arXiv:2601.16859v1 [math.MG] 23 Jan 2026

有限度量图上的运输成本范数

Georges SKANDALIS 和 Alain VALETTE

2026年1月23日

摘要

对于有限度量图 $X=(V,E,\ell)$，其中 V赋予最短路径度量，我们考虑与 V 上的距离 d 相关的运输成本问题。具体而言，对于 V 上总和为 0 的函数 f，记作 $f=\sum_{a,b\in V}P(a,b)(\delta_a-\delta_b)$，其中运输方案 P 满足 $P(a,b)\geq 0$，对于 $(a,b)\in V\times V$。P 的成本为 $W(P)$: $=\sum_{a,b\in V}P(a,b)d(a,b)$，而 f 的运输范数为 $\|f\|_{TC}=\min_P W(P)$，其中 P 遍历 f 的所有运输方案。

在这篇半综述论文中，我们为以下论述给出简短证明:

- 总存在一个最优运输方案，其支撑包含于 $V_+\times V_-$，其中 $V_+=\{x\in V:\ f(x)>0\}$，且 $V_-=\{x\in V:\ f(x)<0\}$。若X 是度量树，我们还可以假设该方案至多涉及 $|Supp(f)|-1$ 个运输项。
- 总存在一个最优运输方案，其支撑包含于 X的边集。
- 更进一步，总存在一个最优运输方案，其支撑包含于 X的一棵生成树中。

我们利用这一点重新证明关于运输范数的已知公式，其中X 是树或圈。

1 引言

设（X,d）是一个有限度量空间。的运输成本空间（ X 也称为*Arens-Eells*空间、*Kantorovich-Rubinstein*空间或*Lipschitz*自由空间[1]）是

[1]参见 [GK03], 中的定义 1.1 或 [We18]中的第 3 章；有关历史背景，参见 [Os13] 第 10.1 节和 [OO19]第 1.6 节中的说明。

由 X 上的实值函数 f 组成、总质量为 0 的空间 $\mathcal{F}(X)$，并赋予如下定义的范数。对于这样的 f，令

$$\Pi_f = \{P : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \ f = \sum_{a,b \in X} P(a,b)(\delta_a - \delta_b)\},$$

其中 δ_x 表示位于 x处的狄拉克质量。等价地， $P \in \Pi_f$ 当且仅当

$$f(x) = \sum_{a \in X} (P(x,a) - P(a,x))$$

对所有 $x \in X$均成立。显然， Π_f 非空，且与 d无关。另设 $X_+ = \{a \in V; \ f(a) > 0\}$和 $X_- = \{a \in V; \ f(a) < 0\}$，并且还设

$$\widetilde{\Pi}_f = \{P \in \Pi_f; \ \mathrm{supp}(P) \subset X_+ \times X_-\}.$$

~显然， Π_f 也非空。 Π_f 中的元素是 f 的运输方案~，而 Π_f 中的元素是同时运输方案。

我们通过将 $P \in \Pi_f$ 的成本 定义为以下形式，来考虑 d：

$$W_X(P) = \sum_{a,b \in X} P(a,b)d(a,b).$$

现在将 f 的运输成本范数定义为

$$\|f\|_{TC(X)} = \min\{W(P) : P \in \Pi_f\}.$$

并将 f 的同时运输成本范数定义为

$$\|f\|_{STC(X)} = \min\{W(P) : P \in \widetilde{\Pi}_f\}.$$

设 $P_0 \in \Pi_f$。集合 $\{P \in \Pi_f; \ W(P) \leq W(P_0)\}$是紧致的，因此下确界是最小值。当度量空间 X 可由上下文明确时，我们会省略下标，在 $W(P)$ 和 $\|f\|_{TC}$ 中均如此。

我们回顾 $\|f\|_{TC}$ 的最优运输解释：假设在点 $x \in X$处有质量 $f(x)$ 可供调配，其中 $f(x) > 0$，而点 $y \in X$ 处需要质量 $-f(y)$，其中 $f(y) < 0$。元素 $P \in \Pi_f$ 可视为一种运输方案，即将质量从供过于求的点运送到有需求的点的一种方式； $W(P)$表示与该运输方案相关的物理功，而 $\|f\|_{TC}$表示与 f 相关的最经济运输。

下述结果归功于 Bergman（ [Be08]中的命题24），其简短证明见 [We18]中的命题3.16。我们将在第2节给出一个新的证明。

定理 1.1。 给定任意有限度量空间 (X, d) 以及任意 $f \in TC(X)$，有 $\|f\|_{TC} = \|f\|_{STC}$。

接下来我们讨论 $X=(V,\ E,\ \ell)$，一个有限连通度量图。这意味着 $(V,\ E)$ 是一个没有环的简单连通图，$\ell:\ E\to\mathbb{R}_{>0}$ 是一个为每条边赋予正长度的函数，而 V 在最短路径度量下成为一个有限度量空间。我们在 $\mathcal{F}(V)$ 上定义另外两个与图结构相关的运输成本范数。

