arXiv:2601.16947v1 [math.AT] 23 Jan 2026

偏序集上条形码的豪斯多夫稳定性

Mujtaba Ali、Tom Needham、Anastasios Stefanou、Ling Zhou

2026年1月26日

摘要

Chazal 等人和 Lesnick 的等距定理是持久性理论中的一项基本结果，它指出，两个单参数持久模之间的交错距离等于其条形码之间的瓶颈距离。人们为将这一结果推广到定义在更一般偏序集上的模付出了大量努力。由于这些模通常无法进行良好的分解，因此必须将注意力限制在区间可分解模这一类上，才能定义适当的瓶颈距离概念。即使作出这一假设，已知瓶颈距离也未必等价于交错距离，但在某些相当严格的假设下，它具有 Lipschitz 稳定性。本文探讨一个更基本的问题：对于区间可分解模，豪斯多夫距离关于交错距离的稳定性。我们的主定理是一项 Lipschitz 稳定性结果，它适用于相当一般的情形：任意偏序集上的区间可分解模，其中的区间取自满足某些闭包条件的任意族。在此过程中，我们还为任意偏序集上的区间可分解模建立了一些新的工具和结果，通过具有几何特色的刻画，描述区间模之间态射和交错存在的条件。

1 引言

交错距离在拓扑数据分析中发挥着核心作用，因为它提供了一种规范且函子性的方式，用于比较由数据产生的持久模，例如持久同调模 [20,17]。与直接定义在条形码或模的其他离散不变量上的距离不同，交错距离是在持久模本身的层面上定义的，因此不依赖于任何选定的分解。这使其具有完全的一般适用性，尤其适用于无法获得完备离散不变量的多参数情形。最重要的是，交错距离与稳定性紧密相关：对于输入数据的自然扰动，例如滤过上的 ℓ^∞-距离，以及由此得到的持久模上的交错距离，持久同调都是 1-Lipschitz 的。因此，交错距离被广泛视为持久性理论中理论上正确的距离概念，并作为衡量其他不变量和度量稳定性的基准。

尽管交错距离在概念上具有这些优点，但从计算角度来看，它并不是条形码的理想度量。尤其是，即便将范围限制在区间可分解模上，计算交错距离仍然是 NP-困难的 [7]。然而，实践中使用的任何条形码替代度量，都应与基于交错距离的稳定性结果相容。尤其是，任何源自多重滤过持久同调的有意义的条形码度量，都应相对于交错距离具有 Lipschitz 稳定性。

这一要求源于交错距离的最优性 [30]。首先，持久同调关于滤过上的 ℓ^∞-距离以及同调模上的交错距离是 1-Lipschitz 的。其次，持久模上的任何其他距离，若相对于持久同调具有这一 1-Lipschitz 稳定性，则必然是交错距离的下界。因此，尽管替代性的条形码度量可能具有更好的计算可处理性，但只有在受交错距离控制时，它们才能在有意义的意义上保持稳定。

从这一视角来看，多参数持久性中的一个核心未解问题，是找到一种关于条形码的距离，它既能根据输入数据在多项式时间内计算，又能相对于交错距离满足 Lipschitz 稳定性。在单参数情形下，已知瓶颈距离等于交错距离

, [30], 但要将其推广到定义在更一般偏序集上的模，就必须将注意力限制在区间可分解模上（因为定义在任意偏序集上的模不一定存在区间分解；见 [10]）。即使在这一假设下，已知当 $n \geq 2$ [9] 时，定义在偏序集 $\mathbb{R}^n$ 上的模的广义瓶颈距离相对于交错距离并不稳定。然而，两个重要猜想探讨了在对区间施加额外结构假设后能否恢复稳定性。***Botnan– Lesnick*** 猜想 预测，对于区间为几何凸的 $\mathbb{R}^n$-模，条形码满足 Lipschitz 稳定性； [9, 5], 而***Bjerkevik*** 猜想 [6] 则提出，当区间被要求为上集时，也能得到相同结论。我们注意到，这两个猜想都涉及重要的 $\mathcal{F}$-可分解模类，其中 $\mathcal{F}$ 表示一个在有限交下封闭的选定区间族。

受上述问题和猜想的启发，我们考虑一个更基本的问题。对于区间可分解模，可以定义模之间广义的豪斯多夫距离，并将其视为瓶颈距离的一种松弛（见定义 4.10）。本文的主要结果如下。该结论使用 d_{H} 表示豪斯多夫距离，使用 d_{I} 表示交错距离；要在一般偏序集上定义它，需要引入流 的概念——见第 4.1 节。

定理。设 $(\mathcal{P},\Omega)$ 是一个配备了 $\mathbb{R}$-流的偏序集，并设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一个区间族，它包含空区间，对交集封闭，并且在 Ω 的作用下封闭。设 $M, N\colon \mathcal{P} \to \mathbf{Vect}_K$是两个区间可分解 $\mathcal{P}$-模，其条形码分别为 $B(M)$ $B(N) \subset \mathcal{F}$。那么

$$d_{\mathrm{H}}(M, N) \leq 2 \cdot d_{\mathrm{I}}(M, N).$$

为了说明这一结果的背景，我们将其与 Bjerkevik 的一个定理进行比较 [3], 该定理指出，若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的矩形族，且 $B(M)$ $B(N) \subset \mathcal{F}$，则 $d_{\mathrm{B}}(M, N) \leq (2n - 1) \cdot d_{\mathrm{I}}(M, N)$，其中 d_{B} 表示瓶颈距离。虽然我们的结果采用了较弱的度量 d_{H}，但它适用于更一般的偏序集和区间族，并且涉及一个绝对的（例如，与维数无关的）Lipschitz 常数。

本文工作的一个主要动机，是为上述 Botnan-Lesnick 猜想和 Bjerkevik 猜想提出一种研究方法。证明这些猜想之所以困难，源于瓶颈距离本质上具有全局性。稳定性要求在整个参数范围内构造彼此相容的完整区间之间的匹配，而不能仅依赖逐点或局部的匹配。相比之下，纤维条形码上的局部概念（例如匹配距离 [18, 28] ）更易处理，因为将问题限制到 $\mathbb{R}^n$ 中正斜率的直线上后，便可归结为单参数持久性问题，而此时存在典范的最优匹配。然而，要使这类局部匹配诱导出区间分解的全局匹配，进而得到瓶颈距离界，就必须能够将所有纤维上的相容匹配族提升为单个区间全局匹配。这个相容性问题极具挑战性，也是建立关于交错距离的瓶颈稳定性的根本障碍。从这一角度看，为一般偏序集上的区间可分解模建立豪斯多夫稳定性，提供了一种更灵活且在几何上更自然的替代方案。

在单参数情形中，所有模都是交封闭的；Chazal 等人 [20] 首先观察到豪斯多夫距离与瓶颈距离在局部相等。这种局部等价性在 Chazal 等人的开创性稳定性结果中发挥着核心作用：他们结合豪斯多夫控制，以及交错距离在持久模空间上定义了测地度量这一事实，得到了瓶颈稳定性 [20]。在未来的工作中，我们计划应用主定理，将这一方法推广用于研究更一般的偏序集模的瓶颈稳定性结果。

最后，除了具有理论意义之外，建立凸区间可分解模和上集可分解模的条形码的稳定性结果也尤为重要，因为它们具有具体的应用。例如，文献 [36, 23] 最近引入了蠕虫这一概念——其条形码中的区间由 $\mathbb{R}^n$ 中某些几何凸区域组成；这些蠕虫源自他们在 ***GRIL*** 算法中对单参数持久景观 [14], 的某种推广。上集可分解模也自然出现在持久性理论和相对同调代数的若干场景中；参见 [6, 1, 8, 11, 12, 19,34, 29]。因此，在这些情形下，关于适当度量的条形码 Lipschitz 稳定性，相对于以交错距离衡量的扰动，保证了这些工作所提出的不变量具有稳健性。

2 偏序集上的模

本节介绍与偏序集理论以及偏序集上的持久模相关的概念。这里的材料都是标准内容，本节主要用于设定记号。如需了解该领域的更多背景知识，可参阅例如 [13, 5, 33]。

2.1 偏序集与区间

我们将任意偏序集 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \leq)$ 称为一个偏序集。我们将偏序集 $\mathcal{P}$ 视为一个范畴，其对象是 $\mathcal{P}$ 的元素，而其态射由偏序定义：当且仅当 $p \leq q$时，才存在从对象 p 到对象 q 的一个（唯一）态射。

定义 2.1 （偏序集中的区间）。 称子集 $I \subset \mathcal{P}$ 为

1. 若对于每一对点 $p, q \in I$ 满足 $p \leq q$，任意满足 $p \leq r \leq q$ 的 $r \in \mathcal{P}$ 都必须满足$r \in I$，则称其为偏序凸；

2. 若对于每一对点 $p, q \in I$，在 I中存在一条从 p到q的路径 ——也就是说，存在一个点序列 $r_1, \ldots, r_{2n} \in I$ 满足以下条件，则称其为偏序连通 （或简称连通）；

$$p \leq r_1 \geq r_2 \leq r_3 \geq \cdots \leq r_{2n-1} \geq r_{2n} \leq q.$$

若 I 同时是偏序凸且偏序连通的，则称 I 为一个区间。

注 2.2. 根据定义， 空集是 $\mathcal{P}$ 的一个区间。我们将其称为空区间。

不要将偏序连通性与拓扑意义上的连通性混淆。不过，我们经常借用拓扑术语。例如，如果子集 $U \subset \mathcal{P}$ 偏序连通，且关于包含关系极大——也就是说，若 $V \subset P$ 连通且$V \cap U \neq \varnothing$，则 $V \subset U$——则称其为 $\mathcal{P}$ 的（偏序）连通分支 。

