arXiv:2601.16626v1 [math.NT] 23 Jan 2026

关于最大值矩阵到最小值矩阵以及最小公倍数矩阵到最大公约数矩阵的广义特征值

Jorma K. Merikoski 信息技术与通信科学学院 FI-33014坦佩雷大学 芬兰jorma.merikoski@tuni.fi

Pentti Haukkanen 信息技术与通信科学学院 FI-33014坦佩雷大学 芬兰pentti.haukkanen@tuni.fi

Antonio Sasaki 应用数学中心 巴黎高等矿业学院 巴黎 巴黎文理研究大学 FR-06560 瓦尔邦 法国 antonio.sasaki@minesparis.psl.eu

Timo Tossavainen 健康、教育与技术系 瑞典吕勒奥理工大学 SE-97187 吕勒奥 瑞典 timo.tossavainen@ltu.se

摘要

对于任意 $n \geq 1$，我们确定一个 $n \times n$ 最大值矩阵相对于相应最小值矩阵的广义特征值。我们还表明，当$n \leq 4$时，$n \times n$最小公倍数矩阵相对于相应最大公约数矩阵的广义特征值也满足类似结果；但当 $n > 4$时，该结果不再成立。此外，我们证明了广义特征值的柯西交错定理，并猜想在线整数数列百科数列 A004754 与 -1 作为最小公倍数–最大公约数情形下的广义特征值出现之间存在出人意料的联系。

1 引言

设 A 和 B 是复厄米 $n \times n$ 矩阵，且 B 为正定矩阵。（即，共轭转置 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$，并且当 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 时，$\mathbf{x}^*\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$。）A 相对于 B 的广义特征值方程为

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

那么，λ 是$\mathbf{A}$ 相对于$\mathbf{B}$的广义特征值（简称“广义特征值”），而$\mathbf{x}$ 是对应的广义特征向量（简称“广义特征向量”）。例如，参见 Ghojogh、Karray 和 Crowley [5]。他们讨论的是实对称矩阵，但所有结论都可以推广到复厄米矩阵。

实际上，在（B 1）中只需B可逆，A 则可以是任意矩阵。不过，通常会采用上述假设。此时，所有广义特征值都是实数，且对应于不同广义特征值的广义特征向量关于内积 $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle = \mathbf{y}^{*}\mathbf{B}\mathbf{x}$正交。

标准特征值（简称“s-特征值”）得到了广泛研究。广义特征值方程（1）可化为标准特征值方程

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

然而，这种“快速而粗糙的解法”[5] 并没有显著的实际用途。因此，必须以不同的方式研究广义特征值。文献中对这一领域的研究还不多。

Let

$$S = \{s_1, \ldots, s_n\}, \quad s_1 < \cdots < s_n,$$

为正实数集合。 $n \times n$ 上的 $n \times n$ 最大值矩阵 $\mathbf{M}_S$ 和最小值矩阵 $\mathbf{N}_S$ 定义为

$$\mathbf{M}_S = (m_{ij}^S),\ m_{ij}^S = \max(s_i, s_j), \quad \mathbf{N}_S = (n_{ij}^S),\ n_{ij}^S = \min(s_i, s_j).$$

那么，$\mathbf{N}_S$ 是正定的[10, 定理 81]。此外，设

$$T = \{t_1, \ldots, t_n\}, \quad t_1 < \cdots < t_n,$$

为正整数集合。 $n \times n$ 上的 $n \times n$ 最小公倍数矩阵 $\mathbf{L}_T$ 和最大公约数矩阵 $\mathbf{G}_T$ 定义为

$$\mathbf{L}_T = (l_{ij}^T),\ l_{ij}^T = \operatorname{lcm}(t_i, t_j), \quad \mathbf{G}_T = (g_{ij}^T),\ g_{ij}^T = \gcd(t_i, t_j).$$

此外，$\mathbf{G}_T$ 是正定的 [3, 定理 2]。

我们在第2节研究$\mathbf{M}_S$ 到$\mathbf{N}_S$ 的广义特征值。而在第3$_T$ 和4$_T$ 节研究$\mathbf{L}_T$ 到$\mathbf{G}_T$ 的广义特征值。最后，我们在第5节对本文作总结讨论。