- 令 $\sim$ 表示 V上的邻接关系，因此 $x\sim y$ 当且仅当$\{x,y\}\in E$。令 $\Pi_{f,\ E}$ 表示支撑在 $V\times V$中 $\sim$的图上的运输方案集合。这对应于支撑在 X的边上的运输项。我们用 $\|f\|_{TCE}$表示相应的范数。

- 回顾一下，X 中的生成树 是经过所有顶点的 X 子树。我们用 $\Pi_{f,\ T}$ 表示运输方案 $P\in\Pi_f$ 的集合，其中存在一棵生成树 T，使得 P 支撑在 T 的边上。我们用 $\|f\|_{TCT}$表示相应的范数。

假设 X 带有定向，即每条边 $e\in E$ 都有一个起点 e_- 和一个终点 e_+。这使我们能够定义边界算子$\partial:\ \mathbb{R}^E\to\mathbb{R}^V:\ \delta_e\mapsto\delta_{e_+}-\delta_{e_-}$；等价地

$$(\partial\phi)(v)=\sum_{e:e_+=v}\phi(e)-\sum_{e:e_-=v}\phi(e) \tag{1}$$

$(v\in V,\ \phi\in\mathbb{R}^E)$。众所周知，$\partial$的像恰好是空间 $\mathcal{F}(V)$，因此 ∂的秩为 $|V|-1$；而 ∂的核是 X中环的空间 $Z(X)$，因此 $\dim(Z(X))=|E|-|V|+1$（见 [Bi93]中的命题 4.3 和定理 4.5）。于是：

定理 1.2。*1.* 对于 $f\in\mathcal{F}(V)$，有：

$$\|f\|_{TC}=\|f\|_{TCE}=\|f\|_{TCT}.$$

2. 算子 $\partial:\ \mathbb{R}^E\to\mathbb{R}^V$ 诱导出一个等距同构，将商空间 $\ell^1(E,\ell)/Z(X)$ 映 *onto* $TC(V)$。■

第一部分中的第一个等式在 [OO22]的注 1.3 之后证明；第二个等式可能是新的。后者对应于这样一种直观想法：如果运输方案涉及图中的环，就可以在不增加成本的情况下避开这些环。

关于第二部分，通常图的情形参见 [Os13] 中的命题 10.10；一般情形参见 [OO20] 中的定理 3.1，或 [OO22] 中的命题 1.5。注意，[Os13] 和 [OO20] 中的证明都是间接的，它们证明了转置算子 $\partial^t:(\mathcal{F}(V))^*\to(\ell^1(E,\ell)/Z(X))^*$ 是一个等距同构。第 3 节将给出定理 1.2 的一个简短直接证明。

第4节将专门讨论定理 1.2 的 3 个推论。

•由于在$\|f\|_{TCE}$的原始定义中，或在定理 1.2 中将其视为商范数时，都涉及一个最小值，因此对于一般的度量图，我们不期待能为 $\|f\|_{TCE}$得到闭式公式。度量树是这一思路的一个显著例外：此时可以得到 $\|f\|_{TC}$的显式公式。关于这一公式的有趣历史及其两种证明，请参阅 [MPV23] ；另请参见 [Me17]中的第 2.1 节。

推论 1.3。设 $X=(V,E,\ell)$ 是一棵有限度量树。固定边的任意定向。对于 $e\in E$，我们将包含 e_+ 的半树的顶点集定义为 S_e ，即 $S_e=\{x\in V;\quad d(x,e_+)\leq d(x,e_-)\}$。对于$f\in\mathcal{F}(V)$，有：

$$\|f\|_{TCE}=\sum_{e\in E}|f(S_e)|\ell(e). \tag{2}$$

我们有 $f(S_e)=\sum_{x\in S_e}f(x)$。

将定理 1.2 与树上的 ∂ 的单射性（见下文命题 4.1）结合起来，即可得到我们对（2）的简洁新证明。

• 在推论 4.2 中，我们给出了运输成本范数在 N-圈 C_N 上的一个公式的新证明。该公式最初发表于[CM95]，见公式（4.2）。

• 回顾一下，图中的桥 是指删除后会使图的连通分量数增加的边[2]。删除图中的所有桥后，就得到一个无桥 图。我们在推论 4.4 中证明，对于一般的有限度量图 X，求解 TC问题等价于在其 X的无桥部分 X_b 上求解该问题。

最后，第 5 节讨论度量树情形下的一些算法问题。~例如，我们给出一种算法方法，用于寻找 $P\in\Pi_f$，使得 $W(P)=\|f\|_{STC}$且 $|Supp(P)|\leq|Supp(f)|-1$。

2 定理 1.1 的一个新证明

证明将由下面的引理推出。

引理 2.1. 若 X 中所有三角不等式均为严格不等式，即，若对于所有满足 $x\neq y\neq z$ 的 $x,y,z\in X$，都有 $d(x,z)<d(x,y)+d(y,z)$且 $W(P)=\|f\|_{TC}$，则$\mathrm{supp}(P)\subset X_+\times X_-$。

