arXiv:2601.16493v1 [math.CV] 23 Jan 2026

L^p–L^q SHIMORIN 型积分算子的估计

YUERANG LI、ZIPENG WANG 和 KENAN ZHANG

ABSTRACT. 设 ν 是定义在 $[0,1]$上的一个正测度。Shimorin 型算子 T_ν 是定义在单位圆盘上的一个积分算子，其形式为

$$T_\nu f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \left(\int_0^1 \frac{d\nu(r)}{1-rz\overline{\lambda}} \right) f(\lambda)\, dA(\lambda),$$

该算子源自 Shimorin 对对数次调和加权 Bergman 空间的 Bergman 型核表示的研究。

本文研究 T_ν的 L^p–L^q 估计。与经典的 Bergman 型算子不同，在（$1/p$, $1/q$）平面上，划分 T_ν 有界区域与无界区域的临界线并非显而易见。此外，即使沿着这条临界线，也会出现新的现象。在本文中，我们通过引入一个量 c_ν，

- 我们首先确定（$1/p$, $1/q$）平面上 T_ν有界时的临界边界；
- 此外，在这条临界线上，我们建立了T_ν 具有标准 Bergman 型 L^p–L^q 估计的充要条件，这意味着它在区域内部是有界的，并且在端点处满足弱型和 BMO 型估计。

CONTENTS

1. 引言 1 2. Shimorin 型核的双侧 L^p-范数估计 7 3. 与以下对象相关的乘子系数 T_ν 12 4. α-单位圆盘上的 Bergman-CZO 5. 定理 1.1 的证明 6. 定理 1.2 的证明 20 27 39 44

参考文献

1. INTRODUCTION

复平面 $\mathbb{C}$的单位圆盘上的 Bergman 型算子 $\mathbb{D}$

$$K_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\lambda)}{(1-z\overline{\lambda})^\alpha} dA(\lambda)$$

被认为是单位圆盘上的复 Riesz 势，而情形 $\alpha = 2$ 对应于 Bergman 投影

$$K_2 f(z) = Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\lambda)}{(1-z\overline{\lambda})^2} dA(\lambda)$$

2020 数学主题分类。 主要分类号 47B34，47G10。关键词与短语。 Bergman 投影、积分算子、单位圆盘、加权 Bergman 空间、对数次调和权。

它是齐次型空间上 Calder´on-Zygmund 算子的一个简单示例（例如，参见 [CRW], [DHZZ]）。这类算子是解析函数空间算子理论中研究最为广泛的对象之一（例如，参见 [Lue], [Zhu14]）。

设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度。本文研究 Shimorin 型积分算子的 L^p–L^q 估计

$$T_\nu f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \left(\int_0^1 \frac{d\nu(r)}{1-rz\overline{\lambda}} \right) f(\lambda)\, dA(\lambda).$$

当 $\nu = \delta_0$， T_ν 退化为 K_1 由 Hardy 核诱导的算子；当 $\nu = \delta_1$，则恢复为 Bergman 投影 P。此处， dA 表示 $\mathbb{D}$上的归一化勒贝格测度，而 δ_x （当 $x \in \{0,1\}$时）表示集中在 x 处的狄拉克测度。与 Bergman 型算子（见图 1 和 2 ）不同，Shimorin 型算子的有界区域没有明确的边界。此外，即使沿着临界线，仍会出现新的现象。

T_ν 的积分核记为

$$K_\nu(z,\lambda) = \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}}\, d\nu(r). \tag{1.1}$$

Shimorin [Shi01], 建立了该核，它与由单位圆盘上的对数次调和权诱导的加权 Bergman 空间的 Bergman 型核表示有关 [AHR，问题 19]。正如 [AHR], 所指出的，该问题由 Shimorin 提出。表示式（1.1）对径向权给出了肯定的答案，而非径向权的情形仍未解决。最近，Pel´aez、R¨atty¨a 和 Wick [PRW]证明，对于一类径向倍增权，再生核也存在 Shimorin 型积分表示。

回顾一下，权 ω 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的一个正可积函数。如果对于任意 $z \in \mathbb{D}$， $\omega(z) = \omega(|z|)$，则称其为径向的。权 ω （不一定是径向的）称为对数次调和且在原点具有再生性，如果它满足

- ω 是对数次调和的，即 $\log \omega$ 是 $\mathbb{D}$上的次调和函数；
- ω 在原点具有再生性：对于所有多项式 $f \in \mathbb{C}[z]$,

$$f(0) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\omega(z)\, dA(z).$$

典型的例子包括 $\omega(z) = |G(z)|^p$，其中 G 是 Bergman 空间中的内函数，以及标准权 $\omega_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ ，其中 $-1 < \alpha \le 0$。对数次调和权具有自然的微分几何解释。对于这样的权 ω，如果我们赋予单位圆盘黎曼度量$\sqrt{\omega(z)}|dz|$，则所得的黎曼流形是双曲的（即其高斯曲率处处为负）。该权在所得黎曼流形上研究拉普拉斯–贝尔特拉米算子的平方 $\Delta\omega^{-1}\Delta$时发挥作用（例如参见 [HKS] 和 [HKZ，第 9]章）。关于对数次调和权的更多结果及其应用，可参见：[Shi01] 中关于游荡子空间问题的研究； [HS] 中关于双曲曲面上的 Hele–Shaw 流的研究；以及 [Hed] 中关于 Bergman 核的非对角估计的研究。

本文重新探讨 Shimorin 型积分算子 T_ν 在 $[0,1]$ 上关于任意有限正博雷尔测度 ν 的 L^p–L^q 估计。我们还指出，积分核一般并不是加权 Bergman 空间的再生核。本文要解决的主要问题是：

问题 1. 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度。刻画所有满足下述条件的数对 $(p,q) \in [1,\infty] \times [1,\infty]$： Shimorin 型积分算子

$$T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \longrightarrow L^q(\mathbb{D}) \text{ is bounded.}$$

我们研究问题1的动机 [源于 Cheng、Fang、Wang 和 Yu 的近期工作], , 作者在文中对所有实数L^p-L^q 下 Bergman 型算子的有界性给出了完整刻画 $\alpha > 0$。通过将其与标准 Bergman 投影进行比较，他们将 K_α 在 $2 < \alpha < 3$时归类为超奇异，而在 $0 < \alpha \leq 2$时归类为次奇异。他们的结果可由图$1/p$、$1/q$中的（）图表示，其中红线将有界与无界以及图区分开来。在次奇异情形下，图 K_α中的红线由给出

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) : \ 1 \leq p \leq \frac{2}{2-\alpha}, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right\}.$$

红线内部的点对应有界的 K_α，而在端点处则无界。在超奇异情形下，红线上的每个点都对应无界的 K_α。

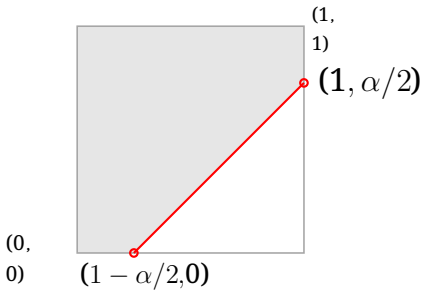

图 1. K_α $(0 < \alpha \leq 2)$

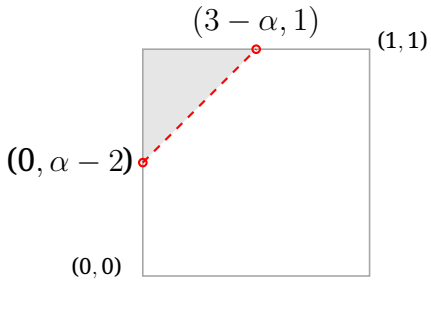

图2。 K_α $(2 < \alpha < 3)$

Bergman型积分算子的一种更一般形式在文献中称为 Forelli-Rudin型算子，这类算子历史悠久且已得到广泛研究；详情请参见 [FR], [Liu], [Zhao], [KU], [ZZ], [Zhu22] 。

图 1 和 2 表明，参数 α 在确定使 Bergman型算子 $1/p, 1/q$)-图的边界且 $K_\alpha : L^p \to L^q$ 有界的过程中起着关键作用。Shimorin 型算子中并未显式出现这一参数。为解决这一问题，我们引入测度 ν的一个量，记作 c_ν，定义如下：

$$c_\nu = \sup \left\{ 1 \leq c < 2 : \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{2/c'}} \, d\nu(r) < \infty \right\}, \tag{1.2}$$

其中， c'表示 c的对偶指标，即 $1/c + 1/c' = 1$。注意，若 ν 是勒贝格测度，则 $c_{\delta_1} = 1$、 $c_{\delta_0} = 2$ 和 $c_\nu = 2$ 。此外，若 $\nu(\{1\}) \neq 0$，则 $c_\nu = 1$。

Fo对于 $[0,1]$，上的任意有限正博雷尔测度 ν ，我们有一个普适估计 e

$$\left| \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}} \, d\nu(r) \right| \leq \frac{2\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^2}.$$

因此，Shimorin 型算子在 [CFWY]的意义下是次奇异的。另一方面，由 [Shi02定理 1], , 对于每个 $\alpha \in (1, 2)$,

$$\frac{1}{(1-z\overline{\lambda})^\alpha} = \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}} \, d\nu_\alpha(r),$$

其中

$$\nu_\alpha = \frac{r^{\alpha-2}(1-r)^{-\alpha+1}}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(-\alpha+2)}dr. \tag{1.3}$$

这表明，Shimorin 型算子 T_ν 呈现出 L^p-L^q 估计，其方式与次奇异 Bergman 型算子类似。由（1.3），对于 $\alpha \in (1,2)$，我们观察到 $c_{\nu_\alpha} = 2/\alpha$. 因此，图 1 中的红线可写为

$$\left\{\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) : 1 \le p \le c'_{\nu_\alpha}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{c_{\nu_\alpha}} - 1\right\}.$$

结合这一点以及 Shimorin 型核函数的次奇异性，我们自然得到以下猜想：

猜想 1. 有界性区域与无界性区域之间的边界线 $\mathcal{C}$ 由 L^p-L^q 给出

$$\mathcal{C} = \left\{\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) : 1 \le p \le c'_\nu, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{c_\nu} - 1\right\}.$$

猜想 2. 算子 $T_\nu : \ L^p(\mathbb{D}) \ \to L^q(\mathbb{D})$ 在边界线 $\mathcal{C}$的内部有界，而在该边界线的端点处无界。

本文证明了这两个猜想。第一个猜想即定理 1.1。

定理 1.1. 设 ν是定义在 $[0,1]$上的有限正博雷尔测度，且$(p,q) \in [1,\infty]^2 \setminus \mathcal{C}$。那么，$T_\nu : \ L^p(\mathbb{D}) \ \to L^q(\mathbb{D})$ 有界，当且仅当(p,q) 满足以下条件之一：

(a) $p = 1, \quad 1 \le q < c_\nu$;

(b) $1 < p < c'_\nu$，以及

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} + \frac{1}{c_\nu} - 1;$$

(c) $p = c'_\nu, \quad 1 \le q < \infty$;

(d) $p > c'_\nu, \quad 1 \le q \le \infty$。

算子 $1/p$， $1/q$-图的临界边界线 T_ν 由 c_ν 确定，并在图3中示出。

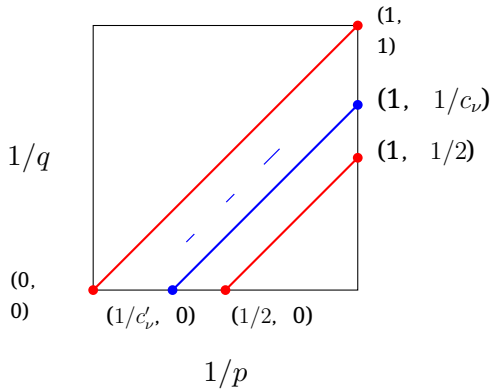

图3. 临界边界线

注记 1.　1. 根据定理1.1，边界由线段

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{c_\nu}-1.$$

对于范围 $c_\nu\in[1,2]$，蓝色临界线始终位于两条红色边界线之间：

- **上方红线** 对应于 $c_\nu=1$，此时边界与对角线 $1/q=1/p$ 重合。
- **下方红线** 对应于 $c_\nu=2$，此时边界由$1/q=1/p-1/2$给出。

从几何上看，随着 c_ν 从 1 增加到 2，蓝线向下移动，这表明有界区域（$(1/p,1/q)$-图像）扩大了。

关于猜想 2，考虑勒贝格测度 $\nu=dr$ 在 $[0,1]$上。可以证明 $T_\nu:\ L^p(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 在满足以下条件的 $1<p<c_\nu'$ 下无界

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{c_\nu}-1.$$

此外，还存在一个测度 ν 使得 $T_\nu:\ L^1(\mathbb{D})\to L^{c_\nu}(\mathbb{D})$ 有界。与次奇异 Bergman 型算子的行为相比，这些例子是尖锐的K_α 对于 $0<\alpha\le 2$。因此，猜想 2 一般而言并不成立，这自然引出了下面的问题。

问题 3。 对于 L^p-L^q，关于 $(p,\ q)\in[1,\infty]\times[1,\infty]$ 的估计是什么，使得指标$(1/p,\ 1/q)$ 位于边界线 $\mathcal{C}$ (图 3 中的蓝线)。

We g问题 3有令人满意的答案，这些答案分为两种情况 s:

- 图 3 中蓝线的内部点和
- 其对应的端点。

对于前一种情况，我们建立了 L^p-L^q 估计。对于后一种情况，端点 $(1,\ c_\nu)$ 和 $(c_\nu',\ \infty)$ 构成一个对偶对。值得注意的是，Bergman 型算子 K_α 在这些端点处不是有界的。根据 Riesz势算子理论， K_α 是弱型 $(1,\ c_\nu)$。对于另一个端点 $(c_\nu',\ \infty)$，Fefferman-Stein H^1-有界平均振荡理论表明，目标空间 L^∞ 的自然替代是 BMO空间。沿着这条线以及问题 3的一个自然修正版，我们使用下面的定义。

定义 1.1。 设 ν 是 $[0,1]$，上的有限正博雷尔测度，并令 c_ν' 表示 c_ν 的对偶指数。若满足以下三个条件，则该 Shimorin 型算子具有标准的 Bergman 型 L^p–L^q 估计：

- $T_\nu:\ L^1(\mathbb{D})\to L^{c_\nu,\ \infty}(\mathbb{D})$ 是有界的。
- $T_\nu:\ L^p(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 对于满足关系式 q 的 $1<p<c_\nu'$ 是有界的

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{c_\nu}-1.$$

- $T_\nu:\ L^{c_\nu'}(\mathbb{D})\to \mathrm{BMO}(\mathbb{D})$ 是有界的。

定理 1.2。 设 ν 是定义在 $[0,1]$, 上的有限正博雷尔测度，并令 c_ν' 表示 c_ν的对偶指数。*Shimorin* 型算子具有标准的 *Bergman* 型 L^p–L^q 估计，当且仅当根据 c_ν的取值，以下条件之一成立：

- 当 $c_\nu = 1$时， ν 是有限测度。
- 当 $1 < c_\nu < 2$ 时， ν 满足 $2/c'_\nu$ *Carleson* 型条件

$$\sup_{0<t\le 1} \frac{\nu([1-t,1))}{t^{2/c'_\nu}} < \infty. \tag{1.4}$$

- *When* $c_\nu = 2$， ν 关于 $[0,1)$ 上的双曲弧长可积，即

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{1-r^2}\, d\nu(r) < \infty. \tag{1.5}$$

注 1.2： Hu and Zhou 的最新工作运用二进调和分析技术 [HZ25] 证明了，超奇异 Bergman 型算子 K_α $(2 < \alpha < 3)$ 在图 *2* 中虚线的内部始终是弱型p， q有界的。

注 1.3： 定理 1.2 的证明由定理 6.1、6.2 和6.3推出，而这些定理实际上建立了更进一步的结果。具体而言：

- 一个 L^p–L^q 估计，或端点处的弱型/BMO 型估计，就足以推出定理1.2 的“仅当”部分。
- 定理 6.1 表明，强型（p， q）估计与弱型（p， q）估计在边界线的内部是等价的。

*Rema*秩 1.4。 积分表达式（1.5）曾出现在 [PRW的定理 1 中].

