arXiv:2601.16574v1 [math.AP] 23 Jan 2026

奇异黎曼流形上特征函数平均密度的收敛速度

CHARLOTTE DIETZE

Abstract. 我们考虑紧黎曼流形（带边界）上的一类奇异黎曼度量，以及相应拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征函数。在我们的设定中，特征值小于 λ 的特征函数的平均密度，当 $\lambda \to \infty$ 时弱收敛到边界上的均匀归一化测度。在本文中，我们在垂直于边界的坐标方向上，以 Wasserstein 意义证明了这一收敛速度的定量估计。

1. Introduction

我们考虑一个光滑紧黎曼流形 X，其边界的拓扑维数为 $n+1$，$n \in \mathbb{N}$。我们在 X 上赋予一个黎曼度量 g，该度量属于某一类在边界处具有幂型奇异性的奇异黎曼度量 g。更具体地说，我们通过 $[0,1]_x \times M_y =$ 识别 X 的边界管状邻域：X_1，其中 M 是一个 n 维黎曼流形，并且与 ∂X 同构。我们所考虑的度量类 g 在 X 的内部是光滑的，并且对于参数 $\beta \in [2/n, \infty)$，它们在 ∂X 的管状邻域 X_1（该邻域被识别为 $[0,1] \times M$）上满足

$$g = dx^2 + x^{-\beta} g_1(x), \tag{1}$$

其中，$(g_1(x))_{x\in[0,1]}$ 是 M上的光滑、非退化度量的连续族。我们将 X 边界上带狄利克雷边界条件的相应（非负）拉普拉斯-贝尔特拉米算子记为 Δ，并将关于 g 的 X 上的黎曼体积测度记为 dv_g。对于 $\beta = 2$，经过适当的函数变换后，拉普拉斯-贝尔特拉米算子对应于一个格鲁辛 型算子加上形如 x^{-2} 的势。

本文给出了 Δ的特征函数的平均密度在 X边界处聚集速度的定量估计。

主要定理的陈述。在 [5], 中，研究表明，Δ 的特征函数的平均密度弱收敛于 X边界上的均匀分布。本文更进一步，在 x坐标下的瓦瑟斯坦-p意义下，对这一收敛速度给出了定量估计，见下文的推论 1。

更确切地说，我们考虑 F_λ Δ 的特征值低于 λ的特征函数的平均密度，并将其归一化，使得$\int_X F_\lambda(z)\, dv_g(z) = 1$；$F_\lambda$的定义见下文中的 (5)。我们将在下文的定理 1 中针对 $p = 1$ 以及定理 2 中针对 $p \geq 2$ 证明

$$\int_X \min\{x^p, 1\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C A_\lambda, \tag{2}$$

2020年数学主题分类。主要分类：58C40；次要分类：28A33、53C17、35P20。关键词和短语：奇异黎曼度量、拉普拉斯-贝尔特拉米算子、瓦瑟斯坦、特征函数集中、格鲁辛、次黎曼几何。

其中， A_λ 是一个显式的收敛速率，取决于 p、 β、 n 和 λ ，且 $A_\lambda \to 0$ 为 $\lambda \to \infty$； A_λ的精确定义见 (8) 和 (12)。此外，对于 $p \geq 2$ 和$\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}$ ，我们无法期待获得显著更好的收敛速率 A_λ，参见下文的注 2。

一般文献。本文研究奇异黎曼度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，该算子对应于 $\beta = 2$ 一个 Grushin 型算子加上一个势。关于这类奇异黎曼度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子、次黎曼几何，尤其是 Grushin 算子的谱理论，已有大量文献。许多研究给出了魏尔渐近，或相应热核的渐近性质。

次黎曼热核的短时渐近性质在 [6, 7, 8, 3]中得到了研究。在[14], 中，作者考察了光滑流形上的经典伪微分算子，其主符号在一个光滑辛子流形上恰好二阶消失，这对应于 Grushin 情形。在这一框架下，他们证明了魏尔渐近。另一篇研究 Grushin 情形下魏尔渐近的论文是 [2], ，其中显式计算了特征函数和特征值，从而也能够推出魏尔渐近。还有许多文献讨论 Grushin 情形，例如 [1, 13]。此外，我们还想提及 [4], 的工作，其中证明了一大类奇异黎曼度量的魏尔渐近，包括 Grushin 情形。

对于本文所考虑的模型，[5], 证明了魏尔渐近，我们也想提及早期的研究成果 [15, 16]。在 [5], 中，我们还证明，若$\beta \geq 2/n$，则当 $\lambda \to \infty$时，大多数特征值小于 λ 的特征函数会聚集在边界附近。这里， $\beta = 2/n$ 是一个临界值。在 [11] 中，对于情形 $\beta > 2/n$ ，以及在 [9] 中，对于临界情形 $\beta = 2/n$，我们确定了特征函数局部化于边界附近时的典型长度尺度。

主要结果 (2) 与早期研究成果的比较。在 [11] 中，对于情形 $\beta > 2/n$，以及在 [9] 中，对于 $\beta = 2/n$，我们精确描述了 Δ 的特征函数平均密度在边界附近所处的尺度。这些研究成果包含如下形式的信息：对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个显式的 $L_\lambda \leq 1$ ，它依赖于 β、 n 和 λ ，且当 $\lambda \to \infty$ 时满足 $L_\lambda \to 0$ ，使得

$$\int_{X_{L_\lambda}} F_\lambda(z)\, dv_g(z) \geq 1 - \epsilon, \tag{3}$$

其中，对于任意 $a \in [0, 1]$，我们使用记号 $X_a := [0, a] \times M$，并将其视为 X 边界的相应管状邻域。注意，形如 (3) 的估计不足以证明 (2)。在 [11], 中，我们还证明了，在 $\beta > 2/n$ 的情形下，对于固定的光滑有界函数 V，以下量

$$\int_{X_1} V(\sqrt{\lambda}x, y) F_\lambda(x, y)\, dv_g(x, y) \tag{4}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时收敛到一个有限值。因此，特别是由于V 上的有界性条件，我们无法在 [11] 中取 $V(x, y) = x^p$ ，从而推出形如 (2) 的估计。

关于特征函数平均密度收敛速度的文献。据我们所知，文献中只有极少数结果对特征函数平均密度的收敛速度给出了定量估计，例如在某种瓦瑟斯坦意义下。在无边界的紧致光滑黎曼流形 X上，赋予非奇异度量，我们参考 H¨ormander [12, 定理 17.5。7], 该定理表明，特征函数的平均密度 F_λ 在 L^∞-范数下收敛

到 X 上的均匀测度，收敛速度为 λ^{-1}。由 [12, 定理 17.5。7], 还可以证明，在带边界的光滑黎曼流形情形下也有相应结论，例如在 Wasserstein-1 意义下。

记号。我们用 $N(\lambda)$ 表示 Δ 的特征值中小于 λ 的特征值个数。这里按重数计算特征值。

设 Δ 的特征函数中对应特征值小于 λ 的特征函数的平均密度为 F_λ，定义如下：对于由 Δ 的特征值小于 λ 的所有特征函数张成的空间的任意标准正交基 $\{\Psi\}$，我们定义

$$F_\lambda(z) := \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\substack{\Psi \ L^2(X,dv_g)\text{-normalized} \\ \text{eigenfunction of } \Delta \\ \text{with eigenvalue } <\lambda}} |\Psi(z)|^2, \quad z \in X. \tag{5}$$

特别地，我们有

$$\int_X F_\lambda(z)\, dv_g(z) = 1. \tag{6}$$

注意，F_λ 的定义与所选取的标准正交基 $\{\Psi\}$ 无关。为此，注意对于 X 上任意连续有界函数 h，我们有

$$\int_X h(z) F_\lambda(z)\, dv_g(z) = \mathrm{Tr}_{L^2(X,dv_g)}(h 1_{\Delta<\lambda}). \tag{7}$$

下文中，我们将用 $C > 0$ 表示一个可逐行变化的常数。

主要结果的详细陈述。现在陈述主要定理。

定理 1. 设 $\beta \in [2/n, \infty)$，并设 F_λ 为 Δ 在X 上的特征函数的归一化密度，其特征值为 $< \lambda$，定义见 (5)。定义

$$A_\lambda := \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n\beta}} & \text{if } \beta > \frac{2}{n} \\ \frac{\log(\log(\lambda))}{\log(\lambda)} & \text{if } \beta = \frac{2}{n} \end{cases} \tag{8}$$

那么存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda_0 > 0$，使得对所有 $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\int_{X \setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C A_\lambda. \tag{9}$$

特别地，对于一个可能不同的常数 $C > 0$，我们还有

$$\int_X \min\{x,1\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C A_\lambda. \tag{10}$$

注1. 要看出 (10) 如何由 (9) 得出，请注意

$$\int_X \min\{x,1\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq \int_{X \setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) + A_\lambda \leq (C+1) A_\lambda. \tag{11}$$

我们可以将 (10) 视为对 $F_\lambda\, dv_g$ 的一阶矩的估计。下述定理给出了 $p \geq 2$ 的 p 阶矩估计。

定理 2. 设 $\beta \in [2/n, \infty)$, $p \geq 2$，并令 F_λ 为 X 上 Δ 的特征函数的归一化密度，其特征值为 $< \lambda$，定义见 (5)。定义

$$A_\lambda := \begin{cases} \frac{1}{\log(\lambda)} & if\ \beta = \frac{2}{n} \\ \frac{\log(\lambda)}{\lambda} & if\ \beta = \frac{6}{n},\ p = 2 \\ \lambda^{\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{n\beta}{4}, -1\right\}} & else \end{cases} \tag{12}$$