A 到 A 的所有广义特征值显然都为 1。因此，我们可以预期，在某些非平凡情形下，A 到 B 的广义特征值也比 A 和 B 的 s-特征值更容易求得。我们将在 A $= \mathbf{M}_S$、B $= \mathbf{N}_S$ 的情形中看到这一点。对于 A $= \mathbf{L}_T$、B $= \mathbf{G}_T$ 的情形，我们也会看到这一点，其中 $T = \{1, \ldots, n\}$, $n \leq 4$。

近年来，这些矩阵得到了广泛研究（例如，[1, 4, 6, 9, 10, 13]）。这些研究不仅探讨了该领域的新结果，也介绍了它们在数学其他领域中的应用。此外，也有研究报道了它们在计算、统计学 [10], 和信号处理 [12]中的应用。

2 最大值–最小值情形

我们希望求出 $\mathbf{M}_S$ 到 $\mathbf{N}_S$ 的广义特征值，即方程 $\det(\mathbf{M}_S - \lambda\mathbf{N}_S) = 0$ 的解 λ。

我们从 $n=2$ 开始。令 $S=\{a,b\}$, $0<a<b$。于是

$$\det\left(\mathbf{M}_S-\lambda\mathbf{N}_S\right)=\begin{vmatrix} a-\lambda a & b-\lambda a \\ b-\lambda a & b-\lambda b \end{vmatrix}=a(b-a)\lambda^2-b(b-a)=0$$

当且仅当

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

我们的目标是证明下面的定理 1 。不过，由于一般情形的证明不易阅读，我们只展示 $n=4$ 的情形的详细证明。细心的读者会注意到，对任意 $n>2$，我们都可以用类似的方法进行证明。

定理 1。 $\mathbf{M}_S$ 到 $\mathbf{N}_S$, $n>2$ 的广义特征值为

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{s_n}{s_1}},\ \lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=-1,\ \lambda_n=-\sqrt{\frac{s_n}{s_1}}. \tag{2}$$

证明。设 $S=\{a,b,c,d\}$, $0<a<b<c<d$。则

$$\mathbf{M}_S=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \\ c & c & c & d \\ d & d & d & d \end{pmatrix},\quad \mathbf{N}_S=\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

矩阵

$$\mathbf{M}_S+\mathbf{N}_S=\begin{pmatrix} 2a & a+b & a+c & a+d \\ a+b & 2b & b+c & b+d \\ a+c & b+c & 2c & c+d \\ a+d & b+d & c+d & 2d \end{pmatrix}$$

的秩为 2，零度为 2。因此， -1 是 $\mathbf{M}_S$ 到 $\mathbf{N}_S$ 的一个广义特征值，重数为 2。我们证明其余的广义特征值为

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

无论 λ 的符号如何，我们都有（注意 $d=\lambda^2 a$）

$$\det\left(\mathbf{M}_S+\lambda\mathbf{N}_S\right)=\begin{vmatrix} a+\lambda a & b+\lambda a & c+\lambda a & d+\lambda a \\ b+\lambda a & b+\lambda b & c+\lambda b & d+\lambda b \\ c+\lambda a & c+\lambda b & c+\lambda c & d+\lambda c \\ d+\lambda a & d+\lambda b & d+\lambda c & d+\lambda d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+\lambda a & b+\lambda a & c+\lambda a & d+\lambda a \\ b-a & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) \\ c-b & c-b & \lambda(c-b) & \lambda(c-b) \\ d-c & d-c & d-c & \lambda(d-c) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda a & b & c & \lambda^2 a \\ b-a & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) \\ c-b & c-b & \lambda(c-b) & \lambda(c-b) \\ d-c & d-c & d-c & \lambda(d-c) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a & \lambda a & \lambda a & \lambda a \\ b-a & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) & \lambda(b-a) \\ c-b & c-b & \lambda(c-b) & \lambda(c-b) \\ d-c & d-c & d-c & \lambda(d-c) \end{vmatrix} =: D_1 + D_2.$$

