arXiv:2601.16545v1 [quant-ph] 23 Jan 2026

通过截断技术研究量子图共振

PAVEL EXNER

多普勒数学物理与应用数学研究所，捷克技术大学，*Bˇrehov´a 7*，*11519* 布拉格，捷克 和 理论物理系，核物理研究所，捷克科学院，*25068* 布拉格附近的 *Řež*，捷克

ˇ´ Jiri Lipovsky

物理系，理学院，赫拉德茨-克拉洛韦大学，*Rokitansk´eho 62*，*50003* 赫拉德茨-克拉洛韦，捷克

ˇJAN PEKAR

查理大学数学与物理学院理论物理研究所，*V Holeˇsoviˇck´ach 2*，*18040* 布拉格，捷克

Abstract. 我们展示了如何根据截断系统的特征值行为，识别由紧致核心和半无限引线组成的量子图中的共振。

E-mail addresses: exner@ujf.cas.cz, jiri.lipovsky@uhk.cz, honzapekar28@gmail.com。

1. Introduction

量子图的历史由来已久；这一概念由 Linus Pauling 于 20 世纪 30 年代提出 [1] ，随后却令人欣慰地被遗忘了约半个世纪。随着固态制造技术的进步，这一概念重新受到关注；此后，它蓬勃发展，不仅可用于模拟众多纳米结构，而且或许更重要的是，还成为探讨量子力学中各种理论问题的多用途工具；有关该领域的入门介绍和详尽的参考文献目录，请参阅专著 [2, 3, 4, 5]。

标题中的第二个概念——共振，涉及范围广泛的效应，其重要性毋庸赘言。在量子系统中识别共振有多种方法。最常见的两种方法是：显式求出哈密顿量预解式的解析延拓，经典的 Friedrichs模型 [6] 及其众多推广便是如此，综述见 [7] ；以及复标度法 [8, 9] ，该方法尤其应用于分子物理学 [10]。

共振产生的主要机制之一，早在 Friedrichs模型中就已为人所知，即对嵌入连续谱中的特征值进行扰动。这类共振在不满足唯一延拓性质的量子图中十分常见 [3, 第3节4],，因此可能存在紧支撑特征函数，它们与图的其余部分“互不相通”，继而通过几何扰动产生共振 [11]。在此背景下，有必要回顾共振的不同概念，尤其是预解式共振和散射共振。一般而言，两者并不相同：前者是哈密顿算子本身的性质，后者则涉及将完整哈密顿算子与自由哈密顿算子进行比较。然而，在许多情况下，这两个概念是一致的——当然，未受散射影响的嵌入特征值集合除外——量子图也是如此 [12, 13]。

在这种情况下推导共振条件，尤其是对于更复杂的图，可能需要并不简单的代数运算，因此采用其他方法或许会有帮助。由此让人想到一种在物理学中颇受欢迎的方法，通常称为“盒中共振” [14, 15] 或 “ 稳定化 ” [16, 17],：它将寻找复极点替换为对限制在有界区域内的系统进行谱分析，并考察特征值行为随这个“盒”的大小变化的情况。这种方法背后的直觉很清晰，但在大多数情况下，尚缺乏有说服力的数学论证；目前唯一严格确立这种联系的情形是一维势散射 [18]。本文旨在说明如何利用这种技术识别量子图共振。

2. Preliminaries

我们首先回顾问题的设定。量子图通常是指度量图上的拉普拉斯算子，或更一般的薛定谔算子，我们将其记为 Γ。后者由一个顶点集合 $\mathcal{V} = \{v_j\}$、一个集合 $\mathcal{E} = \{e_i : \ i = 1, \ \dots, \ N\}$ 条长度为 $l_i > 0$、连接 $\mathcal{V}$ 中各元素的有限边，以及一个半无限边集合 $\mathcal{E}_\infty = \{e_{\infty,j} : \ j = 1, \ \dots, \ M\}$ 组成；后者通常称为引线，连接到部分或全部顶点上。这些边可视为线段，从而允许我们在 Γ 上考察微分算子。为简单起见，我们在此假设不存在外场，因此 Γ上的动力学由哈密顿算子控制；该算子在每条边上均作用为 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 。我们忽略物理常数，因为它们的取值对我们的讨论不起作用。为了使这样的算子成为自伴算子，必须施加适当的条件

ma以匹配顶点处的波函数。众所周知，最一般的一类 e

$$(U_j - I)\psi_j(v) + i(U_j + I)\psi_j^{'}(v) = 0, \tag{2.1}$$

在顶点 v_j 处，其中 ψ_j 和 ψ_j' 分别是顶点 v_j 处波函数值及其导数的单侧极限向量，而 U 是一个 deg $v_j \times$ deg v_j 酉矩阵。这些条件通常归功于 Kostrykin 和 Schrader [19]，但实际上 Rofe-Beketov [20] 早已提出这些条件。因此，算子定义域由满足条件 (2.1) 的 Sobolev空间$W^{2.}$ $^{2}(\mathcal{E} \bigoplus \mathcal{E}_{\infty})$ 中的元素构成。

