arXiv:2601.16879v1 [math.MG] 23 Jan 2026

仿射厚度：模式与间隙引理

Richard Alasdair Howat

Abstract. 本文为 $B[0,1] \subset \mathbb{R}^n$ 的子集定义了一种新的厚度概念，称为仿射厚度；这一厚度概念是 Falconer-Yavicoli 厚度的推广，适用于研究某些带有仿射切除部分的集合。本文证明，厚集在 [5] 中是矩阵势博弈的获胜集。该博弈由 $M \in \mathbb{N}$引入。作为应用，我们证明，对于一个厚集，存在一个 M，其取决于该集合的厚度，使得该集合包含每个至多含有 $\mathbb{R}^n$个元素的有限集合的位似副本。此外，作者针对 Falconer-Yavicoli 厚度给出了$n \geq 2$中的间隙引理的一个反例，相关结论见 [3, 定理 10]，证明该结果并非如原陈述所言普遍成立。随后，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中（对于 $n \geq 2$）给出仿射厚度的一个间隙引理，但需满足经典 Newhouse 间隙引理之外的附加条件。

1. Introduction

给定一个紧集 $C \subseteq B[0,1]$，我们用 $(G_k)_{k\in J}$ 表示 $\mathbb{R}^n \setminus C$ 中至多可数个开、有界、道路连通分支，并用 E 表示无界连通分支（在 $\mathbb{R}$ 中，集合 E 是两个无界连通分支的并）。我们将这些称为间隙。利用这一结构，Falconer 和 Yavicoli 在 [3]，中针对 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧几里得距离定义了厚度概念，记作d。这是对 [10] 中所述实数线子集的 Newhouse 厚度定义的推广。其定义如下：

定义 1.1。对于紧集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$，假设间隙按直径非递增的顺序排列，则 C 的厚度定义为

$$\tau(C) = \inf_{k\in J} \left\{ \frac{d\left(G_k, E \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j\right)}{\operatorname{diam}(G_k)} \right\}. \tag{1}$$

当 $J = \emptyset$ 时，也就是说不存在有界间隙时，

$$\tau(C) = \begin{cases} \infty & \text{if} \quad \operatorname{int}(C) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if} \quad \operatorname{int}(C) = \emptyset \end{cases}.$$

我们注意到，若间隙是通过仿射而非位似映射定义的，这种厚度概念往往为零，例如在自仿射 Bedford-McMullen 地毯中。为克服这一问题，我们借鉴作者、Mitchell 和 Samuel 在 [5] 中提出的方法；也就是说，从仿射映射的视角来观察该集合。

通过这一技术，我们可以定义一种新的厚度概念，称为关于 A 的厚度，其中 A 是一个具有正项的对角仿射矩阵；或者在矩阵明确时，称为仿射厚度。我们注意到，我们的概念定义在 $B[0,1]$ 的子集上，而不是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上；这并不构成限制，因为可以利用仿射矩阵 A 的某个幂，将有界集合缩放到 $B[0,1]$ 中。这不会影响厚度，因为所有定义的值都会受到相同的影响。此外，我们还分别针对 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得度量和平方度量定义了这一概念。

定义 1.2。考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量或欧几里得度量，并令 A 为一个对角矩阵，其项为 β_{11}、……、$\beta_{nn} \in (0,\ 1)$。对于集合 $F \subseteq B[0,1]$，我们定义其关于矩阵 A 的大小为

$$S_A(F) = \inf\left\{ t > 0 : \exists z \in \mathbb{R}^n \text{ s.t } F \subseteq A^{1/t}(B[0,1]) + z \right\}. \tag{2}$$

现在，我们定义关于对角矩阵 A 的厚度概念。

(R. A. Howat) School of Mathematics、 University of Birmingham、 UK
Date: 2026年1月26日。

定义 1.3. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量或欧几里得度量，设 A 是一个对角矩阵，其元素为$\beta_{11},\ldots,\beta_{nn}\in(0,1)$，并设 $C\subseteq B[0,1]$ 是一个紧子集，其间隙为 $(G_k)_{k\in J}$ 和 E。假设 $(G_k)_{k\in J}$ 按照相对于 A 的大小非递增顺序排列，对于 $m\in\mathbb{N}$，我们将相对于矩阵 A 的间隙距离定义为

$$GD_A(m,C)=\inf\left\{t>0:\begin{smallmatrix}\exists z\in\mathbb{R}^n \text{ s.t } G_m\cap A^{1/t}(B[0,1])+z\neq\emptyset \text{ and}\\ \left(A^{1/t}(B[0,1])+z\right)\cap\left(\bigcup_{i<m}G_i\cup E\right)\neq\emptyset\end{smallmatrix}\right\}, \tag{3}$$

以及相对于 A 的厚度

$$\tau_A(C)=\inf_{k\in J}\left\{S_A(G_k)^{-1}-GD_A(k,C)^{-1}\right\}. \tag{4}$$

若 $GD_A(k,C)=0$ 对某个 $k\in\mathbb{N}$ 成立，则我们定义 $\tau_A(C)=-\infty$；若 $J=\emptyset$，则

$$\tau_A(C)=\begin{cases}\infty & \text{if} \quad \operatorname{int}(C)\neq\emptyset\\ -\infty & \text{if} \quad \operatorname{int}(C)=\emptyset\end{cases}. \tag{5}$$

注 1.4。 对于紧集 C 和矩阵 $A=\beta I$，定理 $\tau(C)$ 中定义的厚度 1.1满足：若 $\tau(C)>0$，则有以下结论；$\log^{\beta}(\tau(C))=-\tau_A(C)$。这是通过将两个集合之间的度量距离以及间隙直径改写为关于矩阵 A 的间隙距离和大小即可看出。这表明，当矩阵为位似矩阵时，我们对厚度的定义与之密切相关。

注 1.5。 注意，间隙按大小非递增排列；大小相同的间隙，其排列顺序不会影响厚度的值，因此厚度定义良好。这是因为考虑相对于 A的有限多个同样大小的间隙时，最小的间隙距离会在某一步出现在最小值中，因此厚度始终保持一致。

纽豪斯间隙引理指出，给定两个紧集 C_1，$C_2\subseteq\mathbb{R}$ 若其中任何一个都不包含在另一个的间隙中，且 $\tau(C_1)\tau(C_2)>1$，则 $C_1\cap C_2\neq\emptyset$。事实上，人们会希望这一结论能够直接推广到 $\mathbb{R}^n$ 中定义的厚度，即 $n\geq 2$，适用于仿射厚度和 Falconer-Yavicoli 厚度。然而，正如下述命题所示，我们可以找到仿射厚度很大但交集为空的集合对。

命题。 考虑 $\mathbb{R}^n$ and $n\geq 2$ 上的平方度量或欧几里得度量。令 A 为一个对角矩阵，其元素为 β_{11}、……、$\beta_{nn}\in(0,1)$。存在紧集 C_1，$C_2\subseteq B[0,1]$，使得它们彼此都不包含在对方的间隙中，$\tau_A(C_1)+\tau_A(C_2)>0$ 且 $C_1\cap C_2=\emptyset$。

这直接导出了以下推论，它为 Falconer 和 Yavicoli 在 [3, 定理 10] 中陈述的关于 $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ 的间隙引理提供了一个反例。这表明，事实上，间隙引理并不能直接推广到具有 Falconer-Yavicoli 厚度的高维情形。

推论。 存在集合 $C_1,C_2\subseteq\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$，使得这两个集合都不包含在另一个集合的间隙中，$\tau(C_1)\tau(C_2)>1$ 且 $C_1\cap C_2=\emptyset$。

由于间隙引理不能直接推广到高维情形，我们必须探究仿射间隙引理在 $\mathbb{R}^n$ 中成立的条件。这引出了定理 2.8，其中我们定义了强可细化的集合对。利用这一定义，我们可以得到一个仿射间隙引理，陈述如下。

定理 （仿射间隙引理）。 在 $\mathbb{R}^n$ 上考虑平方度量或欧几里得度量，设 A 为一个对角矩阵，其元素为 $\beta_{11},\ldots,\beta_{nn}\in(0,1)$，并设 $C_1,C_2\subseteq B[0,1]$ 为一对非空紧的强可细化集合。若 $\tau_A(C_1)+\tau_A(C_2)>0$，则 $C_1\cap C_2\neq\emptyset$。

