arXiv:2601.16961v1 [quant-ph] 23 Jan 2026

在全局驱动的双物种原子阵列中设计离散局域动力学

Francesco Cesa,[1, 2, *] Andrea Di Fini,[3, *] David Aram Korbany,[3, 4, *] Roberto Tricarico,[1, 2] Hannes Bernien,[1, 5] Hannes Pichler,[1, 2] 和 Lorenzo Piroli[3, 4]

[1] *Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, 6020 Innsbruck, Austria*
[2] *Institute for Theoretical Physics, University of Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria*
[3] *Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, via Irnerio 46, I-40126 Bologna, Italy*[4] *INFN, Sezione di Bologna, via Irnerio 46, I-40126 Bologna, Italy*[5] *Institute for Experimental Physics, University of Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria*（日期：2026年1月26日）

我们提出一种方法，可在全局驱动的双物种中性原子实验中构建离散局域动力学，使我们能够通过均匀的模拟控制研究涌现的数字模型。借助双物种系统带来的新机遇，例如物种交替驱动，我们的方案利用静态原子排列上的简单 Floquet协议，并受益于广义阻塞区间（不同的种间与种内相互作用）。我们重点研究离散动力学模型，它们是量子元胞自动机（QCA）的特例，并明确考察若干相关实例，包括踢击伊辛模型、Floquet Kitaev 蜂窝模型，以及一般平移不变最近邻哈密顿量的数字化（例如用于 Trotter 化演化）。作为应用，我们研究离散化多体动力学的混沌特征；这些特征可仅凭已展示的全局驱动实验能力加以探测，并据此评估其区分混沌演化的能力。

一、引言

在嘈杂的中等规模量子器件时代， [1], 离散局域动力学已成为理解量子多体现象的有力工具。这类模型描述系统在严格局域的更新规则作用下，随离散时间步演化；它们通常包含精简却富有表现力的结构，能够重现相互作用系统的复杂动力学特征 [2, 3]。因此，它们为探究非平衡物理中的难题 [4–11]提供了一条可控途径。这类动力学构成量子元胞自动机（QCA）的一类 [12, 13], ，例如已在超导处理器 [14–16],、囚禁离子 [17, 18],和中性原子阵列 [19, 20]中实现。

具体而言，光镊 [21, 22]中的原子尤其适合作为研究平台：数千 [23–25]个单元可按任意几何结构排列，并通过里德堡耦合 [22, 26]自然形成相互作用态。然而，要实现离散局域动力学，需要对这些相互作用进行局域控制；而在这类系统中，原子激发通常由全局激光驱动，对所有原子进行均匀寻址。因此，许多此类实验采用模拟量子模拟模式，研究原生里德堡哈密顿量 [27–50]所产生的动力学。尽管近期实验已通过中途重排 [51, 52], 实现有效的局域控制，但基于静态原子位置和全局驱动设计协议，将大幅简化技术要求。

在这项工作中，我们提出了一种方法，仅依靠全局驱动和静态处理器布局，利用双物种原子阵列 [20, 53–57], 构建多种量子多体离散动力学模型。双物种阵列是中性原子平台 [55, 56] 中一个全新的实验前沿。我们的协议利用了激光束虽在空间上均匀、却具有物种选择性这一特点所带来的独特可能性。我们展示了如何利用这一点，在全局驱动但有效离散化的设定中，原生实现一大类平移不变离散局域动力学。作为相关示例，我们详细构建并分析了典型踢击伊辛模型 [58, 59] 和 Floquet 蜂窝 Kitaev 模型 [60], 在近期的实现方案，同时还探讨了任意平移不变 2–局域哈密顿量的数字化，这为实现 Trotter 化演化及更一般的 Floquet 模型 [61–63]提供了途径。重要的是，我们的方法虽然相当通用，但在空间和时间上的开销均为常数，因此特别适合即将开展的双物种实验。

鉴于这种实现离散局域动力学的能力，一大类非平衡多体现象得以研究。为展示其中一个方向，我们在此聚焦于探测量子混沌的特征 [64–66]。尽管传统诊断方法（例如非时序关联函数（OTOC） [4, 67–71], ）需要访问复杂且空间上不均匀的算符，但我们关注的是一种混沌指标，仅利用全局驱动的双物种里德堡实验已展示的最先进能力即可测量 [20]。通过聚焦于具有代表性的例子，我们展示了该指标能够在相关参数区间内有效区分混沌动力学与非遍历动力学。因此，我们的结果表明，该方法将通过里德堡阵列中的离散局域动力学，推动对非平衡多体物理开展具有信息量的近期研究，并实现对量子混沌动力学和量子元胞自动机的实验探索。

* 这些作者对本工作的贡献相同。

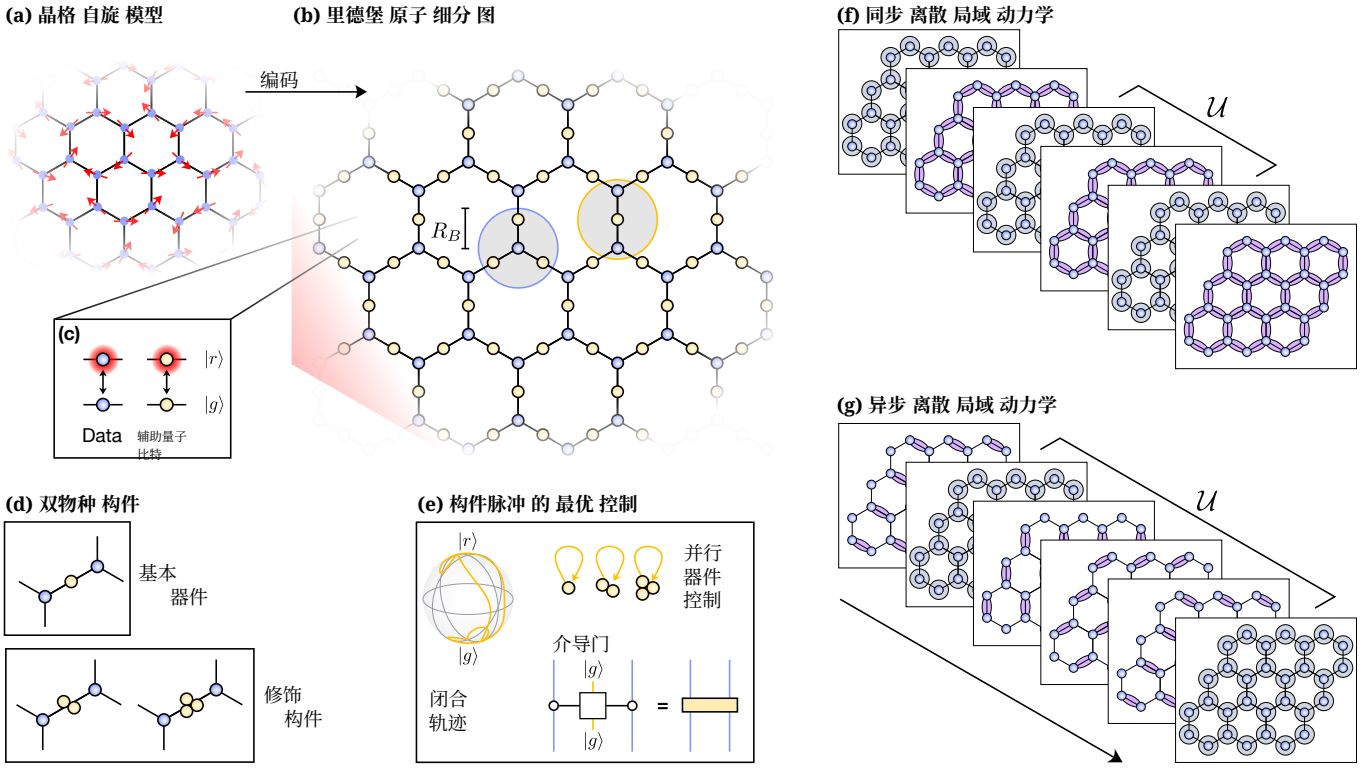

图 1。（a、b）对于定义在二维晶格上的模型，我们通过在原始晶格的每条边上插入一个新顶点（黄色）来构造细分图。随后，我们将数据物种（蓝色）和辅助物种（黄色）的原子分别放置在顶点和边上，从而排列出一个双物种原子阵列。辅助量子比特的作用是在数据原子之间介导量子门。接着，通过 *global*（物种选择性）激光，使该原子阵列处于（最近邻）里德堡阻塞区。（c）对于每个原子，我们考虑两个能级：基态 $|g\rangle$ 和高度激发的里德堡态 $|r\rangle$。（d）通过将 $S \geq 1$ 辅助量子比特放置在一条键上——即两个数据原子之间——来构造器件。（e）我们使用最优控制方法来设计 *mediated gates*：通过控制辅助物种，我们得以在数据原子上有效实现纠缠门。（f）Floquet 驱动实现离散局域动力学，其中每一步都对应于应用更新规则 $\mathcal{U}$。当相互作用的更新可以同时应用（即它们彼此对易）时，后者被称为 *synchronous*。（g）与此不同，当局域相互作用更新彼此不对易时，$\mathcal{U}$ 被称为 *asynchronous* ——这会施加一定的顺序。

本文其余部分的组织如下。我们在第II节开始，回顾离散局域动力学。在第III节，在介绍全局驱动的双物种里德堡阵列的物理性质后，我们将呈现核心构造，将其称为“介导门”；这些介导门能够实现离散局域动力学。随后，在第IV节，我们通过给出具有代表性示例的具体构造，详细介绍实现量子元胞自动机的架构。在第V节，我们将研究重点转向在该架构中观测量子混沌的特征，介绍专门的协议并讨论其近期应用潜力。最后，在第VI节，我们总结并评论研究结果及其实现实验的可行性，同时展望未来研究方向。

II. 离散局域动力学

我们首先介绍将要讨论的离散局域动力学类型。我们关注定义在一维或二维晶格上的模型，其中每个顶点都承载一个量子比特。

演化由局域更新规则定义：状态在离散时间步中通过一个操作 $\mathcal{U}$ 更新，如下所示：

$$|\psi_{t+1}\rangle = \mathcal{U}\,|\psi_t\rangle\ , \tag{1}$$

其中 $\mathcal{U}$ 满足某些局域性约束 [12]。例如，若 $\mathcal{U}$ 可写成由局域门组成的浅层量子电路，则这些约束便得到满足。

我们特别关注图1(f,g) 所示的这类更新： $\mathcal{U}$ 由 $D = O(1)$个平移不变层组成，每层由单量子比特门或（最近邻）双量子比特门构成。这类模型是量子元胞自动机的特殊类型 [12, 13, 72]。

为了理解这类动力学的表达能力，将 $\mathcal{U}$ 解读为实现了一个弗洛凯协议是很有启发性的，

$$\mathcal{U} = e^{-i\tau H_D} e^{-i\tau H_{D-1}} \dots e^{-i\tau H_1} = e^{-i\tau H_{\text{eff}}[\tau]}, \tag{2}$$

其中 H_j 是 2–局域哈密顿量， τ 是弗洛凯时间。根据 τ的不同，弗洛凯哈密顿量

$$H_{\text{eff}}[\tau] = \sum_{j=1}^{D} H_j - \frac{i\tau}{2} \sum_{j>k} [H_j, H_k] + O(\tau^2) \tag{3}$$

可能具有截然不同的物理性质。当 τ较小时，H_{eff} 近似于局域哈密顿量 $H = \sum_j H_j$，而量子元胞自动机可以理解为在 H下进行的 Trotter 化演化。事实上，任何局域哈密顿量动力学都可以通过这种离散局域动力学进行 Trotter 化。