对我们的讨论而言，重要的是我们无需明确指定 Γ 的拓扑；我们可以假设所有顶点都合并在一起，形成一个“花形”图 [11]，它有 N 个“花瓣” [3, 第 1.4 节。6] 以及M 条半无限“茎”，它们都汇聚于同一点，在该点处条件

$$(U - I)\Psi(v) + i(U + I)\Psi^{'}(v) = 0 \tag{2.2}$$

施加了一个（$2N + M$）$\times$ $(2N + M)$ 酉矩阵 U；通过将 U 选为块对角形式，使得每个块对应于原图 Γ的一个顶点，从而恢复波函数匹配的局部特性。

求共振的一种方法是使用外复标度，该方法作用于引线，同时保持 Γ 的紧致核心不变。我们必须适当地选择波函数的试探形式。由于假设动力学由拉普拉斯算子控制，我们使用 $f_i(x) = a_i \sin kx + b_i \cos kx$, $i = 1$、.....、N，而在外部引线上则采用表现为 $g_{j\theta}(x) = \mathrm{e}^{\theta/2} g_j(xe^{\theta})$ $j = 1$、.....、M的平面波。在缩放 [12], 下，相应的边界值分别为$g_j(0) = \mathrm{e}^{-\theta/2} g_{j\theta}$ 和 $g_j^{'}(0) = ik\mathrm{e}^{-\theta/2} g_{j\theta}$。代入（2.2）后，我们得到一个关于系数 a_i、b_i 以及 $\mathrm{e}^{-\theta/2} g_{j\theta}$ 的$2N + M$ 方程组，其可解性要求等价于条件

$$\det[(U - I)C_1(k) + ik(U + I)C_2(k)] = 0 \tag{2.3}$$

其中，U 是（2.2）的顶点条件矩阵，其元素已作适当重排，而矩阵 C_1 和 C_2 由有限边上的传递矩阵给出，

- $C_1 = \begin{pmatrix} J_{2N\times 2N}(k) & 0 \\ 0 & I_{M\times M} \end{pmatrix}$, where $I_{M\times M}$ is the unit matrix and the $J(k)$ part is block-diagonal consisting of 2×2 matrices $J_i(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl_i & \cos kl_i \end{pmatrix}$,
- $C_2 = \begin{pmatrix} K_{2N\times 2N}(k) & 0 \\ 0 & iI_{M\times M} \end{pmatrix}$, where $K(k)$ has a similar structure with the 2×2 blocks of the form $K_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos kl_i & \sin kl_i \end{pmatrix}$.

通过用˜一个仅针对 Γ 紧致核心的有效能量依赖矩阵 $U(k)$ 替换 U，可以将问题进一步简化为一个由 $2N \times 2N$ 个方程组成的系统； [11] 但我们不会这样做，因为这里的主要思想是用有限边替换引线，从而自然地改变“外部”解 g_j。考虑到这一点，我们注意到，由于试探形式的选择，C_2 右下块中的虚数单位不过是 $\frac{1}{k}{}^{g_j}{}_{(0)}\ {}_{g_j(0)}$。

作为预热，我们现在来看三个图共振的例子，其中两个已在 [11] 中详细研究。第一个例子 Γ 是一个带有两条引线的环，如图1所示；它有两条长度分别为 $l_1 = l(1 - \lambda)$、$l_2 = l(1 + \lambda)$ 且参数为 $\lambda \in [0, 1]$ 的内部边，并与两条半直线耦合，

每个端点都连接到一条引线。对于顶点条件，我们选择一个四参数族 [21]，使波函数在环上连续，并且与引线的耦合可调，

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0),\ f_1(l_1) = f_2(l_2), \\ f_1(0) &= \alpha_1^{-1}(f_1^{'}(0) + f_2^{'}(0)) + \gamma_1 g_1^{'}(0), \\ f_1(l_1) &= -\alpha_2^{-1}(f_1^{'}(l_1) + f_2^{'}(l_2)) + \gamma_2 g_2^{'}(0), \\ g_1(0) &= \overline{\gamma}_1(f_1^{'}(0) + f_2^{'}(0)) + \tilde{\alpha}_1^{-1} g_1^{'}(0), \\ g_2(0) &= -\overline{\gamma}_2(f_1^{'}(l_1) + f_2^{'}(l_2)) + \tilde{\alpha}_2^{-1} g_2^{'}(0). \end{aligned}$$

相应哈密顿算子的谱为连续谱，覆盖 $[0,\infty)$；根据耦合系数的不同，它最多可能有八个负特征值，这些负特征值与引线和环解耦的图具有相同的亏格指标为 (8，8) 的对称限制 [22, 定理 8.19]。共振源于嵌入特征值；当 l_1 和 l_2 可公度，且环上的拉普拉斯算子存在一个在顶点处为零的特征函数时，便会出现嵌入特征值。相应的共振条件 [11, 式 (15)] 为

$$\sin kl(1-\lambda)\sin kl(1+\lambda) - 4k^2\beta_1^{-1}(k)\beta_2^{-1}(k)\sin^2 kl + k[\beta_1^{-1}(k) + \beta_2^{-1}(k)]\sin 2kl = 0, \tag{2.4}$$