由于 $D_1 = D_2 = 0$，结论得证。 □

注 2。 事实上，定理 1 对 $n = 2$也成立。因此，等式链 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1}$ 是“空的”。

注 3。 如果 s_1，.....，s_n 的排列顺序任意，那么（2）可写为

$$\lambda_1 = \max_{i,j} \sqrt{\frac{s_i}{s_j}},\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = -1,\ \lambda_n = -\max_{i,j} \sqrt{\frac{s_i}{s_j}}. \tag{3}$$

另请参阅 [10,注 2.1]。

*Re*注 4。 定理 1 也适用于以下矩阵的广义特征值：$\mathbf{M}_S$ 到 $\mathbf{N}_{S'}$，其中

$$S' = \{s'_1, \ldots, s'_n\}, \quad s'_1 - s_1 = \cdots = s'_n - s_n.$$

3 关于 $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的最小公倍数–最大公约数情形

3.1 $n \le 4$ 的情形

设 $T = \{1, 2, \ldots, n\}$，令 $\lambda_{n1} \ge \cdots \ge \lambda_{nn}$ 为 $\mathbf{L}_T$到 $\mathbf{G}_T$的广义特征值，并令$p_n(\lambda) = \det(\mathbf{L}_T - \lambda\mathbf{G}_T)$ 为广义特征多项式。则

$$p_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad \lambda_{11} = 1,$$

$$p_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2, \quad \lambda_{21} = \sqrt{2},\ \lambda_{22} = -\sqrt{2},$$

$$p_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 2-\lambda & 2-2\lambda & 6-\lambda \\ 3-\lambda & 6-\lambda & 3-3\lambda \end{vmatrix} = -2(\lambda+1)(\lambda^2 - 6), \quad \lambda_{31} = \sqrt{6},\ \lambda_{32} = -1,\ \lambda_{33} = -\sqrt{6},$$

$$p_4(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda & 3-\lambda & 4-\lambda \\ 2-\lambda & 2-2\lambda & 6-\lambda & 4-2\lambda \\ 3-\lambda & 6-\lambda & 3-3\lambda & 12-\lambda \\ 4-\lambda & 4-2\lambda & 12-\lambda & 4-4\lambda \end{vmatrix} = 4(\lambda+1)^2(\lambda^2 - 12),$$

$$\lambda_{41} = \sqrt{12},\ \lambda_{42} = \lambda_{43} = -1,\ \lambda_{44} = -\sqrt{12}.$$

3.2 $n > 4$的情形

广义特征值　　第 3.1 节中的结果表明，也可能存在这样的 $n > 4$，使得

$$\lambda_{n1} = \sqrt{m},\ \lambda_{n2} = \cdots = \lambda_{n,n-1} = -1,\ \lambda_{nn} = -\sqrt{m} \tag{4}$$

某个整数 m。我们检验这一假设，并从 $n=5$ 的情形开始。我们有

$$\begin{aligned} p_5(\lambda) &= -16\lambda^5 - 48\lambda^4 + 528\lambda^3 + 2480\lambda^2 + 2880\lambda + 960 \\ &= -16(\lambda+1)(\lambda^4 + 2\lambda^3 - 35\lambda^2 - 120\lambda - 60) \\ &=: -16(\lambda+1)q(\lambda). \end{aligned}$$

因为 $q(-1) = 24 \neq 0$，$\lambda = -1$ 的重数仅为 1，因此反驳了 (4)。广义特征值为

$$\lambda_{51} = 6.4798,\ \lambda_{52} = -0.6118,\ \lambda_{53} = -1,\ \lambda_{54} = -3.3489,\ \lambda_{55} = -4.5191.$$

（这些数值均为近似值，精确到小数点后四位；本文以下同。）有趣的是，$\sqrt{42} = 6.4807$ 接近 λ_{51}。如果它们的差异是由舍入误差造成的，那么 (4) 中的第一个等式对 $n=5$也应成立。但 $p_5(\sqrt{42}) = -3168\sqrt{42} + 20448$，这表明该差异确实存在。