集合厚度与势博弈获胜策略之间的联系已由 Yavicoli 等人在 [3, 11, 12] 中研究。我们可以利用矩阵势博弈，将这些结果推广到仿射厚度；该博弈由作者、Mitchell 和 Samuel 在 [5] 中提出。由此得到以下关于厚集的模式与交集的定理。请注意，这些结果在平方度量下成立。

定理。 给定 $n\in\mathbb{N}$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量，并设 A 为一个对角（$n\times n$）矩阵，其对角元素为 β_{11}，…，$\beta_{nn}\in(0,1/5)$，令 $\beta_{\max}=$为最大值$_j\,\beta_{jj}$。设 $C\subseteq B[0,1]$ 为一个具有间隙（G_k）$_{k\in J}$ 和 E的紧子集。此外，τ_A（C）$\notin\{-\infty,\infty\}$。

令 $\alpha_{\tau_A(C)}=\prod_{j=1}^n\beta^{\tau_A(C-1)}_{jj}$。若存在 $c,\delta\in(0,1)$ 和 $M\in\mathbb{N}$，使得

$$M\alpha^c_{\tau_A(C)}\leq\delta^2\left(1-\left(\prod_{j=1}^n\beta_{jj}\right)^{1-c}\right) \quad \text{and} \quad 3^{-n}\prod_{j=1}^n(1-5\beta_{jj}^{\lfloor\delta(M^{1/c}\alpha_{\tau_A(C)})^{-1}\rfloor})>8^n(1+2^{2n+1})\delta. \tag{6}$$

那么，给定一个元素个数至多为 M 的有限非空集 F， $y\in\mathbb{R}^n$ 且 $\lambda\in(0,(1-\beta_{\max})/\text{直径}(F))$，存在一个非空集 $X\subseteq\mathbb{R}^n$，使得对所有 $x\in X$， $\lambda F+x\subseteq(C\cup E)\cap B[y,1]$。此外，若

$$M\alpha_{\tau_A(C)}^c\le\min\{\delta^2,K_M^{-1}n\log\beta_{\max}^{-1}\}\left(1-\left(\prod_{j=1}^n\beta_{jj}\right)^{1-c}\right),$$

其中

$$K_M=2\delta^{-1}\left|\log\left(3^{-n}\prod_{j=1}^n(1-5\beta_{jj}^{\lfloor\delta(M^{\frac{1}{c}}\alpha_{\tau_A(C)})^{-1}\rfloor})-8^n(1+2^{2n+1})\delta\right)\right|,$$

那么 $\dim_H(X)\ge n-K_M\alpha_{\tau_A(C)}(|\log(\beta_{\max})|)^{-1}>0$。

定理。 给定 $n\in\mathbb{N}$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量，并令 A 为一个对角（$n\times n$）矩阵，其对角元素为 $\beta_{11},\dots,\beta_{nn}\in(0,1/5)$。此外，令 I 为一个至多可数集，并且对每个 $i\in I$，令$C_i\subseteq B[0,1]$ 为一个具有间隙（$G_k^{(i)}$）$_{k\in J_i}$ 和 $E^{(i)}$ 的紧集。此外，对每个 $i\in I$， $\tau_A(C_i)\notin\{-\infty,\infty\}$。
设 $C=\cap_{i\in I}(C_i\cup E^{(i)})$ 和 $\alpha_{\tau_A(C_i)}=\prod_{j=1}^n\beta_{jj}^{\tau_A(C_i)-1}$。如果存在 $\alpha,c,\delta\in(0,1)$，使得 $\alpha^c=\sum_{i\in I}\alpha_{\tau_A(C_i)}^c$ 且

$$\alpha^c\le\delta^2\left(1-\left(\prod_{j=1}^n\beta_{jj}\right)^{1-c}\right)<1\quad\text{and}\quad 0<\prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{3}(1-5\beta_{jj}^{\lfloor\delta\alpha^{-1}\rfloor})\right)-8^n(1+2^{2n+1})\delta,\tag{7}$$

那么，对每个 $y\in\mathbb{R}^n$，我们有 $C\cap\big(A(B[0,1])+y\big)\neq\emptyset$。此外，

$$\dim_H\big(C\cap\big(A(B[0,1])+y\big)\big)\ge\max\left\{n-K_1\frac{\alpha}{|\log(\beta_{\max})|},0\right\}.$$

2. An Affine Gap Lemma in $\mathbb{R}^n$

本节中，我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量或欧几里得度量。给定两个紧集C_1， $C_2\subseteq\mathbb{R}$，以下结果建立了厚度与交集之间的联系，这一结果称为 Newhouse 间隙引理。

定理 2.1（Newhouse 间隙引理）。给定两个紧集 C_1， $C_2\subseteq\mathbb{R}$，且任一集合都不包含在另一个集合的间隙中，若 $\tau(C_1)\tau(C_2)>1$，则 $C_1\cap C_2\neq\emptyset$。

Falconer 和 Yavicoli 在 [3, 定理 10], 中声称，该结果可直接推广至 $\mathbb{R}^n$，并且利用 Falconer-Yavicoli 厚度，在 $\mathbb{R}^n$ 中可在相同条件下得到 Newhouse 间隙引理。然而，事实并非如此。在以下命题中，我们给出一个 $\mathbb{R}^n$ 中的集合示例：它们的交集为空，但仿射厚度足够大，且任一集合都不包含在另一个集合的间隙中。这导出定理 2.3，它直接与 [3]中的定理 10 相矛盾。

命题 2.2。 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $n\ge2$ 上考虑平方度量或欧几里得度量。设 A 为一个对角矩阵，其元素为 β_{11}、……、$\beta_{nn}\in(0,1)$。存在紧集 C_1、$C_2\subseteq B[0,1]$，使得它们中的任一个都不包含在另一个集合的间隙中， $\tau_A(C_1)+\tau_A(C_2)>0$ 以及 $C_1\cap C_2=\emptyset$。

证明。我们首先将在平方度量下构造并计算具体例子的厚度。令 r、s、$t\in(0,1/4)$，其中 $r>s>t$ 待定。令 $x=(x_1$、……、$x_n)$ 满足 $x_1=3/4$ 且$x_i=0$ 对于 $i\ge2$。我们令

$$C_1=\Big(B[x,1/4]\setminus\mathring{B}[x,r]\Big)\cup\{x\}\cup\Big(B[-x,1/4]\setminus\mathring{B}[-x,r]\Big)\quad\text{and}\quad C_2=\Big(B[x,s]\setminus\mathring{B}[x,t]\Big)\cup\{-x\},$$