其中 $\beta_j^{-1}(k) := \alpha_j^{-1} + \frac{ik|\gamma_j|^2}{1-ik\tilde{\alpha}_j^{-1}}$。接下来，我们将 Γ 替换为一个有限图；该图不再使用引线，而是使用长度为 L 的边，并假设在“自由”端点处施加狄利克雷条件。拉普拉斯算子的谱完全改变了；现在它是纯离散的。利用条件 (2.2) 不难求出特征值，只需将截断引线上的试探形式替换为 $g_j(x) = c_j \sin k(L-x)$；当然，现在不再需要复标度。所得谱条件再次具有形式 (2.4)，不过系数 $\beta_j^{-1}(k)$ 已作修改，现在等于 $\alpha_j^{-1} + \frac{-k|\gamma_j|^2 \cot kL}{1+k\tilde{\alpha}_j^{-1}}$，换句话说，先前 $\beta_j^{-1}(k)$ 表达式中的虚数单位被 $-\cot kL$ 所替代。

第二个例子是一个十字形图 Γ，它有两条长度为 $l_1 = l(1-\lambda)$ 和 $l_2 = l(1+\lambda)$ 的内部边，参数 λ 再次取遍 $[0,1]$,，并在这些边的端点施加狄利克雷条件；此外还有两条半无限引线，它们交汇于同一个顶点，见图 2。现在中心顶点条件更为简单；我们将其选为带有强度参数$\alpha \in \mathbb{R}$ 的标准 δ 耦合。该系统的共振条件 [11, 式（19）] 为

$$2k\sin 2kl + (\alpha - 2ik)(\cos 2kl\lambda - \cos 2kl) = 0. \tag{2.5}$$

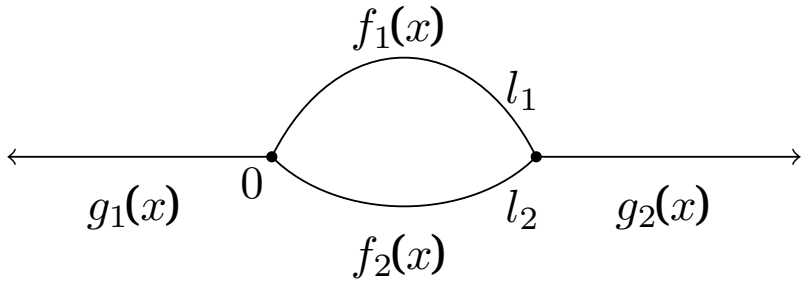

FIGURE 1. 带有两条外部引线的环图。

另一方面，很容易看出，具有两条长度为 L 的“水平”边且端点满足狄利克雷条件的截断十字形图的谱条件为

$$2k\sin 2kl + (\alpha + 2k\cot kL)(\cos 2kl\lambda - \cos 2kl) = 0, \tag{2.6}$$

也就是说，式 (2.5) 中的虚数单位再次变为 $-\cot kL$。同样，当负的 α 足够大时，该图也可能有一个负特征值，它满足将三角函数替换为双曲函数后的条件 (2.5)。

第三个例子是对前一个例子的简单修改，其中 Γ 是一个有三条边的 T形树图，前两条边的长度分别为 l_1 和 l_2，且在“自由”端点处满足狄利克雷条件；第三条边则是一条半无限引线。我们再次假设该顶点处存在强度为 α 的 δ 耦合。该系统的共振条件为

$$\left(\tfrac{\alpha}{k} - i\right)\sin kl_1 \sin kl_2 + \sin kl_1 \cos kl_2 + \sin kl_2 \cos kl_1 = 0,$$

而带有狄利克雷截断引线的图的谱条件为

$$\left(\tfrac{\alpha}{k} + \cot kL\right)\sin kl_1 \sin kl_2 + \sin kl_1 \cos kl_2 + \sin kl_2 \cos kl_1 = 0.$$

3. Relating the cut-off graph spectra to resonances

首先注意到，我们在这些例子中看到的对应关系一般都成立：

命题 3.1。设 Γ由一个包含 N 条边的紧致部分和 M 条半无限引线组成，并设 Γ_L 由 Γ 将这些引线截断为长度 L得到。在 Γ_L 上、于 $\mathcal{V}$ 处具有由矩阵 U 给出的耦合，并在截断引线的端点处满足狄利克雷条件时，拉普拉斯算子的正特征值由以下形式的条件确定 (2.3)，其中将 C_2 中的虚数单位替换为$-\cot kL$。

证明。与各示例中一样，我们在 Γ的紧致核心上使用原试探形式，而在截断边上，则将指数函数 g_j替换为 $g_j(x) = c_j \sin k(L-x)$ $j = 1, \dots, M$；此时，狄利克雷到诺伊曼因子 $g_j'(0)\, g_j(0) = -k\cot kL$ 进入方程，取代了 ik。 —— □

注记 3.2。(a) 如果在截断端点处采用不同的边界条件，该结论只需稍作修改。例如，选择诺伊曼条件时，将外部试探解改为 $g_j(x) = c_j \cos k(L-x)$ $j = 1, \dots, M$，并且在 (2.3) 中需将虚数单位替换为 $\tan kL$。