例 2.3. 由 n-元实数元组组成的偏序集 $(\mathbb{R}^n, \leq_n)$ 配备了逐坐标偏序

$$(t_1, t_2, \ldots, t_d) \leq_n (s_1, s_2, \ldots, s_d) \Leftrightarrow t_i \leq s_i, \text{ for any } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

为简便起见，在含义明确时，我们通常用 $\leq$表示 $\leq_n$ 。

我们注意到， $\mathbb{R}^2$ 中的非零有限斜率线段不是区间。具体而言，正斜率线段违反偏序凸性，而负斜率线段违反偏序连通性。图1展示了这些现象，以及 $\mathbb{R}^2$ 中区间与非区间的示例（更多示例见图3）。



(a) (b)

图1： $\mathbb{R}^2$中的示例：(a) 区间，以蓝色表示；(b) 非区间，以红色表示。

现在我们给出一个关于偏序集中的区间的简单而有用的结构性结果。虽然每个子偏序集都能唯一地划分为连通分支，但我们证明，如果子偏序集满足偏序凸性公理（即定义 2.1 的第1项），那么它的连通分支本身就是区间。这些称为该子偏序集的区间分支 。

引理2.4。 设 $\mathcal{P}$ 是一个偏序集，且 $U \subset \mathcal{P}$ 是偏序凸的。那么， U 的每个连通分支都是一个区间。因此，U 有唯一的划分 $U = \bigsqcup_{a \in \mathcal{A}} Q_a$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个指标集，且每个Q_a 都是 U的非空区间分支。

证明。 设 Q 是 U的一个连通分支。由于根据假设 Q 是偏序连通的，我们只需证明 Q 是偏序凸的。取 p, $q \in Q \subset U$ 和 $r \in \mathcal{P}$ ，使得 $p \leq r \leq q$。由于 U 是偏序凸的，$r \in U$。因为 Q 是偏序连通的，对于任意点 $t \in Q$，存在一条从 t 到 p的路径，因此将其与 $p \leq r$连接后，可得到一条从 t 到 r 的路径。由此，我们得到 $Q \cup \{r\}$ 中的路径，连接 Q 的每个点与 r，因此根据 Q 的极大性可知 $r \in Q$，进而 Q 是偏序凸的。由于 Q 是偏序凸且偏序连通的，因此它是一个区间。 □

接下来，我们将经常需要考察偏序集中子集交集的性质。以下结果将会派上用场。

引理 2.5. 设 $I, J \subset \mathcal{P}$ 是偏序凸子集。那么 $I \cap J$ 也是偏序凸的。因此， $I \cap J$ 的区间分支是良定义的。

证明. 设 $p, q \in I \cap J$ 满足 $p \leq q$，并设 $r \in \mathcal{P}$ 满足 $p \leq r \leq q$。由 I 和 J 的偏序凸性可知， $r \in I \cap J$ 也成立。引理的最后一句由引理 2.4 得出。 □

偏序集态射 是偏序集之间的保序映射。如果偏序集态射是双射，且其逆映射也保序，则称其为偏序集同构。不难验证，偏序集同构保持偏序凸性和偏序连通性，因此也保持区间结构。

2.2 偏序集上的模

在本节中，固定一个偏序集 $\mathcal{P}$。我们还固定一个系数域 $\mathbb{K}$，并用 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$ 上的向量空间范畴。

定义 2.6 （$\mathcal{P}$-模）。 $\mathcal{P}$-模 是一个函子 $M : \mathcal{P} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$。具体来说， M 由以下部分组成:

- 一个以 $\mathcal{P}$ 为指标的 $\mathbb{K}$-向量空间族 M_p, $p \in \mathcal{P}$,
- 对于每个不等式 不等式 $p \leq q$ 属于 $\mathcal{P}$ 时，一个 $\mathbb{K}$-线性变换 $\varphi_M(p, q) : M_p \to M_q$，使得

$$\varphi_M(q, r) \circ \varphi_M(p, q) = \varphi_M(p, r),$$

只要 $p \leq q \leq r$ 属于 $\mathcal{P}$，且 $\varphi_M(p, p)$ 是 M_p上的恒等映射，对任意 $p \in \mathcal{P}$均成立。

一个 态射 $f : M \to N$ 上的 $\mathcal{P}$-模 是从函子 M 到函子N的自然变换 f。具体而言， f由一个以 $\mathcal{P}$为指标的线性变换族 $f_p : M_p \to N_p$, $p \in P$组成，并满足对每个 $p \leq q$，下图

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{f_p} & N_p \\ {\scriptstyle \varphi_M(p,q)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_N(p,q)} \\ M_q & \xrightarrow{f_q} & N_q \end{array}$$

交换。

若 $f : M \to N$和 $g : N \to K$是 P上的模之间的态射，则复合 $g \circ f : M \to K$与f 的 g 是逐点定义的态射

$$(g \circ f)_p \coloneqq g_p \circ f_p \text{ for all } p \in \mathcal{P}.$$

不难证明，若每个线性变换 f_p 都是线性同构，则 f 是从 M到 N的同构；也就是说，它存在逆映射 f^{-1}，定义为 $(f^{-1})_p = (f_p)^{-1}$，使得 $f \circ f^{-1}$和 $f^{-1} \circ f$是恒等函子。若存在同构 $f : M \to N$，则记作 $M \cong N$。

如果存在同构 $g : M' \to M$和 $h : N \to N'$使得 $f' = h \circ f \circ g$，我们就称态射 $f : M \to N$和 $f' : M' \to N'$等价，记作 $f \cong f'$。

2.3 区间可分解模

我们主要关注具有特殊分解结构的持久模。下面给出必要的定义。

定义 2.7 （特征模）。 对于 I 中 $\mathcal{P}$的一个区间， I的 特征 $\mathcal{P}$-模 (C): $\mathcal{P} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 定义为

$$C(I)_p \coloneqq \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{if } p \in I \\ \mathbf{0}, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \varphi_{C(I)}(p,q) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}, & \text{if } p,q \in I \\ \mathbf{0}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中， $\mathbf{0}$ 分别表示零向量空间或零线性映射， $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ 表示基域 $\mathbb{K}$上的恒等映射。持久性模 M : $(P, \leq) \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ ，若对于某个 P的区间 I，有 $M = C(I)$，则称其为区间模。在这种情况下， I是该区间模的支撑 M。对于 $I = \varnothing$，有 $C(\varnothing) = \mathbf{0}$。

定义 2.8（区间可分解模）。 若一个 $\mathcal{P}$-模 M : $\mathcal{P} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 是区间可分解 i f

$$M \cong \bigoplus_{I \in B(M)} C(I),$$

对于 $\mathcal{P}$中非空区间的多重集[1] $B(M)$，称其为 M 的条形码 。

条形码由此唯一确定（这源于 Azumaya–Krull–Remak–Schmidt 模分解定理 [2]）。

设 M， N 是区间可分解的 $\mathcal{P}$-模。任意态射 f : $M \to N$ 都等价于（在定义 2.6 的意义下）若干区间模态射的直和，即

$$f \cong \bigoplus_{(I,J) \in B(M) \times B(N)} f_{I,J}, \tag{2}$$

其中 $f_{I,J}$: $C(I) \to C(J)$ 是一个区间模态射。若 f : $M \to N$ 和 g : $N \to L$ 是区间模态射，则它们的复合态射 $g \circ f$: $M \to L$ 满足

$$(g \circ f)_{I,K} = \sum_{J \in B(N)} g_{J,K} \circ f_{I,J}, \tag{3}$$

对于任意一对 $(I, K) \in B(M) \times B(L)$ 均成立。因此，对区间可分解模的态射的研究可以归结为对区间模态射的研究。

3 区间模态射

现在我们将注意力限制在区间模上。这些模构成区间可分解模的基本构件，而理解它们的态射对于分析本文后文所发展的交错和距离概念至关重要。在本节中，我们从几何角度研究区间模之间的态射，重点强调其存在性和行为如何受偏序集中底层区间的相对位置所控制。本节的结果此前已在 $\mathbb{R}^n$ 模 [24], 的背景下出现过，但据我们所知，在拓扑数据分析文献中，对于更一般的偏序集模，尚未对这些结果进行系统研究。

3.1 区间模态射的几何刻画

在本小节中，我们给出 $\mathcal{P}$ 上区间模之间态射的几何刻画，将 Dey 和 Xin 的工作 [24] 推广到 $\mathbb{R}^n$ 上的模这一背景下。我们首先定义一个 $\mathcal{P}$ -指标线性映射族的性质。

[1]我们所说的多重集 $B(M)$，是指多重集表示 $\{(I_a, a) \mid a \in A\}$ ，其底集 $\{I_a \mid a \in A\}$ 由实数集 $\mathcal{P}$的区间组成；参见 [4]。