这些集合在下文的 $\mathbb{R}^2$ 中给出示意图，针对的是平方度量。

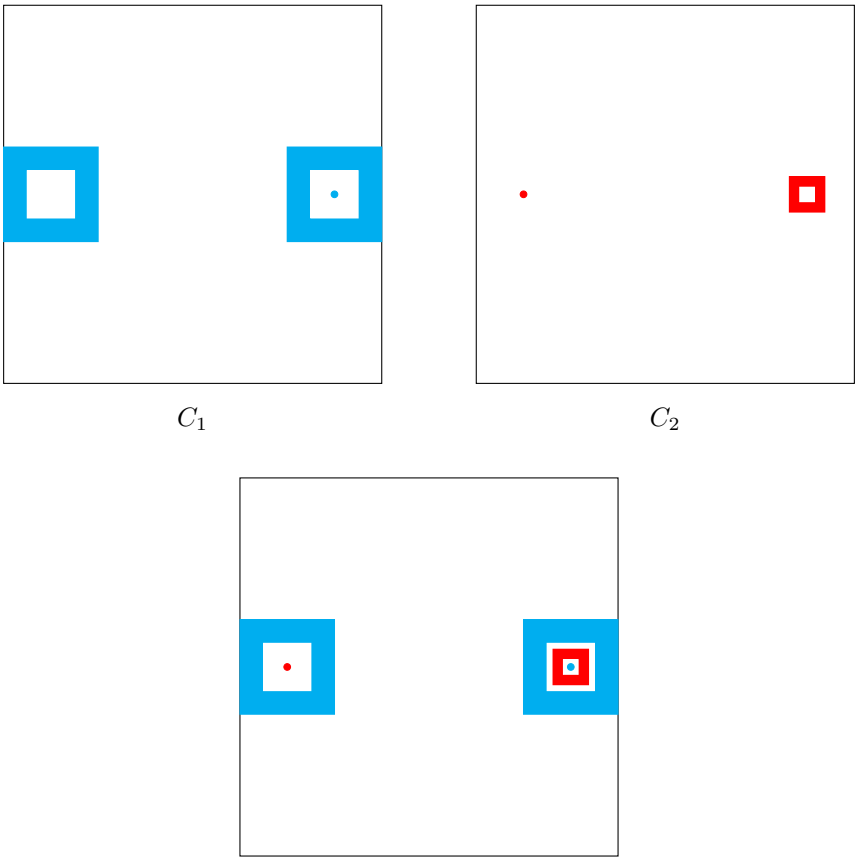

FIGURE 1. 集合 C_1 和 C_2 各自及共同都包含于 $B[0,1]$ 中，圆圈表示 x 和 $-x$处的单点集。

显然， $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ 因此，我们需要求出 C_1 和 C_2 的厚度，并证明它们互不包含在对方的间隙中。

我们可以观察到， C_1 的间隙为 $E^1 = \mathbb{R}^n \setminus (B[x,1/4] \cup B[-x,1/4])$ 、 $G_1^1 = \mathring{B}[-x,r]$ 和 $G_2^1 = \mathring{B}[x,r] \setminus \{x\}$，而 C_2 的间隙为 $E^2 = \mathbb{R}^n \setminus (B[x,s] \cup \{-x\})$ 和 $G_1^2 = \mathring{B}[x,t]$。显然， $C_1 \setminus (C_1 \cap E^2) = \{x\}$ 且 $C_1 \cap G_1^2 = \{x\}$，因此 C_1 并不只包含在 C_2的一个间隙中。此外，$C_2 \cap G_1^1 = \{-x\}$ 且 $C_2 \cap G_1^2 = B[x,s] \setminus \mathring{B}[x,t]$，因此 C_2 并不只包含在 C_1的一个间隙中。
现在我们求出它们相对于矩阵 A 的大小。可以观察到， $S_A(G_1^1) = S_A(G_2^1)$ 满足 $\min_j\{\beta_{jj}\}^{1/S_A(G_1^1)} = r$，因为此时矩形 $A^{1/S_A(G_1^1)}(B[0,1])$ 的所有边都比 C_1 的间隙边长，而最短边等于其中一条间隙边。因此，

$$\frac{1}{S_A(G_1^1)} = \frac{1}{S_A(G_2^1)} = \log_{\min_j\{\beta_{jj}\}}(r)$$

并且通过类似的推理， $S_A(G_1^2)$ 满足

$$\frac{1}{S_A(G_1^2)} = \log_{\min\{\beta_{jj}\}}(t).$$

注意，值 $GD_A(1, C_1) = GD_A(2, C_1)$ 满足

$$2\max\{\beta_{jj}\}^{1/GD_A(1,C_1)} = 2\max\{\beta_{jj}\}^{1/GD_A(2,C_1)} = \frac{1}{4} - r$$

因为 $\frac{1}{4} - r$ 是 C_1 在每条坐标轴上与 C_1 的无界间隙之间的有界间隙中最小的距离。因此，矩形 $A^{1/GD_A(1,\ C_1)}$ 的最长边等于这个距离。通过类似的推理，$GD_A(1, C_2)$ 满足

$$\max_j\{\beta_{jj}\}^{1/GD_A(1,C_1)} = \frac{1}{2}(s-t).$$

因此

$$\tau_A(C_1) = \log_{\min\{\beta_{jj}\}}(r) - \log_{\max\{\beta_{jj}\}}\left(\frac{1}{8} - \frac{r}{2}\right) \quad \text{and} \quad \tau_A(C_2) = \log_{\min\{\beta_{jj}\}}(t) - \log_{\max\{\beta_{jj}\}}\left(\frac{s}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

现在注意到，对于任意 s，我们都可以将 t 取得足够小，使得 $\tau_A(C_2) > 0$；此外，还可以将 r 取得足够小，使得 $\tau_A(C_1) > 0$。因此，在保证 $r > s > t$ 的前提下，我们可以找到 r、s、t，使得 $\tau_A(C_1) + \tau_A(C_2) > 0$，且 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$。

为了完成证明，我们只需指出，这个平方度量下的例子也可以推广到欧几里得度量，不过相关计算就没那么简洁了。□

推论 2.3. 存在集合 C_1、$C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$，使得任一集合都不包含在另一个集合的间隙中，$\tau(C_1)\tau(C_2) > 1$，且 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$。

证明。 这可由命题2.2 和定理 1.4推出。 □

上述命题表明，在高维中，若要利用自然的切出结构来建立间隙引理，就需要附加条件。本节重点是在附加条件下，于 $\mathbb{R}^n$ 中证明一个仿射间隙引理。

2.1. **BG 链接集对的间隙引理**。 我们尝试通过改编 Falconer 和 Yavicoli 在 [3] 中提出的技巧来证明一个间隙引理。为此，我们先给出以下定义。

定义 2.4 定义。 我们称间隙 $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ 相连，当且仅当 $U \cap V \neq \emptyset, (\partial U) \setminus V \neq \emptyset$ 和 $(\partial V) \setminus U \neq \emptyset$. 如果对于 C_1 的每个有界间隙 G^1 和 C_2 的每个有界间隙 G^2， G^1 与 G^2 相连或它们的交集为空，则称紧集 C_1 和 C_2 BG 相连。

BG 相连的集合在处理其交集性质时更为容易，因此我们先研究这类集合。为此，我们陈述并证明一个关于间隙结构的有用事实，该事实对以下证明至关重要。

引理 2.5. 设 A 是一个对角矩阵，其对角元为 $\beta_{11}, \ldots, \beta_{nn} \in (0, 1)$。若 $C \subseteq B[0, 1]$ 是一个紧集，且 $\tau_A(C) \in (-\infty, \infty]$，那么要么间隙只有有限个，要么 $\lim_{k\to\infty} S_A(G_k) = \lim_{k\to\infty} \text{diam}(G_k) = 0$。

证明. 反设存在一个集合 C，它有无限多个间隙，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $S_A(G_k) \geq c$，其中某个 $c > 0$成立。对每个 $k \in \mathbb{N}$，取某个 $x_k \in G_k$，并注意到$S_A(\{x_i, x_k\}) \geq GD_A(k, C)$ 对每个 $i < k$ 都成立。我们可以观察到，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $i < k$，由于$GD_A(k, C) > 0$，因此有

$$\tau_A(C) - \frac{1}{c} \leq \tau_A(C) - S_A(G_k)^{-1} \leq -GD_A(k, C)^{-1}.$$

因此， $0 < GD_A(k, C)^{-1} \leq 1/c - \tau_A(C)$，于是

$$0 < (1/c - \tau_A(C))^{-1} \leq GD_A(k, C) \leq S_A(\{x_i, x_k\}).$$

最后我们注意到，如果存在常数 M，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和每个 $i < k$，值 $S_A(\{x_i, x_k\}) > M$，那么序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 没有收敛子序列，因为 $S_A(F)$ 与 $\text{diam}(F)$ 相连。这与 $\mathbb{R}^n \setminus C$ 的序列紧性矛盾。□

以下是一项技术结果，它最终会在 BG 链接仿射间隙引理的证明中导出矛盾。为使证明尽可能简洁明了，我们将其单独列出。

引理 2.6. 设 A 是一个对角矩阵，其元素为 $\beta_{11}, \ldots, \beta_{nn} \in (0, 1)$，并设 $C_1, C_2 \subseteq B[0, 1]$ 是非空紧集，使得 C_1, C_2 与 $\tau_A(C_1) + \tau_A(C_2) > 0$ BG 相连。进一步假设 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$，并且存在 C_1 的有界间隙 G^1，使得 $\partial G^1 \not\subseteq E^2$，以及 C_2 的有界间隙 G^2，使得 $\partial G^2 \not\subseteq E^2$。