那么存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda_0 > 0$，使得对所有 $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\int_X \min\{x^p, 1\} F_\lambda(x, y)\, dv_g(x, y) \leq C A_\lambda. \tag{13}$$

无论是在 (9) 中，还是在 (13) 中对于 $p \geq 2$ 和 $\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}$，我们都无法期待得到好得多的估计。我们将在下文的注 2 中对此作出精确说明。

x坐标上的瓦瑟斯坦-p-距离估计。(10) 和 (13) 中的估计意味着，在投影到 x坐标后，概率测度 $F_\lambda\, dv_g$ 与边界 ∂X 上的均匀概率测度之间关于 $G = g_1(x = 0)$ 的不同瓦瑟斯坦距离也满足相应估计。

更确切地说，记满足以下条件的 $[0, 1]$ 上的概率测度为 μ_λ：对所有 $a \in$，(0, 1)

$$\int_{[0,a]} d\mu_\lambda = \int_{X_a} F_\lambda\, dv_g\,. \tag{14}$$

特别地，由于 μ_λ 是概率测度，且 F_λ 相对于 X上的黎曼测度绝对连续，我们有

$$\mu_\lambda(\{1\}) = \int_{X \setminus X_1} F_\lambda\, dv_g\,. \tag{15}$$

我们将 μ_λ 与零点处的狄拉克分布 δ_0 进行比较，后者也是$[0, 1]$上的概率测度。在这里，我们将 δ_0 视为 x坐标上的投影，该投影取自 X边界上的均匀概率测度。

回顾一下，对于任意 $p \geq 1$，两个概率测度 μ和 ν在 $[0, 1]$上的瓦瑟斯坦-p-距离 $W_p(\mu, \nu)$定义如下。我们用 $\Gamma(\mu, \nu)$表示 μ和 ν的所有耦合所构成的空间，即定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的测度，其中第一坐标上的边缘分布为 μ，第二坐标上的边缘分布为 ν。于是，μ 与 ν 的瓦瑟斯坦-p-距离定义为

$$W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int_{[0,1]\times[0,1]} |x - \tilde{x}|^p\, d\gamma(z, \tilde{z}) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

因此，将该定义应用于 μ_λ 和 δ_0，我们得到

$$W_p(\mu_\lambda, \delta_0)^p = \int_{[0,1)} x^p\, d\mu_\lambda + \mu_\lambda(\{1\}) = \int_X \min\{x^p, 1\} F_\lambda(x, y)\, dv_g(x, y). \tag{17}$$

推论 1（瓦瑟斯坦-p-距离下的收敛速度估计）。记 μ_λ为由特征函数的平均密度在 x坐标上的投影所给出的、定义于 $[0, 1]$ 上的概率测度，如 (14) 和 (15) 中所定义；记 δ_0 为零点处的狄拉克分布，并将其视为定义于 $[0, 1]$上的概率测度。设 $\beta \geq 2/n$。那么对于 $p = 1$ 或任意 $p \geq 2$,

存在一个常数 $C > 0$，使得对所有充分大的 λ，我们都有以下关于 μ_λ 和 δ_0 之间距离的定量估计，该距离取瓦瑟斯坦-p-距离

$$W_p(\mu_\lambda, \delta_0) \leq C A_\lambda^{1/p} \tag{18}$$

对于在 (8) 中定义的 A_λ，以及对于在 (12) 中定义的 $p = 1$ 和 A_λ，$p \geq 2$。

证明。只需结合 (17) 以及定理 1 和定理 2 的陈述即可。 □

值得指出的是，通过在定理 1 中关于 $p = 1$ 的结果与定理 2 中关于 $p = 2$ 的结果之间进行插值，也可以得到类似于 (18) 的关于 $p \in (1, 2)$ 的估计。

˜拟等距黎曼度量 $\tilde{g}$ 及其拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ。定理 1 的证明的一个关键要素，是将 (X, g) 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子˜Δ 与具有更优性质的奇异黎曼度量$\tilde{g}$ 下、$(X, \tilde{g})$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 进行比较。对于固定的 $\epsilon \in (0, 1)$，$\tilde{g}$ 在 X_ϵ 上具有可分结构，并且 $\tilde{g}$ 与 g 拟等距，差一个常数 $(1 + \delta)$；也就是说，在矩阵意义下，我们有

$$\frac{1}{1+\delta}\tilde{g} \leq g \leq (1+\delta)\tilde{g}. \tag{19}$$

此处 $\delta > 0$ 取决于 ϵ 和 $\delta \to 0$，具体为 $\epsilon \to 0$。此外，通过将 δ 替换为 δ乘以一个较小常数，我们可以选取 $\delta \in (0,1)$，使得我们还有

$$\frac{1}{1+\delta} dv_{\tilde{g}} \leq dv_g \leq (1+\delta) dv_{\tilde{g}} \tag{20}$$

and

$$\frac{1}{1+\delta}\langle f, \tilde{\Delta} f\rangle_{L^2(X, dv_{\tilde{g}})} \leq \langle f, \Delta f\rangle_{L^2(X, dv_g)} \leq (1+\delta)\langle f, \tilde{\Delta} f\rangle_{L^2(X, dv_{\tilde{g}})} \quad \text{for all } f \in C_c^\infty(X). \tag{21}$$

对于给定的 $\epsilon \in (0, 1/3)$，我们将度量 $\tilde{g}$ 定义如下：在 M 上定义度量 $G : G = g_1(x = 0)$。此处，$(g_1(x))_{x\in[0,1]}$ 是由式 (1) 给出的 M 上的光滑非退化度量连续族。回忆一下，g 满足在 $X_1 \cong [0, 1] \times M$ 上，

$$g = dx^2 + x^{-\beta} g_1(x). \tag{22}$$

我们定义 $\tilde{g}$ 在 $X \setminus X_1$ 上等于 g。对于一个固定的光滑函数 $\eta : [0, 1] \to [0, 1]$，满足当 $x \leq 2\epsilon$ 时 $\eta \equiv 1$，当 $x \geq 3\epsilon$ 时 $\eta \equiv 0$，我们在 $X_1 \cong [0, 1] \times M$ 上定义 $\tilde{g}$ 如下

$$\tilde{g} = dx^2 + x^{-\beta}\left(\eta(x)G + (1 - \eta(x))g_1(x)\right). \tag{23}$$

当 $\epsilon > 0$ 较小时，$\delta > 0$ 下的估计 (19) 由族 $(g_1(x))_{x\in[0,1]}$ 的连续性推出。对于本文的目的而言，无须令 δ 较小。尽管如此，我们仍会记录 δ，尤其是在下文命题 1 的证明中。

˜在下文命题 1 的证明中，我们将使用记号 ∇ 和 ∇。对于定义在 X 上的两个函数F_1 和 F_2，局部坐标下的表达式 $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2$ 表示加权内积 $\langle \nabla F_1, g^{-1}\nabla F_2\rangle$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，其中 g^{-1} 被视为一个矩阵。特别地，

$$\int_X \nabla F_1 \cdot \nabla F_2 \, dv_g = \langle F_1, \Delta F_2\rangle_{L^2(X, dv_g)}. \tag{24}$$

˜我们对 ∇有相同的定义，只需将所有地方的 g 替换为 $\tilde{g}$，因此

$$\int_X \tilde{\nabla} F_1 \cdot \tilde{\nabla} F_2 \, dv_{\tilde{g}} = \langle F_1, \tilde{\Delta} F_2\rangle_{L^2(X, dv_{\tilde{g}})}. \tag{25}$$

经过函数和测度变换，见 [10, 第 3 节。8], 相应的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 可写为

$$\tilde{\Delta} = -\partial_x^2 + \frac{C_\beta}{x^2} + x^\beta \Delta_M, \quad \text{on } L^2\left([0,\epsilon] \times M, dx\, dv_G(y)\right), \quad C_\beta := \frac{\beta n}{4}\left(1 + \frac{\beta n}{4}\right), \tag{26}$$

其中， Δ_M 表示关于 G定义在 M 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。因此， Δ 和 Δ可视为一个 β-格鲁辛型算子加上一个势，其中 $\beta = 2$ 的情形对应于经典格鲁申情形。

接下来，我们说明定理 1 和定理 2 的证明策略。

定理 1 的证明策略。式 (9) 的证明结构如下：

步骤 1：在涉及的命题 1(i) 中，我们给出关于 F_λ的估计，即Δ在形如$X \setminus X_{A_\lambda}$的区域中的特征函数的平均密度。该估计仅涉及关于 Δ 的迹以及一个局部化误差。

步骤 2：估计 Δ 的特征值个数。我们通过在下文的命题2(i)、(ii)中给出相应的特征值个数估计，来估计步骤 1 中关于 Δ 的迹（以为单位）。

步骤 3：估计局部化误差并得出结论。为了得出结论，尚需控制步骤中的局部化误差。在临界情形 $\beta = 2/n$ 下，这可以直接做到。在超临界情形 $\beta > 2/n$ 下，我们使用自举论证来获得最优估计。

定理 2 的证明策略。现在我们来说明定理 2 的证明策略。

步骤 1：第一步与定理 1 的第一步非常相似。具体而言，在命题 1(i) 中，我们将要估计的量

$$\int_X \min\{x^p, 1\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y), \tag{27}$$

表示为涉及算子 Δ 的迹与一个局部化误差之和。

步骤 2： Δ特征值个数的估计。在命题 2(iii) 和 (iv) 中，我们给出了 Δ 在形如 $X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda}$的区域上的特征值估计，该估计取决于 B_λ的值。

