arXiv:2601.16488v1 [cs.GT] 23 Jan 2026

大型市场中的匿名定价*

Yaonan Jin† Yingkai Li‡

摘要

我们研究卖方将 k 件相同单位商品出售给事前异质的单位需求买家时的收益最大化问题。尽管在一般的多单位环境中，匿名定价的表现可能比最优机制差 Θ个对数k倍，但我们证明，在大市场中这种悲观情形会消失；在这类市场中，没有任何单个买家占最优收益中不可忽略的份额。在（准）正则性条件下，匿名定价可实现相对于最优机制的 $2+O\left(1/\sqrt{k}\right)$ 近似；最坏情形比率在 $k=1$ 时达到约 2.47 的最大值，并随着 k 增长而趋近于 2。这表明，在大市场中，三级价格歧视带来的收益有限。

关键词—匿名定价、三级价格歧视、大市场、近似**JEL 分类代码—** D44，D47，D83

*这项工作历经数年逐步完善，并受益于许多同事的意见。我们尤其感谢 Yiding Feng、Shunhua Jiang、Pinyan Lu、Tim Roughgarden 和 Hengjie Zhang，他们的讨论为这项工作带来了灵感。Yaonan Jin 感谢香港科技大学创业基金提供的资助，Yingkai Li 感谢新加坡国立大学创业基金提供的资助。

†香港科技大学。邮箱：jinyaonan1996@gmail.com
‡新加坡国立大学。邮箱：yk.li@nus.edu.sg

1 引言

在单物品拍卖中，近期理论研究得出了一个极具稳健性的见解：简单的匿名定价机制，其表现几乎可以媲美完全最优的机制。具体而言，Alaei 等人(2019)证明，在标准正则性条件下，尽管偏好存在异质性，匿名定价仍能实现最优收益的常数因子近似。[1] 这一结果为匿名定价在实践中的广泛应用提供了有力的理论依据；在实践中，简单、透明且易于实施往往至关重要。

然而，这一积极结论的成立，关键取决于单物品环境。当卖方向具有单位需求的代理人供应多个相同单位商品时，匿-名定价的(2009)；Jin 等人(2022)的研究表明，在 k单位拍卖中，与最优机制相比，匿名定价可能导致数量级为 $\Theta(\log k)$的最坏情况下的乘法收益损失。随着供给增加，这一差距会无限扩大，这表明匿名定价在多单位环境中的稳健性存在根本局限。

这一局限并非仅仅是理论上的。在许多具有重要经济意义的市场中，卖方经常面对大量且变化不定的供给，而非单个不可分割的物品。零售商销售由数百万件相同单位商品构成的库存；数字市场向大量买家分发标准化商品；平台大规模分配广告展示或数据访问权；科技公司则向大量消费者授权软件。在这类情形下，供给参数 k 自然很大，而匿名定价的最坏情况下的低效性恰恰会在此时变得最为显著。

在本文中，我们在大市场假设下，恢复了具有大量 k供给的多单位拍卖中匿名定价的近似最优性。为了直观说明该假设以及我们的主要近似结果，我们将通过一个简单示例来说明匿名定价在多单位拍卖中的损失。

例 1。 考虑向 k 个代理人出售 k 单位商品。每个代理人 i 的价值都确定为 $\frac{1}{i}$。最优机制以 $\frac{1}{i}$ 的价格向代理人 i 出售一个单位，收益为 $\sum_{i\in[k]} \frac{1}{i} = \Theta(\log\ k)$。然而，对于匿名定价机制，在任意价格 $\frac{1}{i}$ 下的销售数量都是 i，收益为 1。 –

在这个例子中，巨大的差距源于收益极度集中在一个小到几乎可以忽略的代理人群体中。单个代理人贡献的收益为一阶量级，而单位平均收益仅为 $O(\log k/k)$。因此，最优机制依赖于精细定制的价格，从少数高价值代理人那里提取剩余；而匿名定价则被迫在从这些代理人处获得的收益与向大量低价值买家销售之间进行权衡。

[1]紧的近似比由 Jin 等人 (2019、2020) 推导得出，约为 2.62。

这种极端的收益集中正是我们的大市场假设所排除的情形。在拥有众多潜在买家的竞争性市场中，没有任何单个代理人——或小规模代理人子集——占据总收益中不可忽略的份额。相反，收益分散在众多代理人之间，且相对于总市场规模而言，边际贡献很小。在这一自然假设下，该例所展示的低效率得以缓解，即使供给很大，匿名定价机制也能实现常数因子近似。此外，我们的结果还扩展到了具有拟正则分布的环境（Feng and Jin，2025），这是对标准正则性假设（Myerson，1981；Bulowand Roberts，1989）的推广。这为以下现象提供了理论解释：尽管最坏情形界较为悲观，简单的匿名定价机制在大市场中仍能保持良好表现。

1.1 结果与技术

我们的论文研究了向 k 名异质代理人出售 n件同质物品的问题，其中代理人事前具有异质性，且对物品有单位需求。卖方的目标是最大化期望收益。我们假设代理人的价值分布满足（准）正则性，正如Myerson（1981）；Alaei 等人 （2019）；Feng and Jin （2025）。

我们模型中的一个关键假设是大市场假设。形式化地说，对于 ε，若对任意代理人 $i \in [n]$而言，来自单个代理人的最优收益 i 不超过来自全部 n名代理人的最优收益的 ε，则称市场是 $\varepsilon > 0$ -大市场。该假设体现了市场中的竞争性；在本文中，我们将主要关注大市场极限，此时 $\varepsilon \to 0$。

主要定理。 在大市场和（准）正则性假设下，对于 k单位拍卖，匿名定价可实现最优收益的（$2 + O(1)/\sqrt{k}$）-近似。此外，最坏情形近似比在 $k = 1$时达到最大值2.47，且对于任意 $k \geq 2$，该比值至少为2 。

证明依赖于将截断帕累托分布作为最坏情形的归约，以及一种用于量化次序统计量的新方法，该方法用于界定最坏情况差距。

归约到最坏情形实例。我们证明，在 k单位拍卖中，在大市场和正则性假设下，可以将任意单个代理人的价值分布分解为一组规模较小的代理人，每个代理人都具有截断帕累托分布。请注意，文献中通常将截断帕累托分布称为三角分布（例如Alaei 等人，2019），因为这些分布的收益曲线呈三角形。

在我们的构造中，我们创建了截断帕累托分布，使得在最优收益机制和匿名定价机制下，这些代理人对收益的贡献几乎相同。此外，将代理人拆分为更小的代理人后，大市场假设仍然成立，因为拆分后每个代理人对收益的贡献只会减少。因此，我们证明了最坏情形呈现为截断帕累托分布的形式（命题 2）。

最坏情形约化的一个优点是，每个截断帕累托分布仅由两个参数决定，并且针对这些分布的收益最优机制是顺序挂牌定价机制。这使我们能够将最优收益和匿名定价机制都表示为次序统计量的函数，这与Jin 等人(2020,2022).