在这些假设下，存在一个对序列 $(G^1_{s_i}, G^2_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$，其中包含相连有界间隙，使得对于 $i \in \mathbb{N}$、t_i，$s_i \in \mathbb{N}$，此外，或者 $s_{i+1} = s_i$ 和 $t_{i+1} > t_i$，或者 $s_{i+1} > s_i$ 和 $t_{i+1} = t_i$。另外，至少有一个满足：$\text{diam}(G^1_{s_i}) \to 0$ 或者 $\text{diam}(G^2_{t_i}) \to 0$，如 $i \to \infty$所述。

证明。令 $(G_k^1)_{k\in J_1}$，E^1 和 $(G_k^2)_{k\in J_2}$，E^2 分别为 C_1 和 C_2 的间隙。令 $\tau_1=\tau_A(C_1)$ 和$\tau_2=\tau_A(C_2)$。注意到，$\tau_1+\tau_2>0$ 意味着二者均不取 $-\infty$ 的值。

注意，对于 $s\in J_1$ 和 $t\in J_2$，以下条件不可能同时成立：

$$GD_A(s,C_1)\le S_A(G_t^2)\quad\text{and}\quad GD_A(t,C_2)\le S_A(G_s^1). \tag{8}$$

因为如果两者都成立，那么

$$GD_A(s,C_1)^{-1}\ge S_A(G_t^2)^{-1}\quad\text{and}\quad GD_A(t,C_2)^{-1}\ge S_A(G_s^1)^{-1},$$

这意味着

$$S_A(G_s^1)^{-1}-\tau_1\ge S_A(G_t^2)^{-1}\quad\text{and}\quad S_A(G_t^2)^{-1}-\tau_2\ge S_A(G_s^1)^{-1}.$$

结合这些不等式，我们将得到

$$S_A(G_s^1)^{-1}-\tau_1-\tau_2\ge S_A(G_s^1)^{-1},$$

这将导致矛盾，因为 $\tau_1+\tau_2>0$。

现在，我们将通过归纳法构造一个由有界相连间隙组成的对序列 $(G_{s_i}^1,\ G_{t_i}^2)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于 $i\in\mathbb{N}$，t_i，$s_i\in\mathbb{N}$，此外，要么 $s_{i+1}=s_i$ 和 $t_{i+1}>t_i$，要么 $s_{i+1}>s_i$ 和 $t_{i+1}=t_i$。

首先，我们将定义 $(G_{s_1}^1,\ G_{t_1}^2)$。反设不存在相连有界间隙对；因此，由于 C_1 和 C_2 是 BG 相连的，对于 C_1的每个有界间隙 G^1 以及 C_2 的每个有界间隙 G^2，它们的交集都为空。考虑 C_1 的间隙 G^1，其中 $\partial G^1\not\subseteq E^2$；根据我们的假设，这样的间隙存在。由于 $C_1\cap C_2=\emptyset$，我们有

$$\emptyset\neq\partial G^1\setminus E^2\subseteq\bigcup_{j\in J_2}G_j^2.$$

现在，对某个 $x\in\partial G^1\setminus E^2$，由于 $\bigcup_{j\in J_2}G_j^2$ 是开集，存在 $r>0$ 使得 $\mathring{B}[x,r]\subseteq\bigcup_{j\in J_2}G_j^2$。此外，根据边界的定义，$\mathring{B}[x,r]\cap G^1\neq\emptyset$。因此

$$G^1\cap\bigcup_{j\in J_2}G_j^2\neq\emptyset.$$

这就产生了矛盾，因为对所有 $j\in J_2$，都有 $G^1\cap G_j^2=\emptyset$。因此，存在一对相连有界间隙。将这对间隙记为 $(G_{s_1}^1,\ G_{t_1}^2)$。

给定 $k\in\mathbb{N}$，并令 $(G_{s_k}^1,\ G_{t_k}^2)$ 为 C_1 和 C_2 的一对递归定义的相连有界间隙。由于 $(G_{s_k}^1,\ G_{t_k}^2)$ 是相连间隙，因此存在某个 $x\in\partial G_{s_k}^1\setminus G_{t_k}^2$；又由于 $x\in\partial G_{s_k}^1$ 蕴含 $x\in C_1$，所以存在 C_2 的一个间隙 V，使得 $x\in V$。集合 $(G_{s_k}^1,V)$ 相交。用同样的论证可知，存在 $y\in\partial G_{t_k}^2\setminus G_{s_k}^1$ 以及 C_1 的间隙 U，使得 $y\in U$。同样，集合 $(U,\ G_{t_k}^2)$ 相交。

若 $GD_A(s_k,\ C_1)>S_A(G_{t_k}^2)$，注意到由于 $(G_{s_k}^1,\ G_{t_k}^2)$ 是链接集，且 $GD_A(s_k,\ C_1)>S_A(G_{t_k}^2)$，我们有 $G_{t_k}^2$ 的闭包与 E_1 或 G_i^1 均不相交，其中 $i=1,\ \ldots,\ s_k-1$ 任意。因此，先前定义的 $y\in U$ 满足 $y\in\partial G_{t_k}^2\setminus G_{s_k}^1\subseteq(\bigcup_{i=1}^{s_k}G_i^1\cup E_1)^C\cap C_1^C$，故为一个有界间隙。在此情形下，令 $(G_{s_{k+1}}^1,\ G_{t_{k+1}}^2)=(U,\ G_{t_k}^2)$，并注意到 $s_{k+1}>s_k$ 和 $t_{k+1}=t_k$ 均如所需；此外，由于这些集合相交且有界，它们是相连的。

若 $GD_A(s_k,\ C_1)\le S_A(G_{t_k}^2)$，我们注意到，根据（8），有 $GD_A(t_k,\ C_2)>S_A(G_{s_k}^1)$，因此，通过与上述类似的论证可知 V 是一个有界间隙。在这种情况下，我们令 $(G_{s_{k+1}}^1,\ G_{t_{k+1}}^2)=(G_{s_k}^1,\ V)$，并注意到 $s_{k+1}=s_k$ 和 $t_{k+1}>t_k$ 满足要求。此外，由于这些集合相交且有界，它们是相连的。

现在我们已定义序列 $(G_{s_i}^1,\ G_{t_i}^2)_{i\in\mathbb{N}}$，接下来验证 $\operatorname{diam}(G_{s_i}^1)\to 0$ 或 $\operatorname{diam}(G_{t_i}^2)\to 0$至少有一个成立。注意，所定义的序列意味着至少有一个间隙集合是可数的。下面分两种情形验证这一断言：

情形（I）：J_1 和 J_2 是可数的。在这种情况下，根据引理2.5，$\operatorname{diam}(G_k^1)\to 0$ 且 $\operatorname{diam}(G_k^2)\to 0$，因为 $k\to\infty$。此外，根据构造，至少有一个 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ 或 $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ 无限次增大，因此 $\operatorname{diam}(G_{s_k}^1)$ 和 $\operatorname{diam}(G_{t_k}^2)$ 中至少有一个趋于零。

情形（II）：集合 J_1、J_2 中有一个是有限的。我们有 $(s_k)\subseteq J_1$，$(t_k)\subseteq J_2$，且根据构造，要么$s_{i+1}=s_i$ 和 $t_{i+1}>t_i$，要么 $s_{i+1}>s_i$ 和 $t_{i+1}=t_i$。结合 J_1 或 J_2 中有一个是有限的这一事实可知，存在某个足够大的 $K\in\mathbb{N}$，使得对每个 $k\ge K$，$s_{k+1}=s_K$ 和 $t_{k+1}>t_k$，或者

$s_{k+1} > s_k$ 并且 $t_{k+1} = t_K$ 对每个 $k \geq K$。因此，$(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ 或 $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ 会无限次增大，因此根据引理 2.5，$\operatorname{diam}(G^1_{s_k})$ 和 $\operatorname{diam}(G^2_{t_k})$ 中有一个趋于零。□

命题 2.7（BG 链接仿射间隙引理）。设 A 是一个对角矩阵，其元素为 $\beta_{11}, \ldots\ldots, \beta_{nn} \in (0, 1)$，设 C_1, $C_2 \subseteq B[0,1]$ 是一对 BG 链接集合，并且存在 G^1 的有界间隙 C_1，使得 $\partial G^1 \not\subseteq E^2$，以及 C_2 的 G^2，使得 $\partial G^2 \not\subseteq E^1$。若 $\tau_A(C_1) + \tau_A(C_2) > 0$，则 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$。