Shimorin 问题的应用。 让我们回到 Shimorin 表示问题 [AHR，问题 19]。Shimorin 为径向情形提供了一个解，这促成了 Shimorin 型积分的发展。Pel´aez, R¨atty¨a 和 Wick 在 [PRW] 中表明，Shimorin 型积分也可以表示其他类别的核函数。于是自然产生了一个问题：给定一个核 K（z， λ），它在何时具有 Shimorin 型积分表示?

注意，对于任意有限正博雷尔测度 ν 在 $[0,1]$, 上，我们有 $c_\nu \in [1,2]$。根据定理 1.1，如果对于一个核 K 其关联的积分算子

$$T_K f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\lambda) f(\lambda)\, dA(\lambda)$$

不满足其中描述的 $(1/p,\ 1/q)$ 条件，对每一组可容许的配对 $(p,\ q)$ 都如此，那么 K 不存在 Shimorin 型积分表示。特别地，我们得出，对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，核

$$\frac{1}{(1-z\overline{\lambda})^\alpha}$$

不存在 Shimorin 型积分表示。否则，根据定理1.1，Bergman型算子 K_α： $L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ 对所有满足 $1 < p < 2$ 的

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{2},$$

这与 [CFWY]中的结果相矛盾（例如，见图 1）。

我们以本文结构概述作为引言的结尾。

- 建立我们的主要结果，首要且最关键的一步是确定有界与无界 Shimorin 型算子之间的精确边界。我们新引入的量 c_ν 能够准确识别这一边界。

•借助 Bergman 空间理论中的技巧，我们推导出 Shimorin 型核的有效 L^p-范数估计，详见第 2.1节的命题 2。
•将这些核估计与积分算子的一般理论结合起来，即可完整证明定理 1.1的充分性（见第 5.1 小节）。

• 定理 1.1 的必要性方向比充分性部分更具挑战性。其证明依赖于 T_ν 的一种自然的系数乘子表示（见公式（3.7））。

• 在第 3 节中，我们通过命题 3.1 建立了系数乘子序列的精确增长估计。除其他用途外，这一估计还使我们能够构造合适的测试函数（5.65）和（5.69），并在第 5.2小节中据此推出必要条件。我们强调，量c_ν 在这些论证中始终发挥着核心作用。

•在满足 Carleson 条件（1.4）或可积性条件（1.5）时，我们得到 Shimorin 型核的 Calder´on–Zygmund 型估计（大小估计与光滑性估计），见引理4.2 和4.4。这些估计结合分数阶 Bergman 奇异积分算子论证，给出了定理 1.2 的“若”部分（见第 6 节开头）。
• 最后，通过构造特定的测试函数，我们证明第 6.1、6.2 和6.3 节中的定理 6。由此完成定理 1.2 的证明。

致谢。Y. L 和 Z. W 得到国家自然科学基金（编号：12471116）和中央高校基本科研业务费（编号：2025CDJ-IAIS YB- 004）的资助。K. Z 得到国家自然科学基金（编号：12231005）和国家重点研发计划（2024YFA1013400）的资助。

2. Two-sided L^p-norm estimates for Shimorin-type kernels

我们先回顾式（1.1）中定义的 Shimorin 型核：

$$K_\nu(z,\lambda)=\frac{1}{1-z\overline{\lambda}}\int_0^1\frac{1}{1-rz\overline{\lambda}}\,d\nu(r).$$

对于定义在 $[0,1]$，上的一般有限正博雷尔测度 ν，我们强调，该核未必与加权 Bergman 空间的再生核相同。因此，已有的加权 Bergman 核的 L^p-范数估计不足以支持我们的分析。本节的主要目标是为 K_ν 建立尖锐的双边 L^p-范数界。

命题 2.1。设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，使得 $\nu(\{1\})=0$。对于所有 $1<p<\infty$ 以及每个 $z\in\mathbb{D}$，我们有

$$(1-|z|^2)^{2/p-1}\int_0^1\frac{d\nu(r)}{1-r|z|^2}\le\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})}\le\int_0^1\frac{1}{1-r}\int_r^1(1-t|z|^2)^{2/p-2}dt\,d\nu(r).$$

接下来，我们给出 Shimorin 型核的一个简单二重积分表示。

命题 2.2。设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，使得 $\nu(\{1\})=0$。那么

$$K_\nu(z,\lambda)=\int_0^1\frac{1}{1-r}\int_r^1\frac{dt}{(1-tz\overline{\lambda})^2}d\nu(r).$$

证明。 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，且 $\nu(\{1\}) = 0$。固定 $z,\ \lambda \in \mathbb{D}$，满足 $z\overline{\lambda} \neq 0$ 且 $r \in [0,1)$。直接计算可得下列恒等式。情形 $z\lambda = 0$由连续性得出：

$$\frac{1}{1-r}\int_r^1 \frac{dt}{(1-tz\overline{\lambda})^2} = \frac{1}{1-r}\frac{1}{z\overline{\lambda}}\left(\frac{1}{1-z\overline{\lambda}} - \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}}\right) = \frac{1}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})}.$$

由此可得

$$K_\nu(z,\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})}d\nu(r) = \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 \frac{dt}{(1-tz\overline{\lambda})^2}d\nu(r).$$

证明至此完成。 □

根据命题 2.2，算子 T_ν 作用于解析函数时具有简单的形式。

推论 2.3。 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，使得 $\nu(\{1\}) = 0$。对于 $f \in L^1_a(\mathbb{D})$，下列恒等式成立：

$$T_\nu f(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 f(tz)\,dt\,d\nu(r), \quad z \in \mathbb{D}.$$

证明。 设 $f \in L^1_a(\mathbb{D})$。根据命题 2.2，

$$K_\nu(z,\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 \frac{dt}{(1-tz\overline{\lambda})^2}d\nu(r).$$

根据富比尼定理，我们有

$$\begin{aligned} T_\nu f(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_\nu(z,\lambda) f(\lambda)\,dA(\lambda) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\lambda)}{(1-tz\overline{\lambda})^2}\,dA(\lambda)dt\,d\nu(r) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 f(tz)\,dt\,d\nu(r), \end{aligned}$$

其中，最后一个等号源于 $\mathbb{D}$上解析函数的伯格曼再生性质。证明完毕。□

命题 2.1 的证明。 对于 $1 \le p < \infty$，回忆一下，对于任意 $f \in L^p_a(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$，有如下估计（参见 [Zhu14], 定理 4.14）

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{D})}}{(1-|z|^2)^{2/p}} \tag{2.6}$$

成立。将（2.6）应用于函数 $K_\nu(z,\ \cdot\ ) \in L^p_a(\mathbb{D})$，可得

$$|K_\nu(z,z)| \le \frac{\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})}}{(1-|z|^2)^{2/p}}.$$

重新整理该不等式可得下界：

$$\begin{aligned} \|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} &\ge (1-|z|^2)^{2/p}\,|K_\nu(z,z)| \\ &= (1-|z|^2)^{2/p-1}\int_0^1 \frac{d\nu(r)}{1-r\,|z|^2}. \end{aligned}$$

作为补充，我们为 $\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})}$ 建立一个上界。首先注意到，L^p-范数在复共轭下保持不变，因此

$$\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} = \left\|\overline{K_\nu(z,\cdot)}\right\|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

根据 L^p 和 $L^{p'}$ 空间的对偶性（其中 $1/p + 1/p' = 1$），我们将范数表示为 $L_a^{p'}(\mathbb{D})$单位球面上的上确界：

$$\begin{aligned}\left\|\overline{K_\nu(z,\cdot)}\right\|_{L^p(\mathbb{D})} &= \sup_{\substack{f\in L_a^{p'}(\mathbb{D}),\\ \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{D})}=1}} \left|\left\langle \overline{K_\nu(z,\cdot)}, f\right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right| \\ &= \sup_{\substack{f\in L_a^{p'}(\mathbb{D}),\\ \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{D})}=1}} \left|\int_{\mathbb{D}} \overline{K_\nu(z,\lambda) f(\lambda)}\, dA(\lambda)\right| \\ &= \sup_{\substack{f\in L_a^{p'}(\mathbb{D}),\\ \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{D})}=1}} |T_\nu f(z)|,\end{aligned}$$

最后一个等式由算子 T_ν的定义得出。

根据推论 2.3，T_ν 在 f 处 z 的作用有积分表示，因此代入后得到：

$$\left\|\overline{K_\nu(z,\cdot)}\right\|_{L^p(\mathbb{D})} = \sup_{\substack{f\in L_a^{p'}(\mathbb{D}),\\ \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{D})}=1}} \left|\int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 f(tz)\, dt\, d\nu(r)\right|.$$

现在，任取$f \in L_a^{p'}(\mathbb{D})$，使得$\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{D})} = 1$。将估计式（2.6）中的 p 替换为 p'，并将其应用于 $f(tz)$，其中 $t \in (0,1)$ 且 $z \in \mathbb{D}$，可得

$$|f(tz)| \le \frac{1}{(1-|tz|^2)^{2/p'}} \le \frac{1}{(1-t|z|^2)^{2/p'}}.$$

利用恒等式 $-2/p' = 2/p - 2$，我们可将上确界估计为：

$$\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} \le \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 (1-t\,|z|^2)^{2/p-2} dt\, d\nu(r).$$

证明至此完成。 □

推论 2.4. 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，满足 $\nu(\{1\}) = 0$。假设 $1 < p < 2$，且 $\int_0^1 (1-r)^{2/p-2}\, d\nu(r) < \infty$。那么

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-r)^{2/p-2} d\nu(r) \le \sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} \le \frac{2}{2-p}\int_0^1 (1-r)^{2/p-2} d\nu(r).$$

证明。 根据命题 2.1，对所有 $z \in \mathbb{D}$，我们有

$$\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} \le \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 (1-t|z|^2)^{2/p-2} dt\, d\nu(r).$$

回顾一下，对所有 $t \in [r,1]$，函数 $x \mapsto (1-tx^2)^{2/p-2}$ 在 $[0,1)$ 上是非递减的（因为 $2/p-2<0$ 对于 $p>1$）。这一单调性意味着

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} &\le \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 (1-t|z|^2)^{2/p-2}dt\,d\nu(r)\\ &\le \int_0^1 \frac{1}{1-r}\int_r^1 (1-t)^{2/p-2}dt\,d\nu(r)\\ &\le \frac{2}{2-p}\int_0^1 (1-r)^{2/p-2}d\nu(r),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由

$$\int_r^1 (1-t)^{2/p-2}dt = \frac{(1-r)^{2/p-1}}{2/p-1} = \frac{p(1-r)^{2/p-1}}{2-p} \le \frac{2(1-r)^{2/p-1}}{2-p}.$$

反过来，取 $r\in[0,1)$，并选取满足 $|z_0|^2=r$ 的 $z_0\in\mathbb{D}$，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2/p-1}}{1-r|z|^2} &\ge \frac{(1-|z_0|^2)^{2/p-1}}{1-r|z_0|^2} = \frac{(1-r)^{2/p-1}}{1-r^2}\\ &= \frac{(1-r)^{2/p-1}}{(1-r)(1+r)} \ge \frac{1}{2}(1-r)^{2/p-2}.\end{aligned}$$

对所有 $r\in[0,1)$。由命题 2.1 及勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{D})} \ge \frac{1}{2}\int_0^1 (1-r)^{2/p-2}d\nu(r).$$

证明至此完成。 □

最后，我们讨论 $\nu(\{1\})\neq 0$ 时 Shimorin 型核的逐点估计。我们先给出以下初等结果，其证明可由直接计算得到。

引理 2.5。对于所有 z、$\lambda\in\mathbb{D}$ 以及所有 $r\in[0,1]$，我们有

$$\frac{|1-z\overline{\lambda}|}{|1-rz\overline{\lambda}|} \le 2.$$

命题 2.6. 设 ν 是定义在 $[0,1]$，上的有限正博雷尔测度，并在 $[0,1]$ 上定义 ν_1 如下：对任意可测集 $I\subset[0,1]$，$\nu_1(I)=\nu([0,1)\cap I)$。因此，

$$\nu = \nu_1 + \nu(\{1\})\delta_1.$$

那么，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\nu(\{1\})}{|1-z\overline{\lambda}|^2} + |K_{\nu_1}(z,\lambda)|\right) \le |K_\nu(z,\lambda)| \le \frac{\nu(\{1\})}{|1-z\overline{\lambda}|^2} + |K_{\nu_1}(z,\lambda)|.$$

特别地，若 $\nu(\{1\})\neq 0$，则由引理 2.5，

$$\frac{\nu(\{1\})}{2|1-z\overline{\lambda}|^2} \le |K_\nu(z,\lambda)| \le \frac{2\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^2}.$$

证明。 回忆 K_ν 的定义，可得

$$\begin{aligned}|K_\nu(z,\lambda)| &= \left|\frac{1}{1-z\bar{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu(r)\right| \\ &= \left|\frac{1}{1-z\bar{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r) + \frac{\nu(\{1\})}{(1-z\bar{\lambda})^2}\right| \\ &\le |K_{\nu_1}(z,\lambda)| + \frac{\nu(\{1\})}{|1-z\bar{\lambda}|^2}.\end{aligned}$$

另一方面，注意到

$$\begin{aligned}|K_\nu(z,\lambda)| &= \left|\frac{1}{1-z\bar{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu(r)\right| \\ &= \frac{1}{|1-z\bar{\lambda}|^2}\left|\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r) + \nu(\{1\})\right|.\end{aligned}$$

我们断言，对于所有 $z,\ \lambda\in\mathbb{D}$ 和 $0\le r\le 1$,

$$\operatorname{Re}\frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}} \ge 0.$$

直接计算可得

$$\frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}} = \frac{(1-z\bar{\lambda})(1-r\bar{z}\lambda)}{|1-rz\bar{\lambda}|^2} = \frac{1-z\bar{\lambda}-r\bar{z}\lambda+r|z|^2|\lambda|^2}{|1-rz\bar{\lambda}|^2}.$$

于是我们取上述方程的实部，并利用不等式 $\operatorname{Re}(z\lambda) \le |z\lambda|$,

$$\operatorname{Re}\frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}} \ge \frac{1-|z\bar{\lambda}|(1+r)+r|z|^2|\lambda|^2}{|1-rz\bar{\lambda}|^2} = \frac{(1-|z||\lambda|)(1-r|z||\lambda|)}{|1-rz\bar{\lambda}|^2} \ge 0.$$

由于 $\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r)$ 的实部为正，因此

$$\left|\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r) + \nu(\{1\})\right| \ge \left|\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r)\right|,$$

and

$$\left|\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r) + \nu(\{1\})\right| \ge \nu(\{1\}).$$

结合上述不等式，可得

$$\begin{aligned}|K_\nu(z,\lambda)| &\ge \frac{1}{2}\frac{1}{|1-z\bar{\lambda}|^2}\left(\left|\int_0^1 \frac{1-z\bar{\lambda}}{1-rz\bar{\lambda}}d\nu_1(r)\right| + \nu(\{1\})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\nu(\{1\})}{|1-z\bar{\lambda}|^2} + |K_{\nu_1}(z,\lambda)|\right).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3. The multiplier coefficient related to T_ν