步骤 3：利用二进分解得出结论。最后，为了得出结论，我们将 X分解为 $X_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}$、$X \setminus X_\epsilon$以及一族形如 $X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda}$的集合之并。这使我们能够在这些集合 $X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda}$中的每一个上，对 x^p 给出上、下界估计。利用命题 2(iii) 和 (iv) 中的估计，我们可以估计局部化误差和主项；后者带有来自命题 1(i) 的迹，从而得到所需结果。

可能的推广。本文所采用的方法具有相对良好的稳健性。利用这里提出的策略，应该能够处理其他类别的奇异黎曼度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，或次黎曼拉普拉斯算子。要使证明在其他情形下成立，所需的主要要素是模型算子的特征值个数的局部化估计的类似结果，如命题 2 中所述。

论文结构。我们在第 2 节证明命题 1，在第 3 节证明命题 2，并在第 4 节完成定理 1 的证明。在第 5 节，我们证明定理 2。

致谢。作者感谢 Yves Colin de Verdi`ere 和 Emmanuel Tr´elat 的支持，以及他们提供的宝贵讨论和建议。作者感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所（剑桥）在“几何谱理论及其应用”项目期间提供的支持与接待，本文的相关工作正是在此期间开展的。本研究得到了英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/Z000580/1 的资助。作者还感谢欧洲研究理事会通过 ERC CoG RAMBAS（项目编号：101044249）提供的支持。

˜2. Localisation estimates involving a trace of Δ

本节中，我们证明命题 1。在定理 2 的证明中，我们将对函数 $\chi(x,y) = \min\{x^{p/2},1\}$ 使用命题 1(i)。在定理 1 的证明中，我们将对尺度为 A_λ 的光滑截断函数使用命题1(ii)。

命题 1. 设 $\tilde{g}$ 为 (23) 中的 g 的一个近似，并具有相应的 $\epsilon > 0$ 和$\delta > 0$；记 Δ 为对应于 $\tilde{g}$ 的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，见 (26)。

(i) 设 $\chi\colon X \to [0,1]$ 是一个弱可微函数。则有

$$\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X \chi^2|\Psi|^2\,dv_g \le \frac{1}{\lambda}\operatorname{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+ + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\,dv_g. \tag{28}$$

(ii) 设 $0 < a < b < \epsilon$，并设 $\chi\colon [0,\epsilon] \to [0,1]$ 弱可微，且对于$x \le a$， $\chi(x) = 0$；对于 $x \ge b$， $\chi(x) = 1$。则有

$$\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X\setminus X_b} |\Psi|^2\,dv_g \le \frac{1}{\lambda}\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_a,dv_{\tilde{g}})}\left((2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})_+\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X |\chi'|^2|\Psi|^2\,dv_g, \tag{29}$$

其中，我们将 $\chi'(z)$ 与 $z = (x,y) \in [0,\epsilon]\times M$ 中的 $\chi'(x)$ 等同，其他情况下取 0。此外，我们在 ∂X_a 上为 Δ 采用诺伊曼边界条件。

证明。设 Ψ 是 Δ 的特征函数，对应特征值为 $\mu \in [0,\lambda]$。那么

$$\Psi(2\lambda-\Delta)\Psi = (2\lambda-\mu)|\Psi|^2 \ge \lambda|\Psi|^2. \tag{30}$$

由（30）可得，

$$\int_X \chi^2|\Psi|^2\,dv_g \le \frac{1}{\lambda}\int_X \chi^2\Psi(2\lambda-\Delta)\Psi\,dv_g = \frac{1}{\lambda}\left(2\lambda\int_X|\chi\Psi|^2\,dv_g - \int_X \nabla(\chi^2\Psi)\cdot\nabla\Psi\,dv_g\right). \tag{31}$$

这里， $\nabla F_1\cdot\nabla F_2$ 在局部坐标中对应于取加权内积$\langle\nabla F_1,\ g^{-1}\nabla F_2\rangle$ 在 $\mathbb{R}^n$中，其中 g^{-1} 被视为一个矩阵。根据乘积法则，我们有

$$\begin{aligned}\int_X \nabla(\chi^2\Psi)\cdot\nabla\Psi\,dv_g &= \int_X \chi\nabla(\chi\Psi)\cdot\nabla\Psi\,dv_g + \int_X \chi\Psi(\nabla\chi)\cdot\nabla\Psi\,dv_g\\ &= \int_X |\nabla(\chi\Psi)|^2\,dv_g - \int_X \Psi(\nabla\chi)\cdot\nabla(\chi\Psi)\,dv_g + \int_X \chi\Psi(\nabla\chi)\cdot\nabla\Psi\,dv_g.\end{aligned} \tag{32}$$

由于 $\nabla(\chi\Psi) = \Psi\nabla\chi + \chi\nabla\Psi$，我们得到

$$\int_X \nabla(\chi^2\Psi)\cdot\nabla\Psi\, dv_g = \int_X |\nabla(\chi\Psi)|^2\, dv_g - \int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\, dv_g. \tag{33}$$

注意，这对应于黎曼流形上的 IMS 公式。因此，

$$\int_X \chi^2|\Psi|^2\, dv_g \le \frac{1}{\lambda}\left(2\lambda\int_X |\chi\Psi|^2\, dv_g - \int_X |\nabla(\chi\Psi)|^2\, dv_g + \int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\, dv_g\right). \tag{34}$$

利用 g 和 $\tilde{g}$ 的拟等距性，我们有

$$\int_X \chi^2|\Psi|^2\, dv_g \le \frac{1}{\lambda}(1+\delta)\left(2\lambda\int_X |\chi\Psi|^2\, dv_{\tilde{g}} - \frac{1}{(1+\delta)^2}\int_X |\tilde{\nabla}(\chi\Psi)|^2\, dv_{\tilde{g}}\right) + \frac{1}{\lambda}\int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\, dv_g. \tag{35}$$

稍后，我们将对 $L^2(X, dv_g)$ 中由 Δ 的特征函数 Ψ 构成的正交归一族求和。从这里开始，(i) 和 (ii) 的证明略有不同。

(i) 的证明至此结束。使用狄拉克符号，我们断言

$$0 \le \sum_\Psi |\Psi\rangle\langle\Psi| \le (1+\delta) \quad \text{on } L^2(X, dv_{\tilde{g}}), \tag{36}$$

也就是说，$L^2(X, dv_{\tilde{g}})$ 中投影到 Ψ 上的正交投影之和，在算子意义下小于或等于 $1+\delta$ 倍的恒等算子。注意，此处 $L^2(X, dv_{\tilde{g}})$ 中投影到 Ψ 上的正交投影不同于 $L^2(X, dv_g)$ 中投影到 Ψ 上的正交投影。为证明（ 36 ），令 $\Phi \in L^2(X, dv_{\tilde{g}})$。那么

$$\left\langle \Phi, \sum_\Psi |\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi \right\rangle_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})} = \sum_\Psi |\langle\Phi,\Psi\rangle_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}|^2 = \sum_\Psi \left|\int_X \overline{\Phi}\Psi\, dv_{\tilde{g}}\right|^2. \tag{37}$$

记 $\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}$ 为测度 $v_{\tilde{g}}$ 相对于 v_g的拉东-尼科迪姆密度，我们有

$$\sum_\Psi \left|\int_X \overline{\Phi}\Psi\, dv_{\tilde{g}}\right|^2 = \sum_\Psi \left|\int_X \overline{\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\Phi}\Psi\, dv_g\right|^2 = \sum_\Psi \left|\left\langle \frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\Phi, \Psi\right\rangle_{L^2(X,dv_g)}\right|^2. \tag{38}$$

接下来，我们利用投影到 Ψ 上的投影之和是作用于 $L^2(X, dv_g)$ 的一个算子，且其范数不超过 1，因此

$$\begin{aligned}\sum_\Psi \left|\left\langle \frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\Phi, \Psi\right\rangle_{L^2(X,dv_g)}\right|^2 &\le \left\|\left(\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\right)\Phi\right\|^2_{L^2(X,dv_g)} = \int_X \left|\left(\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\right)\Phi\right|^2 dv_g \\ &\le (1+\delta)\int_X |\Phi|^2\, dv_{\tilde{g}} \le (1+\delta)\int_X |\Phi|^2\, dv_{\tilde{g}}.\end{aligned} \tag{39}$$

H这里我们利用了拟等距性质，见 (20)，$\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g} \le 1+\delta$。这就证明了 (36).