大市场中的次序统计量。 在本文中，我们证明，在大市场假设下，所有高阶统计量基本上都可以由一阶统计量确定（命题 3）。关键的观察是，在任意给定的价格下，在大市场中，某个买家愿意支付该价格通常是罕见事件。因此，超过该价格的买家人数，是许多个“很小”的独立概率之和。在这种情况下，一个标准的大市场启发式认为，这一人数几乎就像一个简单的随机计数过程，由单一的聚合参数决定——大致来说，就是没有任何人超过该价格的总体概率。一旦知道了这一聚合概率，出现至多一次超越事件、至多两次超越事件等情况的概率（这恰好就是高阶统计量）便基本确定了。这一启发式之所以并非完全精确，唯一的原因在于：当我们通过重复抽样来近似不同的超越事件时，可能会因对同一买家“重复计数”而产生轻微的依赖性；但在大市场中，每位买家超过该价格的概率都非常小，因此这类碰撞可以忽略不计。这就是为什么在大市场假设下，整组高阶统计量都可以用一阶统计量的函数来很好地近似。

借助对大市场中次序统计量的刻画，匿名定价的收益、最优收益以及最坏情况差距，都可以由第一阶次序统计量的分布唯一确定。这使我们能够以闭式推导最坏情形近似比。随后，通过界定最坏情形近似比的渐近阶，即可得到我们的主要结果。

1.2 相关工作

算法博弈论领域对简单机制近似保证的研究由来已久，最早可追溯至 Hartline 和 Roughgarden（2009）。相关文献重点研究了多种简单机制，例如二价拍卖（Bulow 和 Klemperer，1996）、顺序标价机制（如 Yan，2011）、匿名定价（如 Alaei 等人，2019）等。后续研究将这些结果扩展至多单位环境（如 D¨utting 等人，2016；Jin 等人，2022）、多物品拍卖（如 Chawla 等人，2010；Li 和 Yao，2013；Hart 和 Nisan，2017；Cai 等人，2021；Cai 和 Zhao，2017；Jin 和 Lu，2024）、具有预算约束等非线性效用情形（如 Cheng 等人，2018；Feng 等人，2019、2023），甚至扩展到了拍卖环境之外（如 D¨utting 等人，2019）。除理论视角外，Coey 等人（2021）以及 DellaVigna 和 Gentzkow（2019）的研究表明，这些简单机制在现实世界数据中往往也表现良好。

本文聚焦于匿名定价机制。在单物品环境中，Alaei 等人(2019证明，匿名定价相对于最优收益至少具有 $e \approx 2.72$-近似保证。Jin 等人（2019、2020）将这一近似比改进为 2.62，并证明该界是紧的。相关地，Bergemann 等人(2022) 证明，如果所有代理人的价值分布具有共同支撑集，那么匿名定价可实现相对于最优收益的 2-近似。Hartline 和 Roughgarden (2009)；Jin 等人 (2022) 证明，在 k单位拍卖中，匿名定价的紧近似比为 $\Theta(\log k$。与现有文献相比，本文的主要贡献在于聚焦大市场假设，并证明即使在多单位拍卖中，匿名定价也能实现常数近似。

大市场假设广泛应用于各种场景，例如预算可行采购拍卖（如 Anari 等人，2018；Jalaly 和 Tardos，2021）、均衡质量（如Swinkels，2001；Cole 和 Tao，2016；Feldman 等人，2016），以及（广义）在线匹配（如Mehta 等人，2007）。在这些论文中，与我们最相关的是Swinkels（2001），该文关注福利目标，并证明在大市场假设下，简单拍卖能够实现近乎最优的福利保证。

2 模型

一位委托人出售 $k \geq 1$ 件同质物品给 n 位不同的代理人，以最大化期望收益。所有代理人均为单位需求，对于每位价值为 $v_i \in \mathbb{R}_+$ 的代理人 i，其以概率 $x_i \in [0,1]$ 获得一件物品并支付价格 $p_i \in \mathbb{R}$ 时的效用为

$$u_i(x_i, p_i; v_i) = v_i \cdot x_i - p_i.$$

每位代理人 i 的私人价值 v_i 均独立地从分布 F_i中抽取。先验分布 $F = \times_{i\in[n]} F_i$ 是公开已知的。我们还使用 F 表示拍卖设计实例。委托人的目标是最大化总收益 $\sum_i p_i$。

机制 根据显示原理（Myerson，1981），只需关注显示机制，不失一般性。一个显示机制 $M = (x,\ p)$ 由分配规则 $x:\ \mathbb{R}^n \to [0,1]^n$ 满足 $\sum_i x_i(v) \leq k$，以及支付规则 $p:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$确定。显示机制 M 必须满足激励相容性（IC）和个体理性（IR）约束：对于任意代理人 i 和任意估值 $v_i,\ v_i'$,

$$\mathbf{E}_{v_{-i}\sim F_{-i}}[v_i \cdot x_i(v_i, v_{-i}) - p_i(v_i, v_{-i})] \geq \mathbf{E}_{v_{-i}\sim F_{-i}}\left[v_i \cdot x_i(v_i', v_{-i}) - p_i(v_i', v_{-i})\right], \tag{IC}$$

$$\mathbf{E}_{v_{-i}\sim F_{-i}}[v_i \cdot x_i(v_i, v_{-i}) - p_i(v_i, v_{-i})] \geq 0. \tag{IR}$$

给定任意激励相容且个体理性的机制 M，我们用 $M(F)$ 表示在分布 F 下 M 的期望收益。我们将最优收益记作

$$\mathrm{OPT}(F) = \max_{M \text{ is IC, IR}} M(F).$$

在我们的论文中，除了收益最优机制之外，还有两个特别值得关注的机制类别。

- **顺序挂牌定价**。 在顺序标价机制中，委托人为每位代理人 i设定个性化价格 p_i 。委托人按照 p_i 递减的顺序，向代理人 i 提出 p_i 要么接受要么放弃的报价，直到供给耗尽。令 $\mathrm{SPP}(p, F)$ 表示给定价格向量 p 时顺序挂牌定价的期望收益。

- **匿名定价**。 在匿名定价机制中，委托人为所有代理人设定一个匿名价格 p。委托人按照任意顺序，向每位代理人 i 提出 p 要么接受要么放弃的报价，直到供给耗尽。令 $\mathrm{AP}(p, F)$ 表示给定匿名价格 p时匿名定价的期望收益。

我们用 $\mathrm{SPP}(F) = \max_p \mathrm{SPP}(p, F)$ 和 $\mathrm{AP}(F) = \max_p \mathrm{AP}(p, F)$ 分别表示从顺序标价机制和匿名定价机制这两个类别中能够获得的最优收益。

收益曲线 本文中的一种实用方法，是通过分位数空间中的收益曲线进行分析。具体而言，对于每个代理人 i ，其分布为 F_i，值 v_i 对应的分位数定义为 $q_i(v_i) = \mathbf{Pr}_{z\sim F_i}[z \geq v_i]$。相应地，我们可以将分位数 q_i对应的值定义为 $v_i(q_i) = \inf\{v : F_i(v) \geq 1 - q_i\}$。基于分位数的定义，我们进而可以将分位数空间中的收益曲线定义为

$$R_i(q_i) = q_i \cdot v_i(q_i).$$

根据收益曲线的定义，令 q_i^* 为使收益最大化的垄断分位数，即 $q_i^* = \mathrm{argmax}_q R_i(q)$。当存在多个最优解时，我们通过选择最小的 q_i^*来打破平局。

定义 1（正则性）。 对于所有代理人 i，分布 F_i 均满足正则性。也就是说，对于所有代理人 i，收益曲线 $R_i(q_i)$ 关于 q_i 是凹函数。

此处的正则性假设与Myerson（1981）中的正则性假设相同，其中 $\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ 关于 v_i是非递减的。定义1 中的表述由Bulow and Roberts（1989）提出，可以解释为服务代理人的边际收益随分位数弱递减。

定义 2（拟正则分布）。若分布 F 的条件期望虚拟价值函数 $\phi_{\mathrm{CE}}(v) = \mathbf{E}[\phi(\hat{v}) \,|\, \hat{v} \le v]$ 关于 v弱递增，则称其为拟正则分布。

大市场 我们关注大市场实例。也就是说，任何单个代理人都无法贡献最优收益中的显著份额。

定义 3（ε-大市场）。对于任意 $\varepsilon \in$，如果对于任意代理人 i，R_i（q_i^*）$\le \varepsilon \cdot$最优收益（F），则实例 F 是 ε-大市场。