采用与 [CFWY],中的引理 11 类似的论证，我们有 e

$$T_\nu P f = T_\nu f$$

对所有 $1 < p < \infty$ 以及每个 $f \in L^p(\mathbb{D})$，其中 P 表示 Bergman 投影。此恒等式表明，对于 $p > 1$，算子 T_ν 在 $L^p(\mathbb{D})$上的有界性等价于其在 Bergman 空间 $L^p_a(\mathbb{D})$上的有界性。因此，解析函数空间上的乘子系数技巧为 T_ν提供了强有力的工具。

对于 $1 \le p < \infty$，复数序列 $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ 称为定义在 $L^p_a(\mathbb{D})$上的系数乘子，其映射为

$$M_m f : \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \mapsto \sum_{n=0}^\infty m_n a_n z^n,$$

其中 $f \in L^p_a(\mathbb{D})$的泰勒展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. 根据此定义，直接计算可得 $T_\nu f$的泰勒级数展开：

$$T_\nu f(z) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} d\nu(r) \right) a_n z^n. \tag{3.7}$$

于是，算子 T_ν 可由系数乘子序列

$$\mathfrak{m} = \{m_n\}_{n=0}^\infty$$

其中

$$m_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} d\nu(r), \quad n \ge 0. \tag{3.8}$$

下面的初等结果说明了系数乘子序列的增长性质。设

$$s_0 = \sup \left\{ 0 \le s < 1 \ : \ \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^s} \, d\nu(r) < \infty \right\}. \tag{3.9}$$

回顾由 c_ν （1.2）定义的量，

$$c_\nu = \sup \left\{ 1 \le c < 2 : \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{2/c'}} \, d\nu(r) < \infty \right\}.$$

然后结合 c_ν 的定义和（3.9），可得

$$s_0 = \frac{2}{c'_\nu}.$$

命题 3.1。设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，满足 $\nu(\{1\}) = 0$，并设 s_0 按（3.9）中的定义给出。如果 $0 < s_0 < 1$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log m_n}{\log(n+1)} = -s_0.$$

证明需要以下引理。

引理 3.2。 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，使得 $\nu(\{1\}) = 0$。对于 $0 < s < 1$,

$$\int_0^1 (1-r)^{-s} d\nu(r) < \infty \quad \textit{if and only if} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty. \tag{3.10}$$

证明。 设 $\varphi(t) = 1 - t$ 是定义在 $[0,1]$, 上的函数，并令 μ 表示 ν 在 φ下的推前测度。具体而言，对任意可测集 E,

$$\mu(E) = \nu(\varphi^{-1}(E)) = \nu\left(\{t \in [0,1] : 1 - t \in E\}\right). \tag{3.11}$$

根据变量代换公式，对任意 $s \in (0,1)$，有

$$\int_0^1 (1-r)^{-s}\, d\nu(r) = \int_0^1 t^{-s}\, d\mu(t). \tag{3.12}$$

断言 3.1。 对任意非负整数 n，有

$$\left(1 - e^{-1}\right) \int_0^1 \min\left\{1, \frac{1}{(n+1)t}\right\} d\mu(t) \le m_n \le \int_0^1 \min\left\{1, \frac{1}{(n+1)t}\right\} d\mu(t). \tag{3.13}$$

假设断言 3.1成立，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty$$

当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{s-1} \int_0^1 \min\left\{1, \frac{1}{(n+1)t}\right\} d\mu(t) < \infty. \tag{3.14}$$

对于固定的 $s \in (0,1)$，我们定义函数 $S_s : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ 如下

$$S_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{s-1} \min\left\{1, \frac{1}{(n+1)t}\right\}.$$

根据单调收敛定理，式（3.14）中的积分可改写为

$$\int_0^1 S_s(t) d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{s-1} \int_0^1 \min\left\{1, \frac{1}{(n+1)t}\right\} d\mu(t).$$

因此，对于 $s \in (0,\ 1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty \tag{3.15}$$

当且仅当

$$\int_0^1 S_s(t) d\mu(t) < \infty. \tag{3.16}$$

断言 3.2. 对于每个 $s \in (0,1)$，都存在正的常数 C_1 和 C_2，使得对所有$t \in (0,1]$,

$$C_1 t^{-s} \le S_s(t) \le C_2 t^{-s}. \tag{3.17}$$

一旦断言 3.1 和 3.2 得到证明，所需结论（3.10）便可由（3.12）、（3.17）、（3.16）和（3.15）立即得到。

现在我们来证明断言3.2。

断言3.2的证明。对于 $t \in (0,1]$, 令 $N_t = \lfloor 1/t \rfloor$ 表示不超过$1/t$的最大整数，即 $N_t \le 1/t < N_t + 1$。于是，我们有

$$S_s(t) = \sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} + \frac{1}{t} \sum_{n=N_t}^{\infty} (n+1)^{s-2}.$$

对于 $0 < t \le 1$，根据 $N_t = \lfloor 1/t \rfloor$ 的定义可得 $N_t+1 \ge t^{-1} \ge 1$。此外， $N_t+1 \ge 2$。因此我们得到下界:

$$\begin{aligned} (N_t+1)^s - 1 &= (N_t+1)^s \left(1 - (N_t+1)^{-s}\right) \\ &\ge (N_t+1)^s \left(1 - 2^{-s}\right) \\ &\ge t^{-s} \left(1 - 2^{-s}\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

回顾初等积分判别法估计:

$$\int_1^{N_t+1} x^{s-1} dx \le \sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \le 1 + \int_1^{N_t} x^{s-1} dx.$$

代入积分结果可得

$$\frac{(N_t+1)^s - 1}{s} \le \sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \le 1 + \frac{(N_t)^s - 1}{s}. \tag{3.19}$$

结合（3.18）与（3.19）的左侧部分，我们得到

$$\sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \ge \frac{1 - 2^{-s}}{s} t^{-s}. \tag{3.20}$$

对于互补的上界，我们使用估计式 $N_t = \lfloor 1/t \rfloor \le t^{-1}$ 其中 $0 < t \le 1$。将该结果代入（3.19）的右侧可得:

$$\sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \le 1 + \frac{(N_t)^s - 1}{s} \le 1 + \frac{(N_t)^s}{s} \le 1 + \frac{1}{s} t^{-s}.$$

由于 $0 < t \le 1$ 蕴含 $t^{-s} \ge 1$，我们将加性常数 $\mathbf{1}$ 吸收到首项中，从而得到紧凑的上界:

$$\sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \le \left(1 + \frac{1}{s}\right) t^{-s}. \tag{3.21}$$

结合（3.20）和（3.21），我们得到双边界:

$$\frac{1 - 2^{-s}}{s} t^{-s} \le \sum_{n=0}^{N_t-1} (n+1)^{s-1} \le \left(1 + \frac{1}{s}\right) t^{-s}. \tag{3.22}$$

接下来，我们估计

$$\frac{1}{t} \sum_{n=N_t}^{\infty} (n+1)^{s-2}.$$

我们还使用初等积分判别法估计

$$\int_{N_t+1}^{\infty} x^{s-2}dx \le \sum_{n=N_t}^{\infty}(n+1)^{s-2} \le \int_{N_t}^{\infty} x^{s-2}dx.$$

代入积分结果可得

$$\frac{(N_t+1)^{s-1}}{1-s} \le \sum_{n=N_t}^{\infty}(n+1)^{s-2} \le \frac{(N_t)^{s-1}}{1-s}. \tag{3.23}$$

注意到，对于 $0<t\le 1/2$,

$$N_t = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \ge \frac{1}{t} - 1 \ge \frac{1}{2t},$$

而对于 $1/2<t\le 1$,

$$N_t = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \ge 1 \ge \frac{1}{2t}.$$

因此，在所有情况下，我们都有 $N_t \ge 1/(2t)$。此外，

$$N_t + 1 \le \frac{1}{t} + 1 \le \frac{2}{t}.$$

将其与（3.23）结合，得到

$$\frac{2^{s-1}}{1-s}t^{-s} \le \frac{1}{t}\sum_{n=N_t}^{\infty}(n+1)^{s-2} \le \frac{2^{1-s}}{1-s}t^{-s}. \tag{3.24}$$

最后，将（3.22）和（3.24）中的估计结合起来，我们可以得出存在正的常数

$$C_1 = \frac{1-2^{-s}}{s} + \frac{2^{s-1}}{1-s} \quad \text{and} \quad C_2 = 1 + \frac{1}{s} + \frac{2^{1-s}}{1-s}$$

使得

$$C_1 t^{-s} \le S_s(t) \le C_2 t^{-s}$$

对所有 $0<t\le 1$，由此得到所需的不等式（3.17），并完成断言3.2的证明。□

尚需验证断言3.1。

断言 3.1的证明。 任取 $n\ge 0$，令 $N=n+1$。利用 $t=1-r$的变量代换公式，可得

$$m_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^N}{Nt} d\mu(t),$$

其中 μ 由（3.11）定义。因此，只需证明对任意 $t\in(0,1]$,

$$\left(1-e^{-1}\right)\min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\} \le \frac{1-(1-t)^N}{Nt} \le \min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\}.$$

情形 $0<t\le 1/N$。 在这种情形下，

$$\min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\} = 1. \tag{3.25}$$

根据伯努利不等式 $(1-t)^N \geq 1-Nt$，我们得到：

$$\frac{1-(1-t)^N}{Nt} \leq \frac{Nt}{Nt} = 1. \tag{3.26}$$

对于下界，定义

$$h(t) = \frac{1-(1-t)^N}{Nt}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{N}.$$

若 $N=1$，则 $h(t)=1$。当 $N=1$ 时，不等式显然成立。因此，我们假设 $N \geq 2$，并计算导数：

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{N(1-t)^{N-1} \cdot Nt - N\left(1-(1-t)^N\right)}{N^2t^2} \\ &= \frac{Nt(1-t)^{N-1} + (1-t)^N - 1}{Nt^2}. \end{aligned}$$

令 $\phi(t) = Nt(1-t)^{N-1} + (1-t)^N - 1$。则

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= N(1-t)^{N-1} - Nt(N-1)(1-t)^{N-2} - N(1-t)^{N-1} \\ &= -Nt(N-1)(1-t)^{N-2} < 0. \end{aligned}$$

因此，ϕ 递减，且由于 $\lim_{t\to 0+}\phi(t) = 0$，我们有 $\phi(t) < 0$ 对所有 $t > 0$ 均成立。这意味着 $h'(t) < 0$，所以 h 在 $(0,\ 1/N]$ 上递减。因此，对于 $t \in (0,\ 1/N]$，

$$h(t) = \frac{1-(1-t)^N}{Nt} \geq h\left(\frac{1}{N}\right) = 1 - \left(1-\frac{1}{N}\right)^N \geq 1 - \frac{1}{e}. \tag{3.27}$$

结合 (3.25)、(3.26) 和 (3.27)，对于任意 $t \in (0,\ 1/N]$，我们有

$$\left(1-e^{-1}\right)\min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\} \leq \frac{1-(1-t)^N}{Nt} \leq \min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\}. \tag{3.28}$$

情形 $1/N < t \leq 1$。 在这种情形下，

$$\min\left\{1, \frac{1}{Nt}\right\} = \frac{1}{Nt}. \tag{3.29}$$

回忆一下 $N \geq 1$ 和 $0 \leq (1-t)^N \leq 1$，因此

$$\frac{1-(1-t)^N}{Nt} \leq \frac{1}{Nt}. \tag{3.30}$$

对于下界，由于 $t > 1/N$，我们有

$$(1-t)^N < \left(1-\frac{1}{N}\right)^N \leq \frac{1}{e}.$$

因此，

$$1-(1-t)^N \geq 1 - \frac{1}{e}.$$

因此，

$$\frac{1-(1-t)^N}{Nt} \geq \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{Nt}. \tag{3.31}$$

结合式（3.31）、（3.30）和（3.29），对所有 $t \in (1/N,\ 1]$:

$$\left(1-e^{-1}\right)\min\left\{1,\frac{1}{Nt}\right\} \le \frac{1-(1-t)^N}{Nt} \le \min\left\{1,\frac{1}{Nt}\right\}. \tag{3.32}$$

由（3.28）和（3.32），对所有 $t \in (0,1],$，我们有

$$\left(1-e^{-1}\right)\min\left\{1,\frac{1}{Nt}\right\} \le \frac{1-(1-t)^N}{Nt} \le \min\left\{1,\frac{1}{Nt}\right\}.$$

关于 μ 在 $[0,1],$ 上对两边进行积分，可得双边不等式（3.13）。这就完成了对断言3.1的验证。□

接下来我们完成引理3.2的证明。 □

Now，我们现在可以证明命题3.1了。回顾一下，我们的目标是证明

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log m_n}{\log(n+1)} = -s_0,$$

其中

$$m_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}d\nu(r), \quad n \ge 0.$$

其中 s_0 由（3.9）定义为:

$$s_0 = \sup\left\{0 \le s < 1 \ :\ \int_0^1 (1-r)^{-s}\,d\nu(r) < \infty\right\}.$$

证明。令

$$L = \limsup_{n\to\infty}\frac{\log m_n}{\log(n+1)}.$$

注意　对于任意非负整数 n 和 $r \in [0,1],\ 1-r^{n+1} \ge 1-r.$ 于是

$$L = \limsup_{n\to\infty}\frac{\log m_n}{\log(n+1)} \ge \limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{n+1}\right)+\log\nu\left([0,1]\right)}{\log(n+1)} = -1,$$

并且我们有

$$L \ge -1.$$

接下来，我们建立上界

$$L \le -s_0. \tag{3.33}$$

我们通过矛盾进行证明。假设 $L > -s_0$。那么存在一个实数 t，使得

$$L > t > -s_0.$$

根据上极限的定义，存在一个子序列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和一个常数 $K_0 > 0$，使得对于所有 $k > K_0,$

$$\frac{\log m_{n_k}}{\log(n_k+1)} > t.$$

对两边取指数（注意到对于所有 k，$\log(n_k+1) > 0$），可得

$$m_{n_k} > (n_k+1)^t.$$

C选择 $s \in \mathbb{R}$ 使得 $-t < s < s_0$。根据引理 3.2，该级数收敛：

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty.$$

特别地，对于所有 $k \geq K_0$，尾和都是一致有界的：

$$\sup_{k \geq K_0} \sum_{n=n_k}^{2n_k} m_n (n+1)^{s-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty. \tag{3.34}$$

现在，我们通过对 $[n_k, 2n_k]$ 上的求和进行下界估计来导出矛盾。对于任意$n \in [n_k, 2n_k]$，根据 m_n 的定义可得：

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} d\nu(r) \geq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-r^{n_k+1}}{1-r} d\nu(r) \\ &= \frac{n_k+1}{n+1} m_{n_k} \geq \frac{1}{2}(n_k+1)^t. \end{aligned}$$

将这个下界代入对 $[n_k, 2n_k]$ 的求和中：

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_k}^{2n_k} m_n (n+1)^{s-1} &\geq \sum_{n=n_k}^{2n_k} \frac{1}{2}(n_k+1)^t (n+1)^{s-1} \\ &\geq \frac{1}{2}(n_k+1)^t (2n_k+2)^{s-1} (n_k+1) \\ &= 2^{s-2} \cdot (n_k+1)^{t+s}. \end{aligned}$$

根据我们对 s 的选择，有 $t+s > 0$，因此

$$\lim_{k \to \infty} (n_k+1)^{t+s} = \infty.$$

这意味着

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=n_k}^{2n_k} m_n (n+1)^{s-1} = \infty,$$

这与（3.34）中的一致有界性相矛盾。因此，不等式（3.33）成立。

现在，我们证明以下不等式：

$$L \geq -s_0. \tag{3.35}$$

我们采用反证法，假设

$$-1 \leq L < -s_0 < 1.$$

那么，存在一个实数 δ 使得

$$-1 \leq L < \delta < -s_0.$$

此外，存在一个正整数 N，使得对所有整数 $n \geq N$，

$$\frac{\log m_n}{\log(n+1)} < \delta.$$

然后，我们得到 m_n 的一个上界：

$$m_n < (n+1)^{\delta}, \quad n \geq N. \tag{3.36}$$

现在选择一个满足以下条件的实数 s

$$s_0 < s < -\delta < 1.$$

由于 $s_0 < s < 1$，根据 s_0 的定义，我们有

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^s}\, d\nu(r) = \infty. \tag{3.37}$$