对于更大的 τ， H_{eff} 通常包含更长程的多体项，从而能够复现复杂的相互作用动力学，事实上还包括内禀的 Floquet 模型 [73–77]。在这些情况下， τ 成为一个模型参数，控制着物理性质以及 Floquet 相的出现，例如拓扑边缘动力学 [78] 和时间晶体序 [79, 80]。式（ O（τ）中的修正项也会改变并丰富 H_{eff}的性质，例如在 Floquet 自旋液体中引入具有能隙的非阿贝尔拓扑相 [81]。

不过，需要强调的是，对于任意有限的 τ，Floquet 动力学只会在一个清晰的光锥 [12], 内产生非平凡关联，从而模拟刻画局域哈密顿量演化的著名 Lieb-Robinson 界 [82–84]。这一特征使我们能够将有限的 τ 离散局域动力学视为多体物理的玩具模型：即使它们不等同于局域哈密顿量演化，仍然展现出关联的局域演化。此外，由于几何局域结构使其在许多情况下更易于分析，它们为处理非平衡物理中的若干问题提供了具体的理论工具，包括量子信息扩散 [4, 5, 85], 纠缠动力学 [6–9, 86]以及相变 [2, 87–90]。

总而言之，尽管这种离散局域动力学简单且离散化，其背后的物理却极其丰富而广泛：在某些参数范围内，它将非平衡多体现象融入类电路动力学；在其他情况下，它则构成一种独立范式，本身便具有丰富多样的有趣特征。

III. 全局驱动离散动力学的双物种架构

我们希望在双物种里德堡实验中实现上一节所述的离散局域动 [20, 53——57]力学。为此，在将原子定位后，我们使用物种选择性但空间均匀的激光（交替照射不同物种），并利用由始终存在的相互作用所施加的强动力学约束。第IIIA 节概述了这一装置。

我们的构造基于图中的方案。1： （i）两种物种的原子（图中分别以蓝色和黄色表示）分别编码“数据”和“辅助量子比特”。（ii）数据原子占据目标模型的顶点。（iii）辅助量子比特位于键上，构成能够有效介导相互作用的“器件”。（iv）一系列全局激光脉冲交替作用于两种物种，激活这些器件以实现 $\mathcal{U}$。技术实现细节见第IV节。

我们的关键洞见是双物种介导门 [第 IIIB], ，它们能够使两个互不相互作用的

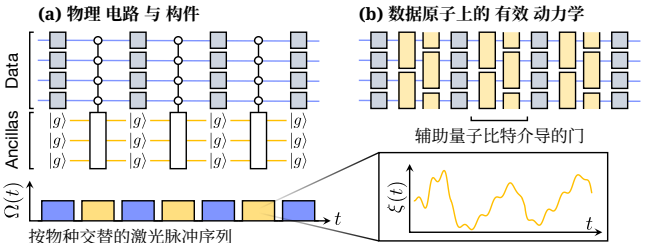

图2。（a）我们的协议的电路示意图，其中驱动在数据原子和辅助原子之间交替进行。前者在数据原子上实现单量子比特门，后者则通过物理过程实现受控门，由数据原子控制辅助原子的演化——辅助原子最终总会返回到 $|g\rangle$。我们的控制参数是全局激光的相位分布 $\xi(t)$。（b）由于辅助原子总能确定性地映射回 $|g\rangle$，最终实际上得到的仅包含数据原子的电路，其中纠缠门由辅助原子介导。

数据原子通过一个介导辅助原子 [图 1(e)]。用电路语言来说，我们的方法可以如图 2(a,b) 所示来理解：正如我们将详细说明的，对辅助物种的驱动仅对数据原子产生净效应，同时使辅助量子比特保持频闪解纠缠。至关重要的是，这种介导门既本征局域又全局驱动——使我们即使在这种类模拟设置中也能实现离散化演化。

A. 物理设置：双物种里德堡阵列

对于每个原子，我们考虑一个低能态 $|g\rangle$ 和一个里德堡激发态 $|r\rangle$。两种物种的跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |r\rangle$彼此相距很远，因此可以分别寻址数据原子和辅助原子。用 $\mathcal{X} \in$ {表示两种物种：数据原子、辅助量子比特} 。驱动物种 $\mathcal{X}$ 的激光可由以下哈密顿量描述：

$$H_{\mathcal{X}} = \frac{\Omega}{2} \sum_{i \in \mathcal{X}} \left[e^{-i\xi(t)} |g_i\rangle \langle r_i| + \text{h.c.} \right] + \sum_{i>j} V_{i,j} |r_i r_j\rangle \langle r_i r_j| , \tag{4}$$

其中，Ω 为拉比频率， ξ（t）为随时间变化的激光相位——这是我们唯一的控制旋钮。

在典型实验中 [29, 37, 40, 41]、 $V_{i、j}$ 在短距离处非常强（$V_{i、j} \gg \Omega$），而在超过“阻塞半径” R_B （$\Omega \gg V_{i、j}$）后会迅速衰减。这使我们能够将相互作用数字化：记 $\mathcal{B}_i$ 为距离原子 i不超过半径 R_B 的原子集合，并将 $\mathbb{P}_i \equiv \bigotimes_{j \in \mathcal{B}_i} |g_j\rangle \langle g_j|$ 定义为投影到如下子空间的投影算符：其中 $\mathcal{B}_i$ 中的所有原子都处于 $|g\rangle$。由此可近似得到

$$H_{\mathcal{X}} = \frac{\Omega}{2} \sum_{i \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_i \left[e^{-i\xi(t)} |g_i\rangle \langle r_i| + \text{h.c.} \right] \mathbb{P}_i, \tag{5}$$

称为 PXP哈密顿量 [91]。实际上，只有当一个原子的所有邻居都处于 $|g\rangle$ 时，该原子才会发生演化，否则便会被冻结——这是里德堡原子实验中的一种标准区域 [21, 29, 91]。我们指出，对于我们的具体构造，这种近似有可能

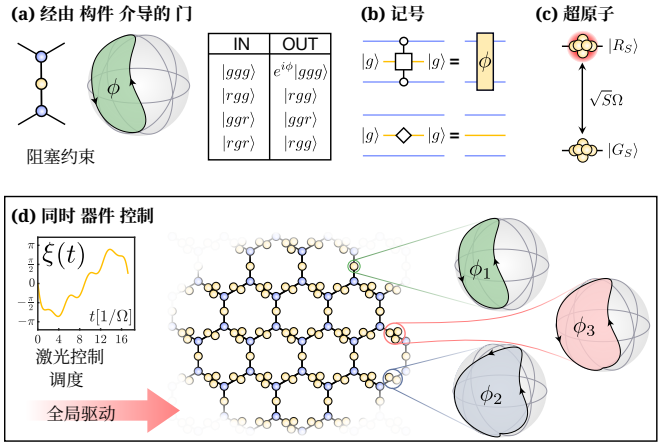

图 3. (a) 为实现介导门，我们仅驱动物种中的辅助原子，从而在布洛赫球上产生一条闭合轨迹。当相邻的数据原子均处于 $|g\rangle$ 时，该轨迹才会出现：只有在这种情况下才会获得几何相位 ϕ 。由此便可在数据原子上实现有效的纠缠门，如真值表所示。(b) 我们所用电路记号的示意图。注意，我们用菱形符号表示介导门为有效恒等变换的特殊情况，即 $\phi = 2\pi n$ 。(c) 阻塞半径内由 S 个原子组成的簇表现得像一个超原子，在两个有效态 $|G_S\rangle \leftrightarrow |R_S\rangle$ 之间振荡，拉比频率增强至 $\sqrt{S}\Omega$。(d) 借助最优控制技术，我们可以通过不同尺寸的器件同时实现介导门，并行地为尺寸为 S的超原子施加任意相位 ϕ_S 。

通过双物种阵列高精度地实现，例如利用福斯特共振¨来抑制物种内相互作用。 [57, 92]在附录 A中，我们量化了与方程（5）的偏差，表明对阻塞区域的违反可以得到强烈抑制，并且显著小于单物种实现中的情况。

最后，我们预计，在所有构造中，数据原子的位置都将始终安排为彼此之间不存在相互作用。在大多数情况下，辅助量子比特之间也不会相互作用，因此得到的模型定义在数据-辅助原子二部图上，且仅存在物种间相互作用。在某些情况下，我们会引入由相互作用的辅助原子组成的小簇；不过，这些小簇实际上会表现为一个单一实体[第III B 2]节。因此，即使在后一种情况下，我们最终也会得到一个有效的二部模型。

B. 用于介导门的双物种构件

现在介绍介导门，它们将构成我们在第 IV 节中实现方案的核心。

1. *Mediated gates and elementary gadgets*

首先，考虑图 *1*（d，上）中的基本构件。如图 3（a）所详述，该构件能够通过将一个介导辅助原子置于两个数据原子的阻塞半径内，实现两个数据原子之间的介导门。

现在我们来描述介导门的实现。初始时，介导体处于 $|g\rangle$，而数据原子可处于任意状态。随后，我们对辅助物种施加一个脉冲，使其在布洛赫球上形成一条闭合轨迹 [图 3(a)]：介导体返回到 $|g\rangle$，但会附带一个几何相位 ϕ [93]，

$$|g\rangle \to e^{i\phi}\,|g\rangle\,. \tag{6}$$

关键的是，由于数据原子对辅助量子比特施加了阻塞约束，只有当后者二者都处于 $|g\rangle$时才会发生这种情况。相位 ϕ 因此是条件性的 [94], ，并作为数据原子获得的纠缠相位重新吸收到波函数中。具体而言，如图 3(a) 所示的真值表所总结的，这会产生如下门

$$CZ(\phi) = \mathbb{I} + (e^{i\phi} - 1)\,|gg\rangle\langle gg| \tag{7}$$

作用于数据，其在 $\phi = \pi$ 时具有最大纠缠能力。

实现任意相位 ϕ 最简单的方法是线性调节辅助量子比特上的驱动， $\xi(t) = -\Delta t$。然后，我们以 $t_f = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$, 驱动，总时长为$\Delta = 2(\pi - \phi)/t_f$。然而，任何实现式（6）的驱动都会激活该器件：在下文讨论的设置中，我们需要更复杂的 $\xi(t)$ 设计。

介导门的构造可扩展到图 1(b) 所示的多体情形，其中包含多个基本构件和 N 个数据原子。事实上，令 $|\Psi\rangle \otimes |G\rangle$ 为初始数据-辅助原子态，其中

$$|\Psi\rangle = \sum_{x_1,\ldots,x_N} \Psi_{x_1,\ldots,x_N}\,|x_1,\ldots,x_N\rangle \tag{8}$$

是任意数据态，并且$|G\rangle = \bigotimes_j |g\rangle_j$ 包含其中的所有辅助量子比特 $|g\rangle$。由式（5）可见，在上述驱动下，每个辅助量子比特仅在其两个邻居均处于ϕ时才会获得相位 $|g\rangle$。因此，输出态再次具有 $|\Psi'\rangle \otimes |G\rangle$的形式，其中相位被重新吸收到数据波函数中，成为

$$\Psi'_{x_1,\ldots,x_N} = e^{i\phi\sum_{\langle j,k\rangle}\delta_{x_j x_k, x_j + x_k}}\,\Psi_{x_1,\ldots,x_N}; \tag{9}$$