证明。反设 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$。我们满足定理 2.6 的条件，因此存在一个对序列 $(G^1_{s_i}, G^2_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$，其中的元素是相连有界间隙，满足 $i \in \mathbb{N}$，t_i，$s_i \in \mathbb{N}$；此外，或者 $s_{i+1} = s_i$ 且 $t_{i+1} > t_i$，或者 $s_{i+1} > s_i$ 且 $t_{i+1} = t_i$。另外，$\operatorname{diam}(G^1_{s_i}) \to 0$ 或 $\operatorname{diam}(G^2_{t_i}) \to 0$ 中至少有一个满足 $i \to \infty$。

不妨设 $\operatorname{diam}(G^1_{s_i}) \to 0$。取 $x_k \in \partial G^1_{s_k} \subseteq C_1$ 和 $y_k \in G^1_{s_k} \cap \partial G^2_{t_k} \subseteq C_2$，我们有 $d(x_k, y_k) \leq \operatorname{diam}(\tilde{G}^1_{t_k})$，因此

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\tilde{G}^1_{t_k}) = 0. \tag{9}$$

注意，点 y_k 存在，因为如果 $G^1_{s_k} \cap \partial G^2_{t_k} = \emptyset$，那么 $G^1_{s_k} \cap \overline{\partial G^2_{t_k}} = \emptyset$，因为 $\partial G^1_{s_k} \cap \partial G^2_{t_k} = \emptyset$。因此，对于 $z \in \overline{G^1_{s_k}}$，我们有 $z \in G^2_{t_k}$ 或 $z \notin \overline{G^2_{t_k}}$。所以，由于 $G^1_{s_k} \cap G^2_{t_k} \neq \emptyset$，我们有

$$\overline{G^1_{s_k}} \supsetneq \overline{G^1_{s_k}} \setminus G^2_{t_k} = \overline{G^1_{s_k}} \setminus (\overline{G^1_{s_k}} \cap G^2_{t_k}) = \overline{G^1_{s_k}} \setminus \overline{G^2_{t_k}} = \overline{G^1_{s_k}} \setminus (\overline{G^1_{s_k}} \cap \overline{G^2_{t_k}}). \tag{10}$$

我们可以注意到，由于 $G^1_{s_k}$ 是道路连通的，因而也是连通的，它的闭包 $\overline{G^1_{s_k}}$ 是连通的，因此其在子空间拓扑下的开闭集只有它自身和空集。由式（10）可见，$\overline{G^1_{s_k}} \setminus G^2_{t_k}$ 是开闭集，而 $G^1_{s_k}$ 则不是，因此 $G^1_{s_k} \setminus G^2_{t_k} = \emptyset$，所以 $G^1_{s_k} \subseteq G^2_{t_k}$，这与它们是链接集矛盾。

因此，由于 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_1$ 存在一个收敛子序列 $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ 使得 $x_{k_j} \to x \in C_1$ 当 $j \to \infty$ 时。此外，根据公式（9），子序列 $(y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_2$ 满足 $y_{k_j} \to x$，因此 $x \in C_2$。因此，$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ 从而得出矛盾。

总之，假设 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ 以及定理中的条件，则意味着 $C_1 \cap C \neq \emptyset$。这与假设矛盾，因此 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$。□

BG 间隙引理是一个强有力的工具，但相连有界间隙这一条件相当严格。在单位区间中，可以将一对紧集 C_1 和 C_2 转化为一对 BG 相连的集合 C_1，C_2 而不降低厚度，并且满足 $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_2$。这正是证明 Newhouse 间隙引理的方法。不幸的是，在高维情况下还需要更多考量，正如定理 2.2所示。这促成了下面的定义。

定义 2.8。设 A 为一个对角矩阵，其元素为 β_{11}、……、$\beta_{nn} \in (0, 1)$。如果存在紧集 C_1、$C_2 \subseteq B[0,1]$，使得以下条件成立，则称紧集 C_1、$C_2 \subset B[0,1]$ 的有序对是矩阵 A 的强可细化对：

(1) C_1 和 C_2 是 BG 相连集。(2) 存在 $\tilde{C}_1$ 的有界间隙 $\tilde{G}^1$，使得 $\partial\tilde{G}^1 \not\subseteq \tilde{E}^2$，以及存在 $\tilde{C}_2$ 的有界间隙 $\tilde{G}^2$，使得 $\partial\tilde{G}^2 \not\subseteq \tilde{E}^1$。(3) $\tau_A(C_1) + \tau_A(C_2) \geq \tau_A(C_1) + \tau_A(C_2)$。(4) $C_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cap C_2$。

因此，我们可以重述定理 2.7，从而得到引言中所述的间隙引理。

定理 2.9（仿射间隙引理）。设 A 是一个对角矩阵，其元素为 $\beta_{11}, \ldots, \beta_{nn} \in (0, 1)$，并设 C_1, $C_2 \subseteq B[0,1]$ 是一个非空紧强可细化对。若 $\tau_A(C_1) + \tau_A(C_2) > 0$，则 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$。

证明。由于 C_1 和 C_2 构成一个强可细化对，因此存在紧集 C_1, C_2 满足定理 2.7的条件。于是 $\emptyset \neq C_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cap C_2$。□

2.2. **强可精细性的一个条件**。 我们现在来确定一类合理的强可细化对，使得仿射间隙引理可以应用于其中。我们注意到，这一类应当易于验证；事实上，易用性正是间隙引理的优势之一。下面的引理是迈向这一类的第一步，它证明了当间隙包含在其他间隙中时，我们可以将其移除，同时保留所需的条件。

引理 2.10。 设 A 为一个对角矩阵，其元素为 β_{11}、……、$\beta_{nn} \in (0, 1)$，并设 C_1，$C_2 \subseteq B[0,1]$ 为非空紧集。存在紧集 C_1' 和 C_2'，使得以下结论成立：

- $C_1 \cap C_2 = C_1' \cap C_2'$;
- $\tau_A(C_1') + \tau_A(C_2') \geq \tau_A(C_1) + \tau_A(C_2)$;
- 不存在 C_1' 的有界间隙 $G^{1\prime}$，使得对于 $\overline{C_2'}$ 的任意有界间隙 $G^{2\prime}$，$G^{1\prime} \subseteq G^{2\prime}$；并且不存在 C_2' 的有界间隙 $G^{2\prime}$，使得对于 $\overline{C_1'}$ 的任意有界间隙 $G^{1\prime}$，$G^{2\prime} \subseteq G^{1\prime}$。

证明。 考虑集合 C_1，其间隙为 E^1、$(G^1{}_k)_{k\in J_1}$，以及集合 C_2，其间隙为 E^2、$(G^2{}_k)_{k\in J_2}$。令

$$C_1' = C_1 \cup \bigcup_{j\in J_2} \bigcup_{\substack{i\in J_1:\\ \overline{G_i^1}\subseteq G_j^2}} G_i^1.$$

显然，C_1' 是 $B[0,1]$ 和 $C_1' \cap C_2 = C_1 \cap C_2$的紧子集。此外，$C_1'$ 中不存在有界间隙 $G^{1\prime}$，使得对于 C_2 中的任意有界间隙 G^2，都有 $G^{1\prime} \subseteq G^{2\prime}$，因为满足这一条件的 C_1 的间隙已被移除。此外，由于我们只移除了间隙，因此有 $\tau_A(C_1') \geq \tau_A(C_1)$。
考虑集合 C_1'，其间隙为 $E^{1\prime}$、$(G^{1\prime}{}_k)_{k\in J_1'}$，以及集合 C_2，其间隙为 E^2、$(G^2{}_k)_{k\in J_2}$。我们令

$$C_2' = C_2 \cup \bigcup_{j\in J_1'} \bigcup_{\substack{i\in J_2:\\ \overline{G_i^2}\subseteq G_j^{1\prime}}} G_i^2.$$