对（35）中的所有 Ψ 求和可得

$$\begin{aligned}\sum_\Psi \int_X \chi^2|\Psi|^2\, dv_g &\le \frac{1}{\lambda}(1+\delta)^2\,\mathrm{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi\left(2\lambda - \frac{1}{(1+\delta)^2}\tilde{\Delta}\right)\chi\right)_+ + \frac{1}{\lambda}\sum_\Psi\int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\, dv_g \\ &= \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi\left(2(1+\delta)^2\lambda - \tilde{\Delta}\right)\chi\right)_+ + \frac{1}{\lambda}\sum_\Psi\int_X |\nabla\chi|^2|\Psi|^2\, dv_g.\end{aligned}$$

(ii) 证明结束。使用狄拉克符号，我们断言

$$0 \leq \sum_{\Psi} |\chi\Psi\rangle\langle\chi\Psi| \leq (1+\delta)1_{X\setminus X_a} \quad \text{on } L^2(X, dv_{\tilde{g}}), \tag{40}$$

也就是说，投影到 $L^2(X, dv_{\tilde{g}})$ 中 $\chi\Psi$ 的正交投影之和，在算子意义下小于或等于 $1+\delta$ 乘以由 $1_{X\setminus X_a}$ 给出的乘法算子。注意，这里的投影到 $L^2(X, dv_{\tilde{g}})$ 中 $\chi\Psi$ 的正交投影，不同于投影到 $L^2(X, dv_g)$ 中 $\chi\Psi$ 的正交投影。为证明 (40)，令 $\Phi \in L^2(X \setminus X_a, dv_{\tilde{g}})$。于是

$$\left\langle \Phi, \sum_{\Psi} |\chi\Psi\rangle\langle\chi\Psi|\Phi \right\rangle_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})} = \sum_{\Psi} |\langle\chi\Phi, \Psi\rangle_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}|^2 = \sum_{\Psi} \left| \int_X \overline{\chi\Phi}\Psi \, dv_{\tilde{g}} \right|^2. \tag{41}$$

记 $\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}$ 为测度 $v_{\tilde{g}}$ 关于 v_g 的拉东-尼科迪姆密度，则有

$$\sum_{\Psi} \left| \int_X \overline{\chi\Phi}\Psi \, dv_{\tilde{g}} \right|^2 = \sum_{\Psi} \left| \int_X \overline{\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\chi\Phi}\Psi \, dv_g \right|^2 = \sum_{\Psi} \left| \left\langle \frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\chi\Phi, \Psi \right\rangle_{L^2(X,dv_g)} \right|^2. \tag{42}$$

接下来，我们利用投影到 Ψ 上的投影之和是 $L^2(X, dv_g)$ 上范数不超过 1 的算子，因此

$$\begin{aligned} \sum_{\Psi} \left| \left\langle \frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g}\chi\Phi, \Psi \right\rangle_{L^2(X,dv_g)} \right|^2 &\leq \left\| \left(\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g} \right) \chi\Phi \right\|^2_{L^2(X,dv_g)} = \int_X \left| \left(\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g} \right) \chi\Phi \right|^2 dv_g \\ &\leq (1+\delta) \int_X |\chi\Phi|^2 \, dv_{\tilde{g}} \leq (1+\delta) \int_{X\setminus X_a} |\Phi|^2 \, dv_{\tilde{g}}. \end{aligned} \tag{43}$$

这里我们利用了拟等距性质，见 (20)，$\frac{dv_{\tilde{g}}}{dv_g} \leq 1+\delta$。这就证明了 (40)。

将 (35) 中所有 Ψ 相加，得到

$$\begin{aligned} \sum_{\Psi} \int_{X\setminus X_b} |\Psi|^2 \, dv_g &\leq \frac{1}{\lambda}(1+\delta)^2 \operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_a, dv_{\tilde{g}})} \left(\left(2\lambda - \frac{1}{(1+\delta)^2}\tilde{\Delta} \right)_+ \right) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\Psi} \int_X |\chi'|^2 |\Psi|^2 \, dv_g \\ &= \frac{1}{\lambda} \operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_a, dv_{\tilde{g}})} \left(\left(2(1+\delta)^2\lambda - \tilde{\Delta} \right)_+ \right) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\Psi} \int_X |\chi'|^2 |\Psi|^2 \, dv_g. \end{aligned}$$

□

3. Estimates for the number of eigenvalues of Δ

本节中，我们将证明在边界附近不同子集内，可分离算子 Δ 的特征值个数的最优估计。

命题 2。设 $\epsilon \in (0, 1]$ 且令 Δ 为与 $\tilde{g}$ 对应的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，见 (26)。设 $\beta \in [2/n, \infty)$。存在一个与 λ 无关的常数 $C > 0$，使得对所有满足以下条件的B_λ

$$\frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \leq B_\lambda \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{44}$$

并且对于所有 $\lambda \geq 1$，我们有以下估计：

(i) 若 $\beta > 2/n$，则对于在 $L^2(X \setminus X_{B_\lambda}, dv_{\tilde{g}})$ 上、在 $\partial(X \setminus X_{B_\lambda})$ 处满足 Neumann 边界条件的算子 $\tilde{\Delta}$，其低于 λ 的特征值个数记为 $N_{\tilde{\Delta},\ X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda)$，满足

$$N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \leq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)}. \tag{45}$$

(ii) 若 $\beta = 2/n$，则对于作用在 $L^2(X \setminus X_{B_\lambda}, dv_{\tilde{g}})$ 上的算子 $\tilde{\Delta}$，在 $\partial(X \setminus X_{B_\lambda})$ 处满足诺伊曼边界条件时，我们有

$$N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \leq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + |\log(B_\lambda)|\right). \tag{46}$$

(iii) 若 $\beta \geq 2/n$，则对于作用在 $L^2(X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda}, dv_{\tilde{g}})$ 上的算子 $\tilde{\Delta}$，在 $\partial(X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda})$ 处满足诺伊曼边界条件时，我们有

$$N_{\tilde{\Delta},X_{2B_\lambda}\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \leq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)}. \tag{47}$$

(iv) 若 $\beta \geq 2/n$，则对于作用在 $L^2(X_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}, dv_{\tilde{g}})$ 上的算子 $\tilde{\Delta}$，在 $\partial X_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}$ 处满足诺伊曼边界条件时，我们有

$$N_{\tilde{\Delta},X_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}}(3\lambda) = 0. \tag{48}$$

此外，从以下意义上说该结果是最优的：若进一步存在一个足够大的常数 $\hat{c} > 0$，其大小取决于 n 和 β，并且存在一个足够小的 $\tilde{\epsilon} > 0$，使得我们有

$$\frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \leq B_\lambda \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{49}$$

那么对于所有足够大的 $\lambda > 0$，我们有

（v）如果 $\beta > 2/n$，那么

$$N^D_{\tilde{\Delta},X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \geq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)}. \tag{50}$$

这里的 D 表示在 $\partial(X \setminus X_{B_\lambda})$上的狄利克雷边界条件。（vi）如果 $\beta = 2/n$，那么

$$N^D_{\tilde{\Delta},X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \geq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + |\log(B_\lambda)|\right). \tag{51}$$

这里的 D 表示在 $\partial(X \setminus X_{B_\lambda})$上的狄利克雷边界条件。

（vii）如果 $\beta \geq 2/n$，那么对于 $L^2(X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda}, dv_{\tilde{g}})$上的算子 $\tilde{\Delta}$，并在 $\partial(X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda})$处满足诺伊曼边界条件时，我们有

$$N^D_{\tilde{\Delta},X_{2B_\lambda}\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \geq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)}. \tag{52}$$

这里的 D 表示在 $\partial(X_{2B_\lambda} \setminus X_{B_\lambda})$上的狄利克雷边界条件。

证明。首先注意到，我们有

$$N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) \leq N_{\tilde{\Delta},X_\epsilon\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) + N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_\epsilon}(\lambda), \tag{53}$$

其中，我们在所有边界上施加诺伊曼边界条件。由于度量 $\tilde{g}$ 在 X的内部是正则的，因此对于所有 $\lambda \geq 1$

$$N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_\epsilon}(\lambda) \leq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} \tag{54}$$

其中常数 C 仅取决于 ϵ、n 和 β。注意，这是公式 (45) 和 (46) 中的次主导项。

接下来，我们来估计 $N_{\tilde{\Delta},\ X_\epsilon\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda)$。在 X_ϵ 上，因此在 $X_\epsilon \setminus X_{B_\lambda}$ 上也有，度量 $\tilde{g}$ 为

$$\tilde{g} = \mathrm{d}x^2 + x^{-\beta}G \tag{55}$$

经过函数和测度变换后，参见 [10, 第 3 节。8], 相应的拉普拉斯-˜贝尔特拉米算子 Δ 可写为

$$\tilde{\Delta} = -\partial_x^2 + \frac{C_\beta}{x^2} + x^\beta \Delta_M, \quad \text{on } L^2\left([0,\epsilon]\times M, dx\, dv_G(y)\right), \quad C_\beta := \frac{\beta n}{4}\left(1+\frac{\beta n}{4}\right), \tag{56}$$

其中， Δ_M 表示关于 G的 M 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。根据（26）， Δ 的特征函数基˜满足特征函数可分解。更确切地说，如果 Φ是该基中 Δ 的一个˜特征函数，其特征值为 α，那么它可以写成

$$\Phi(x,y) = \phi(x)\psi(y), \tag{57}$$

其中， ψ 是 Δ_M的一个特征函数，其特征值为某个 μ ，而 ϕ 是算子

$$P_\mu := -\partial_x^2 + \frac{C_\beta}{x^2} + \mu x^\beta \quad \text{on } [B_\lambda, \epsilon]. \tag{58}$$

我们将 Δ_M的特征值记为（μ_j）$_{j\in\mathbb{N}}$。根据 M上的魏尔定律，我们知道，当 $n\to\infty$时，$\mu_j \sim c_M j^{2/n}$，其中 c_M是一个显式常数，仅取决于 v_G（M）和 n。在下文中，为简化记号，我们假设 $c_M = 1$。令 $N_{\mu,[a,b]}$（λ）表示 P_μ 在区间 $[a,b]$ 上的特征值 $< \lambda$ 个数，并在两个端点均满足诺伊曼边界条件。于是得到

$$N_{\tilde{\Delta},X_\epsilon\setminus X_{B_\lambda}}(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} N_{\mu_j,[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda). \tag{59}$$