定义 3.1（一致映射族）。设 I，J 是 $\mathcal{P}$ 中的区间，其区间分支记为 $I \cap J$ $\{Q_a\}_{a\in\mathcal{A}}$（见引理 2.5）。若线性映射族 $f = \{f_p : C(I)_p \to C(J)_p \mid p \in \mathcal{P}\}$ 满足以下条件，则称其为相容的

1. 对于每个区间分量 Q_a 以及任意一对 p，$q \in Q_a$，都有 $f_p = f_q$，并且
2. 对于每个 $p \notin I \cap J$，f_p 都是零映射。

在这种情况下，存在一个标量 $\omega_a(f) \in \mathbb{K}$，使得对于任意 $p \in Q_a$，线性映射 $f_p : C(I)_p \to C(J)_p$在 $C(I)_p = \mathbb{K} = C(J)_p$上作用为乘以 $\omega_a(f)$。

下一个命题表明，底层映射族的相容性是任意区间模态射的必要条件。

命题 3.2. 设 I，J 是 $\mathcal{P}$ 中的区间，且 $f : C(I) \to C(J)$是一个态射。那么 $f = \{f_p\}_{p\in\mathcal{P}}$构成一个相容族。

证明。若 $I \cap J = \emptyset$，则结论显然成立，因此不妨设其不成立。由于 $f: C(I) \to C(J)$是一个态射，由自然性可得

$$\varphi_{C(J)}(p,q) \circ f_p = f_q \circ \varphi_{C(I)}(p,q) \qquad \text{for all } p \le q \text{ in } Q_a.$$

由于两个结构映射 $\varphi_{C(I)}(p,\ q)$ 和 $\varphi_{C(J)}(p,\ q)$ 在 $\mathbb{K}$ 上均为恒等映射，因此对 Q_a 中的所有 $p \le q$，都有 $f_p = f_q$。于是，对于 $p \in Q_a$，每个 f_p 都是 $\mathbb{K}$ 的线性自同态，因此可表示为乘以 $\mathbb{K}$ 中某个标量。由区间 Q_a 的偏序连通性可知，该标量与 $p \in Q_a$ 无关，因而在整个 Q_a 上保持不变。

另一方面，假设 $p \notin I \cap J$。由于 $p \notin I$ 或 $p \notin J$，我们有 $C(I)_p = 0$ 或 $C(J)_p = 0$。因此，线性映射 $f_p : C(I)_p \to C(J)_p$ 是零映射。 □

接下来，我们引入一种纯粹的偏序集理论性质，旨在提出一个几何条件，该条件等价于命题 3.2 的逆命题。

定义 3.3（有效分支 [24, 定义 15]）。设 I，$J \in \mathcal{P}$ 为区间，且 $Q \subset I \cap J$ 为一个连通分支。若对每个 $p \in Q$，以下条件均成立，则称 Q 为（I，J）-有效的：

1. 对所有满足 $q \le p$ 的 $q \in I$，我们有 $q \in J$，并且
2. 对所有满足 $r \ge p$ 的 $r \in J$，我们有 $r \in I$。

下面的结果给出了 [24, 命题 16] 的一个推广；证明相同，为方便读者起见，我们在此给出证明。

命题 3.4。设 I，J 是 $\mathcal{P}$ 中的区间，令 $\{Q_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 表示 $I \cap J$ 的区间分支，并设 $f = \{f_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个线性映射的相容族，其相应的标量记为 $\omega_a(f)$。以下各条件等价：

1. f 定义了一个态射 $C(I) \to C(J)$；
2. 对于每个满足 $\omega_a(f) \neq 0$ 的 Q_a，Q_a 都是 (I，J)-有效的。

证明。首先，假设 f 定义了一个态射，并令 Q_a 为一个连通分支，使得 $\omega_a(f) \neq 0$。令 $p \in Q_a$、$q \in I$，并假设 $q \le p$。由自然性可得

$$0 \neq f_p \circ \varphi_{C(I)}(q,p) = \varphi_{C(J)}(q,p) \circ f_q,$$

因此 $q \in J$。有效性的另一个条件可用类似的方法证明。

现在我们证明逆命题，这要求我们证明每个形如

$$\begin{array}{ccc} C(I)_q & \xrightarrow{\varphi_{C(I)}(q,p)} & C(I)_p \\ {\scriptstyle f_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_p} \\ C(J)_q & \xrightarrow{\varphi_{C(J)}(q,p)} & C(J)_p \end{array}$$

的图表都交换。我们来考虑唯一有意思的情形，即至少有一个映射非零，例如 $f_p \circ \varphi_{C(I)}(q,\ p)$（另一种情形可用类似论证证明）。此时 $\varphi_{C(I)}(q,\ p)$ 和 f_p 均非零，这立即推出 $q,\ p \in I$。此外，f 的一致性意味着 $p \in I \cap J$；特别地，p 位于某个路径连通分支 Q_a 中，因此 $f_p \circ \varphi_{C(I)}(q,\ p) = f_p \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ 是乘以非零标量 $\omega_a(f)$ 的映射。根据有效性假设，$q \in I$ 和 $q \leq p$ 共同推出 $q \in J$，从而 $q \in I \cap J$。由于 $q \leq p$，q 也必定位于路径连通分支 Q_a 中，因此 $\varphi_{C(J)}(q,\ p) \circ f_q = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \circ f_q$ 也是乘以 $\omega_a(f)$ 的映射。 □

该命题立即推出以下推论，我们将在全文中反复使用。

推论 3.5. 设 I, J 是实数集 $\mathcal{P}$ 中的区间，且 $I \cap J$ 是一个区间。那么，存在非零态射 $f\colon C(I) \to C(J)$，当且仅当 $I \cap J$ 是 (I, J)-有效的。

3.2 具有区间支撑的非零复合的几何刻画

下面给出一个判据，用于判断两个区间模之间的两个非零态射的复合是否为非零，其中区间的底层支撑满足某些条件。该判据将在后续章节中发挥作用。

命题 3.6. 设 I, J, K 是实数集 $\mathcal{P}$ 中的区间，且 $I \cap J$、$J \cap K$ 和 $I \cap K$ 均为区间。设$f\colon C(I) \to C(J)$ 和 $g\colon C(J) \to C(K)$ 是两个非零态射。那么，复合态射 $g \circ f$ 非零，当且仅当 $\varnothing \neq I \cap K \subset J$。

证明。 由于 f 和 g 非零，且 $I \cap J$、$J \cap K$ 是区间，由命题 3.2 可得

$$f_p \neq \mathbf{0} \iff p \in I \cap J, \qquad g_p \neq \mathbf{0} \iff p \in J \cap K.$$

因此 $(g \circ f)_p \neq \mathbf{0}$ 只有当 f_p 和 g_p 都非零时才可能出现，也就是说只有当 $p \in I \cap J \cap K$时才可能出现。也就是说 s,

$$\{p \in \mathcal{P} \mid (g \circ f)_p \neq \mathbf{0}\} \subseteq I \cap J \cap K.$$

若 $g \circ f \neq \mathbf{0}$，由于 $I \cap K$ 是一个区间，命题 3.2 蕴含 $\varnothing \neq \{p \in \mathcal{P} \mid (g \circ f)_p \neq \mathbf{0}\} = I \cap K$. 因此，我们有 $I \cap K \subset I \cap J \cap K$，这等价于 $I \cap K \subset J$。反过来，假设 $\varnothing \neq I \cap K \subset J$。对于任意$p \in I \cap K$，我们都有 $p \in I \cap J$和 $p \in J \cap K$，因此由命题 3.2 可知，f_p和 g_p 都是非零标量映射。因此，$(g \circ f)_p = g_p \circ f_p \neq \mathbf{0}$，从而 $g \circ f \neq \mathbf{0}$。

□

注记 3.7。 注意，如果 $g \circ f \neq 0$，那么必然有 $f \neq 0$、$g \neq 0$ 和 $I \cap J \neq \varnothing$。人们可能会问，逆命题是否成立，即在这些假设下，附加条件 $I \cap K \subset J$ 对于确保 $g \circ f$ 非零是否是多余的。事实并非如此。确实，存在这样的例子：$f \neq 0$、$g \neq 0$ 且 $I \cap K \neq \varnothing$，但除非施加额外关系 $I \cap K \subset J$，否则 $g \circ f = 0$。图 2 展示了这样一个例子。

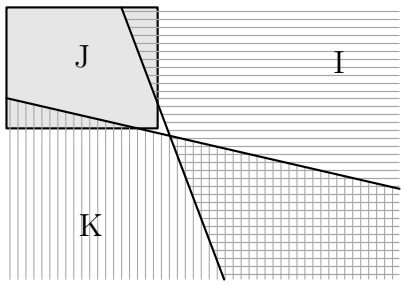


图 2： $g \circ f = 0$的一个示例，其中 $0 \neq f\colon C(I) \to C(J)$，$0 \neq g\colon C(J) \to C(K)$。这里，每个 f_p 都是在 $I \cap J$ 上的恒等映射，在其他地方为零；每个 g_p 都是在 $J \cap K$ 上的恒等映射，在其他地方为零，但它们的复合 $g_p \circ f_p$ 始终为零。

4 区间可分解模上的距离

现在我们回到区间可分解的 $\mathcal{P}$-模。在这一背景下，我们回顾偏序集上的 $\mathbb{R}$-流，以及交错距离、瓶颈距离和豪斯多夫距离的定义。众所周知，这些距离是扩展伪度量[2]；参见关于 $\mathcal{P}$-模的 [20, 25] 。