[2]等价地，如果一条边不包含在图的任何一个圈中，那么它就是一座桥。

证明：若存在 $(x,y) \in \text{supp}(P)$ 满足 $y \notin X_-$，则 $0 \le f(y) = \sum_{a\in X}(P(y,a)-P(a,y))$；又由于 $P(x,y) > 0$，存在满足 $P(y,z) > 0$ 的 $z \in X$。令 $m = \min(P(x,y)\ P(y,z))$，并通过设定 Q 来定义 $Q(x,z) = m + P(x,z)$,$Q(x,y) = P(x,y) - m$，$Q(y,z) = P(y,z) - m$，以及对所有其他点，$Q(u,v) = P(u,v)$。容易验证 $Q \in \Pi_f$ 且 $W(P) - W(Q) = a(d(x,y) + d(y,z) - d(x,z))$，这与 $W(P) = \|f\|_{TC}$ 矛盾。

若存在 $(x,y) \in \text{supp}(P)$ 且满足 $x \notin X_+$，我们也采用类似的推理。 ■

定理 1.1 的证明： </style>**对于，定义上的距离为** $(,x) = 0$，并且 $d_n(x,y) = \frac{1}{n} + d(x,y)$，其中 $x \neq y$。记 $\|f\|_{TC_n}$为与 d_n相关联的运输成本范数。令 $P_n \in \Pi_f$ 为使 d_n的成本最小化的对象。由引理 2.1，P_n 的支撑包含于 $X_+ \times X_-$ 中。由紧致性，不妨设 $(P_n)_{n>0}$逐点收敛到 P，且其支撑也包含于 $X_+ \times X_-$中。由于 $(d_n)_{n>0}$ 逐点收敛到 d，我们还有 $W(P) = \lim_{n\to\infty} W_n(P_n) = \lim_{n\to\infty} \|f\|_{TC_n}$。

还需证明 $W(P) = \|f\|_{TC}$。为此，取满足 $W(Q) = \|f\|_{TC}$ 的 $Q \in \Pi_f$。于是

$$\|f\|_{TC_n} \le W_n(Q) \le W(Q) + \frac{1}{n}\|Q\|_1 = \|f\|_{TC} + \frac{1}{n}\|Q\|_1$$

因此，取极限可得：$W(P) \le \|f\|_{TC}$。根据定义，另一个不等式成立。 ■

3 朝向定理 1.2

3.1 基本构造

对于每个二元子集 $\{a,b\} \subset V$，我们选取一条连接 a 和 b 的最短边路径 $[a,b]$（若不唯一则任意选取）。令 $\varepsilon_{ab} \in \mathbb{R}^E$ 为 的示性函数，定义如下：

$$\varepsilon_{ab}(e) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad e \notin [a,b]; \\ 1 & \text{if} \quad e \in [a,b] \text{ and } \quad e \text{ points from } a \text{ to } b; \\ -1 & \text{if} \quad e \in [a,b] \text{ and } \quad e \text{ points from } b \text{ to } a. \end{cases}$$

对于每个 $P\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，我们关联一个由以下方式定义的 $\phi_P \in \mathbb{R}^E$：

$$\phi_P = \sum_{a,b\in V} P(a,b)\varepsilon_{ab}.$$

引入 ϕ_P 的动机来自以下一个简单但至关重要的

基本观察： 对于固定的 $f \in \mathcal{F}(V)$ 和 $P \ge 0$，当且仅当 $\partial\phi_P = -f$ 时，我们有 $P \in \Pi_f$。

确实 $\partial\phi_P = \sum_{a,\ b\in V} P(a,\ b)(\delta_b - \delta_a)$，因此由 Π_f 的定义可得。

引理 3.1。对于每个 P： $V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们有：

$$\|\phi_P\|_1 \leq W(P),$$

其中，$\|\cdot\|_1$ 表示 $\ell^1(E,\ell)$中的范数。

证明：注意到，对于每个 $a,b \in V$， $d(a,b) = \sum_{e\in E} \ell(e)|\varepsilon_{ab}(e)|$，因此

$$W(P) = \sum_{a,b\in V}\sum_{e\in E} P(a,b)\ell(e)|\varepsilon_{ab}(e)| = \sum_{e\in E}\ell(e)\sum_{a,b\in V} P(a,b)|\varepsilon_{ab}(e)|$$

$$\geq \sum_{e\in E}\ell(e)\Big|\sum_{a,b\in V} P(a,b)\varepsilon_{ab}(e)\Big| = \sum_{e\in E}\ell(e)|\phi_P(e)| = \|\phi_P\|_1.$$

■

引理 3.2. 对于任意 $f \in TC(V)$ 和 $\phi \in \partial^{-1}(-f)$，存在$P \in \Pi_{f,E}$使得 $\phi_P = \phi$ 且 $W(P) = \|\phi\|_1$。