另请注意，对于任意 $\mu \geq 0$，我们有 $P_\mu \geq -\partial_x^2$；通过估计 $-\partial_x^2$ 的特征值在区间上的个数，可得对任意 $j\in\mathbb{N}$

$$N_{\mu_j,[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda) \leq 1 + \frac{\epsilon}{\pi}\sqrt{\lambda}. \tag{60}$$

特别是，

$$\sum_{j=1}^{\lambda^{n/2}} N_{\mu_j,[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda) \leq C\lambda^{(n+1)/2}, \tag{61}$$

这小于或等于所需估计右侧的值。

对于求和中对应于 $j \geq \lambda^{n/2}$ 的部分，在估计中我们可以将 μ_j 替换为 $j^{2/n}$，相差一个常数因子；这不会造成影响。因此，剩下需要估计的是

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\infty} N_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda). \tag{62}$$

注意，如果 $j \geq \lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}$，那么 $j^{2/n}B_\lambda \geq \lambda$，因此，在 $[B_\lambda,\epsilon]$上有 $P_{j^{2/n}} \geq \lambda$。也就是说，对于$j \geq \lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}$，我们有 $N_{j^{2/n},\ [B_\lambda,\epsilon]}(\lambda) = 0$。因此，我们只需估计

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda). \tag{63}$$

利用区间 $[a,b]$ 上的 P_μ 与 $\left[\mu^{1/(2+\beta)}a, \mu^{1/(2+\beta)}b\right]$ 上的 $\mu^{2/(2+\beta)}P_1$ 的酉等价，我们有

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda) = \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{1,[j^{1/d}B_\lambda, j^{1/d}\epsilon]}(\lambda j^{-2/d}), \tag{64}$$

其中

$$d := n\left(1+\frac{\beta}{2}\right). \tag{65}$$

由于 $B_\lambda \geq \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}$，我们有 $\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2} \leq C_{n,\beta}\lambda^{d/2}$ 因此，$\lambda j^{-2/d} \geq C_{n,\beta}$，其中 $C_{n,\beta}>0$ 是一个仅依赖于 n、β 的常数，并且可能在每个等式中有所不同。根据 [10, (3.43)]，存在一个与 λ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{1,[j^{1/d}B_\lambda, j^{1/d}\epsilon]}(\lambda j^{-2/d}) \leq C \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \left(\lambda j^{-\frac{2}{d}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} = C\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} j^{-\frac{2}{n\beta}}. \tag{66}$$

若 $\beta > 2/n$，则我们可以估计，存在一个依赖于 n 和 β 的常数 $C>0$

$$\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} j^{-\frac{2}{n\beta}} \leq C\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} \left(\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}\right)^{1-\frac{2}{n\beta}} = C\lambda^{\frac{n+1}{2}} B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{n\beta}\right)}, \tag{67}$$

这证明了（i）。

若 $\beta = 2/n$，则

$$\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} j^{-\frac{2}{n\beta}} = \lambda^{\frac{n+1}{2}} \sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-1}} j^{-1} \leq C\lambda^{\frac{n+1}{2}} \left(1+\log\left(\frac{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-1}}{\lambda^{n/2}}\right)\right) = C\lambda^{\frac{n+1}{2}}\left(1+|\log(B_\lambda)|\right). \tag{68}$$

这表明（ii）。

为了证明（iii），注意到与上文类似，我们需要估计

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,2B_\lambda]}(\lambda) \tag{69}$$

现在，由于对任意 $\mu>0$，都有 $P_\mu \geq -\partial_x^2$，且由于 $B_\lambda \geq \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}$，我们得到

$$N_{j^{2/n},[B_\lambda,2B_\lambda]}(\lambda) \leq C\sqrt{\lambda}B_\lambda. \tag{70}$$

将此结果与（69）结合，我们得到

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,2B_\lambda]}(\lambda) \leq C\lambda^{(n+1)/2}B_\lambda^{1-\beta n/2} = C\lambda^{(n+1)/2}B_\lambda^{\frac{n\beta}{2}\left(1-\frac{2}{n\beta}\right)}. \tag{71}$$

对于（iv），我们需要证明

$$N_{\tilde{\Delta},X_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}}(3\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} N_{\mu_j,[0,\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}]}(3\lambda). \tag{72}$$

为零。为此，注意到对于任意 $\mu > 0$，在 $[0, \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}]$ 上有

$$P_\mu \geq \frac{C_\beta}{x^2} \geq 4\lambda C_\beta \geq 3\lambda, \tag{73}$$

这里我们用到了 $\beta \geq 2/n$ and

$$C_\beta := \frac{\beta n}{4}\left(1 + \frac{\beta n}{4}\right) \geq \frac{3}{4}. \tag{74}$$

现在我们来证明最优性结论 (v)、(vi) 和 (vii)。首先注意，对于任意 $\hat{c} > 0$，若 $B_\lambda \geq \hat{c}\lambda^{-\frac{1}{2}}$，则对所有 $x \geq B_\lambda$，我们都有

$$\frac{C_\beta}{x^2} \leq \frac{C_\beta}{\hat{c}^2}\lambda. \tag{75}$$

因此，若我们选取依赖于 n 的 $\hat{c}$，并令 β 足够大，则

$$\frac{C_\beta}{x^2} \leq \frac{\lambda}{2}. \tag{76}$$

我们定义算子

$$\hat{P}_\mu := -\partial_x^2 + \mu x^\beta \tag{77}$$

并注意到，根据 (76)，对于区间两个端点均满足狄利克雷边界条件的情形，记作 D，在任意形如 $[B_\lambda, \epsilon]$ 或 $[B_\lambda, 2B_\lambda]$ 的区间 I 上，我们有

$$N_{\mu,I}^D(\lambda) \geq \hat{N}_{\mu,I}^D\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{78}$$

需要指出的是，这里的边界条件并不重要，但在下文中我们只需要狄利克雷边界条件。这里，N 表示 P_μ 在区间 I上的相应特征值个数。

要证明其最优性，只需证明（v）和（vi）对应的界:

$$\sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}^D(\lambda). \tag{79}$$

这里， D 表示在两个端点都施加狄利克雷边界条件。下界中的求和项由 $\lambda^{n/2}$ 替换为 $\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}$ 这一做法不会影响证明，但能简化下文的记号。首先注意，根据（78），我们有

$$\sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}^D(\lambda) \geq \sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}^D\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}_{1,[j^{1/d}B_\lambda, j^{1/d}\epsilon]}^D\left(\frac{\lambda j^{-2/d}}{2}\right), \tag{80}$$

最后一步中，我们利用了区间 $[a, b]$ 上的 P_μ 与 $\left[\mu^{1/(2+\beta)}a, \mu^{1/(2+\beta)}b\right]$上的 $\mu^{2/(2+\beta)}\, P_1$ 酉等价这一事实。

我们使用记号 $\omega := \frac{1}{2}\lambda j^{-2/d}$。注意，

$$\text{if } j \geq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{n\beta}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \lambda^{\frac{n}{2}}, \text{ then } j^{\frac{1}{d}}\epsilon \geq \omega^{\frac{1}{\beta}} \tag{81}$$

and

$$\text{if } j \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n\beta}{2}+\frac{n\beta}{2}} B_\lambda^{-\frac{n\beta}{2}} \lambda^{\frac{n}{2}}, \text{ then } j^{\frac{1}{d}} B_\lambda \leq \frac{1}{2}\omega^{\frac{1}{\beta}}. \tag{82}$$

由此可得，使用记号 $\omega(j,\lambda) := \frac{1}{2}\lambda j^{-2/d}$,

$$\sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}^D_{1,[j^{1/d}B_\lambda, j^{1/d}\epsilon]}\left(\frac{\lambda j^{-2/d}}{2}\right) \geq \sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\beta}{2}}\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}^D_{1,[\frac{1}{2}\omega(j,\lambda)^{1/\beta}, \omega(j,\lambda)^{1/\beta}]}\left(\omega(j,\lambda)^{1/\beta}\right) \tag{83}$$

与证明前面的评论类似，由于 $B_\lambda \geq \hat{} c\lambda^{-1/2}$，我们有 $\omega \geq C_{n,\ \beta} > 0$。类似于 [10, (3.31)], , 存在一个常数 $c > 0$ ，使得对所有 $\omega \geq C_{n,\ \beta}$，我们都有

$$\hat{N}^D_{1,\left[\frac{1}{2}\omega^{1/\beta}, \omega^{1/\beta}\right]}(\omega) \geq c\omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}. \tag{84}$$

因此，由 (80)、(83) 和 (84) 可得

$$\sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} N^D_{j^{2/n},[B_\lambda,\epsilon]}(\lambda) \geq C \sum_{j=\epsilon^{-\beta n/2}\lambda^{n/2}}^{2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\beta}{2}}\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \left(\lambda j^{-2/d}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}. \tag{85}$$

对于 (v) 和 (vi) 的其余证明，可以参照 (i) 和 (ii) 证明末尾的计算。

现在转向 (vii) 的证明。由 (78) 可知，只需证明下列对象的相应界

$$\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}^D_{j^{2/n},[B_\lambda,2B_\lambda]}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{86}$$

