}^{d-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \rho_{i,i\oplus k} \right|^2.$$

因此，$C_{\ell_2}(\Phi(\rho)) \geqslant C_{\ell_2}(\Delta(\rho))$。 □

基于三能级量子态的广义盖尔曼表示，我们可以得到量子态在循环量子信道作用前后广义布洛赫向量的变化。

例 4.4. 任意三能级量子态均可表示为 [20]

$$\rho = \frac{1}{3}\left(\mathbb{1}_3 + \sqrt{3}\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{G}\right),$$

其中 $\mathrm{r} = (\mathrm{r1}, \cdots, \mathrm{r}_8) \in \mathbb{C}^8$，$\mathrm{G} = (\mathrm{G1}, \cdots, \mathrm{G}_8)$ 是 $\mathbb{C}^3$ 上的盖尔曼矩阵向量。然后$\Phi(\rho) = \mathrm{c}_0\mathbb{1}_3 + \mathrm{c}_1\mathrm{P}_{\pi_0} + \bar{\mathrm{c}}_1\mathrm{P}_{\pi_0}^2$，其中 $\mathrm{c}_0 = \frac{1}{3}$，$\mathrm{c}_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_4 + \mathrm{r}_6 - \mathrm{i}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_5 + \mathrm{r}_7))$。容易看出，$\Phi$ 的作用为

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{1}_3 + \sqrt{3}\boldsymbol{r}'\cdot\mathbf{G}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{r_1+r_4+r_6-\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} & \frac{r_1+r_4+r_6+\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} \\ \frac{r_1+r_4+r_6+\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{r_1+r_4+r_6-\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} \\ \frac{r_1+r_4+r_6-\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} & \frac{r_1+r_4+r_6+\mathrm{i}(r_2-r_5+r_7)}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{r}' = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_7, 0, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}6, -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_7), \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_7, 0)$。

对于三能级量子态，我们计算了 ℓ_p-范数相干性 $C^{\ell_p}(\rho)$ 以及其下界，即 ℓ_p-范数相干性 $C^{\ell_p}(\Phi(\rho))$ 和 $C^{\ell_p}(\Delta(\rho))$,

$$C_{\ell_1}(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{r_1^2+r_2^2}+\sqrt{r_4^2+r_5^2}+\sqrt{r_6^2+r_7^2}\right), \qquad C_{\ell_2}(\rho) = \frac{2}{3}\left(r_1^2+r_2^2+r_4^2+r_5^2+r_6^2+r_7^2\right)$$

$$C_{\ell_1}(\Phi(\rho)) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(r_1+r_4+r_6)^2+(r_2-r_5+r_7)^2}, \qquad C_{\ell_2}(\Phi(\rho)) = \frac{2}{9}\left((r_1+r_4+r_6)^2+(r_2-r_5+r_7)^2\right)$$

$$C_{\ell_1}(\Delta(\rho)) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(r_1+r_4+r_6\right), \qquad C_{\ell_2}(\Delta(\rho)) = \frac{2}{9}(r_1+r_4+r_6)^2.$$

考虑三能级量子态 $|\varphi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{i\phi}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{\sqrt{2}}|2\rangle$，向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ 的广义盖尔曼表示中可计算为 $r_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Tr}(\rho \boldsymbol{G}_i)$。令 $\phi = \frac{\pi}{6}$，我们计算了 ℓ_p-范数相干性 $C^{\ell_p}(\rho)$ 及其下界，并在图 1中进行了比较。