由引理 3.2，此积分发散意味着

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} = \infty.$$

根据上界（3.36），我们估计级数的尾项:

$$\sum_{n=N}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)^{\delta} (n+1)^{s-1} = \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)^{\delta+s-1}.$$

根据我们对 $s < -\delta$ 的选择，有 $\delta + s < 0$，因此指数满足

$$\delta + s - 1 < -1.$$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} < \infty,$$

这与发散结果（3.37）矛盾。这个矛盾否定了我们的初始假设，因此我们得出所需的不等式（3.35）。

由不等式（3.33）和（3.35，命题 3 的证明得以完成。 1. □

推论 3.3。 令 s_0 按 （3.9）中的定义。若 $0 < s_0 < 1$，则对任意 $0 < \varepsilon < 1 - s_0$，存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足 $m_{n_k} \geq (n_k + 1)^{-s_0-\varepsilon}$，使得对所有$s > s_0$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{n_k} (n_k+1)^{s-1} = \infty.$$

证明。 我们反设。对任意 $0 < \varepsilon < 1 - s_0$，由命题 3.1 及上极限的定义，集合

$$\Lambda = \{n : m_n \geq (n+1)^{-s_0-\varepsilon}\}$$

是无限的，设 $s_0 < s \leq s_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ 使得

$$\sum_{n\in\Lambda} m_n (n+1)^{s-1} = C < \infty.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^{s-1} = \sum_{n\in\Lambda} m_n (n+1)^{s-1} + \sum_{n\notin\Lambda} m_n (n+1)^{s-1}.$$

于是，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n(n+1)^{s-1} \le C + \sum_{n\notin\Lambda}(n+1)^{-s_0-\varepsilon}(n+1)^{s-1}$$
$$= C + \sum_{n\notin\Lambda}(n+1)^{s-s_0-\varepsilon-1} \le C + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\frac{\varepsilon}{2}-1} < \infty.$$

由 Le mma 3.2，这与 s_0的定义矛盾。因此，我们有

$$\sum_{\eta\in\Lambda} m_n(n+1)^{s-1} = \infty, \quad s_0 < s \le s_0 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\sum_{n\in\Lambda} m_{n_k}(n_k+1)^{s-1}$关于 s 的单调性。于是对于 $s > s_0 + \frac{\varepsilon}{2}$，我们得到

$$\sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{s-1} = \infty.$$

证明至此完成。 □

4. The α-Bergman-CZOs on the unit disk

对于本文所需的端点估计，我们回顾一下单位圆盘上 α-Bergman-CZOs 的一些结果。值得注意的是，在研究 Shimorin 型算子T_ν时，相关的 α完全由 c_ν 确定。

定义 4.1. 令 $\alpha \in [1,2]$。核 $K\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{C}$，若其关于第一个变量解析、关于第二个变量反解析，则称其为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 α-Bergman–Calder´on– Zygmund 核；如果存在一个正数常数 C，使得以下两个条件成立：

$$|K(z,\lambda)| \le \frac{C}{|1-z\overline{\lambda}|^{\alpha}} \tag{4.38}$$

and

$$|\partial_z K(z,\lambda)| + |\partial_{\overline{\lambda}} K(z,\lambda)| \le \frac{C}{|1-z\overline{\lambda}|^{\alpha+1}}. \tag{4.39}$$

此外，积分算子

$$T_K f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\lambda) f(\lambda) dA(\lambda)$$

如果其核 K 是一个 α-Bergman–Calder´on–Zygmund 核，则称其为 α-Bergman-Calder´on-Zygmund 算子（α-Bergman-CZO）。

对于 $1 \le p < \infty$，回顾一下，弱 $L^{p,\infty}(\mathbb{D})$ 空间定义为所有满足弱 L^p 准范数 f 的可测函数的集合

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{D})} = \inf\left\{C > 0 : d_f(t) \le \frac{C^p}{t^p}, \quad \text{for all} \quad t > 0\right\}$$

是有限的。这里， $d_f(t)$ 表示 f的分布函数，定义为

$$d_f(t) = |\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > t\}|,$$

其中， $|\cdot|$ 是可测集的归一化面积测度。

接下来回顾空间 BMO(𝔻) 的定义，该空间由所有满足以下条件的可测函数 f 组成: $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{D})} = \sup_{Q \subset \mathbb{D}} E_Q\left(|f - E_Q(f)|\right) < \infty,$$

其中，上确界取遍单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的所有欧几里得立方体 Q。这里， $E_Q(f)$ 表示 f 在 Q 上的平均值，定义为

$$E_Q(f) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(z)\, dA(z),$$

且 $|Q|$ 是立方体 Q 的归一化勒贝格测度。

注 4.1。在 BMO(𝔻) 的定义中，立方体 $Q \subset \mathbb{D}$ 可以替换为 $\mathbb{D}$ 中的任意齐次球（参见 [FGW，命题 24 及 25]）。回顾一下，Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 是满足以下条件的 f 上的全纯函数空间： $\mathbb{D}$

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty,$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 表示布洛赫范数。Coifman–Rochberg–Weiss[（CRW），第 632] 页中的经典定理指出，存在正的常数 C_1， $C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \|f\|_{\mathcal{B}} \le \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{D})} \le C_2 \|f\|_{\mathcal{B}}$$

对任意 $f \in \mathcal{B}$ 均成立。注意， $T_K f$ 在单位圆盘上是全纯的。因此，对于积分算子 T_K，BMO 型估计等价于布洛赫估计。

命题 4.1。设 $\alpha \in [1, 2]$。假设 T_K 是一个 *α-Bergman–Calder´on–Zygmund* 算子。则

(a) 若 $1 < p < \frac{2}{2-\alpha}$ 且 $1/q = 1/p + \alpha/2 - 1$，则 T_K 从 $L^p(\mathbb{D})$ 到 $L^q(\mathbb{D})$ 有界；(b) T_K 从 $L^1(\mathbb{D})$ 到 $L^{\frac{2}{\alpha}, \infty}(\mathbb{D})$ 有界；(c) T_K 从 $L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})$ 到 $\mathcal{B}$ 有界。

命题 4.1 的证明。若 $\alpha = 2$，命题 4.1 中 (a) 和 (b) 的证明可由经典 Bergman 投影的结果推出（参见 [DHZZ，定理 1。1] 和 [Zhu14]）。令$\alpha \in [1, 2)$。由 (4.38)，可得

$$T_K f(z) \le C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\lambda)|}{|1 - z\overline{\lambda}|^{\alpha}} dA(\lambda) \le C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\lambda)|}{|z - \lambda|^{\alpha}} dA(\lambda).$$

因此，由 Hardy–Littlewood–Sobolev 定理（参见 [Gra，第 6]章），可得 (a) 和 (b)。对于 (c) 的证明，注意到当 $f \in L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})$ 时，有

$$(T_K f)'(z) = \partial_z \int_{\mathbb{D}} K(z, \lambda) f(\lambda) dA(\lambda) = \int_{\mathbb{D}} \partial_z K(z, \lambda) f(\lambda) dA(\lambda).$$

根据光滑 性条件（4.39），存在一个常数 C 使得对于任意 z， $\lambda \in$ $\mathbb{D}$

$$|\partial_z K(z, \lambda)| \le \frac{C}{|1 - z\overline{\lambda}|^{\alpha+1}}.$$

回顾 Forelli–Rudin 型估计 [Zhu14，引理 3。10]：对于 $t > -1$ 和 $c > 0$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\lambda|^2)^t}{|1 - z\overline{\lambda}|^{2+c+t}} dA(\lambda) \le C_{t,c} (1 - |z|^2)^{-c}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.40}$$

因此，我们有

$$|(T_K f)'(z)| = \left| \int_{\mathbb{D}} \partial_z K(z,\lambda) f(\lambda) dA(\lambda) \right| \leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{\alpha+1}} |f(\lambda)| dA(\lambda).$$

根据 H¨older 不等式并取 $t = 0$， $c = \alpha$ 在（4.40）中，

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{\alpha+1}} |f(\lambda)| dA(\lambda) \leq \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2+2/\alpha}} dA(\lambda) \right)^{\alpha/2} \|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})} \leq C_{0,\alpha} \frac{1}{1-|z|^2} \|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})}.$$

因此，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|(T_K f)'(z)| \leq C C_{0,\alpha} \|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})}.$$

此外，

$$|T_K f(0)| \leq \int_{\mathbb{D}} |K(0,\lambda)||f(\lambda)| dA(\lambda) \leq C\|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} dA(\lambda) \right)^{\alpha/2} \leq C\|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})}.$$

结合这两个估计，我们得到

$$\|T_K f\|_{\mathcal{B}} \leq (C C_{0,\alpha} + C)\|f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D})}.$$

因此，我们得出结论： $T_K : L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}$ 是有界的。这就完成了整个证明。□

给定一个有限正博雷尔测度 ν 在 $[0,1]$, 上，回忆由 c_ν （1.2）定义的量，

$$c_\nu = \sup \left\{ 1 \leq c < 2 : \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{2/c'}} \, d\nu(r) < \infty \right\}.$$

引理 4.2. 设 ν 是定义在 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，使得 $1 \leq c_\nu < 2$ 且$\nu(\{1\}) = 0$。假设 ν 满足 $2/c'_\nu$-*Carleson* 条件，即：

$$C_{c_\nu,\nu} = \sup_{0<t\leq 1} \frac{\nu([1-t,1))}{t^{2-2/c_\nu}} < \infty. \tag{4.41}$$

那么，*Shimorin* 型算子 T_ν 是一个 $2/c_\nu$-*Bergman–Calder´on–Zygmund* 算子。

推论 4.3. 设 ν 是定义在 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，且满足 $c_\nu = 1$。那么，*Shimorin* 型算子 T_ν 是单位圆盘上的2-*Bergman–CZO*。

证明. 当 $\nu(\{1\}) = 0$时，结论直接由引理 4.2得出。如果 $\nu(\{1\}) \neq 0$，则将 ν 分解为

$$\nu = \nu_1 + \nu(\{1\})\delta_1,$$

其中，对于任意博雷尔集 $I \subset [0,1]$, $\nu_1(I) = \nu([0,1) \cap I)$。因此， ν_1 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，且 $\nu_1(\{1\}) = 0$，核可分解为

$$K_\nu(z,\lambda) = K_{\nu_1}(z,\lambda) + \frac{\nu(\{1\})}{(1-z\overline{\lambda})^2}.$$

因此

$$T_{K_\nu} = T_{K_{\nu_1}} + \nu(\{1\})P,$$

与 P Bergman 投影。由引理4.2， T_{ν_1} 是一个 $2/c_{\nu_1}$-Bergman–CZO（尤其是一个 2-Bergman–CZO），而 P 是一个标准 2-Bergman–CZO。因此， T_{K_ν} 也是一个 2-Bergman–CZO。整个证明至此完成。□

引理4.2的证明。设 $\alpha = 2/c_\nu$。我们旨在证明 K_ν 满足该4.38）和（4.39）中的条件，针对 α。

情形 $c_\nu = 1$。在此情形下， $\alpha = 2$。由引理2.5给出的大小估计可得

$$|K_\nu(z,\lambda)| \le \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}d\nu(r) \le \frac{2\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^2}. \tag{4.42}$$

对于光滑估计，由于 $K_\nu(z, \lambda) = K_\nu(\lambda, \overline{z})$，只需证明

$$|\partial_z K(z,\lambda)| \le \frac{C}{|1-z\overline{\lambda}|^{\alpha+1}}$$

其中 C 为正的常数。对核求导可得

$$\partial_z K_\nu(z,\lambda) = \frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2}\int_0^1 \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}}d\nu(r) + \frac{\overline{\lambda}}{1-z\overline{\lambda}}\int_0^1 \frac{r}{(1-rz\overline{\lambda})^2}d\nu(r).$$

取绝对值并利用 $|r| \le 1$ 和 $|\lambda| < 1$，得到

$$\begin{aligned} |\partial_z K_\nu(z,\lambda)| &\le \frac{|\lambda|}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}d\nu(r) + \frac{|\lambda|}{|1-z\overline{\lambda}|}\int_0^1 \frac{r}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) \\ &\le \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}d\nu(r) + \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r). \end{aligned} \tag{4.43}$$

再次利用引理 2.5并结合估计式（4.43），可得

$$|\partial_z K_\nu(z,\lambda)| \le \frac{2\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^3} + \frac{4\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^3} = \frac{6\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^3}.$$

因此， K_ν 是一个 2-Bergman–CZO。

情形 $1 < c_\nu < 2$。回忆 c_ν (1.2) 的定义。在此情形下，我们有 $\nu(\{1\}) = 0$。于是 $\nu([1-t,1]) = \nu([1-t,1))$，对每个 $0 < t \le 1$均成立。于是

$$C_{c_\nu,\nu} = \sup_{0<t\le 1}\frac{\nu([1-t,1))}{t^{2-2/c_\nu}} = \sup_{0<t\le 1}\frac{\nu([1-t,1])}{t^{2-2/c_\nu}}.$$

由引理 2.5 可得逐点界

$$|1-rz\overline{\lambda}| \ge \max\left\{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|, 1-r\right\}. \tag{4.44}$$

据此对积分进行拆分，我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\,d\nu(r) &= \int_0^{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\,d\nu(r) + \int_{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\,d\nu(r) \\ &\le \int_0^{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} \frac{1}{1-r}\,d\nu(r) + \frac{2}{|1-z\overline{\lambda}|}\,\nu\left(\left[1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|,\,1\right]\right) \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

定义 $\Phi(u) = \nu([1-u,1])$，并利用变量代换公式，令 $u = 1-r$，可得

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^{1} \frac{1}{u} d\Phi(u).$$

根据斯蒂尔切斯积分公式及 $\nu(\{1\}) = 0$，我们得到

$$I_1 = \frac{\Phi(u)}{u}\Big|_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^{1} + \int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^{1} \frac{\Phi(u)}{u^2} du = \nu([0,1]) - \frac{\Phi(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|)}{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} + \int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^{1} \frac{\Phi(u)}{u^2} du.$$

项

$$-\frac{\Phi(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|)}{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} = -\frac{2}{|1-z\overline{\lambda}|}\nu\left(\left[1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|, 1\right]\right)$$

恰好抵消 I_2。根据 $2/c_\nu'$-Carleson 条件（4.41），我们有 $\Phi(u) \le C_{c_\nu,\,\nu} u^{2-2/c_\nu}$，特别地，$\nu([0,1]) = \Phi(1) \le C_{c_\nu,\,\nu}$，从而得到

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|} d\nu(r) \le \nu([0,1]) + C_{c_\nu,\nu} \int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^{1} u^{-2/c_\nu} du.$$

代入积分结果可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|} d\nu(r) &\le C_{c_\nu,\nu} + C_{c_\nu,\nu}\frac{c_\nu}{c_\nu-2}\left(1-\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^{1-2/c_\nu}\right) \\ &\le C_{c_\nu,\nu}\left(\frac{2c_\nu-2}{c_\nu-2}\right) + C_{c_\nu,\nu}\frac{c_\nu}{2-c_\nu}\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^{1-2/c_\nu}.\end{aligned}$$

由于 $1 < c_\nu < 2$，我们有 $\frac{2c_\nu-2}{c_\nu-2} \le 0$。因此，

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|} d\nu(r) \le C_{c_\nu,\nu}\frac{c_\nu\, 2^{2/c_\nu-1}}{2-c_\nu}\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2/c_\nu-1}}. \tag{4.45}$$