(b) 我们关注截断图拉普拉斯算子的正特征值，并将它们与原问题的共振联系起来

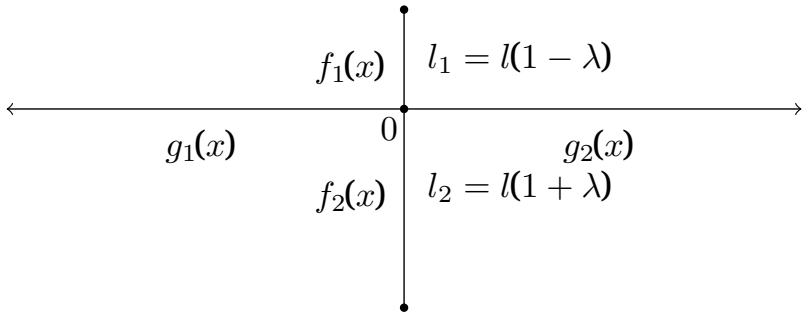

Figure 2. 十字形图。

。不过，正如我们在示例中提到的，对于某些顶点耦合矩阵 U，带引线的图也可能有负特征值 $-\kappa^2$，可通过在引线上采用试探形式 $g_j(x) = c_j \mathrm{e}^{-\kappa x}$ 求得。类似地，可以选取 $g_j(x) = c_j \sinh \kappa (L-x)$ 来确定截断图的特征值。毫不意外，随着 $L \to \infty$，后者会收敛到"完整"图的特征值；此时，虚数单位在（2.3）中的作用由 -1 承担，而 $-\cot kL$ 则被 $-\coth \kappa L$ 取代。根据狄利克雷夹逼 [23, 第 XIII 节15]，截断图的负特征值随 L 增大而减小；请注意，若 L 过小，这些特征值可能不存在。

得出这一结论后，我们可以转而讨论截断图谱的共振之间的关系。将条件 (2.3) 的左侧记为 $F(k)$。上述例子之所以简单，是因为共振条件中的虚数单位仅以零次和一次幂出现，因此转换为谱条件十分直接。但情况不一定总是如此——再来看十字形谐振器的例子，不过现在令中心顶点耦合 (2.1) 为

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{3-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{3-i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{3-i}{4} \end{pmatrix}.$$

其共振条件由 (2.3) 给出，写作

$$\sin k(l_1+l_2) + 4k \cos kl_1 \cos kl_2 + 2i \cos kl_1 \cos kl_2 = 0,$$

但与我们先前的观察不同，截断图的谱条件为

$$\cot^2 kL \left(\sin k(l_1+l_2) + 4k \cos kl_1 \cos kl_2\right) + 2 \cot kL \cos kl_1 \cos kl_2 = 0.$$

可以构造其他例子，甚至让 i 出现于两个以上不同的幂次中，但不难看出，无论共振条件的具体结构如何，通过将虚数单位替换为 $-\cot kL$ 建立的对应关系都是一一对应的，而且 先验地我们无法确定共振条件各项中 i 的幂次，唯一能确定的是，实部 $\mathrm{Re}\ F(k)$ 中的幂次为偶数，而虚部 $\mathrm{Im}\ F(k)$ 中的幂次为奇数。不过，我们仍能辨认出一种规律。将截断图的一般谱˜条件 $F(k)$ 重写为

$$\tilde{F}(k) = \sum_{j=0}^{n} (-\cot kL)^j c_j(k) = 0$$

其中取适当的 n，系数 $c_j(k)$ 由谱条件中与 $(-\cot kL)^j$ 的幂次相关的所有项组成。类似地，我们可以将原图的共振条件改写为

$$F(k) = \mathrm{Re}\, F(k) + i\, \mathrm{Im}\, F(k) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j c_{2j} + i \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j c_{2j+1} = 0. \tag{3.7}$$

若共振为实数，即嵌入特征值，则它们由条件 $\mathrm{Re}\ F(k) = 0 \wedge \mathrm{Im}\ F(k) = 0$给出。虽然这些条件仅约束系数$c_j(k)$的带符号求和，但在谱 L依赖关系图中，任何满足 $F(k) = 0$ 的实数值 k，都会在一侧受到曲线 $F(k) = 0$ 与 $\tan kL = 0$的交点限制，因为在这些

点上，除 $c_0(k)$之外的所有 $c_j(k)$都必须递减至零，以补偿 $\cot^j \tilde{kL}$项的发散；另一侧则受到曲线 $F(k) = 0$与 $\cot kL = 0$的交点限制，因为此时必然有 $c_0 = 0$。如果这两个点在动量轴 k上的位置彼此接近，它们就会在 L依赖关系图中形成近乎水平的线段，最终在它们对应相同的 k值时标示出共振能量。

当然，图未必存在实共振；事实上，我们感兴趣的是非实共振。不过，如果我们的 k 足够接近实轴，也会观察到类似的行为。逆函数 F^{-1} 是亚纯函数，而共振是它在下复半平面中的极点。该函数在实轴上的迹为

$$\operatorname{Re} F^{-1}(k) = \frac{\operatorname{Re} F(k)}{|\operatorname{Re} F(k)|^2 + |\operatorname{Im} F(k)|^2}, \quad k \in \mathbb{R},$$