再次显然，C_1''是 $B[0,1]$和 $C_1' \cap C_2' = C_1 \cap C_2$的紧子集。此外，$C_2'$ 中不存在有界间隙$G^{2\prime}$，使得对于 C_1' 中的任意有界间隙 G^1，都有 $G^{2\prime} \subseteq G^{1\prime}$，因为满足这一条件的 C_2' 的间隙已被移除。此外，由于我们只移除了间隙，因此有 $\tau_A(C_2') \geq \tau_A(C_2)$。□

利用此引理可以得到以下一类有用的强可细化对。

Pro命题 2.11. 设 $C_1, C_2 \subset B[0,1]$ 是一对满足以下条件的紧集 :

- 存在 C^1 的有界间隙 G^1 和 C_2 的有界间隙 G^2，使得 G^1 不包含于 C_2 的某个间隙中，且 G^2 不包含于 C_1的某个间隙中；此外，$\partial G^1 \not\subseteq E^2$ 和 $\partial G^2 \not\subseteq E^1$。
- 对于 C_1 的任意有界间隙 G^1 和 C_2 的任意有界间隙 G^2，若 $\partial G^1 \subseteq G^2$，则 $G^1 \subseteq G^2$；若 $\partial G^2 \subseteq G^1$，则 $G^2 \subseteq G^1$。

在这些条件下，C_1 和 C_2 构成一对强可细化对。

备注 2.12。 需要指出的是，当间隙是单连通时，第二个条件便得到满足。这对于一大类曲奇切割集合都很有用，其中包括某些 Bedford-McMullen 地毯。

证明。 注意到 C_1' 和 C_2' 在定理2.10 中构造的集合显然满足定理 2.8的条件 (3) 和 (4)。此外，根据命题中的第二个条件，对于有界间隙 G^1 和 G^2，如果$\partial G^1 \subseteq G^2$，则有 $G^1 \subseteq G^2$；如果 $\partial G^2 \subseteq G^1$，则有 $G^2 \subseteq G^1$。因此，C_1' 和 C_2' 是 BG 相连的，因为从 C_1 和 C_2 中移除了边界位于另一个有界间隙中的任一间隙。

最后注意到，我们的第一个条件意味着在集合 C_1 和 C_2 中存在满足条件 (2) 的间隙，这些间隙在构造 C_1' 和 C_2' 的过程中不会被移除，因为它们不包含在有界间隙中。因此，集合 C_1 和 C_2 是强可细化的。□

我们完成本节的讨论，提出一些关于高维空间中间隙引理的小问题 ns.

- 定理 2.11 给出了一对紧集可强细化的充分条件。这些条件可以削弱到什么程度?
- 不满足定理 2.11 的集合类中，是否包含众所周知的分形集实例?

3. Affine thickness and the matrix potential game

势博弈由 [4] 提出，并在 [1]中定义了一个定量变体。在 [5],中，作者、Mitchell 和 Samuel 定义了势博弈的一种变体，称为矩阵势博弈，用于研究自仿射集的模式和交集，定义如下。这项工作补充并拓展了 Yavicoli 等人在 [3, 11, 12], 中的研究；他们在该研究中引入了 Newhouse 厚度的若干变体，并证明某些具有正厚度的集合在势博弈中是获胜的。本节中，作者针对仿射矩阵意义下的厚度给出了补充结果 A。

注意，本节中我们只考虑平方度量。

定义 3.1. 设 A 是一个对角（$n\times n$）矩阵，其对角元素为 $\beta_{11},\dots,\beta_{nn}\in(0,1)$。给定$\rho_1\geq\rho_2>0$、$\alpha>0$和 $c\in[0,1)$，$(\alpha,A,c,\rho_2,\rho_1)$ 势博弈按以下规则进行，玩家 II 可以选择跳过自己的回合：

- 在第一回合中，玩家 I 选择一个满足 $\rho_1\geq r\geq\rho_2$ 的闭集 $U_1=A(B[0,r])+b_1$。
- 在第一回合中，玩家 II 通过选择一组元组作出回应
$$\mathcal{A}(U_1)=\{(q_{i,1},y_{i,1}):q_{i,1}\in\mathbb{R}\text{ with }q_{i,1}\geq1,y_{i,1}\in\mathbb{R}^n\text{ and }i\in I_1\},$$
其中 I_1 是一个至多可数的指标集。这定义了删除集
$$\bigcup_{\substack{(q_{i,1},y_{i,1})\\ \in\mathcal{A}(U_1)}}(A^{q_{i,1}}(B[0,r])+y_{i,1}),$$
该条件将用于定义博弈结束时的获胜条件。如果 $c>0$，那么玩家 II 的集合必须满足
$$\sum_{i\in I_1}\prod_{j=1}^{n}(\beta_{jj}^{q_{i,1}})^c\leq\left(\alpha\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}\right)^c.$$
如果 $c=0$，那么玩家 II 只能选择一个满足以下条件的有序对 $(q_{1,\ 1},\ y_{1,\ 1})$:
$$\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}^{q_{1,1}}\leq\alpha\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}.$$
- 对于每个 $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$，玩家 I 在其第 m 回合中选择一个闭集 $U_m=A^m(B[0,r])+b_m$，使得 $U_m\subseteq U_{m-1}$。
- 在其第 m 回合中，玩家 II 通过选择一个元组集合作出回应
$$\mathcal{A}(U_m,\dots,U_1)=\{(q_{i,m},y_{i,m}):q_{i,m}\in\mathbb{R}\text{ with }q_{i,m}\geq1,y_{i,m}\in\mathbb{R}^n\text{ and }i\in I_m\},$$
其中 I_m 是一个至多可数的指标集。这定义了删除集
$$\bigcup_{\substack{(q_{i,m},y_{i,m})\\ \in\mathcal{A}(U_m,\dots,U_1)}}(A^{q_{i,m}}(B[0,r])+y_{i,m}).$$
如果 $c>0$，那么玩家 II 的集合必须满足
$$\sum_{i\in I_m}\prod_{j=1}^{n}(\beta_{jj}^{q_{i,m}})^c\leq\left(\alpha\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}^{m}\right)^c.$$
若 $c=0$，则玩家 II 只能选择满足以下条件的一对 $(q_{1,\ m},\ y_{1,\ m})$:
$$\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}^{q_{1,m}}\leq\alpha\prod_{j=1}^{n}\beta_{jj}^{m}.$$

根据构造，存在唯一一点 x_∞，满足 $\{x_\infty\}=\cap_{m\in\mathbb{N}}U_m$，称为博弈结果；此外，还存在一个删除区域，
$$\mathrm{Del}(\mathcal{A}(U_1),\mathcal{A}(U_1,U_2),\dots)=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{\substack{(q_{i,m},y_{i,m})\\ \in\mathcal{A}(U_m,\dots,U_1)}}(A^{q_{i,m}}(B[0,r])+y_{i,m}).\tag{11}$$
我们称集合 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个 $(\alpha,\ A,\ c,\ \rho_2,\ \rho_1)$-获胜集，如果玩家 II 拥有一种策略，能够确保若 $x_\infty\notin\mathrm{Del}(\mathcal{A}(U_1)\ \mathcal{A}(U_1,\ U_2)\dots)$，则 $x_\infty\in S$。

下面的 以下引理 [5, 引理 3.3 和引理 3。4] 是矩阵势博弈的性质：

引理 3.2（单调性）。设 A 是一个对角（$n\times n$）矩阵，其对角元素为 $\beta_{11},\dots,\beta_{nn}\in(0,1)$,$\rho_1\geq\rho_2>0$, $\alpha\in(0,1]$ 和 $c\in[0,1)$。如果 S 是一个（α,A,c,ρ_2,ρ_1）-获胜集，那么对于满足 $\alpha\leq\alpha'$, $c'\geq c$, $\rho_2\leq\rho_2'\leq\rho_1'\leq\rho_1$ 的 α',c',ρ_2', ρ_1'，集合 S 是一个（$\alpha',A,c',\rho_2',\rho_1'$）-获胜集。