证明：我们定义 ϕ 如下：

若 $a = e_-, b = e_+$ 且 $\phi(e) > 0$，则• $P(a,b) = \phi(e)$;

若 $a = e_+, b = e_-$ 且 $\phi(e) < 0$，则• $P(a,b) = -\phi(e)$;

- $P(a, b) = 0$ 在所有其他情形下。

注意，对每个 $e \in E$，都有 $P(e_-, e_+) - P(e_+, e_-) = \phi(e)$。于是，由于 P 的支撑位于边上，我们有

$$\phi_P = \sum_{a,b\in V} P(a,b)\varepsilon_{ab} = \sum_{e\in E}(P(e_-,e_+) - P(e_+,e_-))\delta_e = \sum_{e\in E}\phi(e)\delta_e = \phi.$$

于是 $\partial\phi_P = -f$ 因此 $P \in \Pi_{f,E}$，这要归功于基本观察。最后 $W(P) = \sum_{a,b\in V} P(a,b)d(a,b) = \sum_{e\in E}|\phi(e)|\ell(e) = \|\phi\|_1$. ■

3.2 定理 1.2 的证明，但等式 $\|f\|_{TC} = \|f\|_{TCT}$

由于 ∂ 实现了线性同构 $\ell^1(E,\ell)/Z(X) \to \mathcal{F}(V)$，我们可以在 $\mathcal{F}(V)$ 上赋予商范数$\|\cdot\|_{\ell^1(E,\ell)/Z(X)}$。对于 $f \in \mathcal{F}(V)$，我们计算：

$$\|f\|_{\ell^1(E,\ell)/Z(X)} = \inf_{\phi:\partial\phi=-f}\|\phi\|_1 \leq \inf_{P\in\Pi_f}\|\phi_P\|_1 \leq \inf_{P\in\Pi_f} W(P) = \|f\|_{TC} \leq \|f\|_{TCE}$$

其中，第一个不等式由 $\partial\phi_P = -f$ 对 $P \in \Pi_f$ 得出，第二个不等式由引理 3.1 得出。

现在，取 ϕ 使得 $\partial\phi = -f$ 且$\|f\|_{\ell^1(E,\ell)/Z(X)} = \|\phi\|_1$。由引理 3.2，我们可找到$P \in \Pi_{f,E}$使得 $\phi = \phi_P = \|\phi\|_1 = W(P)$。这表明 $\|f\|_{TCE} \leq \|f\|_{\ell^1(E,\ell)/Z(X)}$。至此，我们证明了$\|f\|_{\ell^1(E,\ell)/Z(X)} = \|f\|_{TC} = \|f\|_{TCE}$，因此定理 1.2 除了 $\|f\|_{TC} = \|f\|_{TCT}$之外均已证明。■

3.3 生成树与 $\|f\|_{TC} = \|f\|_{TCT}$ 的证明

引理 3.3。 对于每个 $f \in \mathcal{F}(V)$，都存在 $\phi \in \partial^{-1}(f)$，使其实现 $\{\|\psi\|_1 : \partial\psi = f\}$ 的最小值，并且对于 X中的每个圈 C，函数 ϕ 至少在 C的一条边上取零值；等价地， ϕ 支撑于 X的某棵生成树 T中。

证明：取任意一个使 ℓ^1-范数在 $\partial^{-1}(-f)$ 上达到最小值的 ϕ_0。令 C 为 X 中任意一个圈；回顾示性函数 ξ_C 的定义（摘自 [Bi93] 第 23 页）：为 C 选取一个环的定向，并对 $e \in E$ 定义：

$$\xi_C(e) = \begin{cases} 0 \\ 1，若 e \notin C；若 e \in C 且 e 与 C 的定向一致；若 e \in C 且 e 与 C. 的定向不 \end{cases}$$

一致，则为 -1

于是对 $t \in \mathbb{R}$ 定义 $\phi_t = \phi_0 + t\xi_C$。注意，当 $\partial\xi_C = 0$ 时， $\phi_t \in \partial^{-1}(-f)$。函数 $t \mapsto \|\phi_t\|_1 = \sum_{e\in E} \ell(e)|(\phi_0 + t\xi_C)(e)|$ 是凸的分段仿射函数；对每个满足 ϕ_t 在 C 上不为零的 t，它都是仿射的。因此，$\|\phi_t\|_1$ 的最小值在某个 t_0 处取得，且 ϕ_{t_0} 在 C 的某条边上为零。注意，由 $\|\phi_0\|_1$ 的最小性可知 $\|\phi_{t_0}\|_1 = \|\phi_0\|_1$。

现在选取实现 ℓ^1-范数最小值且支撑最小的 $\phi \in \partial^{-1}(-f)$，上述论证表明， ϕ 的支撑不可能包含任何圈，即它是一个森林；显然，该森林包含在某棵生成树中。