这里，$\sum_{\langle j,\ k\rangle}$ 遍历所有相邻数据原子对（为便于代数运算，此处我们将 $g \equiv 0$ 和 $r \equiv 1$ 视为相同）。这对应于在所有这些原子对上并行施加一个 CZ（ϕ）。

2. *Decorated gadgets*

对于一个修饰装置，我们将 $S \geq 2$ 个原子放置在一条键上，即 [图1（d），底部]。如下文所述，这为介导门引入了额外的控制旋钮。

首先，考虑一个孤立的修饰装置：一对

数据原子，中间放置着一簇 S 辅助原子。每个辅助量子比特都位于阻塞半径范围内，且满足以下条件：(i) 它与构成该器件的所有其他辅助量子比特相距不超过阻塞半径；(ii) 它与两个数据原子相距不超过阻塞半径。辅助量子比特初始处于 $|G_S\rangle = \bigotimes_{j=1}^{S} |g_j\rangle$。随后，由于对称性以及物种内的阻塞约束，哈密顿量 (5) 仅将 $|G_S\rangle$ 耦合到 W态 $|R_S\rangle = \sum_{j=1}^{S} |g_1 \dots r_j \dots g_S\rangle / \sqrt{S}$，其中一个里德堡激发在原子之间共享。因此，$S$原子表现为一个二能级系统——一个“超原子” [95]。

关键在于，耦合 $|G_S\rangle \leftrightarrow |R_S\rangle$ 具有增强的拉比频率 $\sqrt{S}\Omega$ [95]。因此，只需重新缩放 $\Omega \to \sqrt{S}\Omega$，上述讨论便可直接推广到修饰装置。具体而言，我们可以通过在超原子上实现式（ $CZ(\phi)$ 来在数据原子之间施加6，$|G_S\rangle \to e^{i\phi} |G_S\rangle$。为此，我们仍可选择驱动 $\xi(t) = -\Delta t$ 和$\Delta = 2(\pi - \phi)/t_f$，但现在取 $t_f = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 + S\Omega^2}$。

其次，考虑将任意大小的修饰装置放置在键S_i上，大小为$j \in \{1, \dots, S_{\max}\}$，$\langle i$——例如，图 $j\rangle$3(c) 展示了蜂窝晶格的例子。此时会同时存在多种超原子大小。在第3节 III B 3 中，我们讨论如下问题：给定任意一组目标相位$\{\phi_1, \dots, \phi_{S_{\max}}\}$，我们能否找到一个驱动方案 $\xi(t)$，使所有超原子并行地在布洛赫球上完成一条闭合轨迹——也就是说，对所有 $S \in \{1 \dots S_{\max}\}$，都有

$$|G_S\rangle \xrightarrow{\xi(t)} e^{i\phi_S} |G_S\rangle . \tag{10}$$

如图 3(c) 所示。因此，对于每一对 $\langle i,\ j\rangle$，相应的器件都会实现不同的中介门，从而实现所需的 $CZ(\phi_{S_{i,\ j}})$。

这表明，我们可以利用基数不同的超原子，在相邻的数据原子之间实现 $CZ(\phi)$（$i,\ j$），其中 ϕ 由键 $\langle i$上的超原子大小决定 $j\rangle$。实际上，$S_{\max}$ 受到物理条件的限制，因此这类构造也受到制约。尽管较大的 S 或许可行，但对于第IV节中讨论的构造，我们只需要 $S_{\max} \leq 3$。

3. *Parallel quantum control of decorated gadgets*

对于器件构造而言，一个关键特征是能够找到适当的驱动时序，以实现方程（10）所描述的动力学。这类驱动时序的存在性由该系统的完全可控性 性质保证。具体而言，给定一组 $S_{\max}$ 基数不同的超原子，对于任意两个乘积态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$，都存在有限时间$T > 0$和控制相位 $\xi(t)$，其中 $t \in [0, T]$，使系统从 $|\psi_1\rangle$ 演化到 $|\psi_2\rangle$。我们在附录B中给出了这一结果的证明。

此外，为了最大限度地减少里德伯态有限寿命所导致的误差 [51, 96]，，以时间最优的方式设计这些过程是十分便利的 [97, 98]。在图 4（d）中，我们给出了实现为特定的超原子赋予目标相位，同时在其他超原子上实现恒等算符。我们考虑 $S_{\max} = 3$ 个超原子，这对于在我们的装置中实现 Floquet Kitaev 蜂窝模型至关重要，具体如第 IV节所述。在附录 C中，我们展示了如何应用梯度上升脉冲工程（GRAPE）算法来计算时间最优控制 [99]。

IV. 实现量子元胞自动机

本节介绍我们构建量子元胞自动机的方法。具体而言，我们将详细描述几个具体示例，它们共同展示了其中涉及的所有机制。下面，我们通过 $\sigma^Z = |r\rangle\langle r| - |g\rangle\langle g|$、$\sigma^X = |r\rangle\langle g| + |g\rangle\langle r|$ 和 $\sigma^Y = i\sigma^X\sigma^Z$ 定义单原子的泡利代数。

A. 同步动力学

我们首先展示该方案最简单的版本，它使我们能够实现所谓的 同步量子元胞自动机。概括而言，这类自动机的所有相互作用局部更新彼此对易——也就是说，它们可以同时施加 [见图 1(f)]。在我们的架构中，这意味着只需两个脉冲即可实现 $\mathcal{U}$：第一个作用于数据物种（用于更新局域参考系），第二个作用于辅助量子比特（用于激活器件）。虽然十分简单，这类同步动力学仍包含一些有趣的例子，例如踢击伊辛模型。

1. *The kicked-Ising model*

踢击伊辛模型由文献 [58, 59],提出，并在过去十年中引发了广泛研究。值得注意的是，1D 模型提供了一个展现非遍历性和量子混沌的最简设置，从而能够对不可积系统进行罕见的解析研究 [8, 100]。在 1D 以外，其动力学在经典计算上具有挑战性，同时也为量子计算机提供了基准测试 [101–105]。

给定一个（正则）图，其更新规则为

$$\mathcal{U}_{KI} = e^{-i\tau H_K} e^{-i\tau H_I}, \tag{11}$$

其中定义了标准的伊辛哈密顿量

$$H_I = J \sum_{\langle j,k\rangle} \sigma_j^Z \sigma_k^Z + h \sum_j \sigma_j^Z \tag{12}$$

其中相互作用为 J，纵向场为 h，而

$$H_K = b \sum_j \sigma_j^X \tag{13}$$

是一个“踢击”项，用于旋转局域参考系。

在继续之前，先用以下方式理解这一点

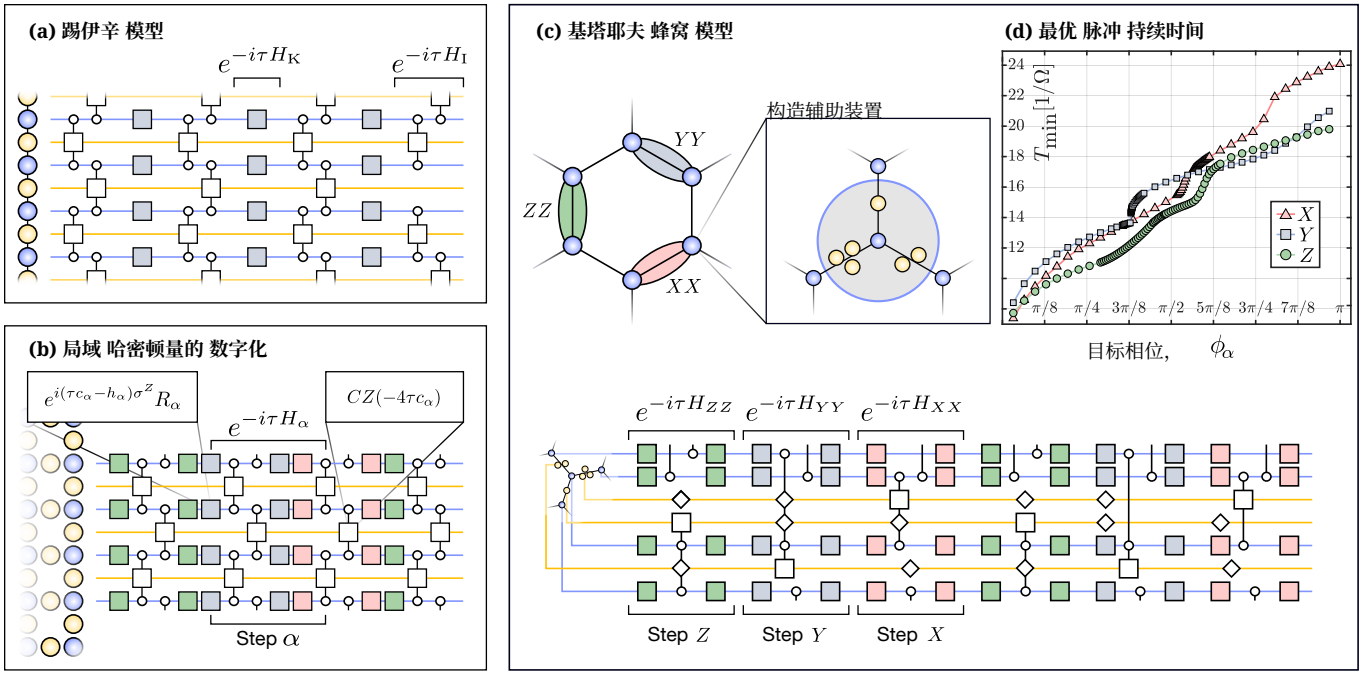

图4。（a）对于踢击伊辛模型，我们交替在数据物种上施加单原子旋转（实现踢项），并在辅助物种上施加辅助装置脉冲，通过介导门实现伊辛层。（b）对于任意 2–局域哈密顿量的数字化，我们分三个主要步骤进行，每一步都在不同的泡利基下操作。（c）Floquet Kitaev 蜂窝模型也通过使用修饰化装置来实现。（d）我们使用最优控制，为实现 Floquet Kitaev 蜂窝模型的三个步骤中的介导门推导出时间最优脉冲。图中展示了最优时长 $T_{\min}$ 随目标相位 $\phi_\alpha = -4\tau J_\alpha$变化的情况，其中 $\alpha = X,\ Y,\ Z$。这些数值对应于 $\phi \in [0,\pi]$，并固定 $T_{\min}(-\phi_\alpha) = T_{\min}(\phi_\alpha)$。数值过程的更多细节见附录C。

电路语言。请注意，对于任意 ϕ，都有

$$CZ(\phi) = \left[e^{-i\phi\sigma^Z/4} \otimes e^{-i\phi\sigma^Z/4}\right] e^{i\phi\sigma^Z\sigma^Z/4}. \qquad (14)$$

因此，通过选择 $\phi = -4\tau J$和$\alpha = \tau(h + gJ)$（其中 g 为图的度），伊辛层可分解为最近邻门 $CZ(\phi)$，后接一层形式为 $e^{-i\alpha\sigma^Z}$的单量子比特酉变换。踢跃层则只需对所有量子比特施加 $e^{-ib\sigma^X}$。

为实现 $\mathcal{U}_{\mathrm{KI}}$，我们按照图4(a)所示进行，只使用基本构件，并采用以下两个步骤：

1. 我们通过失谐脉冲驱动数据物种，直接对所有数据原子施加 $e^{-i\alpha\sigma^Z}e^{-ib\sigma^X}$。2. 我们驱动辅助物种，通过介导门实现任意一对相邻原子 $\langle j、\ k\rangle$之间的门$CZ(\phi)$，如式（7）所示。