本文聚焦于大市场假设，即考虑 $\varepsilon \to 0$ 的极限下的 ε-大市场。

3 匿名定价的近似

本节将阐述我们的核心结果：在满足大市场假设的多单位设置中，匿名定价机制相对于收益最优拍卖的表现。此前的研究表明，在最坏情况下，匿名定价可能造成数量级为$\Theta(\log k)$ 的收益损失，适用于 k单位拍卖（Hartline 和 Roughgarden，2009；Jin 等人，2022），而我们证明，在大市场假设下，这一悲观界限并不成立。我们的分析表明，随着市场规模扩大，即使有多个单位可供出售，匿名定价机制的理论依据也会显著增强。

我们首先介绍主要理论贡献，该贡献刻画了匿名定价与最优机制之间的最坏情况近似比。在本节中，我们始终在价值分布满足准正则性假设以及第 ε 节引入的-大市场条件下，2考察 $\varepsilon \to 0$ 时的极限情形。

定理 1。对于满足大市场假设的拟正则分布，匿名定价相对于最优收益的最坏情况近似比为

$$\max_F \frac{\mathrm{OPT}(F)}{\mathrm{AP}(F)} = 2 + \frac{O(1)}{\sqrt{k}}.$$

此外，当 $k = 1$ 时，最坏情况差距在2.47 处达到最大值。

该定理表明，在大市场中，匿名定价机制能够以常数因子近似最优收益，其近似比为 $2+O(1/\sqrt{k})$。值得注意的是，随着单位数量变大，该界渐近地趋近于 2；而在出售单个单位时，近似比约为 2.47，达到最大值。

这一结果与不作大市场假设的最坏情形分析有着根本性的不同。在标准多单位拍卖设置中，匿名定价与最优机制之间的收益差距会随着单位数量增长至 $\Theta(\log k)$，这表明

随着市场规模扩大，简单定价机制的表现会越来越差。为正式阐明这一对比，我们回顾文献中的以下结果：

命题1 (Jin 等人，2022)。 对于任意估值正则分布，最优收益与统一定价之间的最坏情况差距为 $\Theta(\log k)$。

我们将这一结果推广到更广泛的拟正则分布类别：

推论 1。 对于任意估值拟正则分布，最优收益与统一定价之间的最坏情况差距为 $\Theta(\log k)$。

若不满足大市场假设，这一对数差距会随着供给增加而无限增大，这表明匿名定价在大规模市场中表现不佳。正是这一悲观结论被我们的定理1 在将考察范围限制于大市场时推翻了。

在分析中，我们采用如下归一化：匿名定价的最优收益等于一。在此归一化条件下，根据推论 1，最优收益不超过 $\log k$。这一归一化带来了大市场中代理人分布的一项关键性质，该性质将在分析中发挥重要作用。令 γ 为推论 1 中的常数，使得最优收益与统一定价之间的最坏情况差距至多为 $\gamma \cdot \log k$。

推论 2。 对于任意 $p \geq \frac{1}{k}$，在具有拟正则分布的 ε-大市场中，我们有 $F_i(p) \geq 1 - \varepsilon \cdot \gamma k$ 对数 k。

这一推论证实，在大市场中，代理人的估值具有足够的分散性，因此任一特定代理人的估值超过合理价格阈值的概率始终较低。这一性质反映了大市场的基本经济特征：没有任何单个代理人的偏好能够主导市场结果。

现在，我们将着手构建建立主要结果所需的技术工具。定理 1的证明综合了我们将在后续小节中发展的两个关键组成部分。首先，在第 3.1节中，我们证明最坏情况实例可以约化为代理人的价值分布呈特定三角形形式的环境（命题2）。这一约化保留了收入优化问题的基本特征，同时显著简化了我们的分析。其次，在第 3.2节中，我们发展出刻画大市场中次序统计量的新技术，证明高阶统计量可以由一阶统计量的函数精确近似（命题 3）。综合而言，在第 3.3 节和第 3.4节中，这些技术基础使我们能够推导匿名定价与最优机制之间收益差距的紧致界限，并最终建立定理1中所述的近似保证。

3.1 化简为三角实例

在本节中，我们给出正式的归约，证明在大市场中，最坏情况差距出现在三角分布处。

定义 4（三角分布）。对于任意 $q^* \in [0,1]$ 和任意 $r^* > 0$，三角分布 $\mathrm{Tri}_{r^*,\ q^*}$ 具有累积分布函数[2]

$$\mathrm{Tri}_{r^*,q^*}(v) = \begin{cases} 1 & v \geq \frac{r^*}{q^*}; \\ 1 - \frac{1}{1+\frac{v}{r^*}(1-q^*)} & v \in [0, \frac{r^*}{q^*}). \end{cases}$$

三角分布是正则分布的特殊情形：在最高估值处存在一个点质量，而所有较低估值对应的虚拟价值均为负常数。Myerson(1981) 表明，收益最优机制只会将物品出售给具有最高非负虚拟价值的代理人。这相当于针对每个代理人，在其最高估值处设定价格。

引理1。对于三角分布，收益最优机制是顺序发布价格机制。

在下一个命题中，我们证明，对于满足大市场假设的任意拟正则分布，都可以构造出同样满足大市场假设的三角分布，同时几乎保持近似保证不变。

命题2。对于任意 $k \geq 1$、$\varepsilon \in (0,\ \gamma k^{\frac{1}{\log k}})$ 以及任意实例 F，其拟正则分布满足 ε-大市场假设，则存在另一个实例 F，其三角分布同样满足 ε-大市场假设，且匿名定价的近似比至多降低 $\frac{1+\varepsilon\cdot\gamma k}{\log k\,(1-\varepsilon\cdot\gamma k\log k)^2}$。

在 $\varepsilon \to 0$ 的极限情形下，三角分布是使匿名定价的近似比达到最大值的精确最坏情形分布。

为证明命题 2，我们首先将最坏情形分布缩减为负虚拟价值为常数的分布。具体而言，若某个分布 F 的虚拟价值函数满足以下条件，我们就称其为负虚拟价值常数分布：存在一个常数 $z < 0$，使得只要 $\phi(v) \leq 0$，就有 $\phi(v) = z$。

引理2。对于任意满足大市场假设、且具有拟正则分布的实例 F，都存在另一个具有负虚拟价值常数分布的实例 F，该实例同样满足大市场假设，并且其近似比不小于原实例。

证明。对于任意代理人 i 和任意分布 F_i，令 q^* 为垄断分位数，即具有非正虚拟价值的最小分位数。考虑一个分布 $\widehat{F}_i$，使得对于任意 $q < q^*$，$\widehat{R}_i(q_i) = R_i(q_i)$，并且对于任意 $q \in [q^*, 1]$，$\widehat{R}_i(q_i) = \frac{1-q_i}{1-q^*}$。分布 $\widehat{F}_i$ 的准正则性意味着 $\widehat{F}_i$ 一阶随机占优于 F_i。对所有 i 重复这一构造后，统一定价带来的期望收益弱下降。

[2] 在 $q^* = 0$ 的情形下，稍微滥用一下记号，我们将 $\frac{r^*}{q^*}$ 视为 $+\infty$，且 $v \geq \frac{r^*}{q^*}$ 永不成立。

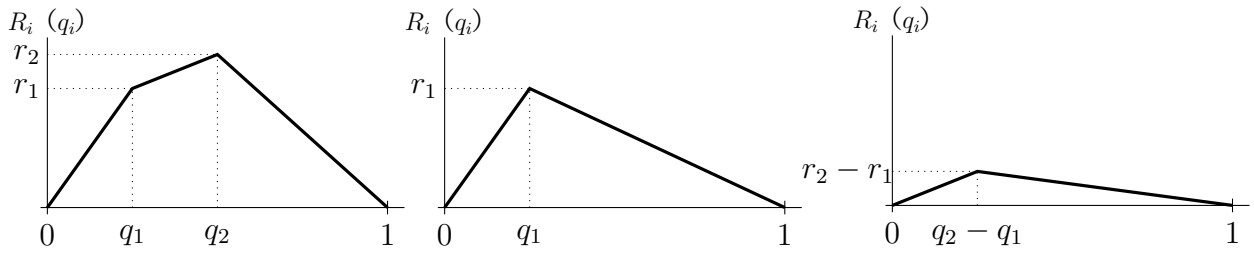

图 1：将收益曲线分解为三角形收益曲线。

此外，请注意，在最优机制中，物品不会分配给虚拟价值为负的代理人。在上述构造中，对于 F 和 F，正虚拟价值上的分布相同$\widehat{}$。因此，最优收益保持不变。这意味着大市场假设仍然成立，且近似比弱上升。