■

定理 1.2 的证明结束：对于 X 中的一棵生成树 T，我们分别用 d_T 和 ∂_T 表示 T 的距离和边界算子。固定 $f \in \mathcal{F}(V)$。对于 a、$b \in V$，有 $d(a,b) \leq d_T(a,b)$，因此对于每个 $P \in \Pi_f$，都有 $W_X(P) \leq W_T(P)$，且 $\|f\|_{TC(X)} \leq \|f\|_{TC(T)}$。为证明某棵生成树实现了等式，根据定理 1.2 已证明的部分，我们找到 $\phi \in \ell^1(E,\ell)$，使得 $\partial\phi = -f$ 且 $\|f\|_{TC(X)} = \|\phi\|_1$。根据引理 3.3，我们不妨设 ϕ 支撑在 X 中的一棵生成树 T 上，从而 ϕ 在 E 上与 $E(T)$ 的 ℓ^1-范数相等。由于 $\partial_T\phi = -f$，我们有 $\|f\|_{TC(X)} = \|\phi\|_1 = \|f\|_{TC(T)}$。■

注 3.4. 现在来看一般情形，其中(X,d) 是一个有限度量空间。令 $f \in \mathcal{F}(V)$。由定理 *1.1* 可知，将(X,d) 替换为$(Supp(f)\ d)$不会改变 $\|f\|_{TC}$。考虑顶点集为 $Supp(f)$ 的完全图，其路径长度由 d 给出。于是，定理 *1.2* 表明，存在一棵实现最优运输的生成树，特别是至多需要 $|Supp(f)| - 1$ 个运输项。

注意，数量 $|Supp(f)| - 1$ 在一般情形下是最优的，因为令 $f = \partial(P)$，可知 $\{f(u);\ u \in V\}$ 的 $\mathbb{Q}$-线性张成空间的 $\mathbb{Q}$-秩至多为$|Supp(P)|$。

注记 3.5。 在引理 *3.3* 的证明中，我们看到， $t \mapsto \|\varphi_t\|_1$在任意正则点处的导数为 $\sum_e \pm\xi_C(e)\ell(e)$。在一般情形下（尤其是当所有 $(\sum_e \pm\xi_C)$*'s* 在有理数上相互独立时），

该导数不可能为 0，由此可知 $t \mapsto \|\varphi_t\|_1$ 在 $t = 0$处有唯一最小值，因此 ϕ_0 自动由一棵生成树承载。随后，我们可以按照定理 *1.1* 证明中的思路，给出等式 $\|f\|_{TC} = \|f\|_{TCT}$的另一种证明：用一个序列 ℓ_n 逼近ℓ，使得对于所有 n，族 $(\ell_n(e))_{e\in E}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上自由。

4 定理 1.2 的推论

4.1 树的情形

我们通过找到一个显式函数 ϕ_f，使其满足 $\partial(\phi_f) = -f$，以及一个显式的 $P \in \Pi_f$，使其满足 $W(P) = \|f\|_{TC}$，从而改进公式 (2)。

命题 4.1. 设 $X = (V, E, \ell)$ 为一棵有限度量树，且 $f \in \mathcal{F}(V)$。

1. 令 $\phi_f(e) := -f(S_e) = -\sum_{x\in S_e} f(x)$；则 ϕ_f 是 $\partial\phi = -f$ 的唯一解。

2. 我们有

$$\|f\|_{TCE} = \|\phi_f\|_1 = \sum_{e\in E} |f(S_e)|\ell(e)$$

（这恰好就是公式 *(2)*。）

3. 定义 P：$V \times V \to \mathbb{R}^+$ 为 $P(a, b) = |f(S_e)|$，若 $e_- = a$、$e_+ = b$ 且 $f(S_e) < 0$；或 $e_- = b$、$e_+ = a$ 且 $f(S_e) > 0$；而在其他所有情形下，$P(a, b) = 0$。于是 $P \in \Pi_f$ 且 $W(P) = \|f\|_{TC}$。

证明：

1. 容易验证 $\partial(\phi_f) = -f$，此外，由于 X 是一棵树，∂ 是单射。

2. 该公式直接由定理 1.2 得出。

3. 若将引理 3.2 的证明应用于 ϕ_f，可得 $\phi_f = \phi_P$，因此$P \in \Pi_f$ 且 $W(P) = \|\phi_f\|_1$。 ■

4.2 圈的情形

这里我们给出一个关于N-圈 C_N的运输成本范数公式的新证明。该公式最初以公式 (4.2.) 的形式出现在 [CM95] 中（另一个证明见 [Me17]的第 2.2 节）。

推论 4.2。 设 C_N为顶点集 $\{v_i;\quad i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$和边集 $E=\{e_i;\quad i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$组成的 N-圈，其中边 e_i 连接 v_i 和 v_{i-1}。设 $\ell:\quad E\to\mathbb{R}_+^*$ 为一个函数。对于 $f\in\mathcal{F}(V)$，并令 $k\in\{0,\dots,N-1\}$集合 $\alpha_k=\sum_{i=0}^{k}f(i)$。那么

$$\|f\|_{TC}=\min_{0\le k\le N-1}\sum_{i=0}^{N-1}|\alpha_i-\alpha_k|\ell(e_i)$$

该最小值是 α_k 使得

$$\sum_{i\in\{0,\dots,N-1\};\ \alpha_i<\alpha_k}\ell(e_i)\le\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\ell(e_i)\le\sum_{i\in\{0,\dots,N-1\};\ \alpha_i\le\alpha_k}\ell(e_i).$$