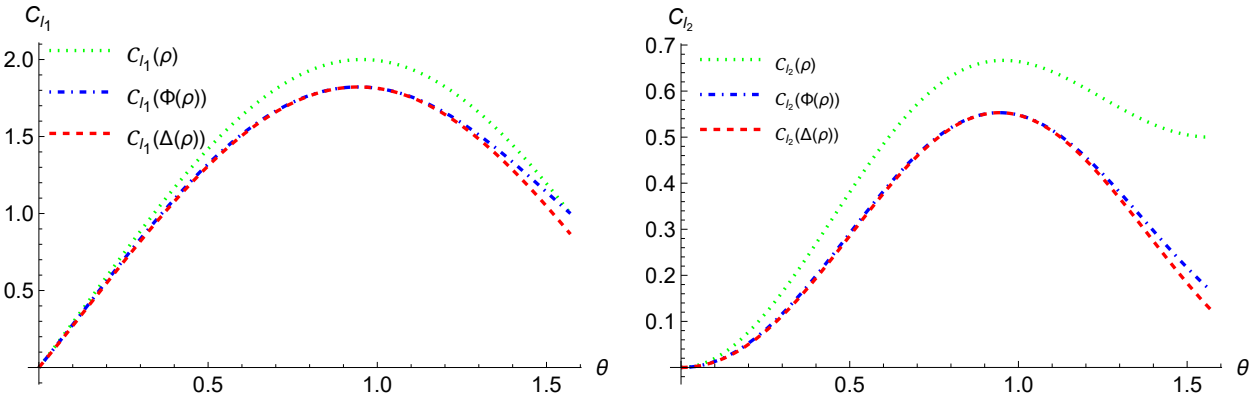

图1：使用 ℓ_p-范数相干性度量估算 ρ 的相干性，其中$p = 1, 2$。

根据本节以上讨论，将这类量子信道应用于巴格曼不变量理论，可以恢复并重新表述已知的基础结果。重要的是，这一做法从统一的操作性量子通道视角出发，为集体相位信息与量子关联之间的相互作用提供了全新视角。我们还看到，循环量子信道构成了相干性资源理论中一类定义明确且高度对称的“自由”或“非资源性”操作，其特征是对循环移位具有协变性。这为探究量子资源提供了更精细的框架。

5 双体系统上的循环量子信道

本节中，我们研究双体系统上的循环信道。设 $d_A \leqslant d_B$，并且子系统 $\mathbb{C}^{d_A}$ 和 $\mathbb{C}^{d_B}$ 的标准正交基分别为 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ 和 $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d_B}$。对于

双体量子系统 $\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}$， ρ 的密度矩阵为

$$\rho_{AB}=\sum_{i,j,i',j'}\rho_{ij,i'j'}|ij\rangle\langle i'j'|.$$

当 ρ_{AB} 表示可分态时，它可分解为 $\rho_{AB}=\sum_i p_i\rho_A^i\otimes\rho_B^i$，其中$\sum_i p_i=1$。否则， ρ_{AB} 为纠缠态。

对于由标准正交基 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$构成的 $\boldsymbol{E}_{ij}=|i\rangle\langle j|\in\mathrm{L}\left(\mathbb{C}^d\right)$，有

$$\Phi(\boldsymbol{E}_{ij})=\frac{1}{d}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^r,\ r=j\ominus i. \tag{5.1}$$

根据推论 3.4 和式（5.1），我们推导出双体系统上量子信道 $\Phi_A\otimes\mathsf{id}_B$ 和 $\Phi_A\otimes\Phi_B$的显式形式 $\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}$。其中，id 表示算子空间上的恒等量子信道。

作为一项具体应用，我们完整刻画了均匀权重循环信道的纠缠破坏性质。这一结果源自该量子信道独特的谱性质，是一项清晰且非平凡的发现。

定理 5.1。 对于作用于 $\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}$ 上的任意双部算子$\boldsymbol{XAB}$，我们有

$$\Phi_A\otimes\mathsf{id}_B(\boldsymbol{X}_{AB})=\frac{1}{d_A}\sum_{k=0}^{d_A-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right)$$

证明。 我们将$\boldsymbol{X}$ 相对于两个基 $\{|i\rangle\}^{d_A}{}_{i=1}$ 和 $\{|j\rangle\}^{d_B}{}_{j=1}$ 分解为

$$\boldsymbol{X}_{AB}=\sum_{i,i'=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,i'j'}|ij\rangle\langle i'j'|.$$