□

命题的证明 2。 根据引理 2，不失一般性，我们可以只考虑具有恒定负虚拟价值的分布。此外，在 ε-大市场中，不失一般性，可以假设实例中有 N 个服从三角分布 $\mathbf{Tri}_{\frac{\varepsilon}{k},\varepsilon}$ 的代理人，其中 $N \to \infty$，因为加入最高估值为 $\frac{1}{k}$ 的代理人不会增加匿名定价的收益。然而，加入这些代理人可确保在收益最优机制中，所有 k 个单位都至少能以价格 $\frac{1}{k}$ 售给这些代理人。

–

接下来，我们正式介绍归约实例。请注意，对于拟正则分布，收益曲线通常并非凹函数。我们将代理人 i 的熨平收益曲线记为 R_i，它是 R_i的凹包。首先，对所有代理人 i 的熨平收益曲线进行离散化，并用分段线性函数加以近似。具体而言，每条离散化后的收益曲线都可以用两组参数序列 $\{r_i^{(0)}, r_i^{(1)}, \ldots, r^{(Z_i)}{}_i\}$ 和 $\{q_i^{(0)}, q_i^{(1)}, \ldots, q^{(Z_i)}{}_i\}$ 表示，其中 $q_i^{(0)} = 0, q^{(Z_i)}{}_i = q_i^*$，$q_i^{(z)}$ 是递增序列，并且对于任意 $z \in [Z_i]$，都有 $r_i^{(x)} = R_i(q_i^{(z)})$。我们将代理人 i 的收益曲线 R_i 分解为 Z_i 条收益曲线，这些曲线分别对应于具有三角分布的 Z_i 个代理人。具体而言，对于每个构造出的代理人 $z \in [Z_i]$，其价值分布为$\widehat{}\mathbf{Tri}_{r_i^{(z)} - r_i^{(z-1)}, q_i^{(z)} - q_i^{(z-1)}}$。我们用 F 表示构造出的实例。请注意，构造出的$\widehat{}$实例 F 仍满足大市场假设，因为 F 中的每个代理人$\widehat{}$的垄断收益都可以无限小。

$\widehat{}$**引理3.** 最优收益$(F) \geq (1 - \varepsilon \cdot \gamma k \log k) \cdot$ 最优收益(F).

证明。 我们采用 Myerson(1981) 的结果，其中期望收益等于期望$\widehat{}$虚拟价值。为了给 F 的最优收益提供一个下界，我们考虑一种受限机制，其中至多只有一个 Z_i 代理人能够赢得一件物品。因此，我们可以将这些 Z_i代理人视为一个单一代理人，其对虚拟福利的贡献等于个体虚拟福利的最大值。此外，由于存在这些额外的 N 代理人，只需计算

虚拟价值至少为 $\frac{1}{k}$ 时的虚拟福利贡献。令 z_i 为满足相应虚拟价值至少为 $\frac{1}{k}$ 的最大索引，即，

$$\frac{r_i^{(z)} - r_i^{(z-1)}}{q_i^{(z)} - q_i^{(z-1)}} \geq \frac{1}{k}.$$

令 $x_i(z)$ 表示代理人 i 的中期分配，其中其虚拟价值对应于分解后的代理人 z的区间。我们有，

$$\begin{aligned}\mathrm{OPT}(\widehat{F}) &\geq \sum_{i\in[n]}\sum_{z\in[z_i]}(1-q_i^{(z-1)})\frac{r_i^{(z)}-r_i^{(z-1)}}{q_i^{(z)}-q_i^{(z-1)}}\cdot x_i(z)\cdot(q_i^{(z)}-q_i^{(z-1)}) \\ &\geq (1-\varepsilon\cdot\gamma k\log k)\cdot\sum_{i\in[n]}\sum_{z\in[z_i]}(r_i^{(z)}-r_i^{(z-1)})\cdot x_i(z) = (1-\varepsilon\cdot\gamma k\log k)\cdot\mathrm{OPT}(F),\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为在 ε 个大市场中，我们有 $q_i^{(z)} \leq \varepsilon\cdot\gamma k\log k$. □

引理 4. AP($\widehat{F}$) $\leq \frac{1+\varepsilon\cdot\gamma k}{1-\varepsilon\cdot\gamma k}\cdot\frac{k}{\log k}\cdot$AP($F$)。

证明。对于任意代理人 i 和任意价格 $p \geq \frac{1}{k}$，令 $z_i \in [Z_i]$ 为满足 $\frac{r_i^{(z_i)}}{q_i^{(z_i)}} \leq p$ 的最大指标。给定价格 p，由于准正则性，代理人 i 愿意接受该价格的概率至少为

$$A_i(p) \triangleq \frac{r_i^{(z_i)}}{r_i^{(z_i)} + (1-q_i^{(z_i)})\cdot p} \geq \frac{r_i^{(z_i)}}{\varepsilon\cdot\gamma\log k + p} \geq \frac{r_i^{(z_i)}}{(1+\varepsilon\cdot\gamma k\log k)\cdot p},$$

其中，第一个不等式成立是因为在 ε 个大市场中，我们有 $r_i^{(z)} \leq \varepsilon\cdot\gamma\log k$；最后一个不等式成立是因为 $p \geq \frac{1}{k}$。

在分解后的实例中，对于任意 $z > z_i$，这些分解后的代理人的最大价值小于 p，因此他们绝不会接受该价格。令 $\widehat{z}_i \leq z_i$ 为满足代理人 $\widehat{z}_i$ 的最大价值至少为 p 的最大指标。愿意接受价格 p 的所有代理人的总概率至多为

$$\begin{aligned}\widehat{A_i}(p) &\triangleq \sum_{z=1}^{\widehat{z}_i}\frac{r_i^{(z)}-r_i^{(z-1)}}{r_i^{(z)}-r_i^{(z-1)}+(1-q_i^{(z)}+q_i^{(z-1)})\cdot p} \\ &\leq \sum_{z=1}^{\widehat{z}_i}\frac{r_i^{(z)}-r_i^{(z-1)}}{(1-\varepsilon\cdot\gamma k\log k)\cdot p} \leq \frac{r_i^{(z_i)}}{(1-\varepsilon\cdot\gamma k\log k)\cdot p}.\end{aligned}$$

第一个不等式成立，因为在ε-大市场假设下，对于任意 z， $q_i^{(z)} \leq \varepsilon\cdot\gamma k\log k$，且 $r_i^{(z)}$ 关于 z递增。

现在我们对 k 单位拍卖中接受的期望数量进行界定。固定匿名定价机制中的任意代理人序列，这不会影响期望收益。令 $Q_i(p)$ 和

$Q_i(p)$ 分别表示在拆分代理人之前和之后，代理人 i 在价格 p 下至少还有一个单位剩余的概率。注意，对于任意 i 和任意 p，都有 $Q_i(p) \geq \widehat{Q}_i(p)$。令 $\widehat{p} \geq \frac{1}{k}$ 为给定 F 时匿名定价所能最大化收益的最优价格，则有

$$\mathrm{AP}(\widehat{F}) \leq \widehat{p} \cdot \sum_i \widehat{Q}_i(\widehat{p}) \cdot \widehat{A}_i(\widehat{p}) \leq \widehat{p} \cdot \sum_i Q_i(\widehat{p}) \cdot A_i(\widehat{p}) \cdot \frac{1+\varepsilon \cdot \gamma k \log k}{1-\varepsilon \cdot \gamma k \log k} \leq \frac{1+\varepsilon \cdot \gamma k \log k}{1-\varepsilon \cdot \gamma k \log k} \cdot \mathrm{AP}(F). \quad \square$$