考察式（14，不难看出，这精确实现了 $\mathcal{U}_{\mathrm{KI}}$。

2. *Inhomogeneous kicked-Ising model*

现在，我们考虑上述踢伊辛模型的一种非均匀变体，其中耦合破坏了某些对称性。举例来说，我们聚焦于一个二维方格晶格。更新规则仍为 $\mathcal{U}'_{KI} = e^{-i\tau H_K}e^{-i\tau H'_I}$，踢项仍如式（13）所示。不过，伊辛项修改为

$$H'_I = J_x \sum_{\langle j,k\rangle_x} \sigma_j^Z\sigma_k^Z + J_y \sum_{\langle j,k\rangle_y} \sigma_j^Z\sigma_k^Z + h\sum_j \sigma_j^Z, \qquad (15)$$

其中，例如，$\langle\cdot、\ \cdot\rangle_x$ 表示沿 x 方向的最近邻。因此，H'_I 打破了各向同性，因为两个方向对应的相互作用强度 $J_x \neq J_y$ 不同。

为了实现 $\mathcal{U}'_{KI}$，我们沿 y 方向的键上装饰大小为 $S = 2$ 的超原子（而 x 键上仍布置基本构件）。然后，对于非均匀踢Ising模型，我们对上述两个步骤作如下修改：

1. 我们通过一个失谐脉冲驱动数据物种，直接施加 $e^{-i\alpha'\sigma^Z}e^{-ib\sigma^Z}$，此时我们设定$\alpha' = h\tau + 2\tau(J_x + J_y)$。

2. 我们用一个脉冲驱动辅助物种，使大小为 $S = 1$ 和 $S = 2$ 的超原子分别获得几何相位 $\phi_x = -4\tau J_x$ 和 $\phi_y = -4\tau J_y$。通过这些构件，可在沿 x 和 y 方向的最近邻之间分别实现门 $CZ(-4\tau J_x)$ 和 $CZ(-4\tau J_y)$。

与上面最简单的模型类似，可以看出，这两个步骤的结合确实实现了

$\mathcal{U}'_{KI}$。最后需要指出的是，同一概念也可以直接推广到更复杂的模型和图构造中，即使相互作用强度存在多种且更加无序的不均匀性。

B. 异步量子元胞自动机

我们现在考虑更一般的量子元胞自动机，它们是异步的。也就是说，不同链路上的局部更新彼此不对易，无法并行应用 [图 1(g)]。下面，我们详细介绍两个相关示例。首先，我们讨论 Floquet Kitaev 蜂窝模型，这是一种显然异步的量子元胞自动机，需要使用修饰化装置。其次，我们讨论任意 2–局部（对称）哈密顿量的数字化，这只需使用基本构件即可。

1. *The Floquet Kitaev honeycomb*

首先，我们考虑定义在蜂窝晶格上的 Floquet Kitaev 蜂窝模型 [60], , 其形式为

$$\mathcal{U}_{KH} = e^{-i\tau H_{XX}} e^{-i\tau H_{YY}} e^{-i\tau H_{ZZ}}, \tag{16}$$

其中， $\alpha \in \{X, Y, Z\}$ 中的项 H_α 定义为

$$H_{\alpha\alpha} = J_\alpha \sum_{\langle j,k\rangle_\alpha} \sigma_j^\alpha \sigma_k^\alpha + h_\alpha \sum_j \sigma_j^\alpha, \tag{17}$$

其中， $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_l$ 是方向为 α [图 4(c)]中的键。

该量子元胞自动机与具有范式意义的 Kitaev 蜂窝哈密顿量 $H_{KH} = H_X + H_Y + H_Z$ [60] 相关联。然而，由于 $[H_{\alpha\alpha}, H_{\beta\beta'}] \neq 0$，有效 Floquet 哈密顿量

$$H_{\text{eff}}[\tau] = H_{KH} - \frac{i\tau}{2}[H_{XX}, H_{YY}] - \frac{i\tau}{2}[H_{XX}, H_{ZZ}] + \tag{18}$$

$$- \frac{i\tau}{2}[H_{YY}, H_{ZZ}] + O(\tau^2) \tag{19}$$

仅在 τ 较小时近似成立。有趣的是，对于有限的 τ，涌现出的 $O(\tau)$ 项可以显著丰富这一 Floquet 模型的物理：正如文献 [81], 所示，这类一阶贡献通过破坏时间反演对称性，在原本无能隙的非阿贝尔相中引入能隙，从而实现动力学 Floquet 自旋液体。

为实现该量子元胞自动机，我们将数据原子布置在蜂窝晶格的顶点上。我们使用三种类型的器件，其尺寸分别为 $S = 1$、2、3，分别对应三种晶格取向 [图4(c)]。具体而言，取向为 α 的键承载尺寸为 S_α的超原子，其中 $S_Z = 1$，$S_Y = 2$ 以及 $S_X = 3$。为实现 $\mathcal{U}_{KH}$，我们分三步进行，分别标记为 $\alpha \in \{X, Y, Z\}$，其中第 α 步实现 $e^{-i\tau H_{\alpha\alpha}}$。如图4(c)所示，第 α 步包含以下三个子步：

1. 我们驱动数据物种，以在每个数据原子上实现酉变换 $e^{-i\tau(h_\alpha + J_\alpha)\sigma^Z} R_\alpha$ ，其中R_α 将 Z 基映射到 α 基（例如， $R_X = e^{-i\pi\sigma^Y/4}$）。

2. 我们对辅助物种施加一个脉冲，使大小为 S_α 的超原子获得相位 $\phi_\alpha \equiv -4\tau J_\alpha$，而大小为 $\neq S_\alpha$ 的超原子实际上不获得几何相位（更准确地说，它们在 $n \in \mathbb{Z}$ 时获得相位 $2\pi n$）。因此，这在方向为 α 的键上实现了 $CZ(-4\tau J_\alpha)$，并在所有其他键上实现恒等算符。

3. 我们对数据物种施加 $R_\alpha^\dagger$ 。

为了理解 $\mathcal{U}_{KH}$ 是如何涌现的，请注意，对于任意 ϕ，

$$\left(R_\alpha^\dagger \otimes R_\alpha^\dagger\right) CZ(4\phi) e^{-i\phi\sigma^Z} \otimes e^{-i\phi\sigma^Z} \left(R_\alpha \otimes R_\alpha\right) = e^{i\phi\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha}, \tag{20}$$

可由式（14）以及根据定义， $R_\alpha^\dagger \sigma^Z R_\alpha = \sigma^\alpha$。通过在上面的表达式中选择 $\phi = -4\tau J_\alpha$ ，很容易看出，上述三个步骤实现了 $e^{-i\tau H_{\alpha\alpha}}$。还要注意，上述方案可以进一步简化，例如，将某一步骤的子步骤 3 与下一步骤的子步骤 1 合并， [这相当于合并图4(c)]中连续的两层单量子比特门。

2. *Digitization of arbitrary local Hamiltonians*

最后，我们考虑局域最近邻哈密顿量的一般数字化。更具体地说，作为起点，考虑一个 2–体哈密顿量，其形式为

$$H = \sum_{\langle j,k\rangle} h_{j,k}. \tag{21}$$

我们假设模型定义在局部连通的晶格上，并且 $h_{j,\ k}$ 是对称的（$h_{j,\ k} = h_{k,\ j}$） ，且在每条键上都相同。对 H 最简单的数字化方式是采用 Trotter 型分解：更新规则 $\mathcal{U}$ ，给定最小步长 τ 和误差 ε，它与演化 H 在时间 τ内的结果ε–接近，

$$\left|\left|\mathcal{U} - e^{-i\tau H}\right|\right| \leq \varepsilon, \tag{22}$$

其中， $||\cdot||$ 表示通常意义上的算子范数。随后，重复应用 $\mathcal{U}$ 即可模拟在 H下的演化。然而，正如下文所讨论的，我们的数字化也能实现从 H推导出的更一般的离散局域动力学，甚至远超此类 Trotter 化。

要构造 $\mathcal{U}$，首先我们将其分解

$$h_{j,k} = \sum_{\alpha=X,Y,Z} \left(c_\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_k^\alpha + \frac{1}{2} h_\alpha (\sigma_j^\alpha + \sigma_k^\alpha)\right), \tag{23}$$

这总是可以通过对称性实现。[1] 这使我们能够将哈密顿量重写为 $H = \sum_\alpha H_\alpha$，其中

$$H_\alpha = c_\alpha \sum_{\langle j,k \rangle} \sigma_j^\alpha \sigma_k^\alpha + h_\alpha \sum_j \sigma_j^\alpha . \tag{24}$$

接下来，我们考虑如下数字化方案：

$$\mathcal{U}_H = e^{-i\tau H_Z} e^{-i\tau H_Y} e^{-i\tau H_X} . \tag{25}$$

对于较小的 τ，这将以误差 $\varepsilon = O(N\tau^2)$ 实现公式（ N 是系统尺寸 [106]。因此，它支持标准的 Trotter 化模拟 [61]。然而，正如我们所述，我们的实现可以实现任意的 $\mathcal{U}_H$ ，对于任意 τ。

在我们的架构中，我们按照图 $\mathcal{U}_H$ 4(b) 所示实现 $\alpha \in \{X, Y, Z\}$。我们将数据原子排列在给定晶格的顶点上，并将基本构件置于键上（即不需要超原子）。该实现分为三个步骤，标记为 α ，其中步骤 包括以下子步：

1. 我们在数据物种上施加一个脉冲 R_α ，将 Z 基映射到 α 基；例如， $R_X = e^{-i\pi\sigma^Y/4}$。2. 我们在数据物种上施加 $e^{-i\tau(gc_\alpha + h_\alpha)\sigma^Z}$ ，其中g 是晶格的图的度。3. 我们驱动辅助量子比特以激活基本构件，并在键上实现 $CZ(-4c_\alpha\tau)$。4. 最后，我们施加步骤 1 的逆操作，即 R_α^{-1}。

不难看出，这确实实现了 $\mathcal{U}_H$，其中步骤 α 恰好实现了 $e^{-i\tau H_\alpha}$。在实践中，上述子步 1 和 2 可以与前一步的子步 4 合并为一个脉冲。因此，总体而言，实现一次 $\mathcal{U}_H$ 需要 6 个物种交替激光脉冲。

C. 概念总结

现在，我们结合上述例子简要总结我们的构造；这些例子具体涵盖了所有要素。为此，我们对动力学模型进行两种不同的分类，以突出其一般特征如何影响我们的实现。

一方面，正如上文明确所做的那样，我们可以将模型分为同步和异步两类。具体来说，回想一下，如果将 $\mathcal{U}$ 写成离散局域电路时，相互作用的局域更新彼此可交换，因而可以同时应用，那么它就是同步的。这种刻画有一个基本推论（并非我们的方法所独有）：如果 $\mathcal{U}$ 是异步的，则需要多个相互作用层才能实现它。

另一方面，我们可以将模型分为均匀和非均匀两类。在这种情况下，主要影响与我们的实现方式有关，该实现依赖于全局驱动：需要修饰装置来打破对称性，使实现的动力学在空间上呈现非均匀性。

值得强调的是，这两种刻画彼此正交：动力学是否为异步，与其齐次性并无根本联系。第IVB 2节展示了这一点：模型是齐次的，却是异步的，正如一般情况下 $[h_{i,j}, h_{j,k}] \neq 0$所示。实际上，我们实现的电路深度仅取决于模型本身的可并行性，而空间开销（即超原子大小）则仅与其齐次性有关。