Then

$$\begin{aligned}
&\Phi_A\otimes\mathsf{id}_B(\boldsymbol{X}_{AB})=\sum_{i,i'=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,i'j'}\Phi(|i\rangle\langle i'|)\otimes|j\rangle\langle j'|\\
&=\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,ij'}\Phi(|i\rangle\langle i|)\otimes|j\rangle\langle j'|+\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,(i\oplus1)j'}\Phi(|i\rangle\langle i\oplus1|)\otimes|j\rangle\langle j'|+\cdots\\
&\quad+\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,(i\oplus(d_A-1))j'}\Phi(|i\rangle\langle i\oplus(d_A-1)|)\otimes|j\rangle\langle j'|\\
&=\frac{1}{d_A}\mathbb{1}_A\otimes\left(\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,ij'}|j\rangle\langle j'|\right)+\frac{1}{d_A}\boldsymbol{P}_{\pi_0}\otimes\left(\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,(i\oplus1)j'}|j\rangle\langle j'|\right)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{d_A}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{d_A-1}\otimes\left(\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B}x_{ij,(i\oplus(d_A-1))j'}|j\rangle\langle j'|\right)\\
&=\frac{1}{d_A}\Big(\mathbb{1}_A\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\right)+\boldsymbol{P}_{\pi_0}\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0^{-1}}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right)+\cdots\\
&\quad+\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{d_A-1}\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0^{-1}}^{d_A-1}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right)\Big)\\
&=\frac{1}{d_A}\sum_{k=0}^{d_A-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right),
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_A\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right) &= \sum_{i,i',p=1}^{d_A}\sum_{j,j',q=1}^{d_B} x_{ij,i'j'}\,\mathrm{Tr}_A\left(|ij\rangle\langle i'j'|\cdot|(p\oplus k)q\rangle\langle pq|\right)\\ &= \sum_{i,p=1}^{d_A}\sum_{j,q=1}^{d_B} x_{ij,(p\oplus k)q}\,\mathrm{Tr}_A\left(|ij\rangle\langle pq|\right)\\ &= \sum_{p=1}^{d_A}\sum_{j,q=1}^{d_B} x_{pj,(p\oplus k)q}|j\rangle\langle q|.\end{aligned}$$

□

在这种情况下，输出 $\Phi_A\otimes\mathrm{id}_B(\boldsymbol{X}_{AB})$ 是一个分块循环矩阵。如果量子循环信道同时局部作用于双体系统的两个子系统，我们也可以得到该量子信道的显式表达式。此时，输出 $\Phi_A\otimes\Phi_B(\boldsymbol{X}_{AB})$ 也是一个分块循环矩阵，其中每个块本身都是一个循环矩阵。

定理 5.2。 对于作用在 $\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}$ 上的任意双部算子$\boldsymbol{XAB}$，我们有

$$\Phi_A\otimes\Phi_B(\boldsymbol{X}_{AB})=\frac{1}{d_Ad_B}\sum_{r_A=0}^{d_A-1}\sum_{r_B=0}^{d_B-1}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_B}\right)\right)\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_B}.$$

证明。 由式（5.1），我们有

$$\begin{aligned}\Phi_A\otimes\Phi_B(\boldsymbol{X}_{AB}) &= \sum_{i,i'=1}^{d_A}\sum_{j,j'=1}^{d_B} x_{ij,i'j'}\Phi(|i\rangle\langle i'|)\otimes\Phi(|j\rangle\langle j'|)\\ &= \frac{1}{d_Ad_B}\sum_{r_A=0}^{d_A-1}\sum_{r_B=0}^{d_B-1}\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j=1}^{d_B} x_{ij,(i\oplus r_A)(j\oplus r_B)}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_B}\\ &= \frac{1}{d_Ad_B}\sum_{r_A=0}^{d_A-1}\sum_{r_B=0}^{d_B-1}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_B}\right)\right)\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{r_B},\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{X}_{AB}\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_A}\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-r_B}\right)\right)=\sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j=1}^{d_B}x_{ij,(i\oplus r_A)(j\oplus r_B)}$。

□

对于任意 $2\otimes\mathrm{d}_B$ 个量子态 ρ_{AB}，由于 $\mathrm{P}_{\pi_0}^{\mathrm{T}}=\mathrm{P}_{\pi_0}$ 对于 $\pi_0\in\mathrm{S}_2$，成立，我们有 $(\Phi_A\otimes\mathrm{id}_B(\rho_{AB}))^{\Gamma_A}=\Phi_A\otimes\mathrm{id}_B(\rho_{AB})\geqslant 0$，且 $(\Phi_A\otimes\Phi_B(\rho_{AB}))^{\Gamma_A}=\Phi_A\otimes\mathrm{id}_B(\rho_{AB})\geqslant 0$，其中 Γ_A 表示相对于子系统 A 的部分转置。因此， $\Phi_A\otimes\mathrm{id}_B(\rho_{AB})$ 和 $\Phi_A\otimes\Phi_B(\rho_{AB})$ 均为部分转置正（PPT） [22]。此外，根据 PPT 判据，如果 $\mathrm{d}_B=2$，则为 3，此时输出态可分。这表明，在量子比特-量子比特系统和量子比特-量子 qutrit 系统中，局部循环信道会完全消除两个子系统之间的纠缠。