这提示我们可以在 $\operatorname{Re} F(\cdot)$ 的零点处寻找共振位置的实部。问题在于，一般而言，$F(\cdot)$ 零点的实部并不与 $\operatorname{Re} F(\cdot)$ 的实零点重合。不过，这并非重大障碍，因为只有当 $F^{-1}(\cdot)$ 的极点项占主导时，共振才显著；通常，这发生在极点接近实轴时。设 $k_0 = \delta - i\eta$ 是$F(\cdot)$ 的一个零点，则在 k_0 处对 F 作泰勒展开可得

$$\operatorname{Re} F^{-1}(k) = c\,\frac{k-\delta}{(k-\delta)^2 + \eta^2}\left(1 + \mathcal{O}(((k-\delta)^2 + \eta^2)^{-2}\right)$$

取适当的常数 c 后，对于这类共振，$\operatorname{Re} F(\cdot)$ 的零点（其中包含 $c_0(\cdot)$）便在主阶上决定极点的实部，而 $\operatorname{Im} F(\cdot)$ 的取值（由编号为奇数的 $c_j(\cdot)$ 组成）则刻画共振宽度。

我们用一个具体例子来说明这些论断，即上一节讨论的十字形谐振器；为明确起见，我们选取横梁长度 $l = 1$ 和强度参数值 $\alpha = 1$。注意，该系统具有一些有趣的特征，例如它表现出非平凡的量子整体性 [24]，关于参数 λ 的绝热变化；图3中的一条特定共振轨迹展示了这一点，参见 [11]。图4和图5展示了谱条件 (2.6) 关于截断长度 L 的数值解。对于若干个 λ 值，该系统存在嵌入特征值；特别是当 $\lambda = 1$ 时，方程 (2.6) 的解为 $k = m\pi/2$, $m \in \mathbb{Z}$。因此，我们预期该点附近会出现尖锐共振，而这正是图4左上图所示的情形，该图对应于 $\lambda = 0.95$；至少对于若干个最低的 $|m|$ 值是如此，谱中更高处的图像则变得模糊。我们还针对另外七个 λ 值计算了谱，这些值对应于图3中标出的共振。显然，随着极点到实轴的距离变化，该共振会变宽或变窄。最后，在针对 $\lambda = 0.03$ 计算的图5右下图中，我们看到点 $k = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ 附近存在共振；这些点同样是 $\lambda = 0$ 时方程 (2.6) 的解析解。

为说明共振能量的值确实位于谱曲线与曲线 $\cot kL = 0$ 和 $\tan kL = 0$的交点之间，我们再次考察 $\lambda = 0.95$处的共振。求解关于 $\operatorname{Im} F(k) = 0$的方程很容易；在这个具体例子中，该方程恰好对应于条件 $\tan kL = 0$，因为共振条件仅由项 $c_0(k)$ 和 $c_1(k)$ 构成，分别对 $\operatorname{Re} F(k)$ 和 $\operatorname{Im} F(k)$ 作出贡献：该方程有两个根，

$$k = \frac{m\pi}{1+\lambda} \text{ and } k = \frac{m\pi}{1-\lambda},\ m \in \mathbb{Z}.$$

图6中只显示了第一个根，并以黑色水平点线标出。另一方面，条件 $\mathrm{Re}\ F(k) = 0$ 给出 $2k\sin 2k + \cos 2k\lambda - \cos 2k = 0$，需要通过数值方法求解；结果以黑色水平虚线标示于图6中。

Acknowledgements

感谢 QMath16 会议的组织者认可 Jan Pekař 在会议上报告的本文初步成果。J.L. 感谢赫拉德茨-克拉洛韦大学理学院提供的资助。

References

[1] L. Pauling：芳香分子的抗磁各向异性。 *J. Chem. Phys.* **4** (1936)，673–677。[2] Y.V. Pokornyi、O.M. Penkin、V.L. Pryadiev、A.V. Borovskikh、P.P. Lazarev、S.A. Shabrov： *Differential equations on geometric graphs* 2005，Fizmatlit，莫斯科。[3] G. Berkolaiko、P. Kuchment： *Introduction to Quantum Graphs*，数学调查与专著，第186卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013。[4] A. Kostenko、N. Nicolussi： *Laplacians on Infinite Graphs*，EMS 回忆录，EMS出版社，柏林，2022。[5] P. Kurasov： *Spectral Geometry of Graphs*，Birkh¨auser，柏林，2024。[6] K.O. Friedrichs：连续谱的扰动， *Commun. (Pure and) Appl. Math.* **1** (1948)，361–406。[7] P. Exner：共振与衰变的可解模型，载于 *Mathematical Physics Spectral Theory and Stochastic Analysis*，(M. Demuth、W. Kirsch 编)，算子理论：进展与应用，Birkh¨auser，第186卷，巴塞尔，2013；第165–227页。226,