4.1 偏序集上的流

本节定义 $\mathcal{P}$-模之间交错距离的概念。在 $\mathbb{R}$-模的背景下，这一定义可追溯至 [20]。此后，它已成为交错距离文献中的常见概念，并得到了广泛推广 [15, 13, 22, 35, 31]。就我们的目的而言，在具有流框架的范畴 [22]中开展研究最为自然。

我们首先定义偏序集上的 $\mathbb{R}$-流的概念。就我们的目的而言，我们将偏序集上的流视为 $\mathbb{R}$-作用，而非 $[0,\infty)$-作用；这正是我们所设想的应用所涉及的相关情形。

定义 4.1 （$\mathbb{R}$-流）。 设 $\mathcal{P}$ 为一个偏序集。 $\mathcal{P}$ 上的 $\mathbb{R}$-流 是由偏序集映射 $\Omega = \{\Omega_t \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\}_{t\in\mathbb{R}}$组成的族，满足

1. 对所有 $t \le s$ 属于 $\mathbb{R}$ 和 $p \in \mathcal{P}$，$\Omega_t(p) \le \Omega_s(p)$，2. 对所有 $t,\ s \in \mathbb{R}$，$\Omega_{t+s} = \Omega_t \circ \Omega_s$，
3. $\Omega_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$。

例 4.2. 具有 $\mathbb{R}$-流的偏序集的主要范例是带有对角平移的实数 n-元组偏序集。回顾式 (1) 中 $\mathbb{R}^n$ 上的偏序结构。对每个 $t \in \mathbb{R}$， $\mathbb{R}^n$ 上的 t-作用 Ω_t 定义为

$$\begin{gathered}\Omega_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 + t, a_2 + t, \ldots, a_n + t) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \le (b_1, b_2, \ldots, b_n) \mapsto (a_1 + t, a_2 + t, \ldots, a_n + t) \le (b_1 + t, b_2 + t, \ldots, b_n + t).\end{gathered}$$

于是我们很容易验证，$\Omega \coloneqq (\Omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上构成一个 $\mathbb{R}$-流。

我们将 I 的 $\mathcal{P}$ 的 t-平移 定义为

$$I(t) \coloneqq \{p \in \mathcal{P} \mid \Omega_t(p) \in I\} = \Omega_{-t}(I).$$

例 4.3. 偏序集 $\mathcal{P}$ 的所有非空子集按包含关系排序，并结合 Ω_{-t} 对这些子集的作用（对所有 $t \in \mathbb{R}$），构成了另一个具有 $\mathbb{R}$-流的偏序集范例。

下面的命题确立了 $\mathbb{R}$-流的一些有用性质。

命题 4.4。 如果 Ω 是一个 $\mathbb{R}$-流，那么对于每个 $t \in \mathbb{R}$，函子 $\Omega_t \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是偏序集同构。

证明。 固定 $t \in \mathbb{R}$。由于 $\mathbb{R}$ 是一个群， $-t \in \mathbb{R}$，并且根据 $\mathbb{R}$-流法则

$$\Omega_t \circ \Omega_{-t} = \Omega_{t+(-t)} = \Omega_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, \qquad \Omega_{-t} \circ \Omega_t = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}.$$

因此，$\Omega_t \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是双射，其逆映射为 Ω_{-t}。

如果 $x \le y$，那么 Ω_t 的保序性给出 $\Omega_t(x) \le \Omega_t(y)$。反之，如果 $\Omega_t(x) \le \Omega_t(y)$，那么应用保序映射 Ω_{-t} yields

$$x = \Omega_{-t}(\Omega_t(x)) \le \Omega_{-t}(\Omega_t(y)) = y.$$

因此 $x \le y \iff \Omega_t(x) \le \Omega_t(y)$，所以 Ω_t 是一个偏序集同构。 □

[2]满足度量公理但取值于 $[0,\infty]$ 的函数称为扩展度量；此外，如果允许不同的点之间的距离为零，则称为扩展伪度量。

命题　定理 4.5。设 $I \subset \mathcal{P}$。那么，I 是 $\mathcal{P}$ 中的一个区间，当且仅当 $I(t)$ 是 $\mathcal{P}$中的一个区间　.

证明。根据命题 4.4，每个映射 $\Omega_t : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 都是偏序集同构。由于 $I(t) = \Omega_{-t}(I)$ 且 $I = \Omega_t(I(t))$，由偏序集同构保持偏序凸性和偏序连通性，进而保持区间结构这一事实，可得所述结论。

□

命题 4.6。设 I, J 分别是 $\mathcal{P}$ 和 $t \in \mathbb{R}$中的区间。那么，$I \cap J$ 是区间，当且仅当 $I(t) \cap J(t)$ 是区间。

证明。根据定义 2.1，$I \cap J$ 是区间，当且仅当它是偏序凸且偏序连通。由于偏序结构在平移下保持不变，$I \cap J$ 是偏序凸（分别地，偏序连通），当且仅当 $I(t) \cap J(t)$ 是偏序凸（分别地，偏序连通）。因此，$I \cap J$ 是区间，当且仅当 $I(t) \cap J(t)$ 是区间。 □

本节余下部分中，我们固定一个带有 $\mathbb{R}$-流的偏序集（$\mathcal{P}$，Ω）。

4.2 交错距离

我们定义 $\mathcal{P}$-模上的平移函子和转移态射，它们由 $\mathbb{R}$-上的流 Ω 诱导，然后定义 $\mathcal{P}$-模上相应的交错距离。

定义 4.7（平移函子与转移态射）。对于 $t \in \mathbb{R}$，我们定义平移函子 $(\cdot)(t) : \mathsf{Vect}_K^{\mathcal{P}} \to \mathsf{Vect}_K^{\mathcal{P}}$ 如下：对于 M，给定一个 $\mathcal{P}$-模，我们令 $M(t)$ 为满足以下条件的 $\mathcal{P}$-模：对所有 $p \in \mathcal{P}$，有 $M(t)_p := M_{\Omega_t(p)}$；对所有属于 $\mathcal{P}$ 的 $p \le q$，有 $\varphi_{M(t)}(p,q) := \varphi_M(\Omega_t(p), \Omega_t(q))$。对于 $\mathsf{Vect}_K^{\mathcal{P}}$ 中的态射 f，我们通过令 $f(t)$ 满足 $f(t)_p := f_{\Omega_t(p)}$ 来定义它。

对于 M 一个 $\mathcal{P}$-模 ule 和 $\delta \ge 0$，令 δ-转移态射 $\varphi_M^\delta : M \to M(\delta)$ 为态射 whos　e 到 M 的限制　$_p$ is 对所有 $p \in \mathcal{P}$，$\mathbb{K}$-线性映射 $\varphi_M(p, \Omega_\delta(p))$。

若 M 是区间可分解的，则 M 的 δ-转移态射 φ_M^δ 为

$$\varphi_M^\delta = \bigoplus_{I,I' \in B(M)} \delta_{I,I'} \cdot \varphi^\delta_{C(I)}, \qquad \text{where} \qquad \delta_{I,I'} := \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{if } I = I' \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{4}$$

这里，$1_{\mathbb{K}}$ 和 $0_{\mathbb{K}}$ 分别表示域 $\mathbb{K}$中的恒等映射和零元素。

现在我们记录平移函子的一些基本性质。以下结论显然成立。

引理 4.8. 平移函子具有以下性质：

1. 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 以及实数集 $\mathcal{P}$ 中的任意区间 I，都有 $(C(I))(t) = C(I(t))$,
2. 对任意区间模 $\mathcal{P}$ 的态射 $f : C(I) \to C(J)$ 以及任意 $t \in \mathbb{R}$，平移后的态射 $f(t)$ 非零，当且仅当 f 非零,
3. 对任意区间可分解实数集模 $\mathcal{P}$ M 以及任意 $t \in \mathbb{R}$，条形码满足 $B(M(t)) = \{I(t) \mid I \in B(M)\}$,
4. 对任意态射 $f \cong \bigoplus f_{I,\ J}$，区间可分解实数集模 $\mathcal{P}$ M 与 N 之间，以及任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$(f(t))_{I(t),J(t)} \cong (f_{I,J})(t).$$

最后，我们引入实数集模之间的交错距离这一概念。

定义 4.9（交错距离 [13]）。设 M, N 是一对 $\mathcal{P}$-模。

- 如果存在一对态射 $f : M \to N(\varepsilon)$ 和 $g : N \to M(\varepsilon)$，使得这些三角形满足以下条件，则称 M, N 是 ε-交错的



可交换。

• 我们称有序对 (M, N) 为左（右） ε-交错，如果存在一对态射$f\colon\ M \to N(\varepsilon)$ 和 $g\colon\ N \to M(\varepsilon)$，使其满足左（右）图表。

• 两个 M 和 N 之间的交错距离 定义为

$$d_{\mathrm{I}}(M, N) \coloneqq \inf\{\varepsilon \geq 0 |\ M, N \text{ are } \varepsilon\text{-interleaved}\}$$