像这样完全消除了纠缠的量子信道 $\mathcal{T}\equiv\mathcal{T}_A$ 称为纠缠破坏信道，这意味着对于每个双体态 $\rho_{AB}\in\mathrm{D}\left(\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}\right)$，$(\mathcal{T}_A\otimes\mathrm{id}_B)(\rho_{AB})$ 都是可分的。在量子比特维数系统中，任意量子信道都是纠缠破坏的

当且仅当其 Choi 表示是可分的 [23]。接下来，我们将证明量子信道 Φ 是纠缠破坏信道。

定理 5.3. 在循环量子信道族 $\{\Phi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^d$ 为概率向量$\}$ 中，只有一个量子信道 Φ（对应于 Φ_λ，其中 $\lambda = (1/d, \ldots, 1/d)$）是纠缠破坏的。换言之，$\Phi_\lambda$ 是纠缠破坏的，当且仅当 $\lambda = (1/d, \ldots, 1/d)$。

证明。**(1)** 我们首先证明，量子信道 Φ_λ 的 Choi-Jamiłkowski表示为

$$J(\Phi_\lambda) = (\boldsymbol{F} \otimes \bar{\boldsymbol{F}}) \left(\sum_{i,j=0}^{d-1} \alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda}) |ii\rangle\langle jj| \right) (\boldsymbol{F} \otimes \bar{\boldsymbol{F}})^\dagger,$$

其中

$$\alpha_\mu(\boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \omega^{k\mu}.$$

相对于第二子系统，部分转置的Choi-Jamiłkowski表示 $J(\Phi_\lambda)^\Gamma$的所有特征值集合为

$$\left\{ [\alpha_0(\boldsymbol{\lambda})]_{(d)}, [\pm \left|\alpha_\mu(\boldsymbol{\lambda})\right|]_{(d)} \text{ for each } \mu \neq 0 \right\}. \tag{5.2}$$

事实上，

$$\begin{aligned} J(\Phi_\lambda) &= \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \operatorname{vec}(\boldsymbol{P}^k_{\pi_0}) \operatorname{vec}(\boldsymbol{P}^k_{\pi_0})^\dagger \\ &= (\boldsymbol{F} \otimes \bar{\boldsymbol{F}}) \left(\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \operatorname{vec}(\Omega^k) \operatorname{vec}(\Omega^k)^\dagger \right) (\boldsymbol{F} \otimes \bar{\boldsymbol{F}})^\dagger, \end{aligned}$$

其中，第二个等号成立是因为式（3.6）。利用 $\Omega^k = \sum^{d-1}{}_{i=0}\, \omega^{ki} |i\rangle\langle i|$ 和 $\operatorname{vec}(\Omega^k) = \sum^{d-1}{}_{i=0}\, \omega^{ki} |ii\rangle$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \operatorname{vec}(\Omega^k) \operatorname{vec}(\Omega^k)^\dagger = \sum_{i,j=0}^{d-1} \left(\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \omega^{k(i-j)} \right) |ii\rangle\langle jj| = \sum_{i,j=0}^{d-1} \alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda}) |ii\rangle\langle jj|,$$

其关于第二子系统的部分转置（记为 Γ）为

$$\left(\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \operatorname{vec}(\Lambda^k) \operatorname{vec}(\Lambda^k)^\dagger \right)^\Gamma = \sum_{i,j=0}^{d-1} \alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda}) |ij\rangle\langle ji| =: \boldsymbol{M}.$$

Then

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\dagger = \sum_{i,j=0}^{d-1} \left|\alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda})\right|^2 |ij\rangle\langle ij| \Longrightarrow |\boldsymbol{M}| = \sum_{i,j=0}^{d-1} \left|\alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda})\right| |ij\rangle\langle ij|$$

因此，$|\boldsymbol{M}|$ 的特征值集合为

$$\{\left|\alpha_{i-j}(\boldsymbol{\lambda})\right| : i, j = 0, \ldots, d-1\}.$$

因此，$\boldsymbol{M}$ 的特征值集合为

$$\left\{(\alpha_0(\boldsymbol{\lambda})=1/d)_{(d)},\left(\pm\left|\alpha_\mu(\boldsymbol{\lambda})\right|\right)_{(d)}\ \text{for each}\ \mu\neq 0\right\}.$$