此外，

$$\lambda_{61} = 6.8501,\ \lambda_{62} = 2.5592,\ \lambda_{63} = -0.7419,\ \lambda_{64} = -1.3749,\ \lambda_{65} = -3.4396,\ \lambda_{66} = -5.8528.$$

因此，当 $n=6$ 时，-1 不是广义特征值。

这两种情形已足以清楚地表明，$\lambda_{n2} = \cdots = \lambda_{n,\,n-1} = -1$对任何 $n > 4$都不成立。不过，我们仍选择对此结论进行充分验证，因为这需要先证明再应用柯西交错定理 [7, 定理 4.3。17] 关于广义特征值的结果——它或许具有普遍意义。为此，回顾一下，$n=6$有两个正广义特征值。根据下文的定理 6 ，$n=7$至少有两个正广义特征值。依此继续即可证实该结论。

我们通过探究在多少个维度中 -1 会作为广义特征值出现，来结束本节。涵盖 $1 \le n \le 1000$ 范围的计算机实验（代码见附录）表明，-1 是广义特征值，当且仅当

$$n = \overbrace{4,5}^{2}, \overbrace{8,9,10,11}^{2^2}, \overbrace{16,\ldots,23}^{2^3}, \overbrace{32,\ldots,47}^{2^4}, \overbrace{64,\ldots,95}^{2^5}, \overbrace{128,\ldots,191}^{2^6}, \overbrace{256,\ldots,383}^{2^7}, 512, \ldots,$$

其中，上方括号表示项的数量。该数列与在线整数数列百科中的 [11] 数列 A004754相同，只是省略了第一项。~~其描述~~ [11] 提出了一个有趣的猜想。

猜想 5。设 $T = \{1,\ldots,n\}$，$n > 3$。则 -1 是从 $\mathbf{L}_T$ 到 $\mathbf{G}_T$ 的广义特征值，当且仅当 n 的二进制表示以 10 开头。

例如，$4 = (100)_2$、$5 = (101)_2$、$8 = (1000)_2$、$19 = (10011)_2$。

该在线整数数列百科数列（a_n）满足 [11]

$$a_{2^m+k} = 2^{m+1} + k, \quad m \ge 0,\ 0 \le k < 2^m. \tag{5}$$

例如，$m = k = 3$，那么左边等于 $a_{8+3} = a_{11} = 19$，右边等于 $16 + 3 = 19$。或许可以利用（5）对猜想5 进行归纳证明。

3.3 广义特征值的柯西交错定理

定理 6。设**A** 和**B** 如（1）中所示， $n > 1$，其首个顺序主子矩阵分别为**A**′和**B**′（通过删除第 n行和列得到）。设

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \quad and \quad \lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_{n-1}$$

分别为 A 相对于 B 以及 A′ 相对于 B′ 的广义特征值。那么

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda'_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda'_{n-1} \geq \lambda_n.$$

证明。令 $\preceq$ 表示子空间包含。由于 Courant–Fischer 定理 [7, 定理 4.2.6] 可推广至广义特征值 [2, 定理 3]（请注意其表述中 max 和 min 的顺序有误），我们有

$$\lambda_k = \max_{\substack{U \preceq \mathbb{C}^n \\ \dim U = k}} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in U} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

and

$$\lambda'_k = \max_{\substack{V \preceq \mathbb{C}^{n-1} \\ \dim V = k}} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in V} \frac{\mathbf{y}^* \mathbf{A}' \mathbf{y}}{\mathbf{y}^* \mathbf{B}' \mathbf{y}}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Let

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^* & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^* & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果 $x_n = 0$，那么

$$\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x}')^* \mathbf{A}' \mathbf{x}'}{(\mathbf{x}')^* \mathbf{B}' \mathbf{x}'},$$

因此，对于 $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\lambda'_k = \max_{\substack{V \preceq \mathbb{C}^{n-1} \\ \dim V = k}} \min_{\substack{\mathbf{0} \neq \mathbf{x}' \in V \\ x_n = 0}} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}} =: M.$$

由于

$$\left\{ \min_{\substack{\mathbf{0} \neq \mathbf{x}' \in V \\ x_n = 0}} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}} \colon V \preceq \mathbb{C}^{n-1}, \dim V = k \right\} \subseteq \left\{ \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in U} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}} \colon U \preceq \mathbb{C}^n, \dim U = k \right\},$$