结合引理3 和引理 4，近似比至多降低一个乘法因子

$$\frac{1+\varepsilon \cdot \gamma k \log k}{(1-\varepsilon \cdot \gamma k \log k)^2}. \quad \square$$

3.2 次序统计量

根据命题 2，不失一般性地可以只考虑三角分布。此外，整个实例可以表示为次序统计量的函数。我们使用 $D_j(v)$ 表示任意 $j \in [k]$ 的第 j 阶次序统计量的累积分布函数。

回顾一下，对于每个具有三角价值分布的代理人 i，该分布可以由两个参数刻画：垄断收益 r_i^* 和垄断分位数 q_i^*。令 $v_i^* = \frac{r_i^*}{q_i^*}$ 为垄断价值。给定任意具有三角分布的实例，该实例可以由累积垄断收益函数 $R(x) := \sum_{i\in[n]:\ v_i^* \geq x} r_i^*$ 以及累积垄断分位数函数 $Q(x) := \sum_{i\in[n]:\ v_i^* \geq x} q_i^*$ 刻画。根据定义，$R(x)$ 和 $Q(x)$ 都是递减函数。此外，在大市场假设下，对于任意 $x \geq \frac{1}{k}$，我们有

$$\begin{aligned}\log D_1(x) &= \sum_{i\in[n]:v_i^*\geq x} \log \frac{x}{x+\frac{r_i^*}{1-q_i^*}} \\ &= \sum_{i\in[n]:v_i^*\geq x} -\frac{r_i^*}{x} \cdot (1+O(\varepsilon k^2 \log k)) = -\frac{R(x)}{x} \cdot (1+O(\varepsilon k^2 \log k))\end{aligned}$$

其中，第二个等式成立，是因为在 ε-大市场假设下，对于任意满足 $v_i^* \geq x$ 的代理人 i，我们有 $q_i^* \leq \frac{1}{x} k \log k$ 和 $r_i^* \leq \varepsilon k \log k$。因此，在 $\varepsilon \to 0$ 的大市场极限下，我们有

$$R(x) = x \cdot (-\ln D_1(x)). \tag{1}$$

此外，累积垄断分位数函数 $Q(x)$ 也可以确定为

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} -\frac{R'(z)}{z} \mathrm{d}z. \tag{2}$$

除了上述刻画之外，匿名定价机制的期望收益——

给定任意价格 p——也可以表示为次序统计量的一个函数，如下所示：

$$\mathrm{AP}(p, F) = p \cdot \sum_{j \in [k]} (1 - D_j(p)). \tag{3}$$

这些刻画表明，次序统计量对于量化匿名定价相较于最优收益的最坏情况差距具有重要作用。这些分析的详细内容将在后续章节中给出。在本节中，我们将证明，在大市场中，所有高阶统计量都可以由一阶统计量唯一确定。

我们将近似第 j次序统计量定义为[3]

$$\widehat{D}_j(p) = D_1(p) \cdot \sum_{0 \le t \le j-1} \frac{1}{t!} (-\ln D_1(p))^t.$$

命题 3。 给定任意 $j \in [k]$、任意参数 $\delta \le \frac{1}{4j}$和任意价格 $p > 0$，若 $F_i(p) \ge 1 - \delta$对所有 i均成立，则有

$$D_j(p) \in \left[(1 - \delta j) \cdot \widehat{D}_j(p), (1 + 2\delta j) \cdot \widehat{D}_j(p) \right].$$

在一个 ε大市场中，对于任意 $p \ge \frac{1}{k}$，有 $F_i(p) \ge 1 - \varepsilon k^2 \log k$。在 $\varepsilon \to 0$的极限情况下，我们有 $D_j(p) = \widehat{D}_j(p)$，对所有 $j \in [k]$均成立。

命题 3的证明。若 $D_1(p) = 0$，则根据定义 $D_j(p) = 0$，并且 $\widehat{D}_j(p) = 0$，因此该结论显然成立。在证明的其余部分，我们假设 $D_1(p) > 0$。此外，由于对于 $j = 1$而言这些界显然成立，因此我们关注 $j \ge 2$的情况。

注意，对于任意 $j \in [k]$ 和任意 $p > 0$，

$$\begin{aligned} D_j(p) &= \sum_{0 \le t \le j-1} \sum_{|W| = t} \left(\prod_{z \notin W} F_z(p) \right) \cdot \left(\prod_{z \in W} (1 - F_z(p)) \right) \\ &= D_1(p) \cdot \sum_{0 \le t \le j-1} \sum_{|W| = t} \left(\prod_{z \in W} \left(\frac{1}{F_z(p)} - 1 \right) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

注意到 $\prod_{i \in [n]} F_z(p) = D_1(p)$，即可得到最后一个等号。

关于 $D_j(p)$的下界。我们首先证明 $\frac{1}{F_z(p)} - 1 \ge -\ln F_z(p)$。这是因为，对于满足 $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$ 的函数$g(x)$，有 $g(1) = 0$，且对于任意 $x \in (0, 1)$，$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \le 0$。注意到对于任意 p，$F_z(p) \le 1$，所需的不等式即成立。因此，我们有

$$D_j(p) \ge D_1(p) \cdot \sum_{0 \le t \le j-1} \sum_{|W| = t} \left(\prod_{z \in W} (-\ln F_z(p)) \right). \tag{5}$$

[3]如果 $D_1(p) = 0$，我们定义 $\widehat{D}_j(p) = 0$。

设 $\Lambda = \sum_{i\in[n]} -\ln F_i(p)$，并设 $P_i = \frac{-\ln F_i(p)}{\Lambda}$。考虑从 n 个元素中有放回地抽取 t 次，其中选择元素 i 的概率为 P_i。抽取的所有 t 个元素各不相同的概率为

$$P_{\text{DISTINCT}}(t) \triangleq t! \cdot \sum_{|W|=t} \prod_{z\in W} P_i = \frac{t!}{\Lambda^t} \sum_{|W|=t} \prod_{z\in W} -\ln F_z(p).$$

代入方程（5），并注意到 $\Lambda = -\ln D_1(p)$，我们得到

$$D_j(p) - \widehat{D}_j(p) \geq D_1(p) \cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} \frac{\Lambda^t}{t!}(P_{\text{DISTINCT}}(t) - 1).$$

接下来，我们给概率 $P_{\text{COLLISION}}(t) = 1 - P_{\text{DISTINCT}}(t)$ 求上界。容易验证，对于 $t = 0$ 或 1，$P_{\text{COLLISION}}(t) = 0$。

对于 $t \geq 2$，我们首先给概率 P_i 求上界。注意，由于 $\delta \leq \frac{1}{2}$ 且对于任意 $i \in [n]$，$F_i(p) \geq 1 - \delta$，我们有 $-\ln F_i(p) \leq \frac{1}{F_i(p)} - 1 \leq \frac{\delta}{1-\delta} \leq 2\delta$。因此，$\max_{i\in[n]} P_i \leq \frac{2\delta}{\Lambda}$。通过对发生碰撞的 $\binom{t}{2}$ 对抽样应用并集界，我们得到

$$P_{\text{COLLISION}}(t) \leq \binom{t}{2} \cdot \sum_{i\in[n]} P_i^2 \leq \frac{\delta t(t-1)}{\Lambda}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\sum_{i\in[n]} P_i^2 \leq \max_{i\in[n]} P_i \cdot \sum_{i\in[n]} P_i = \max_{i\in[n]} P_i \leq \frac{2\delta}{\Lambda}$。接下来，我们将分析进一步分为两种情形。