结合因子 $|1-z\lambda|^{-1}$，我们得到

$$|K_\nu(z,\lambda)| \le C_{c_\nu,\nu}\frac{c_\nu 2^{2/c_\nu-1}}{2-c_\nu}\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2/c_\nu}}.$$

对于光滑估计，由（4.43）可得

$$\begin{aligned}|\partial_z K_\nu(z,\lambda)| &\le \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|} d\nu(r) + \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2} d\nu(r) \\ &=: J_1 + J_2.\end{aligned}$$

J_1 由估计式（4.45）可知其有界，其中

$$J_1 \le C_{c_\nu,\nu}\frac{c_\nu 2^{2/c_\nu-1}}{2-c_\nu}\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2/c_\nu+1}}. \tag{4.46}$$

回顾 $\Phi(u) = \nu([1-u,1])$。由估计式（4.44），我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) &\le \int_0^{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} \frac{1}{(1-r)^2}d\nu(r) + \int_{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{4}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\,d\nu(r)\\ &\le \int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{1}{u^2}d\Phi(u) + \frac{4}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\Phi\left(\frac{|1-z\overline{\lambda}|}{2}\right).\end{aligned}$$

利用斯蒂尔切斯积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) &\le \nu([0,1]) - \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)}{\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^2} + 2\int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{\Phi(u)}{u^3}du + \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)}{\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^2}\\ &= \nu([0,1]) + 2\int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{\Phi(u)}{u^3}du.\end{aligned}$$

由于 $\Phi(u) \le C_{c_\nu,\,\nu}u^{2-2/c_\nu}$，积分项给出

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) \le \nu([0,1]) + 2C_{c_\nu,\nu}\int_{\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 u^{-1-2/c_\nu}du.$$

代入积分结果可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) &\le C_{c_\nu,\nu} - C_{c_\nu,\nu}c_\nu\left(1-\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^{-2/c_\nu}\right)\\ &\le C_{c_\nu,\nu}(1-c_\nu) + C_{c_\nu,\nu}c_\nu\left(\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|\right)^{-2/c_\nu}.\end{aligned}$$

由于 $1-c_\nu < 0$，我们有

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}d\nu(r) \le 2^{2/c_\nu}c_\nu C_{c_\nu,\nu}\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2/c_\nu}}. \tag{4.47}$$

乘以 $|1-z\lambda|^{-1}$ 后，得到

$$J_2 \le C_{c_\nu,\nu}c_\nu 2^{2/c_\nu}\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{1+2/c_\nu}}. \tag{4.48}$$

结合 (4.46) 和 (4.48) 的估计，可得

$$|\partial_z K_\nu(z,\lambda)| \le C_{c_\nu,\nu}c_\nu 2^{2/c_\nu}\left(\frac{1}{2(2-c_\nu)}+1\right)\frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{1+2/c_\nu}}.$$

这证实了 K_ν 是一个适用于 $1 < c_\nu < 2$的 $2/c_\nu$-Bergman–CZO。 □

引理 4.4。 设 ν 是 $[0,1]$ 上的有限正博雷尔测度，且满足 $c_\nu = 2$。假设ν 关于 $[0,1$上的双曲长度可积)。也就是说

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{1-r^2}d\nu(r) < \infty.$$

那么 *e Shimorin* 型算子 T_ν 是一个 1-*Bergman–Calder´on–Zygmund* 算子。

证明。 由于 $c_\nu = 2$，我们有 $\nu(\{1\}) = 0$。注意， ν on$[0,1)$ 的双曲可积性（相差绝对常数）等价于

$$C := \int_0^1 \frac{1}{1-r} d\nu(r) < \infty.$$

因此，对于 $0 < t \le 1$，我们有

$$\frac{\nu([1-t,1])}{t} = \int_{1-t}^1 \frac{1}{t}\, d\nu(r) \le \int_{1-t}^1 \frac{1}{1-r}\, d\nu(r) < C.$$

因此，我们得到

$$C_{2,\nu} := \sup_{0<t\le 1} \frac{\nu([1-t,1))}{t} = \sup_{0<t\le 1} \frac{\nu([1-t,1])}{t} < C.$$

根据估计式（4.44），我们对积分作如下估计：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\, d\nu(r) &\le \int_0^{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|} \frac{1}{1-r}\, d\nu(r) + \int_{1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|}^1 \frac{2}{|1-z\overline{\lambda}|}\, d\nu(r) \\
&\le \int_0^1 \frac{1}{1-r}\, d\nu(r) + \frac{2}{|1-z\overline{\lambda}|}\nu\left(\left[1-\frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}|,\, 1\right]\right) \\
&\le C + \frac{2}{|1-z\overline{\lambda}|}\, C_{2,\nu}\, \frac{1}{2}|1-z\overline{\lambda}| \\
&\le C + C_{2,\nu}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

化简右端后，得到

$$\begin{aligned}
|K_\nu(z,\lambda)| &= \left| \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{1-rz\overline{\lambda}}\, d\nu(r) \right| \\
&\le \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|} \int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\, d\nu(r) \le (C + C_{2,\nu}) \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|}.
\end{aligned}$$

接下来，我们验证光滑性条件。由（4.43），

$$|\partial_z K_\nu(z,\lambda)| \le \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^2} \int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\, d\nu(r) + \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|} \int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}\, d\nu(r).$$

由（4.49），我们知道

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|}\, d\nu(r) \le C + C_{2,\nu}.$$

现在，我们利用（4.47）来估计第二个积分：

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-rz\overline{\lambda}|^2}\, d\nu(r) \le 4C_{2,\nu} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|}.$$

综合这些结果，我们得到

$$|\partial_z K_\nu(z,\lambda)| \le (C + 5C_{2,\nu}) \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^2}.$$

T这表明，当 $c_\nu =$ 时， K_ν 是一个 1-Bergman–Calder´on–Zygmund 核 2. □

5. The proof of Theorem 1.1

为证明这一点，我们首先汇总如下关于单位圆盘上积分算子的若干经典结果。

引理 5.1 (命题 5.2, [Tao])。 设 $1 \le q \le \infty$。假设 $k:\ \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 是可测的，并且对几乎处处的 $z\in\mathbb{D}$， $\|k(z,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})}$ 一致有界。定义积分算子

$$(Tf)(\lambda)=\int_{\mathbb{D}} k(z,\lambda)\,f(z)\,dA(z),\quad \lambda\in\mathbb{D}.$$

则 $T:\ L^1(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的，并且

$$\|T\|_{L^1(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})}=\sup_{z\in\mathbb{D}}\|k(z,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})}.$$

反之，如果 $T:\ L^1(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的，那么对几乎处处的 $z\in\mathbb{D}$， $\|k(z,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})}$ 一致有界。

Le引理 5.2 (命题 6.1 [Tao])。 设 $1<r<\infty$， $1<p<q<\infty$ 其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+1.$$

假设 $k:\ \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 是可测的，满足

$$\|k(\cdot,\lambda)\|_{L^{r,\infty}(\mathbb{D})}\le C\quad \textit{for almost every } \lambda\in\mathbb{D}$$

and

$$\|k(z,\cdot)\|_{L^{r,\infty}(\mathbb{D})}\le C\quad \textit{for almost every } z\in\mathbb{D}$$

对于某个 $C>0$。则算子 T 定义为

$$Tf(\lambda)=\int_{\mathbb{D}} k(z,\lambda)f(z)\,dA(z)$$

从 $L^p(\mathbb{D})$到 $L^q(\mathbb{D})$是有界的。

5.1. **充分性证明**。 我们证明定理 1.1的充分性部分。

情形 $c_\nu=1$。 由于 $c_\nu=1$，我们有 $c'_\nu=\infty$. 回顾图 3。只需证明，若 (p,q) 满足以下条件之一:

(b) $1<p<\infty$、 $1/q>1/p$;

(c) $p=\infty$、 $1\le q<\infty$,

t则 $T_\nu:\ L^p(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的。回顾普适估计 (4.42) ,

$$|K_\nu(z,\lambda)|\le\frac{2\nu([0,1])}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\quad z,\lambda\in\mathbb{D}.$$

定义正算子 P_+ 如下

$$P_+f(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\lambda)}{|1-z\overline{\lambda}|^2}\,dA(\lambda),\quad f\in L^1(\mathbb{D}).$$

那么， $P_+:\ L^p(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 有界，意味着对某个 $(p,\ q)$， $\in[1,\infty]\times[1,\infty]$， $T_\nu:\ L^p(\mathbb{D})\to L^q(\mathbb{D})$ 有界。

情形 $1 < p < \infty$, $1/q > 1/p$。根据 [Zhu14], 中的定理 3.11，我们有 $P_+ : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ 对所有 $1 < p < \infty$，那么 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ 对所有有界$1 < p < \infty$。并且对所有 $1 \le q < \infty$ 满足

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p},$$

对于所有 $f \in L^p(\mathbb{D})$，我们有

$$\|T_\nu f\|_{L^q(\mathbb{D})} \le \|T_\nu f\|_{L^p(\mathbb{D})} \le \|T_\nu\|_{L^p(\mathbb{D})\to L^p(\mathbb{D})}\|f\|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

因此，$T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的。

情形 $p = \infty$, $1 \le q < \infty$。取 q_0 使得 $1 \le q < q_0 < \infty$。因此

$$\|T_\nu f\|_{L^q(\mathbb{D})} \le \|T_\nu f\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})} \le \|T_\nu\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})\to L^{q_0}(\mathbb{D})}\|f\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})} \le \|T_\nu\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})\to L^{q_0}(\mathbb{D})}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{D})}.$$

Hence, $T_\nu : L^\infty(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ is bounded for all $1 \le q < \infty$.

情形 $1 < c_\nu \le 2$。设 ν 是定义在 $[0, 1]$上的有限正博雷尔测度。回忆由式 c_ν （1.2）定义的量

$$c_\nu = \sup\left\{1 \le c < 2 : \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{2/c'}}\, d\nu(r) < \infty\right\}.$$

那么，$1 < c_\nu \le 2$ 意味着 $\nu(\{1\}) = 0$。

情形 $p = 1$, $1 \le q < c_\nu$。我们将证明 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的。取q_0 使得 $1 \le q < q_0 < c_\nu \le 2$。因此，由推论 2.4，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z, \cdot)\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})} \le \frac{2}{2-q_0}\int_0^1 (1-r)^{2/q_0-2} d\nu(r) < \infty.$$

由引理 ma 5.1，我们立即得到 $T_\nu : L^1(\mathbb{D}) \to L^{q_0}(\mathbb{D})$ 是有界的。因此 s

$$\|T_\nu f\|_{L^q(\mathbb{D})} \le \|T_\nu f\|_{L^{q_0}(\mathbb{D})} \le \|T_\nu\|_{L^1(\mathbb{D})\to L^{q_0}(\mathbb{D})}\|f\|_{L^1(\mathbb{D})},$$

那么，对每个 $1 \le q < c_\nu$，$T_\nu : L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 都是有界的。

情形 $1 < p < c'_\nu$，$1/q > 1/p + 1/c_\nu - 1$. 由于

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} + \frac{1}{c_\nu} - 1,$$

那么存在 r，使得 $1 < r < c_\nu < 2$，使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}.$$

根据推论 2.4 中的上界以及 c_ν 的定义，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{D})} \le \frac{2}{2-r}\int_0^1 (1-t)^{2/r-2} d\nu(t) < \infty.$$

由于 $\|K_\nu(z, \cdot)\|_{L^{r,\infty}(\mathbb{D})} \le \|K_\nu(z, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{D})}$ 且 $K_\nu(z, \lambda) = \overline{K_\nu(\lambda, z)}$，由引理 5.2 可知 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 有界。

情形 $p = c'_\nu$, $1 \le q < \infty$. 上述情形中的论证也适用于当前情形。

情形 $p > c'_\nu$, $1 \le q \le \infty$. 回忆一下，T_ν的对偶算子具有如下形式

$$T_\nu^* g(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\nu(\lambda, z) g(\lambda)\, dA(\lambda).$$

由于 $K_\nu(z,\lambda) = \overline{K_\nu(\lambda,z)}$，由引理 5.1，$T_\nu\colon L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 的有界性等价于 $T_\nu^*\colon L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 的有界性，进而等价于 $T_\nu\colon L^{q'}(\mathbb{D}) \to L^\infty(\mathbb{D})$ 的有界性。根据情形 $p=1$ 下的结论，我们由此得到，对于 $p > c_\nu'$ 和 $1 \le q \le \infty$，算子 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的。

5.2. **必要性的证明**。设 ν 是 $[0,1]$ 上的正有限测度。只需证明：若 $(p,\ q)$ 满足以下条件之一：

(a) $p=1,\ c_\nu < q \le \infty$；(b) $1 < p < c_\nu'$，
$q=\infty$；(c) $1 < p < c_\nu'$，
$1/q < 1/p + 1/c_\nu - 1$，

则 $T_\nu\colon L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是无界的。

情形 $p=1,\ c_\nu < q \le \infty$。我们采用反证法。假设存在 $q > c_\nu$使得 $T_\nu\colon L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的，其中 c_ν 由（1.2）定义

$$c_\nu = \sup\left\{1 \le c < 2 : \int_0^1 (1-r)^{2/c-2}\, d\nu(r) < \infty\right\}.$$

若 $c_\nu = 2$，则 $\nu(\{1\}) = 0$。因此，根据命题 2.1，对于每个 $q > 2 = c_\nu$，有

$$\|K_\nu(z,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})} \ge (1-|z|^2)^{2/q-1} \int_0^1 \frac{1}{1-r|z|^2}\, d\nu(r) \ge \nu([0,1])(1-|z|^2)^{2/q-1}.$$

由于 $2/q - 1 < 0$，令 $|z| \to 1^-$，可得 $\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z,\ \cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})} = \infty$，这与 T_ν 的有界性矛盾：$L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$。

若 $1 \le c_\nu < 2$ 且 $\nu(\{1\}) = 0$，只需证明对于每个满足 $c_\nu < q < 2$ 的 q，$T_\nu : L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 无界。为简便起见，我们仍用 q 表示这个指数。考虑二进区间

$$I_j = [1-2^{-j}, 1-2^{-j-1})$$

对于 $j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。我们首先证明存在一个常数 $C > 0$（与 j 无关），使得

$$\nu(I_j) \le C \cdot 2^{(2/q-2)j}. \tag{5.50}$$

为验证这一点，固定 $z_j = (1-2^{-j})^{1/2}$。由命题 2.1 中的下界可得

$$\|K_\nu(z_j,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})} \ge (1-|z_j|^2)^{2/q-1} \int_0^1 \frac{d\nu(r)}{1-r|z_j|^2}.$$

注意

$$|z_j|^2 = 1 - 2^{-j},$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{d\nu(r)}{1-r|z_j|^2} &\ge \int_{I_j} \frac{d\nu(r)}{1-r|z_j|^2} = \int_{I_j} \frac{d\nu(r)}{1-r\,(1-2^{-j})} \\ &\ge \int_{I_j} \frac{d\nu(r)}{1-r+2^{-j}} \ge \frac{\nu(I_j)}{2^{-j}+2^{-j}} = \frac{1}{2}\cdot 2^j \nu(I_j).\end{aligned}$$

由于 $1-|z_j|^2 = 1-(1-2^{-j}) = 2^{-j}$，我们得到

$$\|K_\nu(z_j,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})} \ge \frac{1}{2}\cdot(1-|z_j|^2)^{2/q-1}\cdot 2^j \nu(I_j) \ge \frac{1}{2}\cdot 2^{(2-2/q)j}\nu(I_j).$$