由此可得

$$M \leq \max_{\substack{U \preceq \mathbb{C}^n \\ \dim U = k}} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in U} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}}. \tag{8}$$

现在，根据（7）、（8）和（6），

$$\lambda'_k \leq \lambda_k.$$

为了得到反向不等式，我们在广义 Courant–Fischer 定理中交换 max 和 min 的顺序：

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{U \preceq \mathbb{C}^n \\ \dim U = n-k}} \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in U} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

and

$$\lambda'_k = \min_{\substack{V \preceq \mathbb{C}^{n-1} \\ \dim V = n-k}} \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in V} \frac{\mathbf{y}^* \mathbf{A}' \mathbf{y}}{\mathbf{y}^* \mathbf{B}' \mathbf{y}}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

对前面的论证稍作修改，即可得到

$$\lambda'_k \geq \lambda_{k+1},$$

从而完成证明。 □

4 关于某些 $T \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ 的最小公倍数–最大公约数情形

4.1 $n = 2$、3 的情形

首先，令 $T = \{u, v\}$, $0 < u < v$。考察 $\{u/d, v/d\}$ if $d =$最大公约数 $(u, v) > 1$，我们可以假设最大公约数 $(u, v) = 1$。于是

$$\det(\mathbf{L}_T - \lambda \mathbf{G}_T) = \begin{vmatrix} u - \lambda u & uv - \lambda \\ uv - \lambda & v - \lambda v \end{vmatrix} = (uv - 1)(\lambda^2 - uv), \quad \lambda_1 = \sqrt{uv},\ \lambda_2 = -\sqrt{uv}.$$

接下来，令 $T = \{1, u, v\}$，其中 $1 < u < v$ 且最大公约数 $(u, v) = 1$。于是

$$\det(\mathbf{L}_T - \lambda \mathbf{G}_T) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & u - \lambda & v - \lambda \\ u - \lambda & u - \lambda u & uv - \lambda \\ v - \lambda & uv - \lambda & v - \lambda v \end{vmatrix}$$
$$= (u + v - uv - 1)\lambda^3 + (u + v - uv - 1)\lambda^2 + (u^2v^2 + uv - u^2v - uv^2)\lambda + u^2v^2 - u^2v$$
$$- uv^2 + uv = (u - 1)(v - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - uv), \quad \lambda_1 = \sqrt{uv},\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -\sqrt{uv}.$$

更一般地，设 $T = \{u, v, w\}$，其中 $1 < u < v < w$ 且最大公约数 $(u, v) =$最大公约数 $(u, w) =$最大公约数$(v, w) = 1$。看来我们得不到漂亮的结果。例如，若 $T = \{2, 3, 5\}$，则

$$\det(\mathbf{L}_T - \lambda \mathbf{G}_T) = \begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & 6 - \lambda & 10 - \lambda \\ 6 - \lambda & 3 - 3\lambda & 15 - \lambda \\ 10 - \lambda & 15 - \lambda & 5 - 5\lambda \end{vmatrix} = -22\lambda^3 - 38\lambda^2 + 420\lambda + 900,$$

$$\lambda_1 = 4.5128,\ \lambda_2 = -2.3027,\ \lambda_3 = -3.9371.$$

4.2 情形 $T = \{1, p, \ldots, p^{n-1}\}$, $p \in \mathbb{P}$

在这种情况下,

$$\mathbf{L}_T = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ p & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ p^2 & p^2 & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{n-1} & p^{n-1} & p^{n-1} & \cdots & p^{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_T, \quad \mathbf{G}_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & p & p & \cdots & p \\ 1 & p & p^2 & \cdots & p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{N}_T.$$

根据定理 1，$\mathbf{L}_T$ 到 $\mathbf{G}_T$ 的广义特征值为

$$\lambda_1 = p^{\frac{n-1}{2}},\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = -1,\ \lambda_n = -p^{\frac{n-1}{2}}.$$