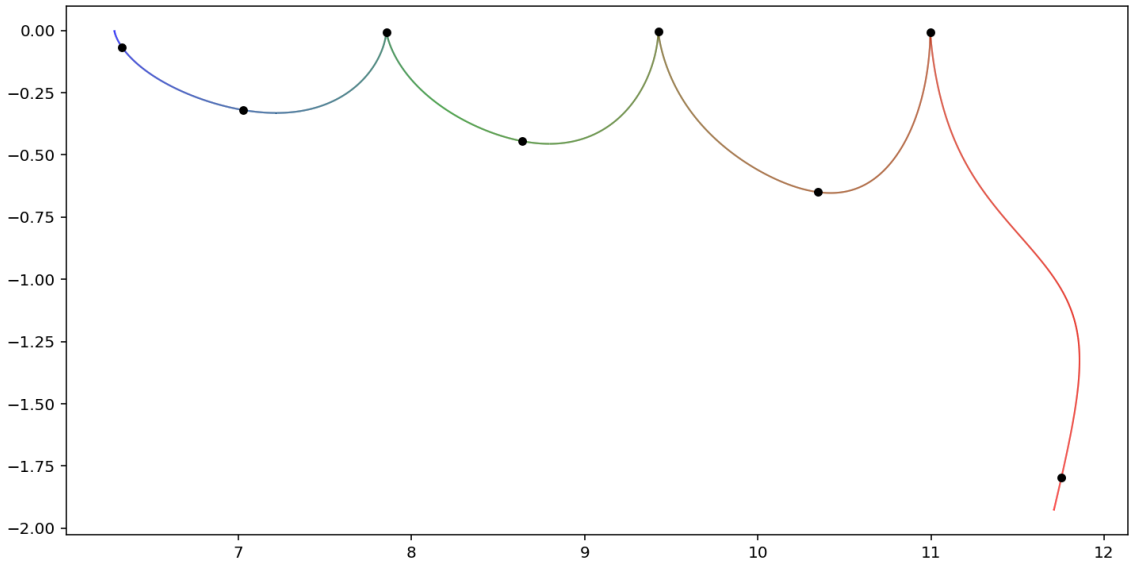

FIGURE 3. 对于具有 $\alpha = 1$ 的十字形谐振器，共振极点在下复半平面中从 $k = 2\pi$ 开始的轨迹。颜色编码（在线可见）显示了 λ 的依赖关系，其颜色从蓝色（$\lambda = 1$）变为红色（$\lambda = 0$）；曲线上的黑点对应于图4和图5中使用的 λ 值。

[8] J. Aguilar、J.-M. Combes：单体薛定谔哈密顿算子的一类解析微扰，（），–。[9] E. Balslev、J.-M. Combes：具有伸缩解析相互作用的多体薛定谔算子的谱性质， *Commun. Math. Phys.* **22** (1971年)，280–294。