V. 观测量子混沌

量子混沌是多体物理中的一个重要概念，涵盖了信息搅乱 [107], 本征态热化 [108], 以及随机矩阵理论 [64–66, 109]的涌现等现象。一般的相干量子多体系统往往自然呈现混沌动力学；然而，在实验上诊断此类行为通常颇具挑战，需要测量 OTOC 等非平凡物理量 [67, 69, 110]。

在本节中，我们详细介绍一种混沌检测方法：通过提取算符动力学的粗粒化信息，使我们能够区分上文所研究的量子元胞自动机的不同动力学机制。重要的是，与测量OTOC [111–114]等方法相比，我们的方法所需的实验工具极少。此外，此类工具已在双物种全局驱动原子阵列中得到演示 [57]。

在下文中，我们将用 $U(t)$表示一般的幺正演化算符。在我们的离散化设定中， t是离散的，而 $U(t)$描述对 $\mathcal{U}$ 的 t 次应用。然而，我们指出，以下所有结果均不假设动力学的离散化，并且对任何模拟演化同样成立。

A. 量子混沌的粗粒化特征

在混沌量子系统中，微小扰动会迅速扩散至整个系统，将局域信息重新分布到非局域自由度上 [107]。这一现象可通过局域可观测量的演化来量化 [4, 67–71]：在混沌动力学下，最初局域化的算符会迅速扩展其支撑集，使之遍及整个系统。可通过 OTOC 及其他度量来探测算符支撑集的这种扩展 [2, 4, 5, 85, 115]。下文将考察一个最初在文献 [115] 中提出的量，它可视为算符扩展的一种粗粒化特征。

[1] 利用在伴随局部旋转 u 下泡利矩阵按如下方式变换这一事实，可以推导出$\sigma^\alpha \to u\sigma^\alpha u^\dagger = \sum_{\beta=X,\,Y,\,Z} R_{\alpha,\,\beta}\sigma^\beta$ 其中 R 是一个对称正交矩阵。

具体而言，对于可观测量 O，给定 $\mathrm{Tr}[O]=0$ 和 $\mathrm{Tr}[O^2]=2^N$，我们关注的量为 [115]

$$g^O(t)=\mathbb{E}_\mu\Big[\langle\psi|O(t)|\psi\rangle^2\Big], \tag{26}$$

其中我们设 $O(t)=U^\dagger(t)OU(t)$。这里，$|\psi\rangle=|\psi_1,\ldots\ldots,\psi_N\rangle$ 是作用于 N 个量子比特上的随机乘积态，而 $\mathbb{E}_\mu[\cdot]\equiv\int d^N\mu(\psi)[\cdot]$ 是对此类状态的均匀平均——即按照测度

$$d^N\mu(\psi_1,\ldots,\psi_N)\equiv d\mu_H(\psi_1)\ldots d\mu_H(\psi_N), \tag{27}$$

其中 $d\mu_H(\psi)$ 表示单量子比特希尔伯特空间 [116] 上的 Haar测度。也就是说，$d\mu(\psi_1,\ldots\ldots,\psi_N)$ 是因子化的 $N-$ 个量子比特态的均匀分布。

现在我们详细说明 $g^O(t)$ 如何提供有关混沌 [115] 的信息。首先，回顾一下，我们总可以写成

$$O(t)=\sum_{P\in\mathcal{P}}c_P(t)P, \tag{28}$$

其中 $\mathcal{P}=\{\mathbb{I},\sigma^X,\sigma^Y,\sigma^Z\}^{\otimes N}$ 是所有泡利字符串的集合，它们构成 N 个量子比特算符空间的完备基。显然，系数 c_P 包含了关于 $O(t)$ 在整个系统中扩散的信息。特别地，我们可以通过其算符尺寸分布来刻画其支撑集的增长，该分布定义为

$$p_\ell^O(t)=\sum_{P:|S(P)|=\ell}|c_P(t)|^2, \tag{29}$$

其中 $|S(P)$ 表示量子比特 | 的数量，而 P 支撑于其上。由于 $\sum_\ell p_\ell^O(t)=1$，$p_\ell^O(t)$ 可以解释为 P 在 ℓ 个位置上具有支撑集的概率。与该量（26）的联系由恒等式 [115]给出。

$$g^O(t)=\sum_{\ell=0}^{N}\frac{p_\ell^O(t)}{3^\ell}. \tag{30}$$

因此，通过测量 $g^O(t)$，我们可以获得关于算符扩展的有用信息——尽管并不完整。

更具体地说，如果动力学是混沌的，由式（30）可知 $g^O(t)$ 满足晚时极限

$$\lim_{t\to\infty}g^O(t)=\frac{1}{2^N+1}. \tag{31}$$

通过注意到，对于混沌动力学，$O(t)$ 必须趋近于一个无迹随机算符，从而得到 $p_\ell^O(t\to\infty)=(1-4^{-N})^{-1}\binom{N}{\ell}(3/4)^\ell(1/4)^{N-\ell}$ 对于 $\ell\neq0$，以及 $p_0=0$；随后，上述极限可直接由式（30）得到。

重要的是，正如我们在第VC节中详细阐述的那样，上述行为是量子混沌的一个特有特征，可以有效地区分混沌动力学与可积动力学。其形式相当简单，因此可作为探测混沌区域的实验基准。

除了上述渐近行为外，在混沌动力学下，还可以如下估计 $g^O(t)$在有限时间内的标度。让我们专门考虑 O 为局域算符的情形——例如，仅支撑于单个量子比特上。关键观察是，对于离散局域动力学，$O(t)$的支撑集只会在以有限速度 v传播的光锥内扩展。更准确地说，$O(t)$只能支撑于 $A(t)\sim(vt)^D$ 个量子比特上，其中 D 是晶格的维数。在混沌区间内，$O(t)$中的泡利字符串概率分布趋近于光锥 [4]，内无迹随机算子的分布，从而得到$p_\ell(t)\simeq\left(1-4^{-A(t)}\right)^{-1}\binom{A(t)}{\ell}(3/4)^\ell(1/4)^{A(t)-\ell}\Theta(A(t)-\ell)$，其中 $\ell\neq0$，以及 $p_0(t)=0$；这里，$\Theta(\cdot)$表示赫维赛德阶跃函数。因此，在有限时间内，预计

$$g^O(t)\sim2^{-v^Dt^D}\quad\text{for}\quad vt\lesssim N^{1/D}. \tag{32}$$

对于混沌动力学，$g^O(t)$因此会随时间呈指数衰减（可能先经历一段短暂的初始瞬态），并趋近于式（31）中的稳态值，其中 $A(t)\simeq N$，此时信息已在整个晶格中充分混合。

我们指出，$g^O(t)$单独呈现这种有限时间的指数衰减，并不能明确证实混沌行为（见第VC节）。然而，偏离式（32）确实表明不存在量子混沌：例如，在多体局域化相中，[117] 光锥的对数增长 [118–120] 会导致 $g^O(t)$呈多项式衰减。

B. 测量中性原子实验中量子混沌的特征

现在，我们介绍一种测量 $g^O(t)$的方法，该方法与简单且已通过实验验证的能力兼容 [20]。根据式（26），看起来提取 $g^O(t)$需要将系统初始化为完全无序的状态，而这在全局驱动实验中可能难以实现。我们的方法通过结合以下两项内容解决这一问题，具体如下：首先，利用Haar测度的标准性质来减少初态无序；其次，利用这一简化设计出实验上可行的协议。

1. *Minimal 2-design and formal measurement protocol*

如前所述，我们需要将系统初始化为一个随机态 $|\psi\rangle=|\psi_1,\ldots\ldots,\psi_N\rangle$，其中 $|\psi_i\rangle$彼此独立且同分布，并服从 Haar分布。这意味着 $|\psi\rangle$ 具有大量的无序（即，$|\psi_i\rangle$彼此各不相同）。这种具有广泛无序的状态无法通过全局控制高效制备。

然而，至关重要的是，我们无需构造完整的单量子比特Haar分布：事实上，只需复现其二阶矩即可。这可通过一个2–设计 [116]实现：一个由（单量子比特）

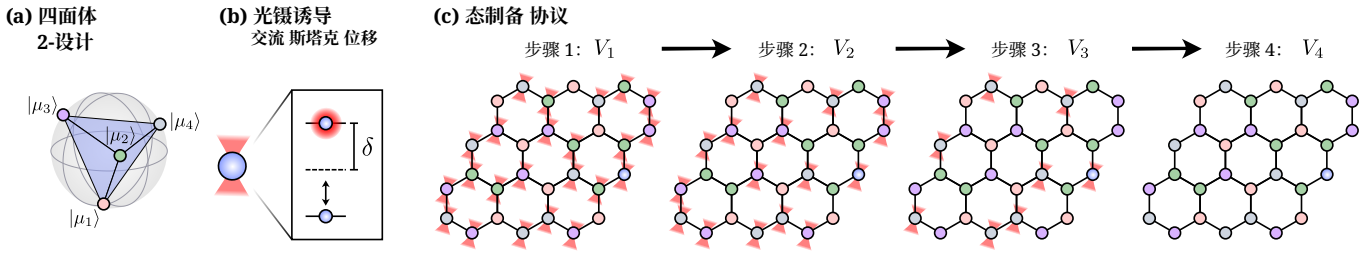

图 5. (a) 单量子比特 2–设计可通过布洛赫球上四面体顶点处的四个态实现。 $\mathcal{E}_T = \{|\mu_1\rangle, |\mu_2\rangle, |\mu_3\rangle, |\mu_4\rangle\}$ （b）光镊可通过失谐 $\delta \gg \Omega$（交流斯塔克频移）使寻址原子移出共振。这样，在光镊寻址期间，处于 $|g\rangle$ 态的原子无法被驱动激光激发至 $|r\rangle$ 态。（c）将系统初始化为随机选定状态 $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_T^N$的协议。协议首先将式（34）中的与晶格顶点的着色对应起来，并将所有原子初始化为 $|g\rangle$。随后分四步进行，在第 k 步，我们使用全局里德堡激光器对所有原子均匀实施幺正算符 $V_k = U_{k+1}^\dagger U_k$ ，其中 $U_k|g\rangle = |\mu_k\rangle$。关键在于，在这些步骤中，我们逐渐关闭光镊光，使更多原子受到寻址。协议结束时，每个原子都根据初始着色制备为所需的四面体态。

states such that $\sum_k |\mu_k\rangle\langle\mu_k| = \mathbb{E}_H[|\psi\rangle\langle\psi|]$ and

$$\sum_k |\mu_k,\mu_k\rangle\langle\mu_k,\mu_k| = \mathbb{E}_H\big[|\psi,\psi\rangle\langle\psi,\psi|\big], \tag{33}$$

其中， $\mathbb{E}_H[\cdot] = \int d\mu_H(\psi)[\cdot]$ 表示单量子比特的哈尔平均。虽然存在许多这样的系综，但我们关注的是其中最小的一个，即 $\mathcal{E}_T = \{|\mu_1\rangle, |\mu_2\rangle, |\mu_3\rangle, |\mu_4\rangle\}$，它包含 $|\mathcal{E}_T| = 4$ 个态 [121]。在布洛赫球上，这些态分布于四面体的顶点[图 5(a)]；令 $\vartheta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$和 $\varphi = \pi/4$，则它们具体为$|\mu_{1,2}\rangle = \cos(\vartheta/2)|0\rangle \pm e^{i\varphi}\sin(\vartheta/2)|1\rangle$ 以及 $|\mu_{3,4}\rangle = \sin(\vartheta/2)|0\rangle \pm e^{-i\varphi}\cos(\vartheta/2)|1\rangle$。可以直接验证，式（33）对 $\mathcal{E}_T$成立。关于 $\mathcal{E}_T$ 的更多细节见附录 E。

然后，很容易证明以下协议可提供 $g^O(t)$ 的无偏估计量：

1. 对每个量子比特 $i = 1、\ldots\ldots、N$，随机选择一个状态 $|\psi_i\rangle \in \mathcal{E}_T$，并设置 $|\psi\rangle = |\psi_1、\ldots\ldots、\psi_N\rangle$。然后，在对 $|\psi\rangle$ 应用 $U(t)$ 后，通过对 O 进行 m 次测量，提取对 $\langle\psi|O(t)|\psi\rangle^2$ 的估计。2. 对$|\psi\rangle$的不同选择重复上述步骤 M 次，并对这 M 个步骤的结果取均匀平均，以提取对 $\mathbb{E}_\mu[\langle\psi|O(t)|\psi\rangle^2]$ 的估计。

这里的优势在于，初始无序程度不再是广延的： $|\psi\rangle$ 仍然不是均匀的，但现在每个量子比特都从一个包含四种状态的小集合中抽取。下文将利用这一简化设计一种测量 $g^O(t)$的协议。

2. *Physical implementation with globally-driven Rydberg atom arrays*

我们现在展示如何利用当前的实验能力实现上述协议，该协议要求从因子化系综 $\mathcal{E}_T^N$ 中制备态。首先，我们为 $k = 1、\ldots\ldots、4$ 确定四个酉算符 U_k，使得 $U_k|g\rangle = |\mu_k\rangle$, and we define $V_k = U_{k+1}^\dagger U_k$, with $V_4 \equiv U_4$.