4.3 重新排序无关紧要

我们在注 3中指出，在最大值–最小值情形下，对 S 重新排序只会将 (2) 改为 (3)，因此所有广义特征值都保持不变。现在我们证明，在最小公倍数–最大公约数情形下，对 T 重新排序也会保持广义特征值。更一般地，设 $\mathbf{X} = (x_{ij}$是一个阶数为 n的复方阵。给定一个 σ 对 $(1, \ldots, n)$ 的置换，定义

$$\mathbf{X}_\sigma = (x^\sigma_{ij}), \quad x^\sigma_{ij} = x_{\sigma(i),\sigma(j)},$$

并令 $\mathbf{P}_\sigma$ 表示与 σ对应的置换矩阵。由于

$$\mathbf{X}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{X} \mathbf{P}_\sigma \quad \text{and} \quad \det \mathbf{P}_\sigma = \pm 1,$$

我们有

$$\det \mathbf{X}_\sigma = \det \mathbf{X},$$

从而得出该结论。

5 讨论

上文首先考察了最大值矩阵到最小值矩阵的广义特征值。结果揭示了鲜明的结构模式：这些广义特征值已得到完整刻画，其形式为一个正值、若干个值 -1 （当 $n = 2$ 时重数为零）以及一个负值。这种规律性凸显了这些矩阵的广义特征结构所蕴含的对称性和稳健性。

随后，我们转而研究 $T = \{1, \ldots, n\}$ 上从最小公倍数矩阵到最大公约数矩阵的广义特征值。这个课题更为复杂。虽然上述规律对 $n \leq 4$ 成立，但对$n > 4$却不再成立。在验证过程中，我们证明了柯西交错定理关于特征值的一个推广，也就是相应的广义特征值定理。

一个令人惊讶的发现是，猜想A004754与在线整数数列百科中的数列之间存在联系。5如果这一猜想得到证明，将为矩阵理论与数论搭建一座新颖的桥梁，并为通过整数的二进制表示探索矩阵的谱性质带来新的见解。

我们通过考察集合 $T \neq \{1, \ldots, n\}$ 结束了研究，以展示最小公倍数–最大公约数情形中的某些配置具有最大值–最小值结构。我们还表明，一般而言，重新排列 S 和 T 不会影响广义特征值，从而进一步证明了这些矩阵在置换下的稳健性。

从计算角度来看，求广义特征值颇具挑战，因为通常需要求解高次特征多项式的根。随着 n 增大，这些多项式会变得难以构造，且数值求解时不稳定。不过，在构造猜想 5中的序列时，可以在很大程度上避免这些困难：无需显式构造或因式分解 $p_n(\lambda) = \det(\mathbf{L}_T - \lambda \mathbf{G}_T)$。相反，可以直接计算 $p_n(-1) = \det(\mathbf{L}_T + \mathbf{G}_T)$。这种方法计算量更小、数值稳定性更高，也足以验证 -1是否为广义特征值。

参考文献

[1] M. Andeli´c, C. M. da Fonseca, C. Kızılate¸s, and N. Terzio˘glu, 《含有调和高阶高斯-斐波那契数项的 r最小值矩阵和 r最大值矩阵》, J. Appl. Math. Comput. 71 (2025), 7437–7461。[2] H. Avron, E. Ng, and S. Toledo, 《广义 Courant–Fischer极小极大定理》, 技术报告, 劳伦斯伯克利国家实验室, 2008。[3] S. Beslin and S. Ligh, 《最大公约数矩阵》, Linear Algebra Appl. 118 (1989), 69–76。[4] C. M. da Fonseca, C. Kızılate¸s, and N. Terzio˘glu, 《MIN 矩阵和 MAX 矩阵及其倒数对应矩阵的新推广》, Filomat 38 (2024), 421–435。[5] B. Ghojogh, F. Karray, and M. Crowley, 《特征值与广义特征值问题：教程》, `arXiv:1903.11240v3` (2023)。[6] T. W. Hilberdink and A. B. Pushnitski, 《一族算术矩阵的谱渐近及其与 Beurling素数的联系》, Pure Appl. Funct. Anal 9 (2024), 1145–1161。[7] R. A. Horn and C. R. Johnson, 《矩阵分析》第二版, Cambridge Univ. Pr., 2013。[8] Y. Khiar, E. Mainar, and E. Royo-Amondarain, 《MIN 矩阵和 MAX 矩阵的因式分解与精确计算》, Symmetry 17 (2025), Art. 684, 13 pp.