- $\Lambda \geq j$。在这种情形下，对于任意 $t \leq j-1$，都有 $P_{\text{碰撞}}(t) \leq \delta j$，因此

$$D_j(p) - \widehat{D}_j(p) \geq -\delta j \cdot D_1(p) \cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} \frac{\Lambda^t}{t!} = -\delta j \cdot \widehat{D}_j(p).$$

- $\Lambda \leq j$。在这种情形下，由于对于 $t = 0$ 或 1，有 $P_{\text{碰撞}}(t) = 0$，因此我们有

$$D_j(p) - \widehat{D}_j(p) \geq -D_1(p) \cdot \sum_{2\leq t\leq j-1} \frac{\Lambda^t}{t!} \cdot \frac{\delta t(t-1)}{\Lambda} = -\delta\Lambda \cdot D_1(p) \cdot \sum_{0\leq t\leq j-3} \frac{\Lambda^t}{t!} \geq -\delta j \cdot \widehat{D}_j(p),$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\Lambda \leq j$ 和 $\Lambda > 0$。

结合这两种情形，我们得到所需的下界

$$D_j(p) \geq (1 - \delta j) \cdot \widehat{D}_j(p).$$

上界 $D_j(p)$。在这种情况下，我们首先证明

$$\frac{1}{F_z(p)} - 1 \leq -(1+\delta) \cdot \ln F_z(p). \tag{6}$$

首先注意，由于 $F_z(p) \geq 1-\delta$，我们有

$$\frac{1-F_z(p)}{F_z(p)} - \big(-\ln F_z(p)\big) = \int_0^{1-F_z(p)} \frac{x}{(1-x)^2}\,dx \leq 2\int_0^{1-F_z(p)} x\,dx = (1-F_z(p))^2 \leq -\delta\cdot\ln F_z(p),$$

其中，第一个不等式成立是因为 $(1-x)^2 \geq (1-\delta)^2 \geq \frac{1}{2}$ 对于 $x \leq 1-F_z(p) \leq \delta$ 和 $\delta \leq \frac{1}{4}$ 成立；第二个不等式成立是因为 $1-F_z(p) \leq \delta$ 且 $1-F_z(p) \leq -\ln F_z(p)$ 对于 $F_z(p) \in (0,1]$ 成立。重新排列各项后，公式（6）成立。将公式（6）代入公式（4），可得

$$\begin{aligned} D_j(p) &\leq D_1(p)\cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} (1+\delta)^t \cdot \sum_{|W|=t} \left(\prod_{z\in W} \big(-\ln F_z(p)\big) \right) \\ &= D_1(p)\cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} (1+\delta)^t \cdot \frac{\Lambda^t}{t!}\cdot P_{\text{DISTINCT}}(t) \leq D_1(p)\cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} (1+\delta)^t \cdot \frac{\Lambda^t}{t!}. \end{aligned}$$

这里的等式根据下界部分中的相同论证成立，而最后一个不等式成立是因为对于任意 t，$P_{\text{DISTINCT}}(t) \leq 1$。由于 $\delta \leq \frac{1}{4j}$，我们有 $\delta t \leq \delta j \leq \frac{1}{4}$，因此

$$(1+\delta)^t \leq e^{\delta t} \leq 1+2\delta t \leq 1+2\delta j.$$

结合这些不等式，可得

$$D_j(p) \leq (1+2\delta j)\cdot D_1(p)\cdot \sum_{0\leq t\leq j-1} \frac{\Lambda^t}{t!} = (1+2\delta j)\cdot \widehat{D}_j(p). \qquad \square$$

3.3 渐近上界

在本小节中，我们将证明

$$\text{OPT}(F^*) \leq \frac{2}{1-k^k/(k!\cdot e^k)} \leq \frac{2}{1-1/\sqrt{2\pi k}}.$$

最后一个不等式使用了斯特林近似。

引理 5。 最坏情形实例的一阶统计量由以下隐式函数给出：

$$1 = x\cdot\left(k - \sum_{t\in[0:k-1]} \frac{k-t}{t!}\cdot D_1(x)\cdot\big(-\ln D_1(x)\big)^t\right), \quad \forall x \geq \frac{1}{k}. \tag{7}$$

引理 5的证明。 在满足 $\text{AP}(F) = 1$这一约束的条件下，最坏情形实例满足以下条件：对于所有 $p \geq \frac{1}{k}$，均有 $\text{AP}(p,F) = 1$。这是因为，如果存在 $p \geq \frac{1}{k}$ 使得 $\text{AP}(p,F) < 1$，我们可以增大 p 处的第一阶顺序统计量，从而使最优收益增加，

且不违反 AP(F) $= 1$ 这一条件。因此，对于任意 $x \geq \frac{1}{k}$，我们有

$$1 = \mathrm{AP}(x, F) = x \cdot \sum_{j\in[1:k]} (1 - D_j(x)) = x \cdot \left(k - \sum_{j\in[1:k]} \sum_{t\in[0:j-1]} \frac{1}{t!} \cdot D_1(x) \cdot (-\ln D_1(x))^t \right)$$
$$= x \cdot \left(k - \sum_{t\in[0:k-1]} \frac{k-t}{t!} \cdot D_1(x) \cdot (-\ln D_1(x))^t \right)$$

其中第三个等式由命题3得出，最后一个等式则通过重新整理各项得到。

□

结合方程（1）、（2）和（7），我们可以推断，一阶价值累积分布函数 $D_1(x)$ 的支撑集为 supp(D_1)$= [\frac{1}{k}, +\infty]$。此外，将它们与洛必达法则结合，可进一步推出

$$R(+\infty) = 1, \qquad Q(+\infty) = 0,$$
$$R(1/k) = +\infty, \qquad Q(1/k) = +\infty.$$

事前松弛。事前松弛 EAR(F) 的概念由 Chawla 等人（2007）提出，旨在为最优收益提供一个易于处理的上界，随后由 Alaei（2014）；Yan（2011）；Alaei 等人（2019）；Jin 等人（2022）进行了广泛研究。具体而言，它将最多销售 k 个单位的事后可行性约束，放宽为一项事前约束，即所有代理人赢得物品的总概率不得超过 k。也就是说，令 $r_i(q_i)$ 表示在给定分布 F_i 且满足代理人 i 赢得一个单位的概率为 q_i这一约束下，从代理人 i 获得的最优收益，则有

$$\mathrm{EAR}(F) = \max_{q:\sum_{i\in[n]} q_i \leq k} \sum_{i\in[n]} r_i(q_i).$$

根据定义，对于任意分布 F，我们有

$$\mathrm{EAR}(F) \geq \mathrm{OPT}(F).$$

在 k 单位的设置中，当聚焦于具有三角分布的实例时，事前松弛问题的形式尤其简单。具体而言，[4]

$$\mathrm{EAR}(F) := R(Q^{-1}(k)).$$

[4]~~如果三角实例 F 的总分位数小于 k，~~ 即 $\sum_{i\in[n]} q_i < k$，那么 $Q^{-1}(k)$ 未定义；相反，EAR(F) $:= \sum_{i\in[n]} v_i q_i$。（不过，最坏情况实例 F^* 不会出现这个问题。）

这一表示的直观含义很简单。为了在满足关于销售概率的事前约束的前提下最大化 $\sum_{i\in[n]} r_i(q_i)$，最优做法是向 $r_i^* = \frac{r_i^*}{q_i^*}$ 最高的代理人销售。累积垄断收益函数 R 恰好刻画了这些代理人所贡献的收益。