Next, we rewrite the random state $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_T^N$ as

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^{4} \bigotimes_{k\in A_i} |\mu_k\rangle, \tag{34}$$

其中， $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 是晶格位点的 4–着色。如图 5(c) 所示，这对应于数据物种的一种 4–划分：随机选择一个$|\psi\rangle \in \mathcal{E}_T^N$等价于对晶格着色进行抽样。

给定这样一种着色后，我们首先将所有原子初始化为 $|g\rangle$。随后，我们的协议分四步进行，如图 5(c) 所示。具体而言，在第 k 步，我们生成一组聚焦光镊，寻址着色 $A_{j>k}$ 中的所有原子。开启光镊后，我们使用全局里德堡激光器，在阵列上均匀施加 V_k 。

关键在于，光镊光会使被寻址原子 [20], 产生强烈的交流斯塔克频移，从而有效地将跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |r\rangle$ 移出里德堡激光器 [图5(b)]的共振范围。在实际操作中，驱动期间，受光镊寻址的原子无法演化，其动力学被冻结，而其他原子则可以自由演化。

由此很容易看出，处于 A_k 的原子会经历幺正演化 $V_4 \ldots V_k = U_k$(因为它在$V_{j<k}$期间被冻结）。由于它最初被初始化为 $|g\rangle$，因此最终会处于 $U_k|g\rangle = |\mu_k\rangle$，正如所需。这样，所有原子最终都被制备为式（34）规定的单量子比特态，从而制备出所需的初始态 $|\psi\rangle$。

完成这一态制备步骤后，提取 $g^O(t)$ 的协议就很直接了。具体而言，我们使用上述方法将 $U(t)$ 应用于 $|\psi\rangle$，最后测量可观测量 O：如第VB 1节所述，重复这一 m次即可估计$\langle\psi|O(t)|\psi\rangle^2$；采用 M 种不同的 $|\psi\rangle$ 选择可估计 $g^O(t)$。

我们以对上述协议的三点评论结束本节。首先，我们指出，关键要素（强烈的光镊诱导的交流斯塔克频移）最近已在一项全局驱动的双物种实验中实现 [20]：事实上，它已被用于根据 a [20]着色对系统进行初始化——

。将其扩展至 4–着色，以充分发挥上述协议的优势，是一件直接的事，只需重新编程光镊即可。其次，我们指出，凭借当前最先进的能力，这种技术无法用于实现电路中途的局域控制：原子会因光镊诱导的失谐存在强烈波动而退相干，也会因光镊斜坡调节过程中的误差而退相干；相较于基态-里德堡态量子比特的时间尺度，光镊的调节通常较慢。此外，例如对于碱金属原子，光镊会将处于里德堡态的原子排斥出去，实际上相当于在 $\{|g\rangle, |r\rangle\}$ 基底中对它们进行测量。第三，我们指出，只要 O 在其支撑集上是均匀的，我们的协议就能通过全局控制高效估计 $g^O(t)$：也就是说，如果它具有 $O = \mathcal{O}_{q_1} \otimes \mathcal{O}_{q_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{q_{|S(O)|}}$ 的形式，其中单量子比特可观测量为 $\mathcal{O}$，量子比特集合为 $q_1, \ldots, q_{|S(O)|}$。

C. 观察量子混沌：数值分析

在这里，我们通过数值分析上述诊断量子混沌的方法。我们表明，在所考虑的量子元胞自动机的某些相关区间内，$g^O(t)$能够区分可积区间与混沌区域。

我们首先研究第 IV A 1 节讨论的一维踢伊辛模型。在图 6 中，我们给出了$g^O(t)$的演化，其中我们取 $O = \sigma^X_{N/2}$。为获得数值数据，我们模拟了上文讨论的实验协议，并对 $N_S = 1000$组初始随机构型进行采样（详情见附录 D ）。模拟结果展示了 $N = 8$个和 $N = 16$个格点的情况。对于 $N = 8$，我们还直接根据随时间演化的初始可观测量计算算符大小分布，证实了式（30）确实成立。

我们考虑由方程（$\{J, h, b\}$ 12）和（13）定义的两组参数。其中一组对应一个混沌点，另一组对应一个“自由费米子”点。在后一种情况下，系统是可积的，并且可通过 Jordan-Wigner 变换映射到一个可解模型 [122]。从图 6中可以看出，对于这两组参数，$g^O(t)$的动力学有显著差异。特别是在自由费米子情形下，$g^O(t)$明显偏离式（31）所预期的混沌行为，其幅值始终大得多，并呈现出强烈的复现——这是非遍历性的典型特征。

接下来，我们考虑第 IV B 1 节中介绍的 Floquet Kitaev 蜂窝模型。与一维情形相比，这里的数值模拟更具挑战性，

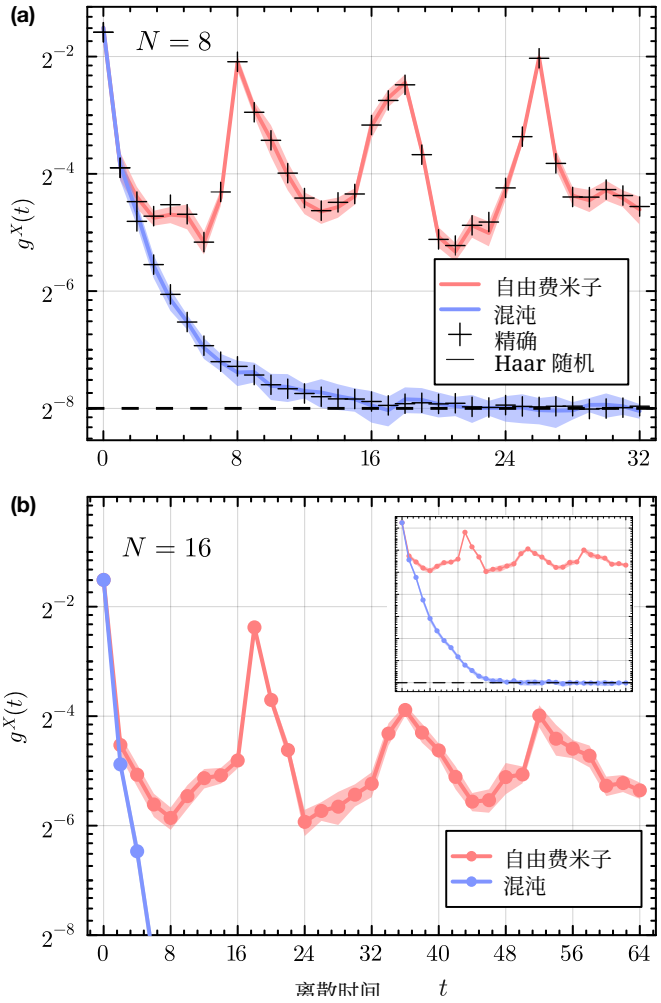

图 6. 对于具有开放边界条件、格点数为 $N = 8$ 的一维踢伊辛模型（a）和格点数为 $N = 16$ 的一维踢伊辛模型（b），泡利矩阵 $O = \sigma^X_{N/2}$ 的生成函数 $g^X(t) =: g^O(t)$。数据通过模拟量子元胞自动机动力学并对 1000 个初始随机构型进行采样获得。曲线对应参数为 $J = 1$、$b = 0.8$ 的踢伊辛模型，以及 $h = 1.2$（混沌）和 $h = 0$（自由费米子）情形。参数定义见方程（11-13）（其中 $\tau = 1$）。虚线表示方程（31）所述的晚时极限。阴影区域表示样本方差的不确定性，详见附录 D。$N = 8$ 的精确值通过计算方程（29）中的精确算符尺寸分布 p_l 获得，该分布对应于时间演化算符，进而通过（30）确定 $g^X(t)$。在附录 D 的图9中，我们展示了特定时刻 $N = 8$ 的采样值分布。

而且，我们只能为前 $\sim$ 10个子步获得可靠数据——因此我们的分析仅限于研究$g^O(t)$ 在早期的行为，对应于 ~ 3 次 $\mathcal{U}_{KH}$应用。在此类非渐近区间内，我们注意到，$g^O(t)$ 的初始行为已足以提供有关量子元胞自动机遍历性的有用信息。我们在图 7中展示了这一点，其中给出了通过模拟处于定性不同参数区间的 Kitaev 量子元胞自动机获得的数据。具体而言，我们考虑了若干组参数——

器 $\{J_X, J_Y, J_Z\}$从准一维区域（$J_Z \ll J_X$，J_Y即抑制一个维度上的动力学）插值到完全二维的情形（$J_X \sim J_Y \sim J_Z$）。在准一维情形下，局部算符扩散可及的空间受到有效抑制，其支撑集随时间增长得比真正的二维动力学更慢。从图 $g^O(t)$ 所示生成函数的行为中，可以清楚地观察到这一点，即使是在我们能够模拟的极短时间内也是如此。尽管晚期动力学7尚未

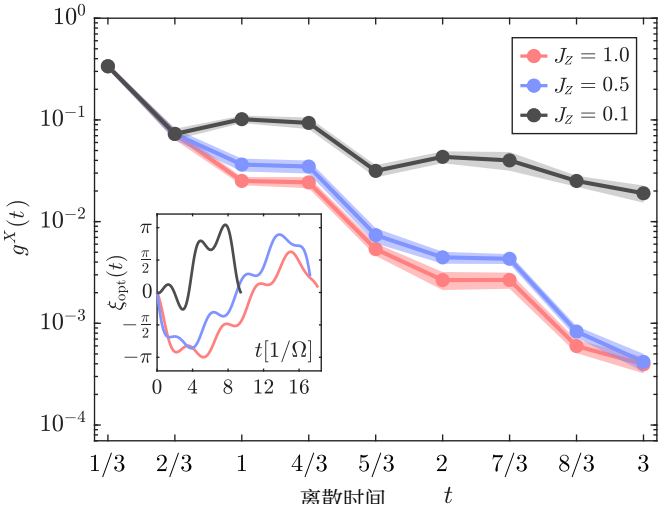

图 7. 生成函数 $g^O(t) =: g^X(t)$ 泡利矩阵 $O = \sigma^X$，对于 $J_X = J_Y = 1$， $h_X = h_Y = h_Z = 1$。参数定义见方程 (16-17)（其中 $\tau = 1$）。注意，我们还纳入了中间时间步，具体说明见附录 D。因此，图示时间范围对应三个完整周期。我们取系统尺寸，使其大于任意时刻的算符大小。两条曲线的数值及不确定性区域（阴影区域）由 1000 个样本计算得出，如附录 D所述。插图展示了针对不同 Z 步的时间最优脉冲序列，这些序列实现了 J_Z 对应的介导门。插图中， t 表示物理时间，单位为 $1/\Omega$。更多数值过程细节请参见附录 C 。