由于 $T_\nu: \ L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 有界，引理 5.1 推出 $\|K_\nu(z_j, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{D})}$ 对所有 j 都一致有界。因此，存在一个常数 $C > 0$ （与 j 无关），使得

$$\nu(I_j) \le C \cdot 2^{(2/q-2)j},$$

这验证了（5.50）。

接下来，固定一个足够小的 $\varepsilon > 0$，使得

$$q_\varepsilon = c_\nu + \varepsilon < q.$$

由于 $q_\varepsilon < q < 2$ 和 $T_\nu : L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 有界，我们计算得

$$\int_0^1 (1-r)^{2/q_\varepsilon - 2} d\nu(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{I_j} (1-r)^{2/q_\varepsilon-2} d\nu(r) \le 2^{2-2/q_\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j})^{2/q_\varepsilon-2} \nu(I_j)$$

$$\le 2^{2-2/q_\varepsilon} C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\cdot 2(1/q_\varepsilon - 1/q)}.$$

该级数收敛，因为 $1/q_\varepsilon - 1/q > 0$ （由于 $q_\varepsilon < q$），所以

$$\int_0^1 (1-r)^{2/q_\varepsilon-2} d\nu(r) < \infty.$$

这与 c_ν 的定义矛盾，因为 $q_\varepsilon > c_\nu$ （按构造）但上面的积分有限。因此，我们最初的假设是错误的，并且对于每个满足 $c_\nu < q < 2$ 的 q， $T_\nu : L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 都无界。

若 $\nu(\{1\}) \neq 0$，根据命题 2.6，我们有

$$|K_\nu(z,\lambda)| \ge \frac{\nu(\{1\})}{2} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^2},$$

这意味着，对于任意 $q > 1 = c_\nu$，由 [Zhu14，引理 310]，

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|K_\nu(z,\cdot)\|^q_{L^q(\mathbb{D})} \ge \frac{\nu(\{1\})^q}{2^q} \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\lambda}|^{2q}} dA(\lambda) = \infty.$$

那么， $T_\nu: \ L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 对所有 $1 < q < \infty$ 都无界。

只需讨论情形 $p = 1$， $q = \infty$。若 $T_\nu: \ L^1(\mathbb{D}) \to L^\infty(\mathbb{D})$ 有界，则可得 $T_\nu: L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 对某个 $q \in (c_\nu, 2)$ 有界，这与前面的结论矛盾。因此，对所有满足 $c_\nu < q \le \infty$ 的 q， $T_\nu: \ L^1(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 都无界。证明至此完成。

情形 $1 < p < c'_\nu$， $q = \infty$。由于 $K_\nu(z, w) = K_\nu(w, z)$，我们有 $T_\nu = T^*_\nu$。利用对偶性并采用与第 5.1 小节相同的论证可知，若 $1 < p < c'_\nu$， $q = \infty$，则 $T_\nu: \ L^p(\mathbb{D}) \to L^\infty(\mathbb{D})$ 无界。

情形 $1 < p < c'_\nu$， $1/q < 1/p + 1/c_\nu - 1$。在这种情况下，根据 c_ν 的值，论证分为以下三种情形：

(a) $c_\nu = 1$; (

b) $c_\nu = 2$; (c)

$1 < c_\nu < 2$。

当 $c_\nu = 1$ 或 $c_\nu = 2$时，我们改为构造支撑在边界盒 E_t 中的局部化测试函数，如引理5.3 所示，并结合 Shimorin 型核实部的下界，得到所需的矛盾。当 $1 < c_\nu < 2$时，我们采用乘子方法和系数判据来刻画解析函数的 Bergman L^p-正则性。

这　　种情况 $c_\nu = 1$。我们旨在证明，$T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 无界，且

$$1 < p < \infty \quad \text{and} \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p}.$$

回顾 c_ν 由 (1.2) 的定义可得

$$\int_0^1 (1-r)^{2/c-2} d\nu(r) = \infty, \quad c > 1. \tag{5.51}$$

引理 5.3. 令 $t \in (0,\ 1)$ 并定义集合

$$E_t := \left\{ \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - t \le \rho \le 1 - \frac{t}{2},\ |\theta| \le \frac{t}{20} \right\}.$$

存在绝对常数 $c_0 > 0$ 和 $t_0 \in (0,\ 1)$（我们可以取 $c_0 = \sqrt{3}/36$ 和 $t_0 = 1/\sqrt{2}$），使得对所有 $0 < t < t_0$ 以及所有 z、$\lambda \in E_t$，以下断言均成立：

(1) 对每个 $r \in [0, 1]$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})} \right) \ge \frac{c_0}{t\left((1-r) + t\right)}.$$

(2) 特别地，对于每个 $r \in [1 - t, 1]$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})} \right) \ge \frac{c_0}{2t^2}.$$

证明。对于 $z, \lambda \in E_t$，记

$$\vartheta = \arg \frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})},$$

我们有

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})} \right) = \frac{\cos\vartheta}{|1 - z\overline{\lambda}||1 - rz\overline{\lambda}|}.$$

根据三角不等式，

$$\begin{aligned} |1 - z\overline{\lambda}| &\le |1 - |z||\lambda|| + |z||\lambda| \left| 1 - \frac{z\overline{\lambda}}{|z||\lambda|} \right| \\ &\le 1 - (1-t)^2 + \left| \arg z\overline{\lambda} \right| \\ &\le 2t - t^2 + \frac{t}{10} \le 3t. \end{aligned} \tag{5.52}$$

并且对于 $0 \le r \le 1$,

$$\begin{aligned} |1 - rz\overline{\lambda}| = |1 - r + r(1 - z\overline{\lambda})| &\le (1-r) + |1 - z\overline{\lambda}| \\ &\le (1-r) + 3t \le 3\left((1-r) + t\right). \end{aligned} \tag{5.53}$$

取 $t_0 = 1/2$。对于 $0 < t < t_0$、$0 \le r \le 1$ 和 $z,\ \lambda \in E_t$，我们有

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \frac{\cos\vartheta}{|1-z\overline{\lambda}||1-rz\overline{\lambda}|} \ge \frac{\cos\vartheta}{9}\frac{1}{t\left((1-r)+t\right)}.$$

特别地，如果 $r \in [1-t, 1]$，则

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \frac{\cos\vartheta}{9}\frac{1}{t\left((1-r)+t\right)} \ge \frac{\cos\vartheta}{18}\frac{1}{t^2}.$$

还需证明 ϑ 具有上界。对于每个 $z,\ \lambda \in E_t$,

$$\operatorname{Re}(1-z\overline{\lambda}) = 1-\operatorname{Re}(z\overline{\lambda}) \ge 1-|z||\lambda| \ge 1-\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 \ge \frac{t}{2}.$$

类似地，$\operatorname{Re}(1-rz\overline{\lambda}) \ge t/2$。此外,

$$|\operatorname{Im}(1-z\overline{\lambda})| = |\operatorname{Im}(z\overline{\lambda})| = |z||\lambda|\sin\left(\arg z\overline{\lambda}\right) \le \frac{t}{10},$$

类似地，$|\operatorname{Im}(1-rz\overline{\lambda})| \le t/10$。因此,

$$\left|\arg(1-z\overline{\lambda})\right| \le \arctan\left(\frac{|\operatorname{Im}(1-z\overline{\lambda})|}{\operatorname{Re}(1-z\overline{\lambda})}\right) \le \arctan\left(\frac{t/10}{t/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{12}. \tag{5.54}$$

此外，我们有 $\left|\arg(1-r\overline{z\lambda})\right| < \pi/12$，因此

$$\left|\arg\left[(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})\right]\right| \le \left|\arg(1-z\overline{\lambda})\right| + \left|\arg(1-rz\overline{\lambda})\right| < \frac{\pi}{6}.$$

于是,

$$\left|\arg\frac{1}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})}\right| = \left|\arg\left[(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})\right]\right| < \frac{\pi}{6}, \quad \cos\vartheta > \cos\frac{\pi}{6}.$$

取 $c_0 = \sqrt{3}/36$ 即完成证明。 □

引理 5.4。设 E_t 由引理 5.3 定义。存在绝对常数 $\widetilde{c_0} > 0$ 和$t_0 \in (0,\ 1)$（我们可以取 $\widetilde{c_0} = 1/108$ 和 $t_0 = 1/2$），使得对所有 $0 < t < t_0$ 以及所有$z,\ \lambda \in E_t$以下断言成立:

(1) 对每个 $r \in [0, 1]$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \frac{\widetilde{c_0}}{t^2\left((1-r)+t\right)},$$

and

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2}\right) \ge \frac{\widetilde{c_0}}{t\left((1-r)+t\right)^2}.$$

(2) 特别地，对于每个 $r \in [1-t, 1]$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \frac{\widetilde{c_0}}{2t^3}, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2}\right) \ge \frac{\widetilde{c_0}}{4t^3}.$$

证明。令 z, $\lambda \in E_t$。由（5.54），我们有 $|\arg(1-z\overline{\lambda})| < \pi/12$ 以及 $|\arg(1-rz\lambda)| < \pi/12$。此外，由于 $\lambda \in E_t$，我们有 $|\arg \lambda| = |\arg \overline{\lambda}| \le t/20$。因此，第一个表达式的总辐角满足

$$\left|\arg\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right)\right| \le \frac{t}{20}+\frac{\pi}{4}.$$

取 $t_0 = 1/2$ ，由于 $0 < t < t_0$，这一总论证严格小于 $\pi/3$。因此 y,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{|\lambda|}{|1-z\overline{\lambda}|^2|1-rz\overline{\lambda}|} \ge \frac{1}{2}\frac{1-t}{|1-z\overline{\lambda}|^2|1-rz\overline{\lambda}|}.$$

注意到 $|\lambda| \ge 1-t \ge \frac{1}{2}$ 对每个 $\lambda \in E_t$。由（5.52）和（5.53），可得

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \ge \frac{1}{4}\frac{1}{(3t)^2\cdot 3((1-r)+t)} = \frac{1}{108}\frac{1}{t^2((1-r)+t)}.$$

取 $\widetilde{c_0} = 1/108.$。断言 **(1)** 中的第二个不等式可用相同的论证得到。最后，对于 $r \in [1-t, 1]$，我们有 $(1-r) + t \le 2t$。将其代入断言 **(1)** 的结果，即得断言 **(2)** 中具有相同常数 $\widetilde{c_0}$ 的下界。□

设 c_0 和 t_0 为引理 5.3中的常数。对于任意 $0 < t < t_0$，取 $z_t \in E_t$ 并定义函数

$$f_{z_t}(\lambda) = \frac{\overline{K_\nu(z_t,\lambda)}}{|K_\nu(z_t,\lambda)|}\mathbf{1}_{E_t}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{5.55}$$

于是，我们有 $\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})} = |E_t|^{\frac{1}{p}}$。只需证明对于 $1 < p < \infty$， $1/q < 1/p$，我们有

$$\sup_{0<t<t_0}\frac{\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})}}{\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}} = \infty.$$

由于存在绝对常数 c_1 和 c_2 ，使得

$$c_1 t^2 \le |E_t| \le c_2 t^2, \tag{5.56}$$

我们有

$$c_1^{1/p} t^{2/p} \le \|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})} \le c_2^{1/p} t^{2/p}. \tag{5.57}$$

此外，

$$\begin{aligned}|T_\nu f_{z_t}(z_t)| &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{K_\nu(z_t,\lambda)}}{|K_\nu(z_t,\lambda)|}\mathbf{1}_{E_t}(\lambda)K_\nu(z_t,\lambda)\,dA(\lambda)\\ &= \int_{E_t}\left|\frac{1}{1-z_t\overline{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{1-rz_t\overline{\lambda}}\,d\nu(r)\right|dA(\lambda).\end{aligned}$$

根据引理 5.3，对于所有 z，$\lambda \in E_t$ 以及 $r \in [0,1]$，定义 $T_\nu f_{z_t}(z_t)$ 的被积函数具有非负实部。于是，

$$
\begin{aligned}
|T_\nu f_{z_t}(z_t)| &\geq \int_{E_t} \left| \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{1}{(1-z_t\overline{\lambda})(1-rz_t\overline{\lambda})}\, d\nu(r) \right| dA(\lambda) \\
&\geq \int_{E_t} \int_{1-t}^1 \operatorname{Re} \frac{1}{(1-z_t\overline{\lambda})(1-rz_t\overline{\lambda})}\, d\nu(r)\, dA(\lambda) \\
&\geq \int_{1-t}^1 \frac{c_0}{2t^2}\, d\nu(r) |E_t| \geq \frac{1}{2} c_0 c_1 \nu([1-t,1]).
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

由于 $|z_t| < 1 - t/2$，球

$$
B\left(z_t, \frac{t}{4}\right) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - z_t| < \frac{t}{4} \right\}
$$

包含于 $\mathbb{D}$ 中。由 $|T_\nu f_{z_t}|^q$ 在 z_t 处的次调和性可得

$$
|T_\nu f_{z_t}(z_t)|^q \leq \frac{1}{|B(z_t, t/4)|} \int_{B(z_t,t/4)} |T_\nu f_{z_t}(\lambda)|^q\, dA(\lambda) \leq \frac{16}{t^2} \int_{\mathbb{D}} |T_\nu f_{z_t}(\lambda)|^q\, dA(\lambda). \tag{5.59}
$$

R将两边提升到 $1/q$ 次幂，并结合（5.58），可得

$$
\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})} \geq 16^{-1/q} t^{2/q} |T_\nu f_{z_t}(z_t)| \geq \frac{1}{2} 16^{-1/q} c_0 c_1 t^{2/q} \nu([1-t,1]).
$$

将两边除以 $\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}$ 并应用（5.57），得

$$
\frac{\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})}}{\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}} \geq C t^{2/q-2/p} \nu([1-t,1]),
$$

其中 $C = \frac{1}{2} 16^{-1/q} c_0 c_1 c_2^{-1/p}$。因此，只需证明

$$
\sup_{0<t\leq 1} t^{2/q-2/p} \nu([1-t,1]) = \infty.
$$

若 $\nu(\{1\}) \neq 0$，则

$$
\sup_{0<t\leq 1} t^{2/q-2/p} \nu([1-t,1]) \geq \sup_{0<t\leq 1} t^{2/q-2/p} \nu(\{1\}) = \infty.
$$

若 $\nu(\{1\}) = 0$，我们用反证法证明：假设这个上确界有限，那么就存在一个常数 $C > 0$，使得

$$
\nu([1-t,1]) \leq \widetilde{C} t^{2/p-2/q}, \quad 0 < t \leq 1.
$$

我们可以取 $t_j = 2^{-j}$，并且对 $j = 0, 1, 2, \cdots$ 取 $I_j = [1 - 2^{-j}, 1 - 2^{-j-1})$。于是我们有

$$
\nu(I_j) \leq \nu([1-t_j,1]) \leq \widetilde{C} 2^{-j(2/p-2/q)}
$$

对所有 $j = 0, 1, 2, \cdots$。因此，我们可以取 $s = \min\{1/2, 1/p - 1/q\} > 0$。于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r)^{-s} d\nu(r) &= \sum_{j=0}^\infty \int_{I_j} (1-r)^{-s}\, d\nu(r) \leq \sum_{j=0}^\infty (2^{-j})^{-s} \nu(I_j) \\
&\leq \widetilde{C} \sum_{j=0}^\infty (2^{-j})^{-(1/p-1/q)} \cdot 2^{-j(2/p-2/q)} = \widetilde{C} \sum_{j=0}^\infty 2^{-j(1/p-1/q)} < \infty.
\end{aligned}
$$

于是我们可以取 $c = 2/(2-s) < 2$，使得

$$\int_0^1 (1-r)^{2/c-2} d\nu(r) = \int_0^1 (1-r)^{-s} d\nu(r) < \infty.$$

这与 5.51 中 c_ν 的定义矛盾。因此，我们得出 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 无界。

情形 $c_\nu = 2$. 我们旨在证明 $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 无界，其中

$$1 < p < 2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

设 c_0 和 t_0 为引理 5.3中的常数。对任意 $0 < t < t_0$，取 $z_t \in E_t$ 并定义函数 f_{z_t} 如下 (5.55)。只需证明对于 $1 < p < \infty$，$1/q < 1/p - 1/2$，有

$$\sup_{0<t<t_0} \frac{\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})}}{\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}} = \infty.$$