注意

$$\text{if } j \leq 2^{-n-\frac{n\beta}{2}}\lambda^{\frac{n}{2}}B_\lambda^{-\frac{\beta n}{2}}, \text{ then } j^{\frac{2}{n}}(2B_\lambda)^\beta \leq \frac{\lambda}{4}. \tag{87}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=\lambda^{n/2}}^{\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \hat{N}^D_{j^{2/n},[B_\lambda,2B_\lambda]}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\
&\geq \sum_{j=2^{-1-n-n\beta/2}\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}}^{2^{-n-n\beta/2}\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}} \#\left\{\text{number of eigenvalues of } -\partial_x^2 \text{ on } [0,B_\lambda] \text{ that are } < \frac{\lambda}{4}\right\} \\
&\geq C\lambda^{n/2}B_\lambda^{-\beta n/2}\sqrt{\lambda}B_\lambda = C\lambda^{\frac{n+1}{2}}B_\lambda^{1-\frac{n\beta}{2}},
\end{aligned} \tag{88}$$

这就是所需的结果。 □

4. Estimate of the localisation error and conclusion

本节结合命题1(ii)和命题2(i)、(ii)中的估计，给出定理 1 的证明。在临界情形 $\beta = 2/n$ 下，这可以直接得出。在超临界情形 $\beta > 2/n$ 下，我们使用额外的自举论证来改进定理 1 中的最终估计。

4.1. $\beta = 2/n$ 时定理 1 的证明。

定理 1 在 $\beta = 2/n$ 下的证明。令 $\beta = 2/n$。取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 (19) 中对应的 δ 满足 $\delta \le 1$。根据注1，只需证明

$$\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g \le C A_\lambda. \tag{89}$$

我们首先对 $a := A_\lambda/2$ 和 $b = A_\lambda$应用命题1(ii)。特别地，我们可以取一个光滑函数 χ: $[0,\epsilon] \to [0,1]$，使得 $\chi(x) = 0$ 适用于 $x \le A_\lambda/2$，且 $\chi(x) = 1$ 适用于 $x \ge A_\lambda$，并满足

$$|\chi'(x)| \le \frac{4}{A_\lambda} \quad \text{for all } x \in [0,\epsilon]. \tag{90}$$

由命题1(ii)和式 (90)，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction} \\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X\setminus X_{A_\lambda}} |\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda} \operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}, dv_{\tilde g})} \left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+ \right) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction} \\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X |\chi'|^2 |\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda} \operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}, dv_{\tilde g})} \left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+ \right) + \frac{16}{\lambda A_\lambda^2} \sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction} \\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X |\Psi|^2 \, dv_g.
\end{aligned} \tag{91}$$

现在，两边除以 $N(\lambda)$，并利用 F_λ 的定义（见式 (5)），得到

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g &= \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction} \\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X\setminus X_{A_\lambda}} |\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda N(\lambda)} \operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}, dv_{\tilde g})} \left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+ \right) + \frac{16}{\lambda A_\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{92}$$

注意，对 $B_\lambda = A_\lambda/2$ 应用命题 2(ii)，并将 λ 替换为 8λ，可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}, dv_{\tilde g})} \left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+ \right) \le 2(1+\delta)^2\lambda N_{\tilde\Delta, X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}} (2(1+\delta)^2\lambda) \\
&\le 8\lambda N_{\tilde\Delta, X\setminus X_{\frac{A_\lambda}{2}}} (8\lambda) \le \lambda C \lambda^{\frac{n+1}{2}} |\log(8A_\lambda)| \le C\lambda^{1+\frac{n+1}{2}} |\log(A_\lambda)|.
\end{aligned} \tag{93}$$

将其代入 (92)，并利用对于 $\beta = 2/n$,

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{(n+1)/2} \log(\lambda), \quad \text{as } \lambda \to \infty, \tag{94}$$

我们得到

$$\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g \le C \frac{|\log(A_\lambda)|}{\log(\lambda)} + \frac{16}{\lambda A_\lambda^2}. \tag{95}$$

在定理 1(ii) 中，也就是说，若 $\beta = 2/n$，我们选择

$$A_\lambda := \frac{\log(\log(\lambda))}{\log(\lambda)}. \tag{96}$$

在式 (95) 中采用这一 A_λ 选择，并令 $1/\lambda = o(A_\lambda^3)$ 为 $\lambda \to \infty$，我们得到

$$\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g \le C\frac{\log(A_\lambda^{-1})}{\log(\lambda)} + \frac{16}{\lambda A_\lambda^2} \le C\frac{\log\left(\frac{\log(\lambda)}{\log(\log(\lambda))}\right)}{\log(\lambda)} + CA_\lambda \le 2CA_\lambda. \tag{97}$$

这就完成了 $\beta = 2/n$ 时 (89) 的证明。 □

4.2. $\beta > 2/n$ 时定理 1 的证明。

$\beta > 2/n$ 时定理 1 的证明。令 $\beta > 2/n$。取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 (19) 中相应的 δ 满足 $\delta \le 1$。根据注1，只需证明

$$\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g \le CA_\lambda. \tag{98}$$

对于待选的 B_λ 和待选的 $k \in \mathbb{N}$，我们对 a 应用命题1(ii)：$= kB_\lambda$ 和 $b = (k+1)B_\lambda$。特别地，我们可以取一个光滑函数 $\chi\colon [0,\epsilon] \to [0,1]$，使得对于 $x \le kB_\lambda$，有 $\chi(x) = 0$；对于 $x \ge kB_\lambda$，有 $\chi(x) = 1$，并且满足

$$|\chi'(x)| \le \frac{2}{B_\lambda} \quad \text{for all } x \in [0,\epsilon]. \tag{99}$$

由命题1(ii)及 (99)，我们有

(100)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X\setminus X_{(k+1)B_\lambda}} |\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda}\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{kB_\lambda}, dv_{\tilde g})}\left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_X |\chi'|^2|\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda}\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{kB_\lambda}, dv_{\tilde g})}\left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+\right) + \frac{4}{\lambda B_\lambda^2}\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X_{(k+1)B_\lambda}\setminus X_{kB_\lambda}} |\Psi|^2 \, dv_g.
\end{aligned}$$

现在，两边除以 $N(\lambda)$，并利用 F_λ 的定义（见式 (5)），得到

(101)

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus X_{(k+1)B_\lambda}} F_\lambda \, dv_g &= \frac{1}{N(\lambda)}\sum_{\substack{\Psi \text{ eigenfunction}\\ \text{of } \Delta \text{ with eigenvalue } <\lambda}} \int_{X\setminus X_{(k+1)B_\lambda}} |\Psi|^2 \, dv_g \\
&\le \frac{1}{\lambda N(\lambda)}\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{kB_\lambda}, dv_{\tilde g})}\left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+\right) + \frac{4}{\lambda B_\lambda^2}\int_{X_{(k+1)B_\lambda}\setminus X_{kB_\lambda}} F_\lambda \, dv_g.
\end{aligned}$$

由命题2(i)，将 B_λ 替换为 kB_λ，并将 λ 替换为 8λ，可得

(102)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{L^2(X\setminus X_{kB_\lambda}, dv_{\tilde g})}\left((2(1+\delta)^2\lambda - \tilde\Delta)_+\right) \le 2(1+\delta)^2\lambda N_{\tilde\Delta, X\setminus X_{kB_\lambda}}(2(1+\delta)^2\lambda) \\
&\le 8\lambda N_{\tilde\Delta, X\setminus X_{kB_\lambda}}(8\lambda) \le \lambda C\lambda^{\frac{n+1}{2}}(kB_\lambda)^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)} = C\lambda^{1+\frac{n+1}{2}}(kB_\lambda)^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)}.
\end{aligned}$$

这里的常数 $C > 0$ 与 $k \in \mathbb{N}$无关。接下来，我们结合

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{d/2}, \quad \text{as } \lambda \to \infty \quad \text{where } d := n\left(1 + \frac{\beta}{2}\right), \tag{103}$$

参见 [5], 和（102），由（101）可得

$$\int_{X\setminus X_{(k+1)B_\lambda}} F_\lambda\, dv_g \le C\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4}}(kB_\lambda)^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)} + \frac{4}{\lambda B_\lambda^2}\int_{X_{(k+1)B_\lambda}\setminus X_{kB_\lambda}} F_\lambda\, dv_g. \tag{104}$$

此时，我们可以用 1 估计 $\int_{X_{(k+1)B_\lambda}\setminus X_{kB_\lambda}} F_\lambda\, dv_g$，并对 B_λ 进行优化，取 $k=1$，再取 $A_\lambda = B_\lambda/2$。然而，如果我们使用自举论证证明对于某个 $k\in\mathbb{N}$，式 (104) 中代表局部化误差的第二项必然与估计式 (104) 中的第一项同阶，就可以得到好得多的估计。

现在我们来解释自举论证的细节。对于 $\gamma>0$，我们将其选为 $\gamma := 1/(n\beta)$，取

$$B_\lambda := \frac{1}{4\gamma^{-1}+3}\lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{105}$$

我们将对 $k\in\mathbb{N}$ 使用带有 $k\le 4\gamma^{-1}+2$ 的式 (104)。采用记号

$$\mathcal{F}_k := \int_{X\setminus X_{kB_\lambda}} F_\lambda\, dv_g, \tag{106}$$

式 (104) 对所有带有 $k\le 4\gamma^{-1}+2$ 的 $k\in\mathbb{N}$ 均意味着

$$\mathcal{F}_{k+1} \le C\lambda^{-\gamma\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)} + C\lambda^{-2\gamma}\mathcal{F}_k \tag{107}$$

其中常数 $C>0$ 取决于 γ，但与 $k\in\mathbb{N}$ 无关，且 $k\le 4\gamma^{-1}+2$。由于我们之后希望选择 A_λ 为 B_λ 的常数倍，并且目标是得到形式如 (98) 的估计，因此 γ 的最优选择是取为

$$\gamma := \frac{1}{n\beta}. \tag{108}$$

作此选择后，(107) 现在写作

$$\mathcal{F}_{k+1} \le C\lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma} + C\lambda^{-2\gamma}\mathcal{F}_k \tag{109}$$