如果对于任意 $\varepsilon \geq 0$， M， N 和 ε都不 ∞-交错，则定义它们的交错距离为 ∞。

4.3 豪斯多夫距离和瓶颈距离

现在回顾区间可分解 $\mathcal{P}$-模之间的豪斯多夫距离和瓶颈距离的概念。豪斯多夫距离是几何和拓扑学中广泛使用的工具，我们的定义是通常概念的一个实例（例如，参见 [27, 16]）。瓶颈距离最初出现于单参数持久同调的背景下（即针对 $\mathbb{R}$-模）——见 [26, 21]——此后已推广为我们下面讨论的版本 [5]。

在本小节中，固定这样的模 M和 N。回顾一下，我们将它们的条形码 $B(M)$和 $B(N)$视为多重集。

定义 4.10 （ε-对应、豪斯多夫距离和瓶颈距离）。 设 $\varepsilon > 0$。子多重集$\sigma \subset B(M) \times B(N)$称为 ε-对应 ，如果

• 对于每个（I， J） $\in \sigma$， C（I）和 C（J）是 ε-交错的;

• 如果 $I \in B$（M）不属于 σ中的任何有序对，那么 C（I）与零模是 ε-交错的;

• 如果 $J \in B$（N）不属于 σ中的任何有序对，那么 C（J）与零模是 ε-交错的,

其中，以上各项均按重数计算。我们将 M 与 N 之间的豪斯多夫距离定义为

$$d_{\mathrm{H}}(M, N) \coloneqq \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{there exists an } \varepsilon\text{-correspondence between } M \text{ and } N\}.$$

如果 σ 满足上述条件以及以下条件，我们就称其为 ε-匹配

•对于每个 $I \in B$（M），至多存在一个 $J \in B$（N），使得（I， J） $\in \sigma$;

•对于每个 $J \in B(N)$，至多存在一个 $I \in B(M)$，使得 $(I,\ J) \in \sigma$,

这里再次约定，以上关系均按重数计算。于是， M 与 N之间的瓶颈距离 定义为

$$d_{\mathrm{B}}(M, N) \coloneqq \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{there exists an } \varepsilon\text{-matching between } M \text{ and } N\}.$$

注 4.11. 考虑度量空间 $(X,\ d_{\mathrm{I}})$，其中 X 是 $\mathcal{P}$上的区间模集合。记零模为$\mathbf{0}$，可以验证，定义 4.10 中豪斯多夫距离的定义等价于通常的豪斯多夫距离概念（由 $(X,\ d_{\mathrm{I}})$ 诱导），即这两个集合之间的距离

$$\{C(I) \mid I \in B(M)\} \cup \{\mathbf{0}\} \quad \text{and} \quad \{C(J) \mid J \in B(N)\} \cup \{\mathbf{0}\};$$

这里我们指的是底层的集合，而不是多重集。另见 [32, 引理 3.1]。

由于 ε-匹配是 ε-对应的特殊情形，立即可得以下界。

命题 4.12. 对于任意一对区间可分解的 $\mathcal{P}$-模 M, N，我们有

$$d_{\mathrm{H}}(M, N) \leq d_{\mathrm{B}}(M, N).$$

5 交集封闭区间族

我们将注意力限制在区间可分解的 $\mathcal{P}$-模上，其组成区间属于一个关于交集封闭的区间族 $\mathcal{F}$。在此设定下，我们用纯几何术语刻画区间模之间交错的存在性，具体而言，就是通过它们的区间交集结构来刻画。

尽管我们在此的结果可以推广到一般的区间可分解 $\mathcal{P}$-模——只需考察任意区间交集的区间分支——但我们聚焦于交集封闭的情形，因为这类区间族与我们计划研究的交错最为相关。关于完整的区间可分解情形（特别是偏序集 $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ 上的交错）的相应刻画，请参阅 [24]。

5.1 交集封闭区间族

一般而言，偏序集 $\mathcal{P}$ 中一对区间的交集要么是空集，要么是不交并的区间。然而，存在一些区间族，其中任意有限族区间的交集仍是一个区间或空集。

定义 5.1（区间族的性质）。 若区间族 $\mathcal{F}$ 中的区间满足以下条件，则称其为：

- 交集封闭：若对任意一对区间 I， $J \in \mathcal{F}$，其交集 $I \cap J$ 都是 $\mathcal{F}$ 中的一个区间。
- 在 Ω 的作用下封闭，如果对于 $\mathcal{F}$ 中的任意区间 I 以及任意 $t \in \mathbb{R}$，$\Omega_t(I) \in \mathcal{F}$。

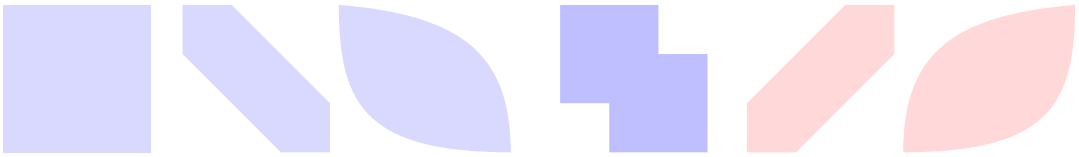
例 5.2。 $\mathcal{P}$ 中交集封闭区间族的例子有

- $\mathcal{P}$ 中的上集族，
- $\mathcal{P}$ 中的下集族，
- 区间族（假设 $\mathcal{P}$ 是全序集），
- $\mathbb{R}^n$ 中的几何凸区间族，其中 $n \geq 2$ （将在下文给出精确定义），
- $\mathbb{R}^{op} \times \mathbb{R}$的子偏序集 $\mathbb{U} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^{op} \times \mathbb{R} \mid a \leq b\}$ 中的区间族，

  $\mathbb{Z}^{op} \times \mathbb{Z}$的子偏序集 $\mathbb{ZZ} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^{op} \times \mathbb{Z} \mid a = b$ 或 $a = b + 1\}$ 中的区间族，

  对于 $n \geq 2$， $\mathbb{Z}^n$中的矩形族。

可以验证，上述前五个区间族在各自偏序集-$\mathbb{R}$-流作用于其区间时也保持封闭。如果我们将 $\mathcal{F} :=$**Int**$(\mathcal{P})$ 取为 $\mathcal{P}$中的所有区间组成的区间族，那么它不一定是交封闭的，也不一定在偏序集-$\mathbb{R}$-流 Ω 作用于区间时保持封闭（例如，对于$\mathcal{P} := \mathbb{R}^2$）。



(a) (b) (c)

图 3：(a) $\mathbb{R}^2$中的几何凸区间。(b) $\mathbb{R}^2$ 中一个非几何凸区间。(c) $\mathbb{R}^2$ 中不是区间的几何凸子集。

现在我们将关注 一类特别自然的区间族。在 $\mathbb{R}$中， （几何）凸区间
^{n}中，我们指的是一个偏序集区间
$\mathbb{R}^n$， 它是拓扑开集，并且作为 $\mathbb{R}^n$的子集是几何凸的。

命题5.3。 设 $I \subset \mathbb{R}^n$ 非空、开且几何凸。那么 I 是偏序连通的。特别地，如果 I 和 J 是 $\mathbb{R}^n$中的凸区间，那么它们的交集 $I \cap J$ 要么为空，要么是一个凸区间。

证明。固定 $p,\ q \in I$。如果 p 和 q 可比较，那么 $p \le q$ 或 $q \le p$，因此一步路径 $p \le q$ （或 $q \le p$）包含于 I 中，结论成立。以下设 p和 q 不可比较。

线段 pq 包含于 I中（根据几何凸性），且是紧致的。对每个 $x \in pq$，令$\rho(x) := \operatorname{dist}_\infty(x, \mathbb{R}^n \setminus I)$，表示 ℓ^∞到 I的补集的距离。由于 ρ在紧致集 pq上连续且为正，根据极值定理，它能取到一个正的最小值 $\varepsilon > 0$。因此，对每个$x \in pq$，开球 $B_\infty(x, \varepsilon)$ 都包含于 I中。

将 pq划分为 K个等长子线段，端点为 $p = p_0, p_1, \dots, p_K = q$，其中 K选取得足够大，使得对所有 $i = 1, \dots, K$， $d_\infty(p_{i-1}, p_i) \le \varepsilon$。于是，每个球 $B_\infty(p_i, \varepsilon)$ 都同时包含 p_{i-1}和 p_i，因此也包含线段 $p_{i-1}p_i$。注意，每个 ℓ^∞–球都是偏序连通的：对于其中任意 a, b，它们的逐坐标最大值也在球内，从而得到一条两步路径 $a \le \max(a, b) \ge b$。因此，每对相邻的 p_{i-1}, p_i 都可以通过一条位于 I中的路径连接起来；将这些路径首尾相接，就得到一条从 p到 q、位于 I中的路径。

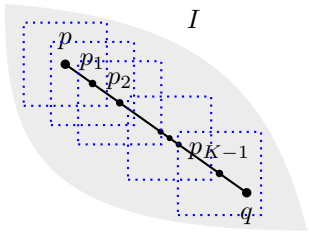


图4：一个开且几何凸的 I、两个点 $p,\ q \in I$、直线 pq上的细分点 p_i，以及一条经过修剪的开 ℓ_∞球链 $B_\infty(p_i,\ \varepsilon) \subset I$，其交集沿线段彼此重叠。

接下来，设 $I,\ J$是实数集 $\mathbb{R}^n$中的凸区间。若 $I \cap J = \varnothing$，则证毕。否则，交集 $I \cap J$是开且几何凸的，因为 I 和 J 都是如此。由上文可知， $I \cap J$ 是偏序连通的。由于 $I \cap J$ 也是偏序凸的，因此它是一个凸区间。□