渐近上界。 为了给 EAR(F^*) 求上界，我们首先引入两个辅助参数：

$$\alpha := Q^{-1}(k), \tag{8}$$
$$\beta := D_1^{-1}(e^{-k}). \tag{9}$$

注意，根据方程（1），我们有

$$R(\beta) = \beta \cdot (-\ln D_1(\beta)) = k\beta. \tag{10}$$

接下来，我们推导出一个基于 β 的 EAR(F^*) 上界。注意，

$$k \overset{(8)}{=} Q(\alpha) \overset{(2)}{=} \int_\alpha^{+\infty} \frac{(-R'(z))}{z} \cdot \mathrm{d}z \geq \int_\alpha^{\beta} \frac{(-R'(z))}{\beta} \cdot \mathrm{d}z = \frac{R(\alpha) - R(\beta)}{\beta}.$$

该不等式成立，因为在 $\beta < \alpha$ 的情况下，由于 $R(x)$ 是递减函数，我们观察到 LHS $\geq 0 \geq$RHS。$\beta \geq \alpha$ 的情况显然成立。这意味着

$$\mathsf{EAR}(F^*) = R(\alpha) \leq k\beta + R(\beta) \overset{(10)}{=} 2k\beta. \tag{11}$$

其次，实际上我们可以得到 β 的显式公式：

$$\beta = \frac{1/k}{1 - k^k/(k! \cdot e^k)} \leq \frac{1/k}{1 - 1/\sqrt{2\pi k}}. \tag{12}$$

以下是详细推导：

$$\begin{aligned}
1 &\overset{(7),(9)}{=} \beta \cdot \left(k - \sum_{t\in[0:k-1]} \frac{k-t}{t!} \cdot e^{-k} \cdot k^t \right) \\
&= \beta k \cdot \left(1 - \sum_{t\in[0:k-1]} \frac{1}{t!} \cdot e^{-k} \cdot k^t + \sum_{t\in[1:k-1]} \frac{1}{(t-1)!} \cdot e^{-k} \cdot k^{t-1} \right) \\
&= \beta k \cdot \left(1 - \frac{e^{-k} \cdot k^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\
&= \beta k \cdot \left(1 - \frac{k^k}{k! \cdot e^k} \right)
\end{aligned}$$

结合方程（11）和（12），可得

$$\mathrm{OPT}(F^*) \le \mathsf{EAR}(F^*) \le \frac{2}{1-k^k/(k!\cdot e^k)} \le \frac{2}{1-1/\sqrt{2\pi k}}. \tag{13}$$

3.4 通用上界

让我们改写 $F^{*(k)} = F^*$，以突出 $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ 的具体选择。在本小节中，我们将证明

$$\mathrm{OPT}(F^{*(k)}) \le \mathrm{OPT}(F^{*(1)}) \approx 2.4762, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_{\ge 1}. \tag{14}$$

情形 $k = 1$。我们可以将 $D_1(x)$、$R(x)$ 和 $Q(x)$ 明确写为：

$$\begin{aligned} D_1(x) &\overset{(7)}{=} 1 - \tfrac{1}{x} \\ R(x) &\overset{(1)}{=} -x\ln(1-\tfrac{1}{x}) = \sum_{t=1}^{+\infty} \tfrac{1}{t}\cdot x^{-(t-1)} \\ Q(x) &\overset{(2)}{=} \int_x^{+\infty} \frac{(-R'(z))}{z}\cdot \mathrm{d}z = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{t-1}{t^2} x^{-t} \end{aligned}$$

一阶虚拟价值 $\Phi_1(x)$ 的累积分布函数满足以下恒等式：

$$\Phi_1(x) = \prod_{i\in[n]:v_i\ge x} (1-q_i) = \prod_{i\in[n]:v_i\ge x} e^{-q_i} = e^{-Q(x)}$$

其中，第一个不等式对任意三角实例 F 都成立，第二个不等式则在大市场假设下成立。此外，对于 $x \in [0,1]$，我们有 $Q(x) = +\infty$，这进一步意味着 $\Phi_1(x) = 0$。

因此，最优收益 $\mathrm{OPT}(F^{*(1)})$ 为

$$\begin{aligned} \mathrm{OPT}(F^{*(1)}) &= \int_0^{+\infty} (1-\Phi_1(x))\cdot \mathrm{d}x + R(+\infty) \\ &= 2 + \int_1^{+\infty} (1-e^{-Q(x)})\cdot \mathrm{d}x \\ &\approx 2.4762. \end{aligned}$$

案例 $k = 2$。重新整理方程（7）可得

$$x = \frac{1}{2-2D_1 - D_1\cdot(-\ln D_1)} \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}D_1} = \frac{1+(-\ln D_1)}{(2-2D_1-D_1\cdot(-\ln D_1))^2}. \tag{16}$$

然后，我们可以推导出函数 $Q(x)$ 和 $D_1(x)$ 的以下恒等式：

$$\begin{aligned}
Q &= \int_x^{+\infty} \frac{(-R'(z))}{z} \cdot \mathrm{d}z \\
&\overset{(1)}{=} \int_x^{+\infty} \frac{z \cdot \frac{D_1'(z)}{D_1} - (-\ln D_1)}{z} \cdot \mathrm{d}z \\
&= \big(\ln D_1\big)\big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{(-\ln D_1)}{z} \cdot \mathrm{d}z \\
&= (-\ln D_1) - \int_x^{+\infty} \frac{(-\ln D_1)}{z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D_1} \cdot \mathrm{d}D_1 \\
&\overset{(15),(16)}{=} (-\ln D_1) - \int_x^{+\infty} \frac{(-\ln D_1) \cdot (1 + (-\ln D_1))}{2 - 2D_1 - D_1 \cdot (-\ln D_1)} \cdot \mathrm{d}D_1.
\end{aligned}$$

在这种格式下，我们可以数值求得 $\alpha = Q^{-1}(2) \approx 0.5206$、$D_1(\alpha) \approx 0.012390$，以及

$$\mathsf{EAR}(F^{*(2)}) = R(\alpha) \approx 2.2860.$$

情形 $k = 3$，4。通过将情形 $k = 2$ 中的分析调整到情形 $k = 3$、4，我们可以推导出 $\mathsf{OPT}(F^{*(3)}) \le$ 事前松弛$(F^{*(3)}) \approx 2.1914$，以及 $\mathsf{OPT}(F^{*(4)}) \le$ 事前松弛$(F^{*(4)}) \approx 2.1432$。

情形 $k \ge 5$。根据方程（13），我们有 $\mathsf{OPT}(F^*) \le \frac{2}{1-1/\sqrt{10\pi}} \approx 2.4343$。

综合所有情形，最坏情形近似比出现在 $k = 1$，最坏情形比为 ≈ 2.4762。

参考文献

Alaei, S.（2014）。贝叶斯组合拍卖：将单买家机制扩展到多个买家。*SIAM J. Comput.*，43(2)：930–972。15

Alaei, S.、Hartline, J. D.、Niazadeh, R.、Pountourakis, E. 和 Yuan, Y.（2019）。最优拍卖与匿名定价之比较。*Games Econ. Behav.*，118：494–510。1，2，3，4，15

Anari, N.、Goel, G. 和 Nikzad, A.（2018）。预算可行采购拍卖。*Oper. Res.*，66(3)：637–652。4

Bergemann, D.、Castro, F. 和 Weintraub, G.（2022）。三级价格歧视与统一定价之比较。*Games and economic behavior*，131：275–291。4

Bulow, J. and Klemperer, P. (1996). 拍卖与谈判。*The American Economic Review*，第180–194页。3