特别地，如果对于每个顶点都有 $\ell(e)=1$，我们得到

$$\|f\|_{TC}=\sum_{i=0}^{N-1}|\alpha_i-Me|,$$

其中，*Me* 表示这些 α_k的中位数。

证明：通过设定 $(e_i)_+=v_i$ 和 $(e_i)_-=v_{i-1}$ 来确定 E 的定向，并令 $\phi(e_i)=\alpha_i$，使得 $\partial\phi=-f$。C_N 的圈空间是一维的，由 E 上的常值函数 1 生成。根据定理 1.2，我们知道 $\|f\|_{TC}$ 是 $q(t)=\|\phi-t\|_1=\sum_i|\alpha_i-t|\ell(e_i)$ 的最小值。对于 $t\notin\{\alpha_k;\quad k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$，我们有

$$q'(t)=\sum_{i:\ \alpha_i<t}\ell(e_i)-\sum_{i:\ \alpha_i>t}\ell(e_i).$$

根据凸性，$q(t)$ 的最小值在 $t=\alpha_k$ 处取得，其中 k 由 $q'(t)\le 0$（对 $t<\alpha_k$）以及 $q'(t)\ge 0$（对 $t\ge\alpha_k$）刻画。结论得证。
■

注 4.3。 假设 X 只有一个圈。记作 $V=V'\sqcup\{v_i,\ i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$和 $E=E'\sqcup\{e_i,\ i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$。注意，$E'$ 是该图的无桥部分。

令 $f\in\mathcal{F}(V)$。为 E 选择一个定向，使得 $(e_i)_+=v_i$ 且 $(e_i)_-=v_{i-1}$。取 $\phi\in\ell^1(E,\ell)$ 使得 $\partial\phi=-f$（例如通过移除 e_0）。于是所有解均为 $\phi-t\psi$，其中 $\psi(e_i)=1$，并且当 $e\in E'$ 时 $\psi(e)=0$。最小值在 $t=\phi(e_k)$ 处取得，其中 $\phi(e_k)$ 满足

$$\sum_{i\in\{0,\dots,N-1\};\ \phi(e_i)<\phi(e_k)}\ell(e_i)\le\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\ell(e_i)\le\sum_{i\in\{0,\dots,N-1\};\ \phi(e_i)\le\phi(e_k)}\ell(e_i).$$

4.3 任意图的一个应用

固定 E 的一个定向；回忆一下，对于 $e \in E$，我们定义了 $S_e = \{x \in V : d(x, e_+) < d(x, e_-)\}$。

推论 4.4。在 X 上求解 *TC*问题等价于在其无桥部分 X_b 上求解该问题。

证明：固定 $f \in \mathcal{F}(V)$ 和 $\phi \in \ell^1(E)$，使得 $\partial\phi = -f$。令 B 表示 X 的所有桥所构成的集合。

断言： 对于 $e^0 \in B$，有 $\phi(e^0) = f(S_{e^0})$。

事实上，由于 e^0 将 X 分离，我们可以写成 $E = \{e^0\} \cup E_+ \cup E_-$，其中 E_+ 是端点均位于 S_{e^0} 中的边的集合，而 E_- 是端点均位于 $V \setminus S_{e^0}$ 中的边的集合。

令 $\psi = \mathbf{1}_{E_+ \cup \{e^0\}}\phi$。我们看到，$\partial\psi$ 在 S_{e^0} 上与 $\partial\phi = -f$ 一致，并在 $S_{e^0} \cup e^0_-$ 外为零。我们得到 $0 = \sum_{v \in V} \partial\psi(v) = \sum_{v \in S_{e^0}} \partial\phi(v) + \partial\psi(e^0_-)$。但是 $\partial\psi(e^0_-) = \psi(e^0) = \phi(e^0)$，这就证明了该断言。

根据该断言，若 $\partial\phi = -f$，则

$$\|\phi\|_1 = \sum_{e \in B} |f(S_e)|\ell(e) + \sum_{e \notin B} |\phi(e)|\ell(e),$$

因此，根据定理 1.2，我们需要使量 $\sum_{e \notin B} |\phi(e)|\ell(e)$, 最小。

现在我们证明，这相当于在无桥部分 X_b 上求解一个 TC问题。为此，定义 $\phi_0 \in \ell^1(E, \ell)$ 为

$$\phi_0 = \begin{cases} f(S_e) & if \quad e \in E_d \\ 0 & if \quad e \notin E_d \end{cases}$$