由引理 5.3可知，对所有 z，$\lambda \in E_t$ 和 $r \in [0,1]$，定义 $T_\nu f_{z_t}(z_t)$ 的被积函数具有非负实部，并结合 (5.58)，得到

$$\begin{aligned} |T_\nu f_{z_t}(z_t)| &\geq \int_{E_t} \int_0^1 \operatorname{Re} \frac{1}{(1-z_t\overline{\lambda})(1-rz_t\overline{\lambda})}\, d\nu(r)\, dA(\lambda) \\ &\geq \int_0^1 \frac{c_0}{t\,((1-r)+t)}\, d\nu(r)|E_t| \geq c_0 c_1 t \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r). \end{aligned} \tag{5.60}$$

由 (5.59)，我们得到

$$|T_\nu f_{z_t}(z_t)|^q \leq \frac{16}{t^2} \int_{\mathbb{D}} |T_\nu f_{z_t}(\lambda)|^q\, dA(\lambda).$$

将两边提升至 $1/q$ 次幂，并结合此前对 $|T_\nu f_{z_t}(z_t)|$ 的估计，可得

$$\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})} \geq 16^{-1/q} t^{2/q} |T_\nu f_{z_t}(z_t)| \geq 16^{-1/q} c_0 c_1 t^{2/q+1} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r).$$

将两边除以 $\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}$ 并应用 f_{z_t} 的范数估计，由（5.60），令$C = 16^{-1/q} c_0 c_1 c_2^{-1/p}$。于是

$$\frac{\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})}}{\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}} \geq C t^{2/q-2/p+1} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r).$$

注意，根据单调收敛定理，我们有

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t} d\nu(r) = \int_0^1 \frac{1}{(1-r)} d\nu(r) \geq \nu([0,1]) > 0.$$

由于 $2/q - 2/p + 1 < 0$，我们得到

$$\lim_{t\to 0} t^{2/q-2/p+1} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r) = \infty.$$

由此可得

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|T_\nu f_{z_t}\|_{L^q(\mathbb{D})}}{\|f_{z_t}\|_{L^p(\mathbb{D})}} = \infty.$$

因此我们得出结论：$T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是无界的。

情形 e $1 < c_\nu < 2$. 我们旨在证明， $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是无界的，且 h

$$1 < p < c_\nu' \quad \text{and} \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \frac{1}{c_\nu} - 1.$$

注意，对于 $f \in L^1(\mathbb{D})$， $T_\nu f$ 总是全纯。因此，只需证明：若$1 < p < c_\nu'$且 $1/q < 1/p + 1/c_\nu - 1$，则存在一个函数 f，使得 $f \in L^p_a(\mathbb{D})$，但$T_\nu f \notin L^q_a(\mathbb{D})$。

我们将 [BKV，命题 24] 记为引理 5.5，并将用它来构造具有指定泰勒系数的解析测试函数。

引理 5.5。 设 $a_n \geq 0$、 $1 < p < \infty$ 和 $C < \infty$，且以下条件之一成立：
(1) (a_n)是单调的；或(2) 对于每个 k， $B_k = \{n : \ 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$，子序列 $(a_n)_{n \in B_k}$ 是单调的，并且对于所有 n、 $m \in B_k$，都有 $a_m \leq C\, a_n$。

当且仅当 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in L^p_a(\mathbb{D})$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-3} |a_n|^p < \infty.$$

令 s_0 如（3.9）所定义，则

$$0 < s_0 = \frac{2}{c_\nu'} < 1.$$

由于 $1/q < 1/p + 1/c_\nu - 1$，我们有

$$\frac{2}{p} - 1 > \frac{2}{q} + \frac{2}{c_\nu'} - 1 = \frac{2}{q} + s_0 - 1.$$

因此，存在一个常数 t ，使得

$$\frac{2}{p} - 1 > t > \frac{2}{q} + s_0 - 1. \tag{5.61}$$

取 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得

$$t > \frac{2}{q} + s_0 - 1 + 2\varepsilon, \tag{5.62}$$

and

$$\varepsilon < \frac{1 - s_0}{q+1} < 1 - s_0. \tag{5.63}$$

由推论 3.3，存在一个递增子序列，记为 Λ ，使得

$$\Lambda = \left\{ n \in \mathbb{N} : m_n \geq (n+1)^{-s_0 - \varepsilon} \right\}$$

and

$$\sum_{n \in \Lambda} m_n (n+1)^{s-1} = \infty, \tag{5.64}$$

对于 $s_0 < s < 1$。

我们将论证分为两种情况： $2 \leq p < c_\nu'$ 和 $1 < p < 2$。

情形 $2 \le p < c'_\nu$。在这种情形下，$t < 2/p - 1 \le 0$。令

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^t z^n. \tag{5.65}$$

由于 $t < 2/p - 1$，我们有 $tp + p - 3 < -1$。于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-3} (n+1)^{tp} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{tp+p-3} < \infty.$$

根据引理5.5，我们有 $f_t \in L^p_a(\mathbb{D})$。

回顾 m_n 在（3.8）中给出的定义：

$$m_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} d\nu(r) = \int_0^1 \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r^k \, d\nu(r).$$

由于对所有 $0 \le k \le n$，$r^{n+1} \le r^k$，因此

$$r^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r^k.$$

此外，我们计算 m_{n+1} 如下：

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= \int_0^1 \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} r^k \, d\nu(r) = \int_0^1 \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r^k + \frac{r^{n+1}}{n+1} \right) d\nu(r) \\ &\le \int_0^1 \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r^k + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} r^k \right) d\nu(r) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r^k \, d\nu(r) = m_n. \end{aligned}$$

因此我们得出序列 $\{m_n\}$ 是非递增的。利用 T_ν 的系数表示（参见（3.7））， 我们有

$$T_\nu f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n (n+1)^t z^n.$$

由于 $t < 0$ 和 $\{m_n\}$ 是非递增且为正的，因此序列 $\{m_n(n+1)^t\}$ 也是非递增的。我们断言

$$T_\nu f_t \notin L^q_a(\mathbb{D}).$$

为验证这一断言，根据引理 5.5，只需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{q-3} \left(m_n (n+1)^t \right)^q = \infty.$$

事实上，对于所有 $n \in \Lambda$，我们都有下界 $m_n \geq (n+1)^{-s_0-\varepsilon}$。将此估计代入级数可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{q-3}\left(m_n(n+1)^t\right)^q &\geq \sum_{n\in\Lambda} m_n \cdot m_n^{q-1}(n+1)^{tq+q-3}\\ &\geq \sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{(-s_0-\varepsilon)(q-1)}(n+1)^{tq+q-3}\\ &= \sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{(-s_0-\varepsilon)(q-1)+tq+q-3}.\end{aligned} \tag{5.66}$$

由（5.62），可得

$$tq+q-3 > \left(\frac{2}{q}+s_0+2\varepsilon\right)q-3.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{q-3}\left(m_n(n+1)^t\right)^q &\geq \sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{(-s_0-\varepsilon)(q-1)+(2/q+s_0+2\varepsilon)q-3}\\ &= \sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{s_0+\varepsilon(q+1)-1}.\end{aligned} \tag{5.67}$$

根据 ε 的选取（参见（5.63））， 可得 $1 > s_0+\varepsilon\,(q+1) > s_0$。由（5.64），可得

$$\sum_{n\in\Lambda} m_n(n+1)^{s_0+\varepsilon(q+1)-1} = \infty.$$

引理 5.5 表明 $T_\nu f_t \notin L_a^q(\mathbb{D})$。

情形 $1 < p < 2$。在此情形下，$2/p-1 > 0$。由（5.61），存在一个常数 t 使得

$$\frac{2}{p}-1 > t > \frac{2}{q}+\frac{2}{c'_\nu}-1.$$

如果 $t \leq 0$，则序列 $\{m_n(n+1)^t\}$ 是非递增的。因此，我们归结为情形$p \geq 2$。然而，如果 $t > 0$，序列 $\{m_n(n+1)^t\}$ 一般不一定是单调的。因此，我们引入一个适当的测试函数来继续论证。

对于每个非负整数 k（即 $k = 0, 1, 2, \ldots$），我们定义非负整数块

$$B_k = \{n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\},$$

设 $l_k = 2^k$。对于任意 $n \in B_k$，我们有

$$m_n = \frac{\int_0^1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}d\nu(r)}{n+1} \geq \frac{\int_0^1 \frac{1-r^{l_k+1}}{1-r}d\nu(r)}{n+1} = \frac{l_k+1}{n+1}m_{l_k} \geq \frac{1}{2}m_{l_k}. \tag{5.68}$$

为每个 B_k 定义系数序列，其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$a_n = \frac{m_{l_k}}{m_n}(n+1)^t, \quad n \in B_k, \text{ and } k = 0, 1, 2, \cdots.$$

接下来，我们将修正测试函数定义为

$$g_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{5.69}$$

注意，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p(n+1)^{p-3}\le 2^p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{tp}(n+1)^{p-3}=2^p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p(t+1)-3}.$$

由于 $t<2/p-1$，这意味着 $p(t+1)-3<-1$，因此我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p(n+1)^{p-3}<\infty.$$

此外，由于 $t>0$，我们有 $a_n=\frac{m_{l_k}}{m_n}(n+1)^t$ 关于每个 B_k都是递增的。由（5.68），对所有 $n,\ l\in B_k$,

$$\frac{a_n}{a_l}=\frac{(n+1)^t}{(l+1)^t}\frac{m_l}{m_n}\le 2^{t+1}.$$

因此，由引理 5.5，$g_t\in L^p_a(\mathbb{D})$。

现在，我们证明 $T_\nu g_t\notin L^q_a(\mathbb{D})$。$T_\nu g_t(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in B_k}m_{l_k}(n+1)^t z^n$。对于每个$k\in\mathbb{N}$ 和 $n\in B_k$，$\{m_{l_k}(n+1)^t\}$ 是单调的，并且

$$\frac{(n+1)^t m_{l_k}}{(l+1)^t m_{l_k}}=\frac{(n+1)^t}{(l+1)^t}\le 2^t,\quad n,l\in B_k.$$

那么，由引理 5.5，我们只需证明 $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in B_k}(m_{l_k}(n+1)^t)^q(n+1)^{q-3}=\infty$。由于 m_n 是递减的，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in B_k}(m_{l_k}(n+1)^t)^q(n+1)^{q-3}&\ge\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in B_k}(m_n(n+1)^t)^q(n+1)^{q-3}\\&\ge\sum_{n=0}^{\infty}(m_n(n+1)^t)^q(n+1)^{q-3}.\end{aligned}$$

与 (5.66) 和 (5.67) 中相同的论证完成了证明。

6. The proof of Theorem 1.2

为证明定理 1.2，本节陈述并证明三个关于临界边界的结果。为简化记号，对于任意实数 $\alpha\ge 0$，若正有限测度 ν 在 $[0,1)$ 上满足以下条件，则称其满足 α-Carleson 条件：

$$\sup_{0<t\le 1}\frac{\nu([1-t,1))}{t^\alpha}<\infty.$$

特别地，测度 ν 满足 0-Carleson 条件，意味着它是有限测度。正测度 ν 关于$[0,1)$上的双曲弧长可积，当且仅当

$$\int_{[0,1)}\frac{1}{1-r^2}\,d\nu(r)<\infty.$$

定理 6.1。设 ν 是 $[0,1]$上的有限正博雷尔测度。设 c'_ν 是 c_ν的对偶指标。假设 $1<p<c'_\nu$，并考虑满足恒等式的 q

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{c_\nu}-1.$$

则有以下结论：

(a) 若 $1 \le c_\nu < 2$，则以下条件等价：*(1)* $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^{q,\infty}(\mathbb{D})$ 是有界的；*(2)* $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的；*(3)* 测度 ν 满足 $2/c_\nu'$-*Carleson* 条件。*(b)* 若 $c_\nu = 2$（因此 $1 < p < 2$ 和 $q = \frac{2p}{2-p}$），则以下条件等价：*(1)* $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^{q,\infty}(\mathbb{D})$ 是有界的；*(2)* $T_\nu : L^p(\mathbb{D}) \to L^q(\mathbb{D})$ 是有界的；*(3)* 测度 ν 关于 $[0,1$ 上的双曲弧长可积。

定理 6.2。 设 ν 是 $[0,1]$上的有限正博雷尔测度。设 c_ν' 是 c_ν的对偶指标。那么

（a）若 $1 \le c_\nu < 2$, $T_\nu : \ L^1(\mathbb{D}) \to L^{c_\nu,\infty}(\mathbb{D})$ 有界，当且仅当测度 ν满足 $2/c_\nu'$-*Carleson* 条件。（b）若 $c_\nu = 2$, $T_\nu : \ L^1(\mathbb{D}) \to L^{2,\infty}(\mathbb{D})$ 有界，当且仅当测度 ν 关于 $[0,1)$上的双曲弧长可积。

如引言中的备注 4.1 所述，我们证明定理 6.3的 Bloch 空间版本。

定理 6.3。 设 ν 是 $[0,1]$上的有限正博雷尔测度。那么

（a）若 $1 \le c_\nu < 2$，算子 $T_\nu : \ L^{c_\nu'}(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}$ 有界，当且仅当测度ν 满足 $2/c_\nu'$-*Carleson* 条件。（b）若 $c_\nu = 2$，算子 $T_\nu : \ L^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}$ 有界，当且仅当测度 ν 关于 $[0,1)$上的双曲弧长可积。

定理 1.2 的证明。 由定理 6.1、定理 6.2 和定理 6.3 可知。 □

给定有限测度 ν在 $[0,1]$, 满足 $2/c_\nu'$-Carleson 条件或定理6.1、定理 6.2或定理 6.3中出现的双曲可积性条件时，算子 T_ν 由引理 $2/c_\nu$-Bergman–CZO、推论 4.2、推论 4.3 和引理 4.4可知是单位圆盘上的 4.1 -Bergman–CZO。因此，应用命题 $\Rightarrow$可得到定理 6.1中的蕴含关系（3）（2），以及定理 6.2和定理 6.3中的充分性。

若 $c_\nu = 1$, $2/c_\nu'$-Carleson 条件等价于 ν 是有限测度。从下一小节开始，我们完成上述三个定理的其余部分，这些部分只涉及情形 $1 < c_\nu \le 2$。特别地，有 $\nu(\{1\}) = 0$。

6.1. **定理 6.1的证明**。 证明分两种情况进行： $c_\nu \in$和 $c_\nu = 2$。我们的策略是 $(1,2)$

$$(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).$$

由于蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 显然成立，且 (3) $\Rightarrow$(2) 已得到证明，因此只需证明以下蕴含关系：

$$(1) \Rightarrow (3).$$

设$1 < p < c_\nu'$ 满足 $1/q = 1/p + 1/c_\nu - 1$。假设 $T_\nu : \ L^p(\mathbb{D}) \to L^{q,\infty}(\mathbb{D})$ 有界，即，

$$|\{z \in \mathbb{D} : |T_\nu f(z)| > \tau\}| \le \left(\frac{C\|f\|_{L^p(\mathbb{D})}}{\tau} \right)^q, \quad \text{for } \tau > 0,\ f \in L^p(\mathbb{D}). \tag{6.70}$$

对于某个常数 $C > 0$。

情形 $1 < c_\nu < 2$。 令 c_0 和 t_0 为引理 5.3中的常数。对于任意 $t \in (0, t_0)$，定义一个集合

$$E_t := \left\{ \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - t \le \rho \le 1 - \frac{t}{2},\ |\theta| \le \frac{t}{20} \right\}, \tag{6.71}$$