引理 3.3（可数交）。设 A 是一个对角（$n\times n$）矩阵，其对角元素为$\beta_{11},\dots,\beta_{nn}\in(0,1)$。设 $\{S_j\}_{j\in J}$ 是一个至多可数的集合族，使得对每个 $j\in J$，集合 S_j 都是一个（$\alpha_j,A,c,\rho_2,\rho_1$）-获胜集，且 $c>0$。如果 $\alpha=(\sum_{j\in J}(\alpha_j)^c)^{1/c}$ 是有限的，那么 $S=\cap_{j\in J}S_j$ 是一个（α,A,c,ρ_2,ρ_1）-获胜集。

我们现在证 明厚集在矩阵势博弈中是获胜集，因此可以将该结果应用于 ts
[5] 厚 集。

命题 3.4. 设 A 是一个对角矩阵，其元素为 $\beta_{11},\dots,\beta_{nn}\in(0,1)$，并设 $C\subseteq B[0,1]$ 是一个间隙为 $(G_k)_{k\in J}$ 且满足 E的紧集。若 $\tau_A(C)\notin\{-\infty,\infty\}$，则 $C\cup E$ 在矩阵势博弈中是 $(\alpha_{\tau_A(C)}A,0,1,1)$-获胜的，其中 $\alpha_{\tau_A(C)}=\prod_{j=1}^n\beta_{jj}^{\tau_A(\quad C\ -1\ )}$。

注释 3. 5. 我们排除 $\tau_A(C)=\infty$ 的情况，因为这意味着 E 是唯一的连通分支 的连通分支，因此 $E\cup C=\mathbb{R}^n$。所以，无需考虑这些集合。

证明。 我们定义一条一般规则，并证明这是玩家 II 的获胜策略。设 $U_m=A^m(B[0,r])+b_m$ 是玩家 I 进行的博弈的 m^{th} 步，并注意到 $r\in[\rho_2,\rho_1]$。如果存在 $i\in J$ 使得 U_m 与 G_i 相交，且 $k>GD_A(i,C)^{-1}$，则对于所有 $k<i$ 和 $U_m\cap E=\emptyset$.，有 $U_m\cap G_k=\emptyset$。因此，如果这是一个合法的进行，玩家 II 删除集合 $\mathcal{A}(U_m)=\{(S_A(G_i)^{-1},z)\}$，其中 z 满足 $A^{S_A(G_i)^{-1}}(B[0,1])+z\supset G_i$；其存在性由 $S_A(G_i)$ 的定义保证。否则，玩家 II 跳过其回合。

为验证玩家 II 的获胜策略，假设 $x_\infty\notin\text{DEL}(\mathcal{A}(U_1)\dots)$，并反设 $x_\infty\notin C\cup E$，因此存在一个间隙 G_i，满足 $x_\infty\in G_i$。注意，由于对所有 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $x_\infty\in U_m$，且 $\tau_A(C)\neq-\infty$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于所有满足 $k\geq N$ 的 $k\in\mathbb{N}_0$，都有 $k>GD_A(i,C)^{-1}$；并且对于所有满足 $k<N$ 的 $k\in\mathbb{N}_0$，都有 $k\leq GD_A(i,C)^{-1}$。因此，在博弈的第 N^{th} 回合，U_N 与 G_i 相交，且 $N>GD_A(i,C)^{-1}\geq N-1$；然而，集合 G_i 并未被删除，因此根据玩家 II 的策略，着法 $\mathcal{A}(U_N)=\{(S_A(G_i)^{-1},z)\}$，其中 z 满足 $A^{S_A(G_i)^{-1}}(B[0,1])+z\supset G_i$，是不合法的。

然而，我们可以观察到

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^n\beta_{jj}^{S_A(G_i)^{-1}}&=\prod_{j=1}^n\left(\beta_{jj}^{S_A(G_i)^{-1}-GD_A(i,C)^{-1}+GD_A(i,C)^{-1}}\right)\\&\leq\prod_{j=1}^n\left(\beta_{jj}^{\tau_A(C)+GD_A(i,C)^{-1}}\right)\leq\prod_{j=1}^n\left(\beta_{jj}^{\tau_A(C)+N-1}\right)=\alpha\prod_{j=1}^n\beta_{jj}^N.\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{A}(U_m)$ 是一个合法的对局，而玩家 II 的策略要求将其删除。这是一个矛盾 。因此$x_\infty\in C\cup E$ 因此，玩家 II 的策略是获胜策略。 □

4. Intersections and pattern properties in sets with large thickness

在 [5] 中，作者 Mitchell 和 Samuel 针对平方度量 $d_\infty(x,\ y)=\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}$下矩阵势博弈的获胜集给出了维数估计。基于这一估计，他们得出了关于获胜集的一些有趣的结构性结果，而厚集是获胜集的一个子类。因此，我们可以将这些结果改述为关于厚集的结果。请注意，本节必须限于平方度量，以下所有结果也都是针对这一度量陈述的。

若存在 $\lambda>0$ 使得 $\cap_{i=1}^M(S-\lambda b_i)\neq\emptyset$，我们称集合 S 包含 的位似副本，其中 $M\in\mathbb{N}$，通常称为模式。仅凭豪斯多夫维数无法证明模式的存在；事实上，存在一些满豪斯多夫维数集，它们避开模式 [6, 7]。集合族中的模式存在性已得到充分研究，例如参见 [1, 2, 3, 5, 8, 9, 11, 12]。我们将这项研究扩展到讨论仿射厚度较大的集合中的模式。

定理 4.1。给定 $n \in \mathbb{N}$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量，并令 A 为对角元素为 $\beta_{11}, \dots, \beta_{nn} \in (0, 1/5)$ 的对角（$n \times n$）矩阵，设 $\beta_{\max} = \max_j \beta_{jj}$。令 $C \subseteq B[0,1]$ 为具有间隙（G_k）$_{k \in J}$ 且 E的紧子集。此外，$\tau_A(C) \notin \{-\infty, \infty\}$。

令 $\alpha_{\tau_A(C)} = \prod_{j=1}^n \beta_{jj}^{\tau_A(C)-1}$。如果存在 c，$\delta \in (0,1)$ 和 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$M\alpha_{\tau_A(C)}^c \le \delta^2 \left(1 - \left(\prod_{j=1}^n \beta_{jj}\right)^{1-c}\right) \quad \text{and} \quad 3^{-n} \prod_{j=1}^n (1 - 5\beta_{jj}^{\lfloor \delta (M^{1/c} \alpha_{\tau_A(C)})^{-1} \rfloor}) > 8^n (1 + 2^{2n+1})\delta. \quad (12)$$

于是，对于至多含有 M个元素的有限非空集 F，$y \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\lambda \in (0, (1-\beta_{\max})/\text{直径}(F))$，存在一个非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，使得对所有 $x \in X$都有 $\lambda F + x \subseteq (C \cup E) \cap B[y,1]$。此外，如果

$$M\alpha_{\tau_A(C)}^c \le \min\{\delta^2, K_M^{-1} n \log \beta_{\max}^{-1}\} \left(1 - \left(\prod_{j=1}^n \beta_{jj}\right)^{1-c}\right),$$

其中

$$K_M = 2\delta^{-1} \left| \log \left(3^{-n} \prod_{j=1}^n (1 - 5\beta_{jj}^{\lfloor \delta (M^{\frac{1}{c}} \alpha_{\tau_A(C)})^{-1} \rfloor}) - 8^n (1 + 2^{2n+1})\delta \right) \right|,$$

那么 $\dim_H(X) \ge n - K_M \alpha_{\tau_A(C)} (|\log(\beta_{\max})|)^{-1} > 0$。

证明。该结果由定理 3.4 和 [5, 定理 6。1]。 □

除了关于模式的结果之外，我们还可以利用可数交性质，为研究集合交集提供一个有用的工具。这是因为豪斯多夫维数在交集下并不保持稳定。

定理 4.2。给定 $n \in \mathbb{N}$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量，并设 A 为一个对角（$n \times n$）矩阵，其对角元素为 $\beta_{11}, \dots, \beta_{nn} \in (0, 1/5)$。此外，设 I 为至多可数集，并对每个$i \in I$，设 $C_i \subseteq B[0,1]$ 为一个具有间隙（$G_k^{(i)}$）$_{k \in J_i}$ 和 $E^{(i)}$的紧集。此外，对每个 $i \in I$，$\tau_A(C_i) \notin \{-\infty, \infty\}$。