并令 $f_0 := f - \partial\phi_0$。显然，等式 $\partial\phi = -f_0$ 等价于 $\partial(\phi - \phi_0) = -f$。但若 $\partial\phi = -f_0$，则根据该断言，对于 $e \in B$，我们有：

$$\phi(e) = f_0(S_e) = f(S_e) - f(S_e) = 0,$$

也就是说，ϕ 支撑于 X_b，而使 $\|\phi\|_1$ 最小等价于使 $\|\phi - \phi_0\|_1$ 最小。 ■

5 树情形下的算法方面

在本节中，$X = (V、E、\ell)$ 表示一棵具有 $|E| \geq 1$ 的度量树，并且将固定一个函数 $f \in \mathcal{V}$。

5.1 用少量加法计算 $\|f\|_{TCE}$

给定 $f \in \mathcal{F}(V)$，计算 ϕ_f，然后计算 $\|f\|_{TCE} = \|\phi_f\|_1$，需要进行许多次加法（数量级为 $|E||V|/2$）。这可以改进。

命题 5.1. 设 $X = (V, E, \ell)$ 是一个具有 $|E| \geq 1$ 的度量树，且 $f \in \mathcal{F}(V)$。可以通过至多 $2|E| - 1$ 次加法计算 $\|f\|_{TCE} = \|\phi_f\|_1$。

证明：我们对 $|E|$ 使用归纳法，$|E| = 1$ 的情形显然成立。对于$|E| > 1$，设 v 是 X 的一个叶节点（= 终端顶点），且对应的边 e 的方向为 $e_+ = v$。于是 $\phi_f(e) = f(v)$。删除顶点 v 和边 e，并对剩余的树 Y 求解问题，得到 $f_1(w) := f(w)$（当 $w \neq e_-$ 时），以及 $f_1(e_-) := f(v) + f(e_-)$（一次加法）。根据归纳假设，$\|\phi_{f_1}\|_1$ 可通过至多 $2|E| - 3$ 次加法计算，且 $\|\phi_f\|_1 = \|\phi_{f_1}\|_1 + |f(v)|$。 ■

5.2 寻找运输项数最少的运输方案

设 $f \in \mathcal{F}(V)$。假设我们已经找到 ϕ_f（其中 $f = \partial(\phi_f)$）。

问题 1. 求一个涉及最少运输项的树上运输问题解（即 $\leq |Supp(f)| - 1$，见注 *3.4*）。

~换言之，我们想要找到 $P \in \Pi_f$，使得 $W(P) = \|f\|_{TC}$且 $|Supp(P)| \trianglelefteq Supp(f)| - 1$。

注 5.2. 若对于某些边有 $\phi_f(e) = 0$，则用支撑 E' 替换 E ϕ_f。于是，(V, E') 是一个森林。分别处理每个连通分量，我们将找到一个最优运输方案，其支撑至多包含 $|Supp(f)| - k$ 个元素，其中 k 是包含 f支撑点的连通分量数。

设 $f \in \mathcal{F}(V)$。根据注 5.2，我们可以假设对每个 $e \in E$，都有 $\phi_f(e) \neq 0$。为便于后续讨论，我们将所有满足 $\phi_f(e) < 0$ 的边的定向反转，从而假设对每条边都有 $\phi_f(e) > 0$。

T于是，问题 1 的一个解 P 可以按如下方式通过算法构造。

1. 任意选择 $a \in V_+$。

2. 构造有限边序列 $e_1, \ldots, e_k$，使得 $(e_1)_- = a$, $(e_j)_+ = (e_{j+1})_-$ 对 $1 \leq j < k$ 成立，且 $(e_k)_+ \in V_-$。为说明该序列的存在性，注意到 $f(a) = \sum_{e, e_- = a} \phi_f(e) - \sum_{e, e_+ = a} \phi_f(e)$。由此可知，存在 $e_1 \in E$，使得 $(e_1)_- = a$。假设已构造出 $e_1, \ldots, e_j$，因为 $0 < f((e_j)_+) + \phi_f(e_j) \leq \sum_{e, e_- = (e_j)_+} \phi_f(e$ ）

，我们看到，如果 $(e_j)_+ \notin V_-$，则存在 $e_{j+1} \in E$ 使得 $(e_j)_+ = (e_{j+1})_-$。

3. 令 $b = (e_k)_+$，并令 $\alpha := \min\{f(a) - f(b),\ \min\{\phi_f(e_j) :\ 1 \le j \le k\}\}$，
构造 $P \in \Pi_f$，使得 $P(a, b) = \alpha$, $W(P) = \|f\|_{TC}$且 $|Supp(P)| \le |Supp(f)| - 1$。

为此，我们对 $Supp(f)$ 中元素的数量使用归纳法。若 $Supp(f)$ 仅由两个点 a、b 组成，则只有一个支撑等于 $V_+ \times V_-$ 的可能运输方案，其形式为

$$P(x,y) = \begin{cases} f(a) & \text{if} \quad (x,y) = (a,b) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在假设 $Supp(f)$ 有 ≥ 3 个点。定义 $e \in \{e_1, \ldots, e_k\}$