仍未得到探索，但这表明，对于 Kitaev Floquet 量子元胞自动机， $g^O(t)$ 即使在相对浅层的实验方案中，也能够捕捉动力学特征并区分不同区域。

最后，我们还报告了，g^O（t）的早期行为并不总是能够区分混沌相与非遍历相：即使对于非遍历动力学，也会表现出初始的指数衰减。我们在附录D中明确展示了这一点：在那里，我们在参数空间中的某一点模拟了 Kitaev 蜂窝量子元胞自动机；在该点，它化简为一个 [123, 124], 对应于非遍历演化的 Clifford 电路。在那里，在短时间内可以观察到， g^O（t）比混沌动力学中的衰减甚至更快（这种衰减之后会出现复现）。因此，在这种情况下，只有 g^O（t）的晚期行为才能明确区分混沌区间。

总之，本节所呈现的结果既可以视为对我们所提出方法的基准测试，也可以视为推动实验实现我们所构造方案的动机。特别是在二维情况下，我们无法模拟小时间之外的动力学，而实验实现将使我们能够对二维量子元胞自动机动力学中的量子混沌开展更为深入的研究。

VI. 讨论与展望

在这项工作中，我们提出了一种仅基于全局驱动、在双物种原子阵列中实现离散局域动力学的方法。这表明，该平台在控制层面能够以非常高效的模拟模式运行，同时仍可诱导出有效离散化的类电路演化。事实上，我们的研究结果为近期在大型原子阵列中研究复杂多体动力学这一令人振奋的机会铺平了道路，使其超越本征哈密顿量，并有望进入经典计算困难区间。如今，只需最低限度的实验控制要求即可实现这一目标。

现在我们讨论架构中的误差。为此，我们注意到，我们的协议并不存在显著的定性扩展劣势。事实上，我们的实现开销在空间和时间上都是恒定的：$O(N)$ 个原子足以表示一个定义在 N 量子比特上的模型，并且 T 个离散步骤可在$O(T)$物理时间内实现。实际上，我们的架构受到物理约束的限制，例如非理想阻塞区间。此类模拟误差可以通过利用非对称双物种相互作用来减小非期望相互作用 [57, 92, 95]。此外，在某些情况下，对理想区间的小幅偏离仍可能使我们在相关时间尺度内观察到目标物理现象：当动力学表现出预热化效应 [125–129]，，并出现一个中间时间尺度，使得动力学由未扰动哈密顿量主导时，情况便是如此。

为评估我们的协议在近期实现的可行性，我们注意到，近期已有实验展示了多达 35 个原子的全局驱动双物种一维阵列，并报告了保真度高达 $\sim 96.7\%$ 的介导门（见参考文献 [20]）。例如，通过利用已观测到的 F¨orster 共振，可以进一步提高保真度； [57, 92],此外，还可以设想更大的二维阵列。此外，正如参考文献 [130]，所示，通过利用支撑我们修饰装置的双原子和三原子阻塞机制，可以实现高保真度的超原子操作和多量子比特门。

未来的研究方向可以探索我们构造的各种推广版本。例如，我们的方法也可以与量子计算架构中的工具相结合。尽管本文关注的是静态原子阱，但我们可以设想混合操作模式，例如在全局驱动步骤之间交错进行布局重构。另一个有趣的方向是利用双物种实验在不影响另一物种的情况下测量其中一种物种的能力 [56]，从而在演化过程中引入电路中测量。一种方法是重新考虑我们的构造辅助装置，使辅助量子比特与数据原子纠缠，随后对其进行测量并投影数据态。这有望实现带有测量和反馈的通用类电路动力学，例如用于研究测量诱导相变 [87, 89, 90, 131, 132]。更一般地说，

键上的原子可以从催化剂转变为数据量子比特。作为展望，我们注意到，在顶点和键处实现适当的局域约束，可能使我们能够在 [36, 133]我们的设定中实现格点规范理论。在更基础的层面上，我们指出，即使在当前的方案中，对辅助量子比特引入测量也能够消除误差，实际上实现一种简单形式的误差缓解 [95]。最后，尽管本文着重于实现离散化动力学模型，但一个自然的方向是探究本文提出的思想能否实现作为量子计算机的量子元胞自动机模型 [12, 13, 134] 。

补充说明。 本文与一项密切相关的实验同时投稿，该实验研究全局驱动双物种阵列中的量子元胞自动机 [20]。

致谢

我们感谢 R. White 和 G. Giudici 富有见地的讨论。LP 和 HP 感谢维也纳大学埃尔温·薛定谔数学与物理国际研究所（ESI）在“非平衡纠缠物质”研讨会期间提供的接待，本论文的部分研究工作正是在该研讨会期间完成的。R. T. 感谢欧盟地平线欧洲计划下玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动 CODRA（资助编号 101149823）提供的支持。LP 和 DK 的工作由欧盟资助（欧洲研究委员会，QUANTHEM，101114881）。我们还感谢海军研究办公室（N00014-23-1-2540）、空军科学研究办公室（FA9550-21-1-0209）、Q-NEXT（美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心）、欧盟地平线欧洲研究与创新计划（资助协议编号 101113690，PASQuanS2.1）、欧洲研究委员会起始基金 QARA（资助编号 101041435）以及奥地利科学基金（FWF）（DOI 10.55776/COE1）提供的资助。不过，本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行机构的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

附录A：偏离理想阻塞区间的情况

在我们的构造中，根据哈密顿量（5），理想情况下，一种物种的每个原子应只与其紧邻的原子相互作用（这些原子被选为另一种物种）。实际上，由于粒子间势的尾部作用，每个原子也会受到一些“非期望相互作用”的影响。在本附录中，我们将给出一个简单的论证，估算此类非期望相互作用中最强的一种，从而证明理想阻塞区近似的合理性。

分别用 A 和 B 表示数据物种和辅助物种。假设粒子间相互作用强于粒子内相互作用，则经历最强非期望相互作用的原子对由一个 A 原子和距离它最近、但并非其最近邻的 B原子构成。这些原子之间的距离取决于所选的晶格几何形状，以下我们将聚焦于2D 蜂窝晶格。在这种几何结构中，任意一个 A 原子都有三个距离为 d的相邻 B 原子；此外，它还有距离为 $\sqrt{7}d$的 6 B 原子，并与这些原子发生非期望相互作用。因此，假设粒子间势随原子间距d_{i}而$_{j}$ 按照V_{i}衰减，$_{j} \sim d_{i}^{-6}$ 则$_{j}$我们可以估算期望相互作用与非期望相互作用之比：

$$V_{\text{unwanted}}/V_{\text{blockade}} \sim \frac{6}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{6} \approx 0.006 \ll 1\,. \quad \text{(A1)}$$

值得注意的是，比值（A1）小于已确立的PXP模型单组分一维实现中的比值 [58, 59]，对于这些实现，$V_{\text{unwanted}}/V_{\text{blockade}}$ ≃0。0156，从而证明了采用里德堡阻塞近似的合理性。如上所述，上文描述的物理装置针对的是二维蜂窝晶格上的实现，但也可以直接推广到其他几何结构，包括二维方格晶格和一维排列。

这里需要作一些说明。上文中，我们假设组分间相互作用占主导，并采用范德瓦耳斯势尾部 $V_{i,j} \sim d_{i}^{-6}$ $_{,j}$，估算了非期望相互作用。然而，尽管组分间相互作用确实可以通过 F¨orster 共振 [57]，进行调控，这仍是一种粗略近似。对于包含两种可区分原子类型的系统，组分间相互作用呈现两个不同的区域，它们由交叉距离 R_c分隔。当距离 R 小于 R_c时，共振相互作用呈现 $1/R^3$ 衰减；而当距离大于 R_c 时，相互作用则呈$1/R^6$ [21, 92]衰减。因此，要进行更定量的估算，应考虑组分间势的完整形状。不过，值得强调的是，我们可以将经历非期望相互作用的原子对之间的距离设定为大于 R_c，从而使其相互作用能够用范德瓦耳斯势很好地近似。

附录 B：完全可控性

在本附录中，我们讨论由 $S_{\max}$ 个基数为 $S = 1, \ldots, S_{\max}$ 的超原子组成的系统的可控性性质。该系统在哈密顿量 $H = \oplus_{S=1}^{S_{\max}} H_S$ 下演化，其中

$$H_S(\xi) = \frac{\sqrt{S}\Omega}{2}\left[\exp(i\xi)\sigma_S^- + \exp(-i\xi)\sigma_S^+\right], \tag{B1}$$

其中 $\sigma_S^{\pm}$ 是作用于第 S 个超原子的升降算符。我们证明该系统完全可控：对于任意两个乘积态 $|\psi^i\rangle = |\psi_1^i, \ldots, \psi_{S_{\max}}^i\rangle$ 和 $|\psi^f\rangle = |\psi_1^f, \ldots, \psi_{S_{\max}}^f\rangle$，都存在一个时间 $T > 0$ 和一个时变相位 $\xi(t)$（满足 $t \in [0, T]$），使得 $|\psi^f\rangle = U(T)|\psi^i\rangle$，其中 $U = \otimes_{S=1}^{S_{\max}} U_S(T)$，且 $U_S(T) = \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H_S(t)\, dt\right)$。

由于超原子独立演化，传播子 $U(t)$ 在李群 $G = SU(2)^{S_{\max}}$ 上演化，而由哈密顿量 $H(\xi(t))$ 生成的薛定谔方程在 G, $U(t) = -iH(\xi(t))\, U(t) = W(\xi(t))\, U(t)$ 上定义了一个右不变控制系统，其中 $U(0) = \mathbb{I}$。若由可用控制方向（即由 $\text{span}_{\xi\in\mathbb{R}}\{W(\xi)\}$）生成的李代数 $\mathfrak{L}$ 与群 G 的完整李代数（即 $\mathfrak{g} := \bigoplus_{s=1}^{S_{\max}} \mathfrak{su}(2)$，见 [135]）重合，则该系统完全可控。

为证明 $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}$，策略是证明 $\mathfrak{g}$ 的生成元（即独立旋转的生成元）属于 $\mathfrak{L}$。在开始证明之前，先引入以下算符 $P_S = -i\sigma_S^x$、$Q_S = i\sigma_S^y$ 和 $R_S = i\sigma_S^z$，它们满足对易关系 $[P_S, Q_S] = 2R_S$、$[Q_S, R_S] = 2P_S$、$[R_S, P_S] = 2Q_S$；并引入以下记号 $W = \oplus_{S=1}^{S_{\max}} W_S = (W_1, \ldots, W_{S_{\max}})$，其中 $W_S = a_S[\cos(\xi)P_S + \sin(\xi)Q_S]$，且 $a_S = \sqrt{S}\Omega/2$。因此，我们的目标是证明，对于所有 $S = 1, 2, \ldots, S_{\max}$，$P_S \equiv (0, \ldots, 0, P_S, 0, \ldots, 0)$、$Q_S \equiv (0, \ldots, 0, Q_S, 0, \ldots, 0)$ 和 $R_S \equiv (0, \ldots, 0, R_S, 0, \ldots, 0)$ 均属于 $\mathfrak{L}$。