注5.4。乍看之下，凸区间是实数集 $\mathbb{R}^n$的开、偏序凸、偏序连通且几何凸的子集。然而，根据命题5.3，偏序连通性这一要求是多余的。因此，凸区间恰好是 $\mathbb{R}^n$ 中几何凸且偏序凸的开子集。

我们注意到，开性要求对于确保凸区间的交封闭性质至关重要。若不满足这一要求，两个闭凸区间（例如图 3a 中间所示的区间）可能相交于一条斜率非零且有限的线段，而这在 $\mathbb{R}^2$ 中并非区间（见例2.3）。

我们立即得到以下推论（验证例 5.2 中的最后一个例子）。

推论 5.5。包含 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸区间的 $\mathcal{F}$ 族是交封闭的，且在标准流的作用下保持封闭（例 4.2）。

5.2 区间模交错的几何刻画

Dey 等人 [24] 为离散呈示的区间$\mathbb{R}^n$-模的交错建立了一个充要判据。本节将给出任意区间$\mathcal{P}$-模交错的类似刻画。以下结果假设 I和 J是区间，且 $I \cap J$也是区间。特别地，若对于某个由交封闭区间组成、且在流 Ω 作用下封闭的族 $\mathcal{F}$，有 $I, J \in \mathcal{F}$，则这些结果适用。

定义 5.6 （ε-平凡区间与显著区间）。设 $\varepsilon \ge 0$。若区间 I 属于 $\mathcal{P}$，且ε-转移态射 $\varphi^{\varepsilon}_{C(I)} : C(I) \to C(I(\varepsilon))$ 是零态射，则称其为 ε- 平凡。若 I 不是 ε- 平凡的，则称其为 ε- 显著。

引理 5.7。设 $\varepsilon \ge 0$，并设 $I, J \subset \mathcal{P}$为区间，且 $I \cap J$是一个区间。那么，$(C(I)\ C(J))$ 左 ε-交错，当且仅当 I 是 2ε-平凡的，或以下三个条件成立：

1. $I \cap J(\varepsilon)$ 是 $(I,\ J(\varepsilon))$-有效的（等价地，存在一个非零态射 $C(I) \to C(J(\varepsilon))$ ），

2. $J \cap I(\varepsilon)$ i 在 $J, I(\varepsilon)$-有效（等价地，存在一个非零态射 $C(J) \to C(I(\varepsilon))$），一个
   d 3. $\varnothing \neq I \cap I(2\varepsilon) \subset J(\varepsilon)$。

证明。We 首先注意，条件 1 和 2 中的等价表述由推论 3.5 得出 .

假设 $C(I)$ $C(J)$ 是左 ε-交错的。则存在态射 $f\colon C(I) \to C(J(\varepsilon))$ 和 $g\colon C(J) \to C(I(\varepsilon))$，满足 $g(\varepsilon) \circ f = \varphi^{2\varepsilon}_{C(I)}$。如果 I 是 2ε-平凡的，那么结论成立。另一方面，假设 I 不是 2ε-平凡的，即转移态射 $\varphi^{2\varepsilon}_{C(I)}$ 非零。因此 $g(\varepsilon) \circ f$ 非零，进而 f 和 $g(\varepsilon)$ 均非零，由此得到前两个条件；最后一个条件由命题 3.6 得出。

为证明逆命题，首先注意，若 I 是 2ε-平凡的，则零映射定义了一个左 ε-交错。另一方面，假设 I 是 2ε-显著的，且 I， J 满足条件 $1-3$。令 $f\colon C(I) \to C(J(\varepsilon))$和 $g\colon C(J) \to C(I(\varepsilon))$为前两个条件所保证存在的态射。于是，对态射 f 和 $g(\varepsilon)$应用命题 3.6，即可得到结论；注意，这两个态射可以分别选取标量为 $1_{\mathbb{K}}$，从而复合 $g(\varepsilon) \circ f$ 与态射$\varphi^{2\varepsilon}_{C(I)}$一致。 □

由引理 5.7 可直接推出以下判据。

命题 5.8. 设 $\varepsilon \geq 0$，且 I， $J \subset \mathcal{P}$ 为 2ε-显著区间，并满足 $I \cap J$ 是一个区间。那么，$C(I)$ $C(J)$是 ε-交错的，当且仅当以下四个条件成立：

1. $I \cap J(\varepsilon)$ 是 $(I,\ J(\varepsilon))$-有效的（等价地，存在一个非零态射 $C(I) \to C(J(\varepsilon))$），
2. $J \cap I(\varepsilon)$ 是 $(J,\ I(\varepsilon))$-有效的（等价地，存在一个非零态射 $C(J) \to C(I(\varepsilon))$），
3. $\varnothing \neq I \cap I\ (2\varepsilon)\ \subset J\ (\varepsilon)$，
4. $\varnothing \neq J \cap J\ (2\varepsilon)\ \subset I\ (\varepsilon)$。

证明。由引理 5.7 可直接得出，并注意到 $C(I)$ $C(J)$ 是 ε-交错的，当且仅当这两对 $(C(I)\ C(J))$ 和 $(C(J)\ C(I))$ 是左侧 ε-交错的。 □

若进一步假设某个区间上具有显著性，则仅凭单侧交错即可检测区间模之间的交错。下一命题为下一节主定理的证明提供了一个关键要素。

命题 5.9。 设 $\varepsilon \geq 0$，且 I， $J \in \mathcal{F}$。若 I是 4ε-显著的，并且 $C(I)$ $C(J)$ 左 ε-交错，则 $C(I)$ $C(J)$ ε-交错。

证明。 假设 I 是 4ε-显著的，且 $C(I)$ $C(J)$ 通过左交错 $(f,\ g)$ 左 ε-交错。若 J是 2ε-平凡的，则显然 $C(I)$ $C(J)$ 右 ε-交错，证毕。否则， J 是 2ε-显著的。由左 ε-交错可得 $g(\varepsilon) \circ f = \varphi^{2\varepsilon}_{C(I)}$，因此

$$g(3\varepsilon) \circ f(2\varepsilon) \circ g(\varepsilon) \circ f = \varphi^{2\varepsilon}_{C(I)}(2\varepsilon) \circ \varphi^{2\varepsilon}_{C(I)} = \varphi^{4\varepsilon}_{C(I)} \neq \mathbf{0},$$

因为 I 是 4ε-显著的。由此可知，左侧的中间复合，即 $f(2\varepsilon) \circ g(\varepsilon)$，是非零的。这意味着根据命题 3.6，$\varnothing \neq J(\varepsilon) \cap J(3\varepsilon) \subset I(2\varepsilon)$。因此，经过平移后，我们有 $\varnothing \neq J \cap J(2\varepsilon) \subset I(\varepsilon)$。由于 $(C(I)\ C(J))$ 左 ε-交错，且 I不是 2ε-平凡的，根据引理 5.7，我们有 $\varnothing \neq I \cap I(2\varepsilon) \subset J(\varepsilon)$，并且 f和 g是非零态射。因此，I， J是 2ε-显著的，且命题 5.8 中的四个条件均得到满足，因此 $C(I)$ 和 $C(J)$ ε-交错。 □

6 偏序集上条形码的豪斯多夫稳定性

本节给出我们的主要结果：豪斯多夫距离相对于交错距离是稳定的，并对此作一些相关讨论。我们先通过一个例子说明，该结果并非显而易见。

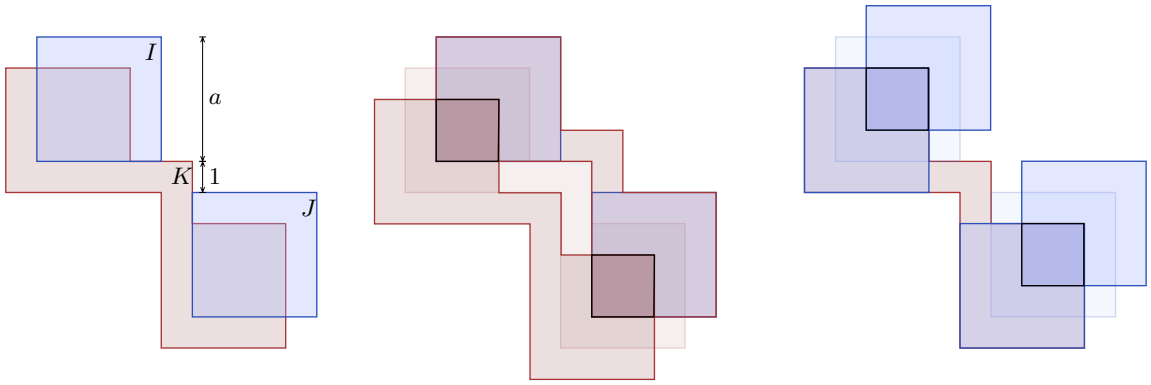
6.1 瓶颈距离和豪斯多夫距离的不稳定性

正如 Botnan 和 Lesnick 所示， [9], 瓶颈距离可以任意大于交错距离；也就是说，比值 $d_{\mathrm{B}}(M,\ N)/d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$ 可以任意增大。这意味着，对于区间可分解模而言，条形码不是关于瓶颈距离 d_{B} 的交错稳定不变量。在下面的例子中，我们重新考察 Botnan 和 Lesnick 用来说明区间可分解模的条形码关于豪斯多夫距离d_{H}也不稳定的同一个例子。