我们区分两种情况：

情况 1：存在一个 $k\in\mathbb{N}$，满足 $k\le 4\gamma^{-1}+2$，使得

$$\lambda^{-2\gamma}\mathcal{F}_k \le \lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{110}$$

情况 2：对于所有满足 $k\le 4\gamma^{-1}+2$的 $k\in\mathbb{N}$，都有

$$\lambda^{-2\gamma}\mathcal{F}_k \ge \lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{111}$$

在情况 1 中，我们取相应的 k_0，由 (109) 得到

$$\mathcal{F}_{k_0+1} \le 2C\lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{112}$$

在情形 2 中，由（109）可得，对于所有满足 $k\le 4\gamma^{-1}+2$ 的 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$\mathcal{F}_{k+1} \le 2C\lambda^{-2\gamma}\mathcal{F}_k. \tag{113}$$

由此可得

$$\mathcal{F}_{k+1} \le \left(2C\lambda^{-2\gamma}\right)^{k-1}\mathcal{F}_1 \le \left(2C\lambda^{-2\gamma}\right)^{k-1} \le C\lambda^{-2\gamma(k-1)} \tag{114}$$

这里我们使用了 $\mathcal{F}_1\le 1$，并且最后一步中常数 $C>0$ 可能发生了变化。现在我们选取满足 $k_0\in[4\gamma^{-1}+1, 4\gamma^{-1}+2]$ 的 $k_0\in\mathbb{N}$，由（114）可得

$$\mathcal{F}_{k_0+1} \le C\lambda^{-\frac{1}{2}}. \tag{115}$$

在这两种情况下，我们都证明了可以找到满足 $k_0 \leq 4\gamma^{-1}+2$ 的 $k_0 \in \mathbb{N}$，并且

$$\mathcal{F}_{k_0+1} \leq 2C\lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{116}$$

回顾一下，我们将取 $A_\lambda = \lambda^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n\beta}} = \lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma}$，而 B_λ 在 (105) 中定义。特别地，我们有

$$(k_0+1)B_\lambda \leq A_\lambda. \tag{117}$$

由 (116) 可得

$$\int_{X\setminus X_{A_\lambda}} F_\lambda \, dv_g \leq \int_{X\setminus X_{(k_0+1)B_\lambda}} F_\lambda \, dv_g = \mathcal{F}_{k_0+1} \leq 2C\lambda^{-\frac{1}{2}+\gamma} = 2CA_\lambda. \tag{118}$$

这就完成了超临界情形 $\beta > 2/n$ 下 (98) 的证明。 □

5. Proof of Theorem 2

本节中，我们证明定理 2。为此，我们将结合命题 1(i) 和 2(iii)、(iv)。

定理 2 的证明。取 $\epsilon \in (0,1]$ 足够小，使得相应的 $\delta > 0$ 满足 $2(1+\delta)^2 \leq 3$。我们选取 χ 使得 $\chi(x,y) = x^{p/2}$ 对 $(x,y) \in X_\epsilon$ 成立，并且 $\chi(z) = \epsilon^{p/2}$ 对所有 $z \in X \setminus X_\epsilon$ 成立。除以 $N(\lambda)$，由命题 1(i) 得

$$\begin{aligned} &\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \\ &\leq \frac{1}{\lambda N(\lambda)} \operatorname{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})} \left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda - \tilde{\Delta})\chi\right)_+ + \frac{1}{\lambda}\int_X |\nabla\chi|^2 F_\lambda \, dv_g \\ &\leq \frac{1}{\lambda N(\lambda)} \operatorname{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})} \left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda - \tilde{\Delta})\chi\right)_+ + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{119}$$

这里我们利用 $p \geq 2$ 和 $\epsilon \leq 1$，得到 $|\nabla\chi| = |\chi'| \leq 1$，此外还有 $\int_X F_\lambda \, dv_g = 1$。为了估计含迹的项，我们将 $L^2(X, dv_{\tilde{g}})$ 上的迹分解为较小集合上的迹：有

$$X = (X \setminus X_\epsilon) \cup X_{2^{-1}\lambda^{-1/2}} \cup \bigcup_{k=0}^{\frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{2\log(2)}} \left(X_{2^k\lambda^{-1/2}} \setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}\right), \tag{120}$$

有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+\\
&\le \mathrm{Tr}_{L^2(X\setminus X_\epsilon,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+ + \mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^{-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{2\log(2)}}\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+\\
&\le 2(1+\delta)^2\lambda N_{\tilde{\Delta},X\setminus X_\epsilon}(2(1+\delta)^2\lambda)+0\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{2\log(2)}}\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+\\
&\le C\lambda^{1+\frac{n+1}{2}}+\sum_{k=0}^{\frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{2\log(2)}}\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+,
\end{aligned}
\tag{121}
$$

其中第二项用到了命题 1(iv) 和 $2(1+\delta)^2\le 3$。注意，对于任意集合$0\le k\le \frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{\log(2)}$以及~~任意 $\Phi\in$~~ $L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})$，并利用

$$
(a+b)^2\ge\frac{1}{2}a^2-b^2 \tag{122}
$$

以及 $\chi'(x)=\frac{p}{2}x^{\frac{p}{2}-1}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}|\tilde{\nabla}(\chi\Phi)|^2\,dv_{\tilde{g}}\ge\int_{X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}|(\tilde{\nabla}\chi)\Phi+\chi\tilde{\nabla}\Phi|^2\,dv_{\tilde{g}}\\
&\ge\int_{X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}\left(\frac{1}{2}|\chi\tilde{\nabla}\Phi|^2-|(\tilde{\nabla}\chi)\Phi|^2\right)dv_{\tilde{g}}\\
&\ge\int_{X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}\left(2^{p(k-1)-1}\lambda^{-p/2}|\tilde{\nabla}\Phi|^2-\frac{p^2}{4}2^{kp-2}\lambda^{-\frac{p}{2}+1}|\Phi|^2\right)dv_{\tilde{g}}.
\end{aligned}
\tag{123}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+\\
&\le\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(2(1+\delta)^2\lambda 2^{pk}\lambda^{-p/2}+\frac{p^2}{4}2^{kp-2}\lambda^{-\frac{p}{2}+1}-2^{p(k-1)-1}\lambda^{-p/2}\tilde{\Delta}\right)_+\\
&=2^{p(k-1)-1}\lambda^{-p/2}\,\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(2^{p+2}(1+\delta)^2\lambda+p^2 2^{p-2}\lambda-\tilde{\Delta}\right)_+\\
&\le C_{p,\delta}2^{p(k-1)}\lambda^{1-p/2}N_{\tilde{\Delta},X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}(C_{p,\delta}\lambda)
\end{aligned}
\tag{124}
$$

这里我们用 $C_{p,\delta}$ 表示一个仅依赖于 p 和 δ的常数，该常数可能在不同推导步骤中取值不同。接下来，我们将命题 2(iii)与 $B_\lambda=2^{(k-1)}\lambda^{-1/2}$ 结合，得到

$$
N_{\tilde{\Delta},X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}}(C_{p,\delta}\lambda)\le C_{p,\delta,\beta}\lambda^{\frac{n+1}{2}}(2^{k-1}\lambda^{-1/2})^{-\frac{\beta n}{2}\left(1-\frac{2}{\beta n}\right)} \tag{125}
$$

由此可得

$$\mathrm{Tr}_{L^2(X_{2^k\lambda^{-1/2}}\setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}},dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+ \leq C_{p,\delta,\beta,n}\lambda^{1+\frac{n+1}{2}}\int_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}^{2^k\lambda^{-1/2}} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds. \tag{126}$$

结合 (121) 和 (126)，我们得到

$$\mathrm{Tr}_{L^2(X,dv_{\tilde{g}})}\left(\chi(2(1+\delta)^2\lambda-\tilde{\Delta})\chi\right)_+ \leq C\lambda^{1+\frac{n+1}{2}} + C_{p,\delta,\beta,n}\lambda^{1+\frac{n+1}{2}}\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds. \tag{127}$$

当 λ 足够大时，第二项至少与第一项相差一个常数倍。现在将其代入 (119)，并注意到我们有 $N(\lambda) \geq C\lambda^{\frac{n+1}{2}}$，于是当 λ 足够大时，得到

$$\int_X \min\{x^p,\epsilon^{p/2}\}F_\lambda(x,y)\,dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon}\lambda^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{N(\lambda)}\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds + \frac{1}{\lambda}. \tag{128}$$

若 $\beta = 2/n$，则由于 $p \geq 2 > 0$，我们总可以估计

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds \leq C_{\epsilon,p,n,\beta}. \tag{129}$$

此外，在这种情况下，我们有

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{\frac{n+1}{2}}\log(\lambda), \tag{130}$$

因此，由 (128) 可得

$$\int_X \min\{x^p,\epsilon^{p/2}\}F_\lambda(x,y)\,dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon}\frac{1}{\log(\lambda)} + \frac{1}{\lambda} \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon}\frac{1}{\log(\lambda)}. \tag{131}$$

接下来，考虑 $\beta > 2/n$ 的情形。在这种情况下，

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{\frac{d}{2}} \tag{132}$$

根据 $d = n(1+\beta/2)$，我们得到

$$\lambda^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{N(\lambda)} \sim C\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4}}. \tag{133}$$

我们区分以下三种情形:

情形 1: $p > -1 + \frac{\beta n}{2}$。我们可以估计

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds \leq C_{\epsilon,p,n,\beta}. \tag{134}$$

因此，由（128）可得

$$\int_X \min\{x^p,\epsilon^{p/2}\}F_\lambda(x,y)\,dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon}\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4}} + \frac{1}{\lambda} \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon}\lambda^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4},-1\right\}}. \tag{135}$$

情形 2: $p = -1 + \frac{\beta n}{2}$。在这种情况下，我们有

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\,ds \leq C_{\epsilon,p,n,\beta}\log(\lambda) \tag{136}$$

当 λ 足够大时。此外，根据 $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta n}{4} = -\frac{p}{2} \leq -1 \tag{137}$$

因此我们得到

$$\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq \begin{cases} C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \frac{\log(\lambda)}{\lambda} & \text{if } p = 2 \\ C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \frac{1}{\lambda} & \text{if } p > 2 \end{cases} \tag{138}$$

情形 3: $p < -1 + \frac{\beta n}{2}$。在这种情形下，我们有

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\, ds \leq C_{\epsilon,p,n,\beta} \lambda^{-\frac{1}{2}\left(1+p-\frac{\beta n}{2}\right)} = C_{\epsilon,p,n,\beta} \lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta n}{2}-1-p\right)} \tag{139}$$

注意到

$$C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \lambda^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{N(\lambda)} \int_{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}}^{\epsilon} s^{p-\frac{\beta n}{2}}\, ds \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta n}{2}-1-p\right)} = C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \lambda^{-\frac{p}{2}}. \tag{140}$$

由 $p \geq 2$，可得

$$\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \frac{1}{\lambda}. \tag{141}$$

总结。综上，若 $\beta = 2/n$，则有

$$\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \frac{1}{\log(\lambda)}. \tag{142}$$

若 $\beta > 2/n$，且若 $p = 2$ 和 $\beta = 6/n$，则有

$$\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \frac{\log(\lambda)}{\lambda}. \tag{143}$$

对于 $\beta > 2/n$ 的所有其他情形，我们得到

$$\int_X \min\{x^p, \epsilon^{p/2}\} F_\lambda(x,y)\, dv_g(x,y) \leq C_{p,\delta,\beta,n,\epsilon} \lambda^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{\beta n}{4}, -1\right\}}. \tag{144}$$

将左侧除以 $\epsilon^{p/2}$，即可得到所需结果。

鉴于下文的注 2，还请注意，在以下情形中，我们对局域化项的估计为次主阶，或至多与主项同阶:

- $\beta = 2/n$
- $\beta > 2/n$ 和 $p > -1 + \frac{\beta n}{2}$ 和 $\frac{1}{2} - \frac{\beta n}{4} \geq -1$
- $\beta > 2/n$ 和 $p = -1 + \frac{\beta n}{2}$ 和 $p = 2$

P换言之，由于 $p \geq 2$ 和 $\beta \geq 2/n$，我们也可以将这些条件表示为 s

$$\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}. \tag{145}$$

□

注 2. 对于 (9) 以及 (13) 中的 $p \geq 2$, $\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}$，我们都无法期待得到好得多的估计。更确切地说，在定理 1 中 (9) 的设定下，对于每个足够大的 λ，存在一个由至少 $\frac{1}{2}N(\lambda)$ 个函数构成的 $L^2(X, dv_g)$ 中的正交归一族，我们将其记为 $\{\hat{\Psi}\}$，使得对于每个 Ψ

$$\int_X |\nabla \hat{\Psi}|^2\, dv_g < \lambda \tag{146}$$

此外，若对于某个足够大的 $C > 0$，$\hat{}A_\lambda \geq C\lambda^{-1/2}$ 满足

$$\frac{1}{N(\lambda)} \int_{X \setminus X_{\hat{A}_\lambda}} |\hat{\Psi}|^2 \, dv_g \leq C\hat{A}_\lambda, \tag{147}$$

那么，对于任意 $\epsilon > 0$，当 λ 足够大时，我们有，

$$\hat{A}_\lambda \geq A_\lambda \lambda^{-\epsilon}. \tag{148}$$

类似地，在定理 2 中 (13) 的情形下，若 $p \geq 2$ 和 $\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}$，则对于每个足够大的 λ，在 $L^2(X, dv_g)$ 中存在一个正交归一族，其中至少包含 $\frac{1}{2}N(\lambda)$ 个函数，我们将其称为 $\{\Psi\}$，使得对于每个 Ψ

$$\int_X |\nabla \hat{\Psi}|^2 \, dv_g < \lambda \tag{149}$$

并且满足

$$\frac{1}{N(\lambda)} \int_X \min\{x^p, 1\} |\hat{\Psi}(x,y)|^2 \, dv_g(x,y) \geq C A_\lambda \lambda^{-\epsilon}. \tag{150}$$

注 2 的证明。为了解注 2 中的陈述，只需取狄利克雷拉普拉斯算子对应的特征函数集，并利用命题 2 的最后一部分。下面给出证明概要。

更确切地说，为了证明定理 1 中 (9) 的最优性，我们取 Δ 的归一化特征函数的并集，这些特征函数在 ∂X_{A_λ} 满足狄利克雷边界条件，其特征值小于 λ，并且定义在 X_{A_λ} 和 $X \setminus X_{A_\lambda}$ 上。对于足够大的 λ，这些特征函数至少有 $\frac{1}{2}N(\lambda)$ 个，并且满足 (146)。利用命题 2(v)、(vi) 以及 g 和 $\tilde{g}$ 的拟等距性，我们便在此情形下得到了所需结果。

对于 $p \geq 2$ 和 $\frac{2}{n} \leq \beta \leq \frac{6}{n}$ 中定理 2 的 (13) 的最优性，可以采用类似的方法。我们将 X 分解如下：

$$X = (X \setminus X_\epsilon) \cup X_{2^{-1}\lambda^{-1/2}} \cup \bigcup_{k=0}^{\frac{2\log(\epsilon)+\log(\lambda)}{2\log(2)}} \left(X_{2^k\lambda^{-1/2}} \setminus X_{2^{k-1}\lambda^{-1/2}}\right), \tag{151}$$

然后，我们取 Δ 在这些较小部分上满足狄利克雷边界条件的特征函数集合，利用 g 和 $\tilde{g}$的拟等距性以及命题 2(vii)。接着，可以按照定理 2 证明末尾的相同计算进行。□

References

[1] 劳拉·阿巴坦杰洛、阿尔贝托·费雷罗和 Paolo Luzzini。关于一类由格鲁辛算子控制的退化方程的解。《微分方程杂志》，445：113666，2025年。[2] 乌戈·博斯凯因、达里奥·普兰迪和马尔切洛·塞里。某些近黎曼流形上的谱分析与阿哈罗诺夫–玻姆效应。《偏微分方程通讯》，41(1)：32–50，2016年。[3] 张德珍和李雨田。海森堡次拉普拉斯算子与 Grushin 算子的热核渐近展开。《英国皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》，471(2175)：20140943，2015年。[4] 亚辛·希图尔、达里奥·普兰迪和卢卡·里齐。奇异黎曼流形上的魏尔定律。《纯粹与应用数学杂志》，181：113–151，2024年。[5] Yves Colin de Verdi`ere、CHARLOTTE DIETZE、马尔滕·V·德·霍普和 Emmanuel Tr´elat。某些奇异度量的魏尔公式及其在气态巨行星声学模态中的应用。arXiv 预印本 arXiv:2406.19734，2024年。

[6] Yves Colin de Verdi`ere、Luc Hillairet 和 Emmanuel Tr´elat。次黎曼拉普拉斯算子的谱渐近 I：三维接触情形下的量子遍历性与量子极限。《杜克数学杂志》，167：109–174，2018年。[7] Yves Colin de Verdi`ere、Luc Hillairet 和 Emmanuel Tr´elat。对角线附近亚椭圆热核的短时渐近、幂零化及相关结果。《亨利·勒贝格年刊》，4：897–971，2021年。[8] Yves Colin de Verdi`ere、Luc Hillairet 和 Emmanuel Tr´elat。次黎曼拉普拉斯算子的谱渐近。arXiv 预印本 arXiv:2212.02920，2022年。[9] CHARLOTTE DIETZE。奇异黎曼流形上特征函数集中的临界情形。arXiv 预印本 arXiv:2510.23520，2025年。[10] CHARLOTTE DIETZE。奇异系统的谱估计。博士论文，慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，2025年。[11] CHARLOTTE DIETZE 和 Larry Read。奇异黎曼流形上的特征函数集中。arXiv 预印本 arXiv:2410.20563，2024年。[12] Lars H¨ormander。线性偏微分算子分析 III：伪微分算子。施普林格科学与商业媒体，2007年。[13] Pier Domenico Lamberti、Paolo Luzzini 和 Paolo Musolino。格鲁申特征值的形状扰动。《几何分析杂志》，31(11)：10679–10717，2021年。[14] Arthur Menikoff 和 Johannes Sj¨ostrand。关于一类亚椭圆算子的特征值。《数学年刊》，235(1)：55–85，1978年。[15]Guy M´etivier。退化椭圆算子特征值的渐近行为。《偏微分方程日》，第215–249页，1975年。[16] IL Vulis 和 MZ Solomjak。退化二阶椭圆算子的谱渐近分析。《苏联科学院消息·数学辑》，38：1362–1392，1974年。

（CharlotteDietze） Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4 place Jussieu,75005 Paris, France电子邮箱：Charlotte.Dietze@sorbonne-universite.fr