（2）在族 $\{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}:\ \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^d$ 是一个概率向量$\}$ 中，我们证明 Φ 是唯一的纠缠破坏量子信道。事实上，根据上述推理可知，当且仅当 $\left|\alpha_\mu\right|=0$ 对所有 $\mu\neq 0$ 成立时，M 是半正定的。这意味着 $\alpha_\mu=0$ 对所有 $\mu\neq 0$ 成立。唯一的解是 $\lambda_k=^1\mathrm{d}$ 对所有 $\mathrm{k}=0,\ 1,\ \ldots,\ \mathrm{d}-1$ 成立。总之，当且仅当 $\lambda_k=^1\mathrm{d}$ 对所有 $\mathrm{k}=0,\ 1,\ \ldots,\ \mathrm{d}-1$ 成立时，$\mathrm{J}(\Phi_{\boldsymbol{\lambda}})^\Gamma\geqslant 0$。换言之，当且仅当 $\boldsymbol{\lambda}\neq(1/\mathrm{d},\ \ldots,\ 1/\mathrm{d})$ 时，$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}$ 不是纠缠破坏量子信道。通过 Klaus 表示与 Choi 表示之间的关系，我们可以计算出 $\mathrm{J}(\Phi)$ [24] 的表达式。事实上，通过 $\mathrm{P}_{\pi_0}=\mathrm{F}\Omega\mathrm{F}^\dagger$，

$$\begin{aligned}J(\Phi) &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k)\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k)^\dagger=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{F}\Omega^k\boldsymbol{F}^\dagger)\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{F}\Omega^k\boldsymbol{F}^\dagger)^\dagger\\ &= (\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})\left(\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{vec}(\Omega^k)\,\mathrm{vec}(\Omega^k)^\dagger\right)(\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})^\dagger,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由恒等式 $\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{AXB})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\,\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{X})$ 得出的。事实上，经过简单计算，我们可以得到以下结果

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{vec}(\Omega^k)\,\mathrm{vec}(\Omega^k)^\dagger=\sum_{i=0}^{d-1}|ii\rangle\langle ii|=\sum_{i=0}^{d-1}|i\rangle\langle i|\otimes|i\rangle\langle i|,\tag{5.3}$$

这是一个可分算子。由于$J(\Phi)$ 与可分算子局域幺正等价，因此$J(\Phi)$ 也是可分的。由此可知，Φ 是纠缠破坏的。 □

注 5.4。 我们也可以根据定义 $J(\Phi)$ 推导出 [24]。循环信道 Φ 的 Choi 表示为 $J(\Phi):=\Phi\otimes\mathrm{id}(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)\,\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)^\dagger)$，其中 $\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)=\sum_{i=1}^d|ii\rangle$。由定理5.1，可得

$$\begin{aligned}\Phi\otimes\mathrm{id}(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)^\dagger) &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\mathrm{Tr}_A\left(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)\mathrm{vec}(\mathbb{1}_d)^\dagger\left(\boldsymbol{P}_{\pi_0}^{-k}\otimes\mathbb{1}_B\right)\right)\\ &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\sum_{i,j=1}^{d}\mathrm{Tr}_A\left(|ii\rangle\langle jj|\left(\sum_{p=1}^{d}|p\rangle\langle\pi_0^k(p)|\otimes\mathbb{1}_B\right)\right)\\ &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\sum_{i,j,p=1}^{d}\mathrm{Tr}_A\left(\left(|i\rangle\langle j||p\rangle\langle\pi_0^k(p)|\right)\otimes|i\rangle\langle j|\right)\\ &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k\otimes\boldsymbol{P}_{\pi_0}^k.\end{aligned}$$

最后，以下恒等式成立：

$$(\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})\left(\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{vec}(\Omega^k)\,\mathrm{vec}(\Omega^k)^\dagger\right)(\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})^\dagger=(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F})\left(\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\Omega^k\otimes\Omega^k\right)(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F})^\dagger$$

这等价于

$$(\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})\left(\sum_{i=0}^{d-1}|ii\rangle\langle ii|\right)(\boldsymbol{F}\otimes\bar{\boldsymbol{F}})^{\dagger}=(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F})\left(\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\equiv 0(\mod d)}}^{d-1}|ij\rangle\langle ij|\right)(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F})^{\dagger}.$$

因此，$J(\Phi)$ 是可分的，因此 Φ 是纠缠破坏的。

C推论 5.5. 对于任意双体纠缠态 $\rho_{AB}\in\mathrm{D}\left(\mathbb{C}^{d_A}\otimes\mathbb{C}^{d_B}\right)$，有 t

$$(\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_A}\otimes\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_B})(\rho_{AB})$$

仍然是纠缠的，只要概率向量 $\boldsymbol{\lambda}_A\in\mathbb{R}^{d_A}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_B\in\mathbb{R}^{d_B}$ 都不是均匀分布 .