及其示性函数

$$f_t(z) = \mathbf{1}_{E_t}(z). \tag{6.72}$$

由（5.56），存在绝对常数 c_1 和 c_2 使得

$$c_1 t^2 \le |E_t| \le c_2 t^2 \quad \text{and} \quad c_1^{1/p} t^{2/p} \le \|f_t\|_{L^p(\mathbb{D})} \le c_2^{1/p} t^{2/p}. \tag{6.73}$$

因此，由引理 5.3，对所有 z，$\lambda \in E_t$ 以及 $r \in [0,1]$，定义 $T_\nu f_t$（z）的被积函数具有非负实部；当 $r \in [1-t, 1]$ 时，它满足所述下界。

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})} \right) \ge \frac{c_0}{2t^2}. \tag{6.74}$$

于是，对每个 $z \in E_t$，由（6.73）和（6.74），可得

$$\begin{aligned} |T_\nu f_t(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1 - z\overline{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{1 - rz\overline{\lambda}}\, d\nu(r) \mathbf{1}_{E_t}(\lambda)\, dA(\lambda) \right| \\ &\ge \left| \operatorname{Re} \int_{E_t} \int_0^1 \frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})}\, d\nu(r)\, dA(\lambda) \right| \\ &\ge \int_{E_t} \int_{1-t}^1 \operatorname{Re} \frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})}\, d\nu(r)\, dA(\lambda) \\ &\ge \frac{c_0}{2t^2} \nu([1-t, 1))\, |E_t| \ge \frac{1}{2} c_0 c_1 \nu([1-t, 1)). \end{aligned} \tag{6.75}$$

令 $\tau = \frac{1}{4} c_0 c_1 \nu([1-t, 1))$，则 $E_t \subset \{z \in \mathbb{D} : |T_\nu f_t(z)| > \tau\}$. 因此，（6.70）蕴含

$$\left(\frac{C \|f_t\|_{L^p(\mathbb{D})}}{\tau} \right)^q \ge |\{z \in \mathbb{D} : |T_\nu f_t(z)| > \tau\}| \ge |E_t| \ge c_1 t^2.$$

令 $\widetilde{C}_\nu = 4 c_0^{-1} c_1^{-(1+1/q)} c_2^{1/p} C$. 然后结合（6.75），

$$\nu([1-t, 1)) \le \widetilde{C}_\nu\, t^{2/p - 2/q} = \widetilde{C}_\nu\, t^{2 - 2/c_\nu}, \quad \text{for } 0 < t < t_0,$$

If $t_0 \le t \le 1$, $\nu([1-t, 1)) \le \nu([0, 1))$, 因此 $t^{2-2/c_\nu} \ge t_0^{2-2/c_\nu}$。由此，我们得到

$$\sup_{0 < t \le 1} \frac{\nu([1-t, 1))}{t^{2-2/c_\nu}} < \infty.$$

这说明 ν 满足 $2/c'_\nu$-Carleson 条件。

情形 $c_\nu = 2$。 在这种情形下，我们有

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

设集合 E_t 和函数 f_t 定义如下：（6.71）和（6.72）。由引理 5.3可知，对于所有z, $\lambda \in E_t$和 $r \in [0,1]$，定义 $T_\nu f_t$(z的被积函数具有非负实部，并且

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(1 - z\overline{\lambda})(1 - rz\overline{\lambda})} \ge \frac{c_0}{t((1-r) + t)}. \tag{6.76}$$

于是，对每个 $z \in E_t$，由（6.73）、（6.75）和（6.76），可得

$$
\begin{aligned}
|T_\nu f_t(z)| &\geq \int_0^1 \frac{c_0}{t\left((1-r)+t\right)}\, d\nu(r)\, |E_t| \\
&\geq c_0 c_1 t \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r).
\end{aligned} \tag{6.77}
$$

Let

$$
\tau = \frac{1}{2} c_0 c_1 t \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r),
$$

那么 $E_t \subset \{z \in \mathbb{D}\colon\ |T_\nu f_t\ (z)\ | > \tau\}$。因此，（6.70）意味着

$$
\left(\frac{C\,\|f_t\|_{L^p(\mathbb{D})}}{\tau}\right)^q \geq |\{z \in \mathbb{D} : |T_\nu f_t(z)| > \tau\}| \geq |E_t| \geq c_1 t^2.
$$

那么结合（6.77），

$$
\int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r) \leq \widetilde{C}_\nu,
$$

w这里 $\widetilde{C}_\nu = 2c_0^{-1} c_1^{-(1+1/q)} c_2^{1/p} C$。由单调收敛定理可得 s

$$
\int_0^1 \frac{1}{1-r}\, d\nu(r) = \lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t}\, d\nu(r) \leq \widetilde{C}_\nu < \infty.
$$

这就完成了从 **(1)** ⇒**(3)** 的推导。

6.2. **定理 6.2的证明**。 注意，定理 ⇒ **6.1** 中从 **(1)**到 **(3)** 的推论对 $p = 1$ 和 $q = c_\nu$仍然成立，由此完成了定理 6.2中必要性的证明。

6.3. **定理 6.3的证明**。 回顾一下，只需证明定理6.3的必要部分。

情形 $1 < c_\nu < 2$。 假设 T_ν： $L^{c_\nu'}(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}$ 有界。则存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $f \in L^{c_\nu'}(\mathbb{D})$,

$$
\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)\, |(T_\nu f)'(z)| \leq C \|f\|_{L^{c_\nu'}(\mathbb{D})}. \tag{6.78}
$$

对于 $0 < t < 1$，令集合 E_t 和函数 f_t 分别定义为（6.71）和（6.72）。则

$$
\|f_t\|_{L^{c_\nu'}(\mathbb{D})} = |E_t|^{1/c_\nu'},
$$

以及它们 存在绝对常数 c_1， $c_2 > 0$ 使得 $c_1 t^2 \leq |E_t| \leq c_2 t^2$，因此

$$
c_1^{1/c_\nu'} t^{2/c_\nu'} \leq \|f_t\|_{L^{c_\nu'}(\mathbb{D})} \leq c_2^{1/c_\nu'} t^{2/c_\nu'}.
$$

固定 $0 < t < t_0$ 并选择 $z = \sqrt{1-t} \in E_t$，使得 $t = 1 - |z|^2$。

$$
\begin{aligned}
|(T_\nu f_t)'(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} \partial_z K_\nu(z,\lambda) \mathbf{1}_{E_t}(\lambda) dA(\lambda) \right| \\
&= \left| \int_{E_t} \int_0^1 \left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2 (1-rz\overline{\lambda})} + \frac{r\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2} \right) d\nu(r) dA(\lambda) \right|.
\end{aligned}
$$

根据引理 5.4，对于所有 $\lambda \in E_t$ 和 $r \in [0,1]$，定义 $(T_\nu f_t)'(z)$ 的被积函数实部非负，

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \geq 0, \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2}\right) \geq 0 \tag{6.79}$$

并且对于 $r \in [1-t,1]$，它满足所述下界：

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \geq \frac{\widetilde{c_0}}{2t^3}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
|(T_\nu f_t)'(z)| &\geq \int_{E_t}\int_{1-t}^{1} \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})} + \frac{r\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2}\right) d\nu(r)\, dA(\lambda) \\
&\geq \int_{E_t}\int_{1-t}^{1} \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) d\nu(r)\, dA(\lambda) \\
&\geq \frac{\widetilde{c_0}}{2t^3}\, |E_t|\, \nu([1-t,1]),
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{c_0} = 1/108$。两边乘以 $1-|z|^2$ 并利用式（6.78），得

$$\widetilde{c_0}\,\frac{|E_t|}{2t^2}\,\nu([1-t,1]) \leq (1-|z|^2)|(T_\nu f_t)'(z)| \leq C\|f_t\|_{L^{c_\nu'}(\mathbb{D})} \leq C\, c_2^{1/c_\nu'}\, t^{2/c_\nu'}.$$

由于 $|E_t| \geq c_1 t^2$，并令 $\widetilde{C} = 2\widetilde{c_0}^{-1} c_1^{-1} c_2^{1/c_\nu'} C$，我们得到

$$\nu([1-t,1]) \leq \widetilde{C}\, t^{2/c_\nu'}, \quad 0 < t < t_0.$$

对于 $t_0 \leq t \leq 1$，ν 的有限性蕴含 $\nu([1-t,1)) \leq \nu([0,1))$，因此

$$\sup_{0<t\leq 1} \frac{\nu([1-t,1))}{t^{2/c_\nu'}} < \infty,$$

即，ν 满足 $2/c_\nu'$-Carleson 条件。

情形 $c_\nu = 2$。令 E_t 和 f_t 如上所述。则 $\|f_t\|_2 = |E_t|^{1/2}$ 且 $c_1 t^2 \leq |E_t| \leq c_2 t^2$。取 $0 < t < t_0$ 并回忆 $z = \sqrt{1-t} \in E_t$ 使得 $t = 1-\overline{|z|^2}$。由引理 5.4，对所有$\lambda \in E_t$和 $r \in [0,1]$，定义 $(T_\nu f_t)'(z)$ 的被积函数具有非负实部（6.79），并且当 $r \in [0,1]$时，它满足所述下界：

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) \geq \frac{\widetilde{c_0}}{t^2((1-r)+t)}.$$

类似地，$\|f_t\|_2 = |E_t|^{1/2}$ 并且存在绝对常数 $c_1, c_2 > 0$，使得 $c_1 t^2 \trianglelefteq |E_t| \leq c_2 t^2$，且 $c_1^{1/2} t \leq \|f_t\|_2 \leq c_2^{1/2} t$，则

$$\begin{aligned}
|(T_\nu f_t)'(z)| &\geq \int_{E_t}\int_{0}^{1} \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})} + \frac{r\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})(1-rz\overline{\lambda})^2}\right) d\nu(r) dA(\lambda) \\
&\geq \int_{E_t}\int_{0}^{1} \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}}{(1-z\overline{\lambda})^2(1-rz\overline{\lambda})}\right) d\nu(r) dA(\lambda) \\
&\geq |E_t|\widetilde{c_0}\int_0^1 \frac{1}{t^2((1-r)+t)} d\nu(r) \geq \widetilde{c_0} c_1 \int_0^1 \frac{1}{(1-r)+t} d\nu(r).
\end{aligned}$$

类似地，选取 $z=(1-t)^{1/2}\in E_t$（因此 $t=1-|z|^2$），则

$$t\widetilde{c_0}c_1\int_0^1\frac{1}{(1-r)+t}d\nu(r)\le(1-|z|^2)|(T_\nu f_t)'(z)|\le C\|f_t\|_{L^2(\mathbb{D})}\le Cc_2^{1/2}t.$$

两边除以 t（因为 $t>0$），并令 $\widetilde{C}=\widetilde{c_0}^{-1}c_1^{-1}c_2^{1/2}C$，得到

$$\int_0^1\frac{1}{(1-r)+t}d\nu(r)\le\widetilde{C}.$$

令 g $t\to0^+$ 并应用单调收敛定理，可得

$$\int_0^1\frac{1}{1-r}d\nu(r)\le\widetilde{C}<\infty.$$

证明至此完成。

References

[AHR] Alexandru Aleman、H˚akan Hedenmalm 和 Stefan Richter。《Bergman 空间的最新进展与开放问题》。Oper. Theory Adv. Appl. 156（2005），27–59。[BKV] Stephen Buckley、Pekka Koskela 和 Dragan Vukoti´c。《分数阶积分、微分与加权 Bergman 空间》。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 126（1999），第 2 期，369–385。[CFWY] Guozheng Cheng、Xiang Fa ng、Zipeng Wang 和 Jiayang Yu。《Bergman 投影的超奇异对应算子》。Trans. Amer. Math. Soc. 369（2017），8643–8662。[CRW] Ronald Coifman、Richard Rochberg 和 Guido Weiss。《多个变量 Hardy 空间中的因子分解定理》。Ann. of Math.（2）103（1976），第 3 期，611–635。[DHZZ] Yaohua Deng、Li Huang、Tao Zhao 和 Dechao Zheng。《Bergman 投影与 Bergman 空间》。J. Operator Theory 46（2001），第 1 期，3–24。[FGW] Xiang Fang、Kunyu Guo 和 Zipeng Wang。《具有拟共形符号的 Bergman 空间上的复合算子》。J. Geom. Anal. 33（2023），第 4 期，论文编号 125，共 38 页。[FR] Frank Forelli 和 Walter Rudin。《球上全纯函数空间的投影》。Indiana Univ. Math. J. 24（1974），593–602。[Gra] Loukas Grafakos。《现代傅里叶分析》，第 2 版。GTM250，Springer，纽约，2009。[Hed] H˚akan Hedenmalm。《Bergman 核的非对角估计》。J. Math. Pures Appl.（9）79（2000），第 2 期，163–172。[HKS] H˚akan Hedenmalm、Stefan Jakobsson 和 Sergei Shimorin。《双曲曲面上的双调和极大值原理》。J. Reine Angew. Math. 550（2002），25–75。[HS] H˚akan Hedenmalm 和 Sergei Shimorin。《双曲曲面上的赫勒-肖流》。J. Math. Pures Appl.（9）81（2002），第 3 期，187–222。[HKZ]H˚akan Hedenmalm、Boris Korenblum 和 Kehe Zhu。《Bergman 空间理论》。GTM199，Springer-Verlag，纽约，2000。[HZ25] Bingyang Hu 和 Xiaojing Zhou。《从复解析模型到稀疏控制：通过 Bourgain 插值法研究超奇异算子的二进方法》。arXiv:2512.24972（2025）。.[KU] H. Turgay Kaptano˘glu 和 A. Ersin Ureyen。《球上具有 Bergman-Besov 核的奇异积分算子》。Integral Equations Operator Theory 91（2019），第 4 期，论文编号 30，共 30 页。[Liu] Congwen Liu。《精确的 Forelli-Rudin 估计与 Bergman 投影的范数》。J. Funct. Anal. 268（2015），第 2 期，255–277。[Lue] Daniel Luecking。《Toeplitz 算子的迹理想判据》。J. Funct. Anal. 73（1987），第 2 期，345–368。[PRW] Jos´e Pel´ aez、Jouni R¨atty¨a 和 Brett Wick。《由具有积分表示的核诱导的 Bergman 投影》。J. Anal. Math. 138（2019），第 1 期，325–360。[Ru] Walter Rudin。《实分析与复分析》，第 3 版。McGraw-Hil，纽约，1987。[Shi01] Sergei Shimorin。《与等距算子接近的算子的 Wold 型分解与游荡子空间》。J. Reine Angew. Math. 531（2001），147–189。

[Shi02] Sergei Shimorin。《加权 Bergman 再生核的一个积分公式》。Complex Var. Theory Appl. 47（2002），第 11 期，1015–1028。[Tao] Terry Tao。《调和分析》。讲义，加州大学洛杉矶分校。网址：https://www.math.ucla. edu/~tao/247a.1.06f/notes2.pdf。[Zhao] Ruhan Zhao。《舒尔检验的推广及其在单位球上一类积分算子中的应用》 $\mathbb{C}^n$。Integral Equations Operator Theory 83（2015），第 4 期，519–532。[ZZ] Ruhan Zhao 和 Lifang Zhou。《单位球上 L^p-L^q 有界的 Forelli-Rudin型算子》。 $\mathbb{C}^n$J. Funct. Anal. 282（2022），第 5 期，论文编号 109345，共 26 页。[Zhu14] Kehe Zhu。《函数空间中的算子理论》，第 2 版。数学调查与专著，第 138 卷，美国数学学会，2014。[Zhu22] Kehe Zhu。《加权 Bergman 空间的嵌入与紧嵌入》。Illinois J. Math. 66（2022），第 3 期，435–448。

Yuerang LI: College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China电子邮箱：yuerangli@outlook.com

Zipeng WANG: College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China电子邮箱：zipengwang2012@gmail.com；zipengwang@cqu.edu.cnKenan ZHANG, School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, 200433, China电子邮箱：knzhang21@m.fudan.edu.cn