令 $C = \cap_{i \in I}(C_i \cup E^{(i)})$ 和 $\alpha_{\tau_A(C_i)} = \prod_{j=1}^n \beta_{jj}^{\tau_A(C_i)-1}$。若存在 α，c，$\delta \in (0, 1)$，使得 $\alpha^c = \sum_{i \in I} \alpha_{\tau_A(C_i)}^c$ 且

$$\alpha^c \le \delta^2 \left(1 - \left(\prod_{j=1}^n \beta_{jj}\right)^{1-c}\right) < 1 \quad \text{and} \quad 0 < \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{3}(1 - 5\beta_{jj}^{\lfloor \delta \alpha^{-1} \rfloor})\right) - 8^n (1 + 2^{2n+1})\delta, \quad (13)$$

那么，对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，都有 $C \cap \big(A(B[0,1]) + y\big) \neq \emptyset$。此外，

$$\dim_H \big(C \cap \big(A(B[0,1]) + y\big)\big) \ge \max\left\{n - K_1 \frac{\alpha}{|\log(\beta_{\max})|}, 0\right\}.$$

证明。此结果由定理 3.4 和 [5, 推论 6。7]。 □

5. An example: Self-Affine Sierpinski carpets

我们以自仿射谢尔宾斯基地毯为例，讨论第4节的结果。请注意，本节中我们始终使用平方度量。对于向量 $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n$，其中每个 $r_i \ge 3$ 均为奇数，我们通过将 $B[0,1]$ 划分为沿 i^{th} 坐标轴边长为 $2r_i^{-1}$ 的 $r_1 \cdots r_n$ 个盒子，构造 r 自仿射谢尔宾斯基地毯。随后移除中间的盒子，并在每个保留下来的盒子中无限重复这一过程。此外，这也可以实现为迭代函数系 $\{f_j : j \in J\}$的吸引子，其中：

$$J = \left\{\underline{j} : j_i \in [1, r_i] \cap \mathbb{N} \text{ and } j_i \neq \frac{1}{2}(r_i + 1)\right\} \text{ and } f_{\underline{i}}(x) = \left(\frac{x_1 + i_1}{r_i} - 1, \dots, \frac{x_n + i_n}{r_n} - 1\right).$$

令 r 为固定值，令 $\beta_{jj} = 1/r_j$ 为对角矩阵 A_r 的对角元素，并给定 $t \in (0,1)$。设 $A = A_r^t$。我们可以观察到，自仿射谢尔宾斯基地毯 r Self-affine Sierpinski carpet C_r 的间隙具有如下形式：$A^k(\mathring{B}[0,1])$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，这些就是缺失的中心矩形。考虑构造的第 k^{th} 阶段中的一个间隙 G_j，我们有 $S_A(G) = \frac{t}{k}$，因为 $G = A^k(\mathring{B}[0,1]) + z$，其中某个 z 存在。此外，我们可以观察到，在坐标轴 i^{th} 上，G 与最近的间隙之间至少有 $1\,2(r_i - 1)$ 个形如 $A^k(B[0,1])$ 的盒子。因此，对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们有 $q = GD_A(j, C)$ 满足

$$\frac{r_i - 1}{r_i^k} \geq \frac{2}{r_i^{t/q}}$$

此外，对于某些 $i \in \{1, \dots, n\}$，这里等号成立，因此

$$GD_A(j, C)^{-1} = \frac{k}{t} - \frac{1}{t} \min\left\{\log_{r_i}\left(\frac{r_i - 1}{2}\right)\right\} > 0.$$

因此，$S_A(G_j)^{-1} - GD_A(j, C_{\underline{r}})^{-1} = t^{-1} \min_{i \in \{1,\dots,n\}}\{\log_{r_i}((r_i - 1)/2)\}$，从而

$$\tau_A(C_{\underline{r}}) = t^{-1} \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \left\{\log_{r_i}\left(\frac{r_i - 1}{2}\right)\right\}.$$

由此以及3.4定理，注意到谢尔宾斯基地毯的无界连通分支是$\mathbb{R}^n \setminus B[0,1]$，我们有 $C_{\underline{r}} \cup (\mathbb{R}^n \setminus B[0,1])$ 是 $(\alpha(\underline{r}, t)$ $A^t_{\underline{r}}$，0，1，$1)$–获胜的，其中

$$\alpha(\underline{r}, t) = \prod_{i=1}^{n} r_j^{t(1 - \tau_{A^t_{\underline{r}}}(C_{\underline{r}}))} = \prod_{i=1}^{n} r_j^{t - \min_{i \in \{1,\dots,n\}}\left\{\log_{r_i}\left(\frac{r_i - 1}{2}\right)\right\}}.$$

现在我们可以应用4.1 定理，并确定 $C_{\underline{r}} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus B[0,1]) \cap B[0,1] = C_{\underline{r}}$ 是否包含某些 r 值的模式；只需证明存在一个 $\delta \in (0,\ 1)$，使得 (12) 中的不等式成立，其中 $\alpha = \alpha(r,\ t)$。使用数值方法，我们得到如下结果。

- 当 $r = (2_{22},\ 2_{23})$ 时，我们发现 $C_{\underline{r}}$ 包含每个至多含有 37 个元素的集合的位似副本。
- 当 $r = (2_{20},\ 2^{21} + 2^{20})$ 时，我们发现 $C_{\underline{r}}$ 包含每个至多含有 3 个元素的集合的位似副本。
- 当 $r = (2_{30},\ 2_{20})$ 时，我们发现 $C_{\underline{r}}$ 包含每个至多含有 463 个元素的集合的位似副本。
- 当 $r = (2_{30},\ 2_{28})$ 时，我们发现 $C_{\underline{r}}$ 包含每个至多含有 223241 个元素的集合的位似副本。

Acknowledgements

作者感谢 Kenneth Falconer 和 Alexia Yavicoli 在撰写本文期间进行的有益讨论。他还感谢 Andrew Mitchell 和 Tony Samuel 提供意见，并感谢工程与物理科学研究委员会（EPSRC）博士培训合作项目以及伯明翰大学提供的资金支持。

References

[1] Ryan Broderick、Lior Fishman 和 David Simmons。《使用 Schmidt 博弈变体的定量结果：维数界、等差数列及其他》。载于：《Acta Arith.》188.3（2019），第 289–316 页。[2] Vincent Chan、Izabella Łaba 和 Malabika Pramanik。《稀疏集中的有限构型》。载于：《J. Anal. Math.》128（2016），第 289–335 页。[3] Kenneth Falconer 和 Alexia Yavicoli。《$\mathbb{R}^d$中的厚紧集交集》。载于：《Math. Z.》301.3（2022），第 2291–2315 页。[4] Lior Fishman、David Simmons 和 Mariusz Urbański。《丢番图逼近与 Gromov 双曲度量空间中极限集的几何》。载于：《Mem. Amer. Math. Soc.》254（2018）。[5] Richard A. Howat、Andrew Mitchell 和 Tony Samuel。《矩阵势博弈与自仿射集的结构》。2025 年。arXiv：2508.11577 [math.DS]. URL: https://arxiv.org/abs/2508.11577。[6] Tamás Keleti。《实数中的一个一维子集，其与自身任意平移集的交集至多为单点》。载于：《Real Anal. Exch.》24.2（1999），第 843–844 页。[7] Tamás Keleti。《不含给定模式的相似副本的实数一维子集构造》。载于：《Anal. PDE》1.1（2008），第 29–33 页。

[8] Izabella Łaba 和 Malabika Pramanik。《分数维集合中的等差数列》。载于 《几何与泛函分析》19.2（2009），第 429–456 页。[9] Ursula Molter 和 Alexia Yavicoli。《包含任意模式的小集合》。载于 《剑桥哲学学会数学学报》168.1（2020），第 57–73 页。[10] S. E. Newhouse。公理 A(a) 的非稠密性 S^2。英文。整体分析，《纯粹数学研讨会论文集》14，191–202（1970）。1970 年。[11] Alexia Yavicoli。《厚紧集中的模式》。载于 《以色列数学杂志》244.1（2021），第 95–126 页。[12] Alexia Yavicoli。《 $\mathbb{R}^d$中的厚度与间隙引理》。载于 《国际数学研究通知》19（2023），第 16453–16477 页。