Bulow, J. and Roberts, J. (1989). 最优拍卖的简单经济学。《政治经济学杂志》，97:1060–90。2, 5 Cai, Y., Devanur, N. R., and Weinberg, S. M. (2021). 基于对偶性的贝叶斯机制设计统一方法。SIAM J. Comput., 50(3)。3 Cai, Y. and Zhao, M. (2017). 通过对偶性为次可加买家设计的简单机制。载于 Hatami, H., McKenzie, P., and King, V.（编），第49届ACM SIGACT计算理论年会论文集，STOC 2017，蒙特利尔，魁北克省，加拿大，2017年6月19–23日，第170–183页。ACM。3 Chawla, S., Hartline, J. D., and Kleinberg, R. D. (2007). 通过虚拟估值进行算法定价。载于 MacKie-Mason, J. K., Parkes, D. C., and Resnick, P.（编），第8届ACM电子商务会议（EC-2007）论文集，圣迭戈，加利福尼亚州，美国，2007年6月11–15日，第243–251页。ACM。15 Chawla, S., Hartline, J. D., Malec, D. L., and Sivan, B. (2010). 多参数机制设计与顺序挂牌定价。载于 Schulman, L. J.（编），第42届ACM计算理论研讨会论文集，STOC 2010，剑桥，马萨诸塞州，美国，2010年6月5–8日，第311–320页。ACM。3 Cheng, Y., Gravin, N., Munagala, K., and Wang, K. (2018). 面向预算受限买家的简单机制。载于国际网络与互联网经济学会议论文集，第96–110页。施普林格。3 Coey, D., Larsen, B. J., Sweeney, K., and Waisman, C. (2021). 可扩展的最优在线拍卖。《营销科学》，40(4):593–618。3 Cole, R. and Tao, Y. (2016). 近乎最优效率的大市场博弈。载于 Conitzer, V., Bergemann, D., and Chen, Y.（编），2016年ACM经济学与计算会议论文集，EC ’16，马斯特里赫特，荷兰，2016年7月24–28日，第791–808页。ACM。4 DellaVigna, S. and Gentzkow, M. (2019). 美国零售连锁店的统一定价。《经济学季刊》，134(4):2011–2084。3 D¨utting, P., Fischer, F., and Klimm, M. (2016). 同质商品静态与动态挂牌定价的收益差距。arXiv预印本 arXiv:1607.07105。3 D¨utting, P., Roughgarden, T., and Talgam-Cohen, I. (2019). 简单合约与最优合约。载于2019年ACM经济学与计算会议论文集，第369–387页。3

Feldman, M.、Immorlica, N.、Lucier, B.、Roughgarden, T. 和 Syrgkanis, V.（2016）。大型博弈中的无政府代价。载于 Wichs, D. 和 Mansour, Y. 编，*第48届ACM SIGACT年度计算理论研讨会论文集，STOC 2016，美国马萨诸塞州剑桥，2016年6月18日至21日*，第 963–976 页。ACM。 4Feng, Y.、Hartline, J. D. 和 Li, Y.（2019）。最优拍卖与匿名定价：超越线性效用。载于*2019年ACM经济学与计算会议论文集*，第 885–886 页。 3Feng, Y.、Hartline, J. D. 和 Li, Y.（2023）。面向非线性代理人的简单机制。载于*2023年ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集（SODA）*，第 3802–3816 页。SIAM。 3Feng, Y. 和 Jin, Y.（2025）。超越正则性：重新审视简单机制与最优机制。*IEEE计算机科学基础研讨会*。 2Hart, S. 和 Nisan, N.（2017）。多件商品情形下的近似收益最大化。 经济理论杂志，172：313–347。 3

Hartline, J. D. 和 Roughgarden, T.（2009）。简单机制与最优机制。载于 Chuang, J.、Fortnow, L. 和 Pu, P.（编），*第10届ACM电子商务会议论文集（EC-2009）*，美国加利福尼亚州斯坦福，*2009年7月6日至10日*，第225–234页。ACM。1，3，4，6

Jalaly, P. 和 Tardos, ´E.（2021）。面向单调次模估值的简单高效预算可行机制。《ACM经济与计算汇刊》，9(1):4:1–4:20。4 Jin, Y., Jiang, S., Lu, P. 和 Zhang, H.（2022）。多单位机制之间的紧确收益差距。SIAM J. Comput., 51(5):1535–1579。1, 3, 4, 6, 7, 15 Jin, Y. 和 Lu, P.（2024）。单位需求买家的简单机制的基准紧确近似比。载于第65届IEEE计算机科学基础年度研讨会（FOCS 2024），美国伊利诺伊州芝加哥，2024年10月27日至30日，第1251–1259页。IEEE。3 Jin, Y., Lu, P., Qi, Q., Tang, Z. G. 和 Xiao, T.（2019）。匿名定价的紧确近似比。载于 Charikar, M. 和 Cohen, E.（编），第51届ACM SIGACT年度计算理论研讨会论文集（STOC 2019），美国亚利桑那州凤凰城，2019年6月23日至26日，第674–685页。ACM。1, 4 Jin, Y., Lu, P., Tang, Z. G. 和 Xiao, T.（2020）。简单机制之间的紧确收益差距。SIAM J. Comput., 49(5):927–958。1, 3, 4 Li, X. 和 Yao, A. C.（2013）。关于销售多个独立分布物品的收益最大化。《美国国家科学院院刊》，110(28):11232–11237。3

Mehta, A., Saberi, A., Vazirani, U. V., 和 Vazirani, V. V.（2007）。Adwords 和广义在线匹配。《*ACM*期刊》，54(5):22。4

Myerson, R. B.（1981）。最优拍卖设计。《运筹学数学》，6(1):58–73。2，4，5，8，
9Swinkels, J. M.（2001）。大型私人价值拍卖的效率。《计量经济学》，69(1):37–68。4

Yan, Q.（2011）。通过相关性差距进行机制设计。载于 Randall, D. 编，第二十二届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA 2011*，美国加利福尼亚州旧金山，*2011*年*1*月*23*日至*25*日，第710–719页。SIAM。3，15，21

缺失的证明

推论 *1* 的证明。下界是显然的，因为正则分布是拟正则分布的特殊情形。接下来，我们证明上界。

首先，当价值分布为拟正则分布时，顺序挂牌定价与匿名定价之间的最坏情形近似比在三角分布下出现。此外，由于三角分布属于正则分布，命题1 意味着顺序挂牌定价与匿名定价之间的最坏情况差距至多为 O(对数 k)。最后，由于最优收益与顺序挂牌定价之间的最坏情况差距为 $1+\Theta_{(1)}\sqrt{k}$ (Yan，2011)，最优收益与匿名定价之间的最坏情况差距至多为 O(对数 k)。

□

推论的证明 *2*。反设存在一个价格 $p \geq \frac{1}{k}$ 和一位代理人 i 使得 $F_i(p) < 1 - \varepsilon \cdot \gamma k$ 对数 k。这意味着，通过设定价格 $p \geq \frac{1}{k}$，来自代理人 i 的期望收益严格大于 $\varepsilon \cdot \gamma$ 对数 k。这与 ε-大市场假设相矛盾。

□

A.1 下界

在本节中，我们证明，即使在大市场假设下，匿名定价与最优收益之间的最坏情况差距也至少为 2。具体而言，考虑以下实例，其由一个足够小的常数 $\delta \in (0, 1)$ 参数化。代理人被分为两组。第一组中有 C_δ 个代理人。该组中的每个代理人都具有三角价值分布 Tri$_{\delta,\ \delta^2}$。注意，这些代理人的垄断保留价为 $\frac{\delta}{\delta^2} = \frac{1}{\delta}$，并且参数 C_δ 的选取使得，当向这些代理人设置价格 $\frac{1}{\delta}$ 时，预计售出的物品数量为 δ。第二组中有 $\frac{1}{\delta^{10}}$ 个代理人。该组中的每个代理人都具有三角价值分布 Tri $_{k,\ \delta}$。这些代理人的垄断保留价为 $\frac{1}{k}$。此外，当向这些代理人设置价格 $\frac{1}{k}$ 时，随着 $\delta \to 0$，所有物品均售出的概率趋近于 1。

在这一构造的实例中，匿名定价带来的收益至多为 1。此外，当 $\delta \to 0$ 时，通过向第一组设置价格 $\frac{1}{\delta}$，并以价格 $\frac{1}{k}$ 将剩余物品出售给第二组，最优收益趋近于 2。收益差距在极限下为 2。

–