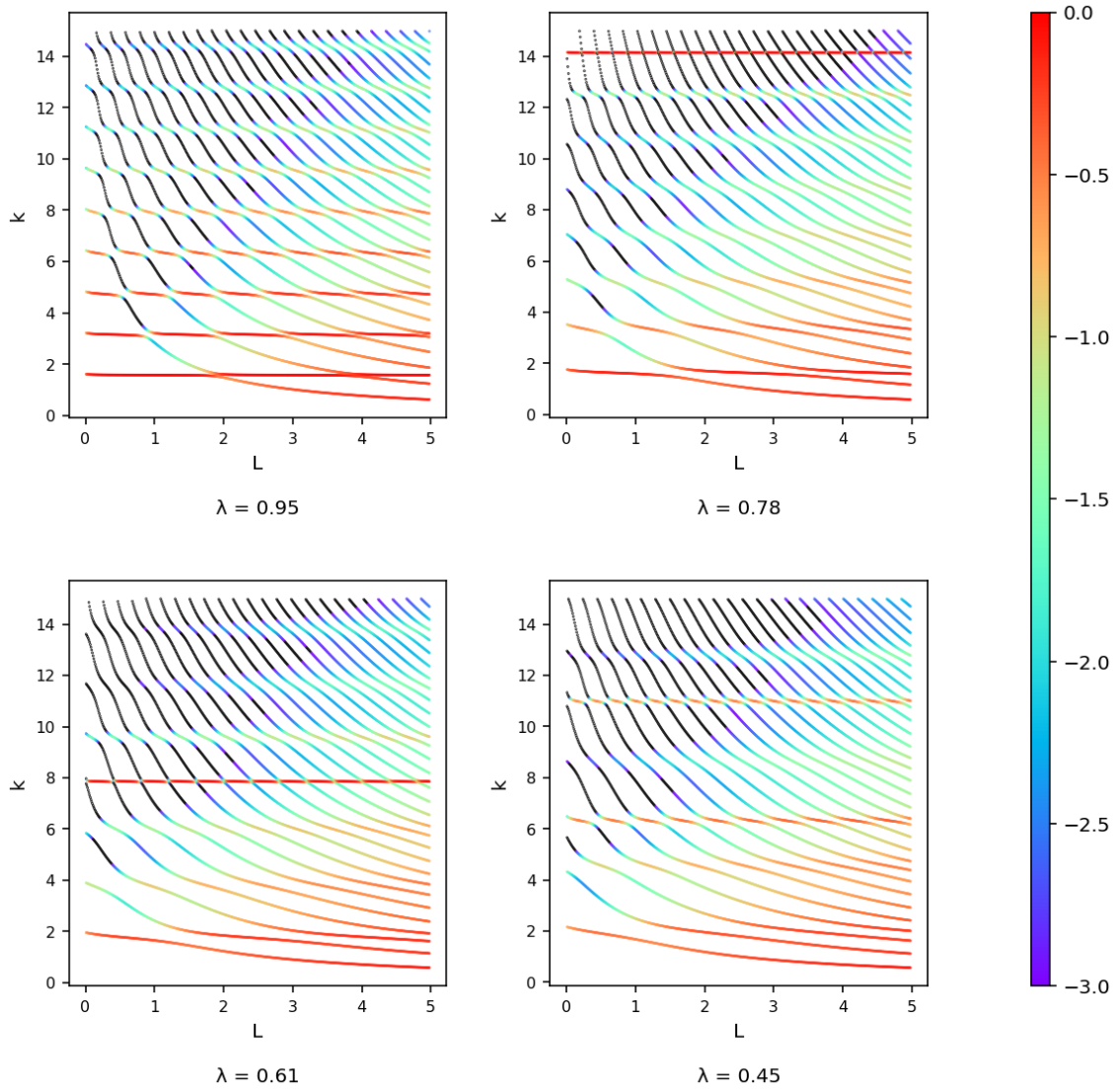

FIGURE 4. 当 $\alpha = 1$ 取特定值时，方程 (2.6) 的数值解。曲线根据导数的取值着色（在线可见），导数在 -3与零之间变化，以突出共振；导数超出指定区间的点标为黑色。

[10] B. Simon：通过外复标度方法定义分子共振曲线，

Lett. **71** 1979 211 214

Phys. A: Math. Theor. **43** 2010 105301
共振，()，。[12] P. Exner，J. Lipovsk

Phys. **A**()，–。[11] P. Exner，J. Lipovsk

J. y：有理相关边上的量子图受扰动所产生的

Adventures y：

in Mathematical Physics 447， 2007
量子图上预解式共振与散射共振的等价性，载于美国数学学会《当代数学》丛书，第卷。普罗维登斯，罗得岛州，()，73-81。[13] J. Lipovsk´y：量子图及其共振性质， *Acta Phys. Slovaca* **66**(2016)，265–363。