证明。 该证明可直接由定理5.3得出。 □

6 结论

我们研究了混合置换信道的一个子类——循环量子信道，并刻画了其基本性质。这些信道不仅能为 ℓ_p- 范数（$p=1,2$）相干性度量提供更紧的界，还解决了巴格曼不变量集的刻画问题。此外，我们分析了循环量子信道在双体系统中的作用，并揭示了这种信道的一项显著特性：作为纠缠破坏信道，它只需少量克劳斯算子，就能以较小代价完全消除量子纠缠。

鉴于循环格拉姆矩阵在刻画巴格曼不变量方面发挥着关键作用，我们提出探究是否还存在其他量子循环通道族。考虑到循环矩阵独特的谱性质和结构性质，我们预计量子循环信道将在多个领域得到广泛应用。

致谢

本研究得到浙江省自然科学基金资助，项目编号：LZ23A010005。

数据可用性声明 本文未涉及相关数据。

作者贡献声明 B.X. 和 L.Z. 撰写了论文正文，B.X. 制作了图 1-2。所有作者均审阅了论文。

参考文献

[1] M.A. Nielsen，I.L. Chuang，《量子计算与量子信息》，剑桥大学出版社，2010。[2] R. Takagi，K. Wang，M. Hayashi，《信道资源理论在通信场景中的应用》，《物理评论快报》124，120502（2020）。[3] D.P. Divincenzo，《量子计算》，《科学》270(5234)，255-261（1995）。[4] J. Maziero，L.C. Celeri，R.M. Serra 等，《退相干下的经典与量子关联》，《物理评论A辑》80(4)：044102（2009）。[5] S. Khatri，K. Sharma 和 M.M. Wilde，《广义振幅阻尼信道的信息论方面》，《物理评论A辑》102，012401（2020）。[6]C. Piveteau，《使用受限量子计算机模拟量子电路》，arXiv:2503.21773[7] C.H. Bennett，G. Brassard，C. Crépeau 等，《通过经典信道和爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道传送未知量子态》，《物理评论快报》70，1895（1993）。[8] C.H. Bennett，G. Brassard，《量子密码学：公钥分发与抛硬币》，《理论计算机科学》560：7-11（2014）。[9] L. Zhang 和 M.J. Zhao，《用于估计量子相干性的混合置换信道》，《欧洲物理杂志Plus》139，38（2024）。[10] T. Baumgratz，M. Cramer，M.B. Plenio，《相干性的量化》，《物理评论快报》113，140401（2014）。[11] C. Fernandes，R. Wagner，L. Novo 和 E.F. Galvão，《量子虚性的酉不变见证》，《物理评论快报》133，190201（2024）。[12] M-S. Li 和 Y. Tan，《量子虚性的 Bargmann 不变量》，《物理评论A辑》111，022409（2025）。[13] L. Zhang，B. Xie，B. Li，《Bargmann 不变量集合的几何》，《物理评论A辑》111，042417（2025）。[14] J. Xu，《Bargmann 不变量的数值域》，《物理快报A辑》565，131091（2026）。[15] S.S. Pratapsi，J. Gouveia，L. Novo，E.F. Galvão，《Bargmann 不变量的初等刻画》，《物理评论A辑》112，042421（2025）。

[16] I. Kra, S.R Simanca，关于循环矩阵，美国数学会通报，**59**(3),368-377(2012).[17]M.M Wolf, D. Perez-Garcia，量子信道的逆特征值问题，arXiv:1005.4545.[18] R. Kukulski, I. Nechita, L. Pawela 等，生成随机量子信道，数学物理杂志62(6), 062201 (2021).[19] R.M. Gray，托普利茨矩阵与循环矩阵：综述，《通信与信息理论前沿与趋势》，2(3): 155-239,(2006).[20] L. Zhang, D. Wu, M.J. Zhao 等，不确定性关系与受约束的二次规划，《物理学文摘》**99**, 065103 (2024).[21] A. Chefles, R. Jozsa 和 A. Winter，关于量子态集合之间物理变换的存在性，国际量子信息杂志**2**(1),11-21(2004).[22] A. Peres，密度矩阵的可分性判据。《物理评论快报》**77**, 1413 (1996).[23] M. Horodecki, P.W. Shor, M.B. Ruskai，纠缠破坏信道，《数学物理评论》15(6), 629-641(2003).[24] J. Watrous，量子信息理论，剑桥大学出版社，2018。