例 6.1. 考虑图 5(a) 所示的模 $M = C(I) \oplus C(J)$ 和 $N = C(K)$，其中包含一个变量参数 $a \geq 1$。文献 [9] 中已证明 $d_{\mathrm{I}}(M, N) \leq 1$。我们声称 $d_{\mathrm{H}}(M, N) \geq a/2$，因此取 $a \to \infty$ 即可证明 d_{H} 不稳定。

对于 $\varepsilon < a/2$，我们声称不存在 ε-对应 $\sigma \subset B(M) \times B(N)$。由于 I 和 J 是 a-显著的，因此 $C(I)$ 和 $C(J)$ 均不与零模 $a/2$-交错。因此，任何可能的 ε-对应都必须包含例如 (I, K)。但是 $C(I)$ 和 $C(K)$ 并非 ε- 交错。为此，考虑图 5(b) 所示的 $K(\varepsilon) \cap K(-\varepsilon)$。我们看到， $K(\varepsilon) \cap K(-\varepsilon)$ 不包含于 I，或者等价地，$K \cap K(2\varepsilon) \not\subset I(\varepsilon)$。这违反了命题 5.8 中的交错条件，因此该断言得证。

前面的例子自然引出了这样一个问题：当我们只考虑在两两交集下封闭的区间族时，豪斯多夫距离是否会相对于交错距离变得稳定。我们将在下一节讨论这个问题。



(a) (b) (c)

图 5：展示豪斯多夫不稳定性的区间；详情见正文。**(a)** 原始区间，生成持久模 $C(I) \oplus C(J)$ 和 $C(K)$。**(b)** 平移了 $\pm\varepsilon$ 的区间 K。未平移的 K 以较低不透明度显示，交集 $K(\varepsilon) \cap K(-\varepsilon)$以较高不透明度显示。**(c)** 区间 I 和 J 均平移了 $\pm\varepsilon$。未平移的 I 和 J 以较低不透明度显示，平移后版本的交集以较高不透明度显示。

6.2 具有交集封闭区间的条形码的豪斯多夫稳定性 s

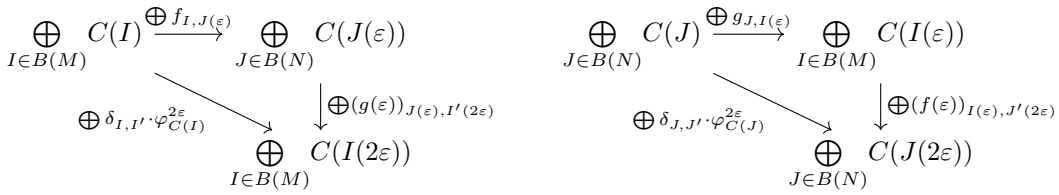
现在我们证明主要结果，并在下文重述该结果。

定理 6.2. 设 $(\mathcal{P},\Omega)$ 是一个配备了 $\mathbb{R}$-流的偏序集，并设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一个区间族，它包含空区间，在交集下封闭，并且在 Ω 的作用下封闭。设 $M, N\colon \mathcal{P} \to \mathbf{Vect}_K$ 是两个区间可分解的 $\mathcal{P}$-模，且 $B(M)\ B(N) \subset \mathcal{F}$。那么

$$d_{\mathrm{H}}(M, N) \leq 2 \cdot d_{\mathrm{I}}(M, N).$$

证明。 设 $f\colon M \to N(\varepsilon)$ 和 $g\colon N \to M(\varepsilon)$ 是 M, N 的 ε-交错。将 $f, g, \varphi_M^{2\varepsilon}, \varphi_N^{2\varepsilon}$写成

矩阵形式（见方程 (2) 和 (4)），并由引理 4.8 可得，这些图表



交换。根据等式 (3)，左侧图表给出：

$$\delta_{I,I'} \cdot \varphi^{2\varepsilon}_{C(I)} = \sum_{J \in B(N)} (g(\varepsilon))_{J(\varepsilon),I'(2\varepsilon)} \circ f_{I,J(\varepsilon)}, \tag{5}$$

对于任意一对 $(I,\ I') \in B(M) \times B(M)$。

要证明该定理，只需证明：对于每个区间 $I \in B(M) \coprod \{\varnothing\}$，都存在一个区间$J \in B(N) \coprod \{\varnothing\}$，使得 $C(I)$ 和 $C(J)$ 是 2ε- 交错的。反向，即对于每个 J，都存在这样一个 I，可用类似方法证明。

设 $I \in B(M)$。首先注意，若 I 是 4ε-平凡的（即 $\varphi^{4\varepsilon}_{C(I)} = \mathbf{0}$），则 $C(I)$ 与 $C(\emptyset)$ 是 2ε-交错的。因此，我们重点考虑 $\varphi^{4\varepsilon}_{C(I)} \neq \mathbf{0}$ 的情形。特别地，此时 $\varphi^{2\varepsilon}_{C(I)} \neq \mathbf{0}$。应用等式 (5)，取$I' = I$，可得一个区间 $J \in B(N)$，使得 $(g(\varepsilon))_{J(\varepsilon),\ I(2\varepsilon)} \circ f_{I,\ J(\varepsilon)} \neq \mathbf{0}$。由命题 3.6 可知

$$\emptyset \neq I \cap I(2\varepsilon) \subset J(\varepsilon).$$

由于复合非零，两个态射 $f_{I,\ J(\varepsilon)}$ 和 $(g(\varepsilon))_{J(\varepsilon),\ I(2\varepsilon)}$ 本身都非零。因此，根据引理 5.7，$C(I)$ 与 $C(J)$ 左交错 ε。由于 I 是 4ε-显著的，命题 5.9 将此提升为 $C(I)$ 与 $C(J)$ 之间完整的 ε-交错，因此，特别地，它们是 2ε-交错的。

□

注记 6.3。定理 6.2 可应用于某些类型的区间可分解 $\mathbb{R}^n$-模：

1. 正如推论 5.5 中所见，$\mathbb{R}^n$ 的所有凸区间连同空区间构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个交封闭区间族。如果 M 和 N 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸区间可分解持久化模，那么 $d_{\mathrm{H}}(M,\ N) \leq 2 \cdot d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$。这与 Botnan 和 Lesnick 提出的猜想密切相关 [9],：根据该猜想，$d_{\mathrm{B}}(M,\ N) \leq c_n \cdot d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$，其中 Lipschitz 常数可能取决于维数 n。

2. 此外，所有 $\mathbb{R}^n$ 的上集与空区间构成 $\mathbb{R}^n$ 上的一个交封闭区间族。若 M 和 N 是 $\mathbb{R}^n$ 上的上集区间可分解持久化模，则 $d_{\mathrm{H}}(M,\ N) \leq 2 \cdot d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$。这与 Bjerkevik [6], 提出的猜想密切相关，该猜想认为 $d_{\mathrm{B}}(M,\ N) \leq c_n \cdot d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$。

6.3 界的紧性

现在，对于任意 $\delta \in (0,\ 2)$，我们构造凸区间可分解模 M 和 N，使得 $d_{\mathrm{H}}(M,\ N) \leq (2-\delta) d_{\mathrm{I}}(M,\ N)$，从而说明定理 6.2 中界的紧性。该构造基于三个区间 I、J 和 K，我们据此定义

$$M \coloneqq C(I) \oplus C(J), \qquad N \coloneqq C(K).$$

我们选择 I、J 和 K，使得 $d_{\mathrm{I}}(M,\ N) = 1$，而 $d_{\mathrm{H}}(M,\ N) = 2 - \delta$。在图 6c 的可视化中，区间 I 和 J 显示为蓝色，K 显示为红色。现在我们来描述该构造。

从边长为 $4 - 2\delta$ 的方形区间 $I \subset \mathbb{R}^2$ 开始（因此该方形具有 $(2-\delta)$-显著性）。将 I 的四个角点标记如下：

$$\ell_- \text{ (lower left)}, \quad \ell_+ \text{ (upper left)}, \quad r_- \text{ (lower right)}, \quad r_+ \text{ (upper right)}.$$

图6a展示了区间 I 及其对角平移 $I(1)$ 和 $I(-1)$，分别通过沿 $(-1,-1)$ 和 $(1,1)$ 方向平移 I 得到。

我们构造第二个区间 K，使其为一个六边形，满足 $I(1) \cap I(-1) \subset K$，且 K 具有 2-显著性。对于任意点 $p \in \mathbb{R}^2$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，我们记 $p(\varepsilon) = p - \varepsilon(1,\ 1)$。$K$ 的三个顶点（对应于图 6a 中的三个红点）固定如下：

$$\ell_-(-1), \qquad r_+(1), \qquad q := \text{the upper-left corner of } I(1) \cap I(-1).$$