[9] R. Loewy, 《关于可逆下三角（0,1）矩阵类中的最小奇异值》，Linear Algebra Appl. 608 (2021), 203–213。

[10] M. Mattila 和 P. Haukkanen，研究 MIN 矩阵和 MAX 矩阵的各种性质——基础方法与高级方法，Spec. Matrices 4 (2016),101–109.

[11] OEIS Foundation Inc.，《在线整数序列百科全书》，2025 年。在线发布于 https://oeis.org。

[12] M. M. Rahman、M. S. Rahim、M. N. A. S. Bhutyan 和 S. Ahmed，基于最大公约数矩阵的相位序列，用于降低 OFDM 系统中的峰均功率比，且计算开销低，第一届电气与电子工程国际会议（ICEEE），2015,97–100.

[13] J. Zhao、C. Wang 和 Y. Fu，研究 gcd-闭集上幂最小公倍数矩阵被幂 GCD 矩阵整除的性质，J. Combin. Theory, Ser. A, 215 (2025), Art. ID 106063,27 pp.

2020 年数学主题分类：主要分类 15A18；次要分类 11C20。关键词：广义特征值、柯西交错定理、厄米矩阵、GCD 矩阵和 LCM 矩阵、MIN 矩阵和 MAX 矩阵。

（关于 序列 A001088、A003983、A004754、A051125和A060238。）

收到日期：5 月 x x 2025；修订稿收到日期：发表于 Journal of Integer Sequence s,

返回 Journal of Integer Sequences 主页https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/。

附录

```
导入 NumPy 作为 np
导入 math
从 SciPy . 线性代数          导入 特征值

 定义    最大公约数 _矩阵 (n):
        """ 构造一个 n x n 矩阵，其中                    元素为最大公约数(i,    j) 。"""
        M  =  np . zeros ((n,     n ),   数据类型 =整数)
        for  i 在范围 (1,          n +1):
             对于 j    在范围 (1,        n +1):
                  M [i -1 ,   j -1]   =   math . 最大公约数 (i ,    j )
        返回 M

定义 最小公倍数 _矩阵（n）:
        """ 构造              一个 n x n 的矩阵，其          元素为 lcm(i,          j) 。"""
        M  =  np.zeros((n,        n),   数据类型=整数)
        for  i  in  范围 (1,      n +1) :
             对于 j    in  范围 (1,      n +1) :
                  M [i -1 ,   j -1]   =   math . 最小公倍数 (i ,    j )
        返回M

定义 查找 _n_ 使用 _减一_（tol =1e-5              ,  max_n =1000):
        " " "
        对于 n   =  1  到 max_n,     计算 Ax   = 的广义特征值
            λ Bx          ,  其中 A 是最小公倍数矩阵，B 是最大公约数矩阵。
            返回一个 n 值列表，其中 -1 会作为广义
            特征值出现（容差为 tol）。
        " " "
        n_list  =  []
        对于 n 在范围 (1,          max_n +1):
             一个   =最小公倍数 _矩阵(n).astype(浮点数 )
             B  =  最大公约数 _矩阵(n).astype(浮点数 )
             # 计算 A 到 B 的特征值:
             特征值，_              =  eig(A,    B)
             # 将实数 g-特征值转换为实数:
             特征值   =np . real _if _clo s e( eigenvalues ,                tol =tol )
             # 检查是否有任何 g-特征值等于 -1:
             if  任何 (np.isclose(ev ,  -1 ,  绝对值 =容差)  对于 特征值    在特征值）中:
                  n_列表.append（n）
        返回n      _list

如果   __name__  ==  ' __主函数__ ':
        结果   =f i n d _n _w i t h_m i n u s_o n e ( tol =1e -5     ,  max_n =1000)
        打印 (" 出现 -1 作为广义特征值的维数: " )
        打印 ( 结果 )
```

列表 1：用于考察猜想的 Python 代码 5