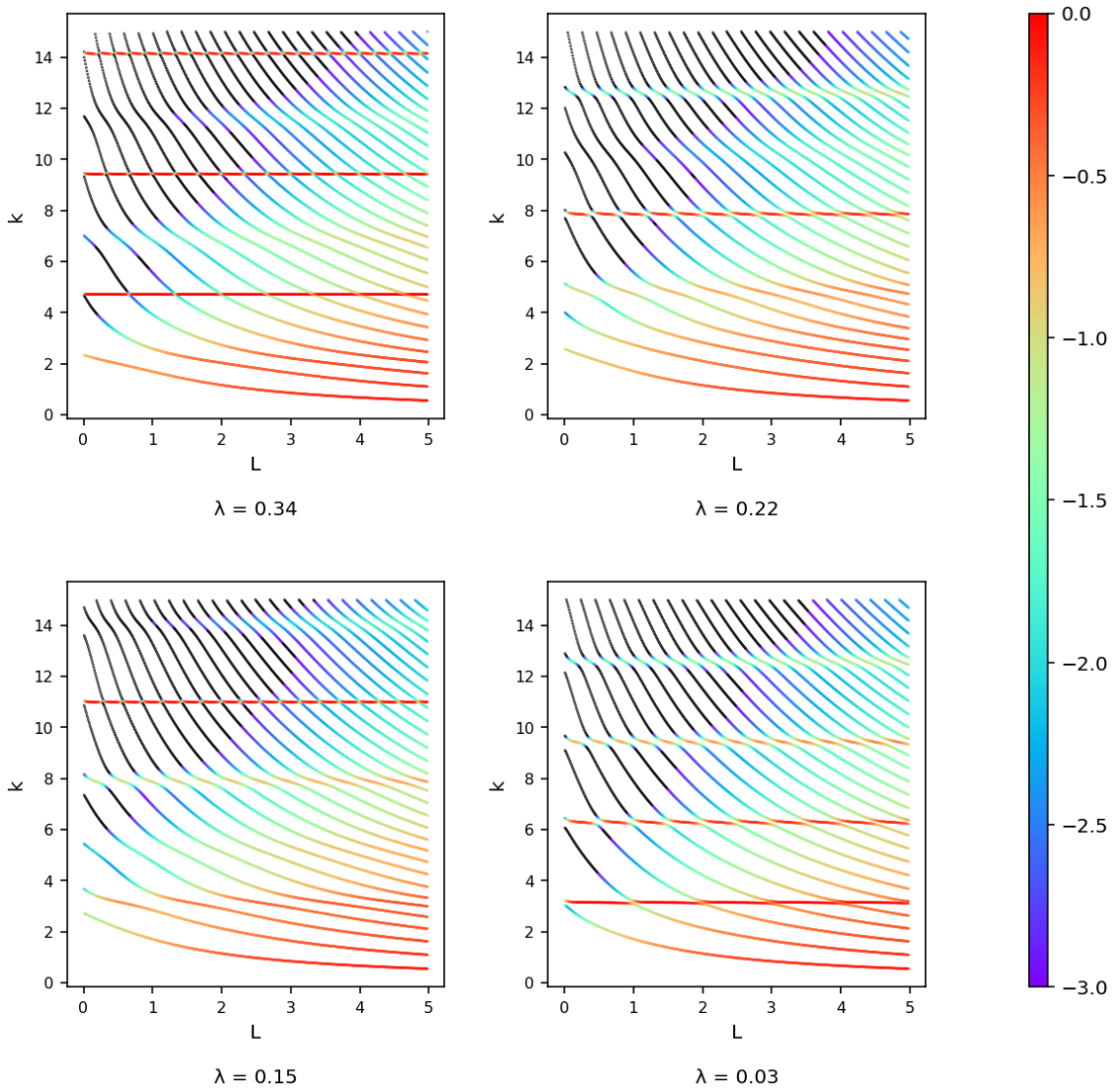

FIGURE 5. 在 λ的特定取值下， $\alpha = 1$ 对应的（2.6）的数值解。颜色编码与上一幅图相同。

[14] C.H. Maiert，L.S.Cederbaum，W. Domcke：共振的球形盒方法，
J. Phys. B: Atom. ( )，L –L。
Mol. Phys. **113** 1980 119 124
[15] 2009 245001 周善贵，孟杰，
[16]
赵恩广， *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **42** ( )，U. Hazi，S. Taylor：计算共振能量的稳定化方法：模型问题，
Phys. Rev. **A1** (1970，1109–1120。[17] J.U. Davis, Jr.，T. Sommerfeld：直接计算共振能量：模型势的方法比较，
Eur. Phys. J. **D** **75** 2021 316 ( )，G.A. Hagedorn，B. Meller：盒中的共振，
[18]
J. Math. Phys. **41** (2000)，103–117。[19] V. Kostrykin，R. Schrader：量子线的基尔霍夫定则，
J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999)，595–630。[20] F.S.Rofe-Beketov：向量值函数空间中微分算子的自伴扩张，
Teor. Funkcii, Funkcional. Anal. Prilozh. **8** (1969)，3–24（俄文）。[21] P. Exner，P. ˇSeba：分支图上的自由量子运动， *Rep. Math. Phys.* **28** (1989)，7–26。[22] J. Weidmann： *Linear Operators in Hilbert Space*，施普林格，海德堡，1980。[23] M. Reed，B. Simon： *Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators*，学术出版社，纽约，1978。[24] T. Cheon，A. Tanaka：量子整体性的新剖析， *Europhys. Lett.* **85**(2009)，20001

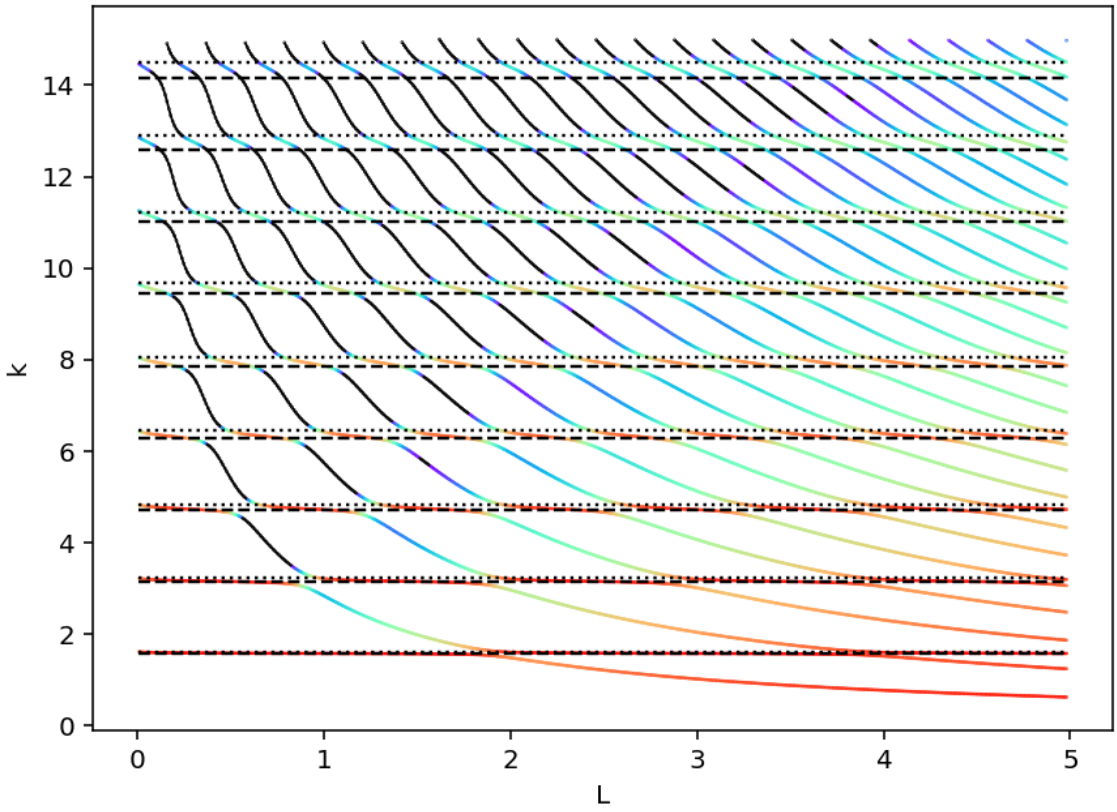

FIGURE 6. 方程 (2.6) 在 $\lambda = 0.95$ 下的数值解。颜色编码（在线可见）与图4相同

.