为确定其余三个顶点，我们先画出图6a所示的两条实线射线：

- 从 $\ell_-(-1)$ 出发并经过 $r_-(1)$ 的射线，
- 从 $r_+(1)$ 出发并经过 $r_-(-1)$ 的射线。

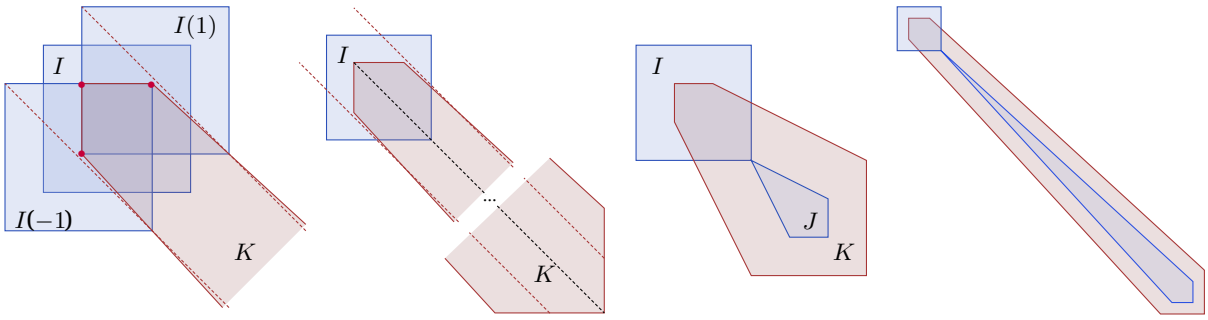
由于 $\delta > 0$，每条实线射线与 $I(1)$ 和 $I(-1)$ 对应的反对角线（图6a中以虚线表示）形成一个正角，因此两条射线彼此远离。于是，我们可以沿这两条射线向远处放置 K 的两个顶点（使它们与各自的起点距离相等）。随后，将 K 的第六个顶点放在线段 q 与 r_- 的连线上，使与该顶点相邻的两条边互相垂直；见图6b。将射线上的顶点放得足够远，可确保这两条边的长度至少为 4，从而使 K 成为一个 2-显著区间。

我们将一个最终区间 J 构造为 $J := K(1) \cap K(-1)$。根据构造，I 和 J 不相交——图 6c 展示了 δ 相对较大的一个示例，而图6d 展示了 δ 较小的一个示例。

回顾一下，$M = C(I) \oplus C(J)$，且 $N = C(K)$。上述构造确保：

- 利用命题3.4，可以证明 $d_I(M,N) \geq 1$。另一方面，M和 N之间存在一个 1-交错，使得 $d_I(M,N) = 1$。
- 命题 5.8 意味着 $d_I(C(I)\ C(K)) = 2 - \delta$，并且 $d_I(C(J)\ C(K)) = 1$。
- 利用前面的计算，我们推得，当 $\delta \in (0,1]$时，$d_H(M,N) = 2 - \delta$。

这证明定理 6.2 中的界是紧的。注意，当 $\delta = 0$ 时，用于构造 K 的射线彼此平行，因此 K 的构造不再成立；也就是说，这个例子无法扩展到理论 Lipschitz 界 2 之外。



(a) (b) (c) (d)

图 6：凸区间及其特征模说明定理 6.2 中的界是紧的。图 (a) 和 (b) 展示了任意 δ 下的例子构造——参见第 6.3 节。图 (c) 和 (d) 分别展示了 δ 较大和 δ 较小时的完整构造示例。

资助声明

TN 获得了美国国家科学基金会 DMS–2324962 和 CIF–2526630 项目的资助。LZ 获得了 AMS-Simons 旅行资助。

作者贡献

豪斯多夫稳定性结果由 AS 获得，而界的紧性由 TN 证明。技术引理和命题由 AS 与 TN 共同完成。后期加入项目的合著者 LZ 和 MA 通过富有帮助的讨论、对手稿的仔细阅读与编辑、提供例子和评注，以及针对技术问题提出批判性反馈作出了贡献。

参考文献

[1] Hideto Asashiba、Emerson G Escolar、Ken Nakashima 和 Michio Yoshiwaki。持久模的区间可分解对象近似与区间分解。纯粹与应用代数杂志，227(10):107397，2023。[2] Gorô Azumaya。对我关于 Krull-Remak-Schmidt 定理的论文所作的勘误与补充。名古屋数学杂志，1:117–124，1950。[3] Håvard Bakke Bjerkevik。区间可分解持久模的稳定性。离散与计算几何，66(1):92–121，2021。[4] Ulrich Bauer 和 Michael Lesnick。作为图表的持久图：稳定性定理的范畴化。载于拓扑数据分析：*2018* 年阿贝尔研讨会，第 67–96 页。Springer，2020。[5] Håvard Bakke Bjerkevik。区间可分解持久模的稳定性。离散与计算几何，66(1):92–121，2021。doi:10.1007/s00454-021-00298-0。[6] Håvard Bakke Bjerkevik。多参数持久模的稳定化分解。计算数学基础，第 1–60 页，2025。[7] Håvard Bakke Bjerkevik、Magnus Bakke Botnan 和 Michael Kerber。计算交错距离是 NP-困难的。计算数学基础，第 1–35 页，2019。[8] Benjamin Blanchette、Thomas Brüstle 和 Eric J Hanson。持久性理论中的同调近似。《加拿大数学杂志》，76(1):66–103，2024。[9] Magnus Botnan 和 Michael Lesnick。之字形持久模的代数稳定性。《代数与几何拓扑》，18(6):3133–3204，2018。[10] Magnus Bakke Botnan 和 Michael Lesnick。多参数持久性的导论。*arXiv*预印本 *arXiv:2203.14289*，2(5)，2022。[11] Magnus Bakke Botnan、Steffen Oppermann 和 Steve Oudot。通过秩分解与秩精确分解得到的多参数持久性带符号条形码。计算数学基础，第 1–60 页，2024。[12] Magnus Bakke Botnan、Steffen Oppermann、Steve Oudot 和 Luis Scoccola。多参数持久模秩分解的瓶颈稳定性。《数学进展》，451:109780，2024。[13] Peter Bubenik、Vin De Silva 和 Jonathan Scott。广义持久模的度量。计算数学基础，15(6):1501–1531，2015。[14] Peter Bubenik 等。使用持久景观进行统计拓扑数据分析。《机器学习研究杂志》，16(1):77–102，2015。[15] Peter Bubenik 和 Jonathan A Scott。持久同调的范畴化。离散与计算几何，51(3):600–627，2014。[16] Dmitri Burago、Yuri Burago、Sergei Ivanov 等。度量几何教程，第 33 卷。美国数学学会，普罗维登斯，2001。

[17] Gunnar Carlsson。拓扑与数据。《美国数学会通报》，46(2):255–308，2009。[18] Andrea Cerri、Barbara Di Fabio、Massimo Ferri、Patrizio Frosini 和 Claudia Landi。多维持久同调中的贝蒂数是稳定函数。《应用科学中的数学方法》，36(12):1543–1557，2013。[19] Wojciech Chachólski、Andrea Guidolin、Isaac Ren、Martina Scolamiero 和 Francesca Tombari。偏序集上的函子的 Koszul 复形与相对同调代数。《计算数学基础》，25(4):1121–1165，2025。[20] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner、Marc Glisse、Leonidas J Guibas 和 Steve Y Oudot。持久模及其图表之间的邻近性。载于第二十五届计算几何年度研讨会论文集，第 237–246 页，2009。[21] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久图的稳定性。离散与计算几何，37(1):103–120，2007。[22] Vin de Silva、Elizabeth Munch 和 Anastasios Stefanou。带流的范畴上的交错理论。《范畴论及其应用》，33(21):583–607，2018。[23] Tamal K Dey 和 Shreyas N Samaga。准之字形持久性：分析时变数据的拓扑框架。*arXiv*预印本 *arXiv:2502.16049*，2025。[24] Tamal K Dey 和 Cheng Xin。计算多参数区间可分解持久模的瓶颈距离。*arXiv*预印本 *arXiv:1803.02869*，2018。[25] Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。计算拓扑学：导论。美国数学会，2010。[26] Patrizio Frosini 和 Claudia Landi。尺寸函数与形式级数。《工程、通信与计算中的应用代数》，12(4):327–349，2001。[27] Felix Hausdorff。《集合论纲要》，第 61 卷。美国数学会，1978。[28] Michael Kerber、Michael Lesnick 和 Steve Oudot。精确计算二参数持久模上的匹配距离。*arXiv*预印本 *arXiv:1812.09085*，2018。[29] Woojin Kim、Facundo Mémoli 和 Anastasios Stefanou。分部交错：交错的并分解与测地线的并组装。《序》，41(2):497–537，2024。[30] Michael Lesnick。多维持久模上交错距离的理论。《计算数学基础》，15(3):613–650，2015。[31] Patrick K McFaddin 和 Tom Needham。交错距离、幺半群作用与二范畴。《代数与几何拓扑》，26(1):227–281，2026。[32] Facundo Mémoli。Gromov–Hausdorff距离的一些性质。离散与计算几何，48(2):416–440，2012。[33]Ezra Miller。偏序集上的模：交换代数与同调代数。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.09750*，2019。[34] Steve Oudot 和 Luis Scoccola。多重分次贝蒂数与希尔伯特函数的稳定性。《*SIAM*应用代数与几何期刊》，8(1):54–88，2024。[35] Luis N Scoccola。局部持久范畴与交错距离的度量性质。学位论文，2020。[36] Cheng Xin、Soham Mukherjee、Shreyas N Samaga 和 Tamal K Dey。Gril：一种基于二参数持久性的机器学习向量化方法。载于*2023*年拓扑、代数与几何学习研讨会，第 313–333 页。PMLR，2023。