- ψ：通过令 $E \to \mathbb{R}_+$ $\psi(e) = \begin{cases} \alpha, & \text{若 } 0 \\ \end{cases}$，

否则为 。

- $h = -\partial\psi$，从而对于 $x \notin \{a, b\}$，有 $h(a) = \alpha$，$h(b) = -\alpha$，$h(x) = 0$。
- $g = f - h$。

定义运输方案 P_0，令 $P_0(a,\ b) = \alpha$，并令 $P_0(x,\ y) = 0$，若 $(x,\ y) \ne (a, b)$。然后，如同初始步骤一样，$P_0 \in \Pi_h$，且 $\|\psi\|_1 = W(P_0)$
由于 ψ 和 $\phi_f - \psi$ 均为非负数，$\|\phi_f\|_1 = \|\psi\|_1 + \|\phi_f - \psi\|_1$，换言之，$\|f\|_{TC} = \|g\|_{TC} + \|h\|_{TC}$。现在我们考虑 3 种情形。

(a) 若 $\alpha = f(a)$，则 $Supp(g) \subset Supp(f) \setminus \{a\}$。根据归纳假设，存在一个运输方案 $Q \in \Pi_g$，满足 $W(Q) = \|g\|_{TC}$，且其支撑至多包含 $|Supp(g)| - 1$ 个元素。由于 $a \notin Supp(g)$，$Q(a,\ b) = 0$。

(b) 若 $\alpha = -f(b)$，则 $Supp(g) \subset Supp(f) \setminus \{b\}$：此情形与前一种情形类似。

(c) 若 $\alpha < \min\{f(a) - f(b)\}$，则 $Supp(g) = Supp(f)$。存在 j，满足 $\alpha = \phi_f(e_j)$。现在 $Supp(\phi_g) \subset E \setminus \{e_j\}$，且 $(V, Supp(\phi_g))$ 至少有两个连通分量，每个连通分量的顶点数都严格较少 v，并且 $g(v) \ne 0$（因为 a 和 b 已断开）。根据归纳假设，存在一个运输方案 $Q \in \Pi_g$，满足 $W(Q) = \|g\|_{TC}$，且其支撑至多包含 $|Supp(g)| - k$ 个元素——其中 k 是包含 $Supp(g) = Supp(f)$ 中点的连通分量数。同样，$Q(a, b) = 0$。

在所有情形下，$P = P_0 + Q$ 都能发挥作用，即 $P \in \Pi_f$, $P(a, b) = P_0(a, b)$,

$$W(P) = W(P_0) + W(Q) = \|h\|_{TC} + \|g\|_{TC} = \|f\|_{TC},$$

和 $|Supp(P)| \le |Supp(f)| - 1$。 ■

注 5.3。 记由 f 的支撑中的点作为顶点、由 P 的支撑中的点作为边的图为 (V_f, E_P)。容易验证，在上述构造中，若 (V_g, E_Q) 是森林，则 (V_f, E_P) 也是森林。换言之，我们的构造总会得到一片森林。

参考文献

[Be08] G.M. Bergman，度量空间的映射半径，《太平洋数学杂志》236（2008），223–261。[Bi93] N. Biggs，《代数图论》（第2版），剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，1993。[CM95] C.A. Cabrelli 和 U.M. Molter，圆上概率测度的Kantorovich度量，《计算与应用数学杂志》57（1995），345–361。[GK03] G. Godefroy 和 N. J. Kalton，Lipschitz自由Banach空间，《数学研究》159（2003），121–141。[MPV23] M. Mathey-Prévot 和 A. Valette，Wasserstein距离与度量树。《数学教学》69（2023），315–333。[Me17] F. Mendivil，计算Monge-Kantorovich距离。《计算与应用数学》36（2017），1389–1402。[OO19] S. Ostrovska 和 M.I. Ostrovskii，广义运输成本空间，《地中海数学杂志》16，157（2019）。https://doi.org/10.1007/s00009-019-1433-8[OO20] S. Ostrovska和 M.I. Ostrovskii，关于运输成本空间与 ℓ_1之间的关系，《数学分析与应用杂志》491（2020）124338。[OO22] S. Ostrovska 和 M.I. Ostrovskii，有限度量空间上运输成本空间的等距结构，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志A辑：数学》（2022），116–153。[Os13] M.I. Ostrovskii，度量嵌入，De Gruyter数学研究丛书49，2013。[We18] N. Weaver，Lipschitz代数（第2版），世界科学出版社，2018。作者地址：巴黎城市大学和索邦大学、法国国家科学研究中心、IMJ-PRG

法国巴黎 F-75013,
georges.skandalis@imj-prg.fr

纳沙泰尔大学数学研究所´纳沙泰尔大学´11 埃米尔·阿尔冈街 - Unimail CH-2000 纳沙泰尔 - 瑞士 alain.valette@unine.ch