证明的第一步是注意到以下形式的算符：

$$\begin{aligned} W_P^{(2j-1)} &= (a_1^{2j-1}P_1, \ldots, a_{S_{\max}}^{2j-1}P_{S_{\max}}) \\ W_Q^{(2j-1)} &= (a_1^{2j-1}Q_1, \ldots, a_{S_{\max}}^{2j-1}Q_{S_{\max}}) \end{aligned} \tag{B2}$$

其中 $j \geq 1$ 属于 $\mathfrak{L}$。事实上，它们可以通过对两个特定的恒相位算符反复取对易子得到，至多相差一个常数因子：

$$\begin{aligned} W_P^{(1)} &= (a_1P_1, a_2P_2, \ldots, a_{S_{\max}}P_{S_{\max}}) = W(\xi = 0) \\ W_Q^{(1)} &= (a_1Q_1, a_2Q_2, \ldots, a_{S_{\max}}Q_{S_{\max}}) = W(\xi = \pi/2), \end{aligned} \tag{B3}$$

（例如，$[W_Q^{(1)}, [W_P^{(1)}, W_Q^{(1)}]] = 4W_P^{(3)}$。）

证明的第二步在于证明，对于任意 $S = 1, \ldots, S_{\max}$，存在一组系数 $\beta^{(S)}$，使得 $\tilde{P}_S = \sum_{j=1}^{S_{\max}} \beta_j^{(S)} W_P^{(2j-1)}$ 且 $\tilde{Q}_S = \sum_{j=1}^{S_{\max}} \beta_j^{(S)} W_Q^{(2j-1)}$。因此，它们的对易子返回 $\tilde{R}_S$。系数 $\beta^{(S)}$ 可通过求解以下线性方程组 $M \cdot \beta^{(S)} = e_S$ 得到。这里，e_S 是标准基的第 S 个元素，而 $M \in \mathbb{R}^{S_{\max}\times S_{\max}}$ 具有以下分量 $M_{S,\,j} = a_S^{2j-1}$，其中 $a_S > 0$ 按构造成立。根据范德蒙德矩阵的性质可知，M 可逆当且仅当所有 a_S 彼此不同，也就是说，当且仅当所有超原子的基数各不相同。事实上，我们有：$\det(M) = \prod_i a_i \prod_{1\leq i<j\leq S_{\max}} (a_i^2 - a_j^2)$。

附录 C：量子最优控制

本附录介绍用于推导第 III B 3 节所述时间最优激光脉冲的最优控制方法。具体而言，我们将展示如何设计一个随时间变化的全局相位 $\xi(t)$，以同时驱动不同基数的 $S_{\max}$ 超原子 $S = 1$、……、$S_{\max}$（见附录 B），使其从基态 $|G_S\rangle$ 转变为目标态 $|\bar{\psi}_S\rangle \equiv e^{i\phi_S}|G_S\rangle$，其中 ϕ_S 为特定的目标相位。在 PXP 极限下，每个超原子都作为一个独立的二能级系统演化，其增强后的拉比频率为 $\sqrt{S}\Omega$，相位为 $\xi(t)$，如式 (B1) 所述。由于拉比频率增强程度各不相同，寻找这样的控制函数 $\xi(t)$ 并非易事 [136]，需要采用数值优化策略 [97, 99]。此外，在可能的解中，优先选择时间最优解，因为它们能缩短过程持续时间，从而减少有限里德伯态寿命导致的误差 [51]，，而已知这类误差会随着过程持续时间增加而增大 [96]。

为完成这一任务，我们采用梯度上升脉冲工程（GRAPE）算法 [137]，。该算法已成功应用于里德堡平台，用于设计时间最优量子门以及执行范围更广的控制任务 [99, 130, 138–141]。该方法通过搜索控制函数的分段常数近似，使其最小化一个编码目标演化的给定误差函数。具体而言，对于固定的时间演化 T，我们将时间区间 $[0, T]$ 离散为若干小区间，并假设激光相位在每个区间内保持恒定，然后对这些常数值进行优化：$\xi(t) = \xi(t_i) \equiv \xi_i$ 对于 $t \in [t_i, t_{i+1}]$，其中 $i = 1, \ldots M$、$t_1 = 0$ 和 $t_M = T - dt$。作为代价函数，我们发现以下误差在数值计算上较为高效：

$$\text{Err}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{S=1}^{S_{\max}} \left|1 - \langle\bar{\psi}_S|\psi_S(T)\rangle\right|^2, \quad \text{with } \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_M). \tag{C1}$$

这里，$|\psi_s(T)\rangle = U_{s,\,M} \ldots U_{s,\,1}|G_s\rangle$ 是第 S 个超原子在分段常数控制 $U_{S,\,i} = \exp(-iH_S(\xi_i)dt)$ 作用下演化后的状态。

通过提供以下解析表达式，可以高效地搜索 $\text{Err}(\boldsymbol{\xi})$ 的最小值。

其梯度的表达式：

$$\frac{\partial \mathrm{Err}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = -2\,\mathrm{Re}\Bigg[\sum_{S=1}^{S_{\max}} \langle\bar{\psi}_S| \frac{\partial}{\partial \xi_i} |\psi_S(T)\rangle \times \Big(1 - \langle\bar{\psi}_S|\psi_S(T)\rangle\Big)^*\Bigg]. \tag{C2}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭。这里，

$$\langle\bar{\psi}_S| \frac{\partial}{\partial \xi_i} |\psi_S(T)\rangle = \langle\bar{\psi}_S| U_{S,M} \ldots U_{S,i+1} \times \frac{\partial U_{S,i}}{\partial \xi_i} U_{S,i-1} \ldots U_{S,1} |\psi_S(T)\rangle\,, \tag{C3}$$

而 $\frac{\partial U_{S,}}{\partial \xi_i}{}^{i}$ 可通过近似其积分表达式高效计算：

$$\frac{\partial e^{V_S(\boldsymbol{\xi})}}{\partial \xi_i} = \int_0^1 d\alpha e^{\alpha V_S(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V_S(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} e^{(1-\alpha)V_S(\boldsymbol{\xi})} \quad \text{with } V_S(\boldsymbol{\xi}) = -iH_S(\boldsymbol{\xi})dt, \tag{C4}$$

使用二点高斯求积公式 $\int_0^1 d\alpha f(\alpha) \approx [f(1/2 - \sqrt{3}/6) + f(1/2 + \sqrt{3}/6)]/2$。

为执行优化，我们选取 M =100，并使用 MATLAB 的 fminunc 优化器及拟牛顿（BFGS）算法（设置 TolX =10^{-15}、TolFun = 10^{-15}、MaxIterations = 4000、MaxFunctionEvaluations = 10^5）。为确定时间最优解，我们针对不同的 T 执行此优化，并近似计算函数 $\mathrm{Err}_{\min}(T)$，该函数定义为给定 T 时式（C1）的最小误差。该函数通常呈现陡峭的曲线，在临界时长 $T_{\min}$附近迅速降至 0；这一时长代表该过程的量子速度极限。在本文中，我们将 $T_{\min}$ 定义为 $\mathrm{Err}_{\min} < 1.01 \times \mathrm{E_{th}}$ 且 $\mathrm{E_{th}} = 10^{-10}$时的最小值。原则上，$T_{\min}$ 的精确值取决于误差阈值 $\mathrm{E_{th}}$和离散步长 dt，但 $\mathrm{Err}_{\min}(T)$ 本身陡峭的曲线使其实际上不受这些选择的影响。一般而言，我们发现从较大的 T开始在数值上较为方便，此时从随机初始控制出发容易达到收敛；随后逐步减小 T，并将前一次的最优控制作为在较小 T下进行优化的初始猜测。

在图 4(d) 中，我们考虑 $S_{\max} = 3$ 并针对满足以下条件的过程：$\phi_S = 0$ 除一个超原子（例如 S）外，所有超原子均满足 $\phi_{\bar{S}} = \phi \in [0, \pi]$。我们针对不同的 ϕ值求解时间最优情形，并汇总函数 $T_{\min}(\phi)$。正如文献 [97], 所示，利用 Hamilton-Jacobi-Bellman 理论，该函数通常是连续的，但不可微。一方面，可以有效利用连续性来改进优化方案：在 ϕ处得到的最优时间解，可作为在 $\phi \pm \Delta\phi$ 处进行优化时的良好初始条件。另一方面，存在该函数不可微且不同局部极小值分支相交的点。在这些点附近，需要更加仔细地研究，并且需要从多个方向着手进行优化，例如，$\phi \simeq (3\pi/8)^{\pm}$ 针对 $\bar{S} = 2$。

附录 D：量子元胞自动机数值模拟的细节

图中所示量子淬火方案的数值结果 6 对于晶格维数 $D = 1$ 以及图 7对于 $D = 2$，是通过基于张量网络态的态矢量模拟获得的 [142–144], 我们使用 Julia 中的 ITensor库实现了该模拟 [145]。这里，我们将详细说明，并展示补充数据。

在详细介绍模拟之前$D = 1, 2$，让我们先对所有展示的模拟作一些总体说明。需要强调的是，所有情况下我们都采用受控方法，所展示的结果均处于模拟在数值上精确的范围内（在有效数字范围内）。显然，这使我们只能处理较小的系统尺寸或较少的时间步。

回顾一下淬火方案。我们计算 N_s个样本

$$O_t(s) = \langle\psi_t(\vec{\theta}_s)|O|\psi_t(\vec{\theta}_s)\rangle, \quad s = 1, \ldots N_s \tag{D1}$$

针对不同的初始态 $\left|\psi_0(\vec{\theta}_s)\right\rangle$，这些初始态取样自四面体系综或Haar系综。方程 $g^O(t)$中的函数（见方程（26））通过样本方差进行近似

$$g^O(t) = \mathrm{Var}_{\vec{\theta}_s}[O_t(s)] \sim \frac{1}{N_s - 1} \sum_s \left(O_t(s) - \overline{O_t}\right)^2 + r(N_s), \tag{D2}$$

其中 $\overline{O_t}$ 表示样本平均值，而 $r(N_s)$ 随着 $N_s \to \infty$趋于零。其精确形式取决于未知分布，另见图9。为了在不依赖底层分布的情况下估计样本方差的不确定性范围，我们将大小为 $N_s/10$的样本分成十个相互独立的“批次”，并分别计算样本方差。例如，这可以对应于十次独立的实验运行。随后，将这十个数据点的标准差作为不确定性，并在图中以阴影区域显示。我们针对能够与 $g^O(t)$ 的精确值进行比较的情形，对这一方法进行了基准测试，结果符合预期。我们还注意到，与采用四面体系综相比，采用 Haar 随机分布进行抽样，结果没有明显差异。

对于 $D = 1$，我们使用矩阵乘积态（MPS），在开放边界条件下，利用踢伊辛模型的 Floquet算符$\mathcal{U}_{\mathrm{KI}}$ 演化初始乘积态（见第IVA 1节）。幺正算符 $\mathcal{U}_{\mathrm{KI}}$ 被分解为最近邻门 $U_{i,\ j}$。使用奇异值分解（SVD）将幺正算符 $U_{i,\ j}$ 作用于矩阵乘积态 $|M\rangle$，会增大位点 i 和 j之间的键维数

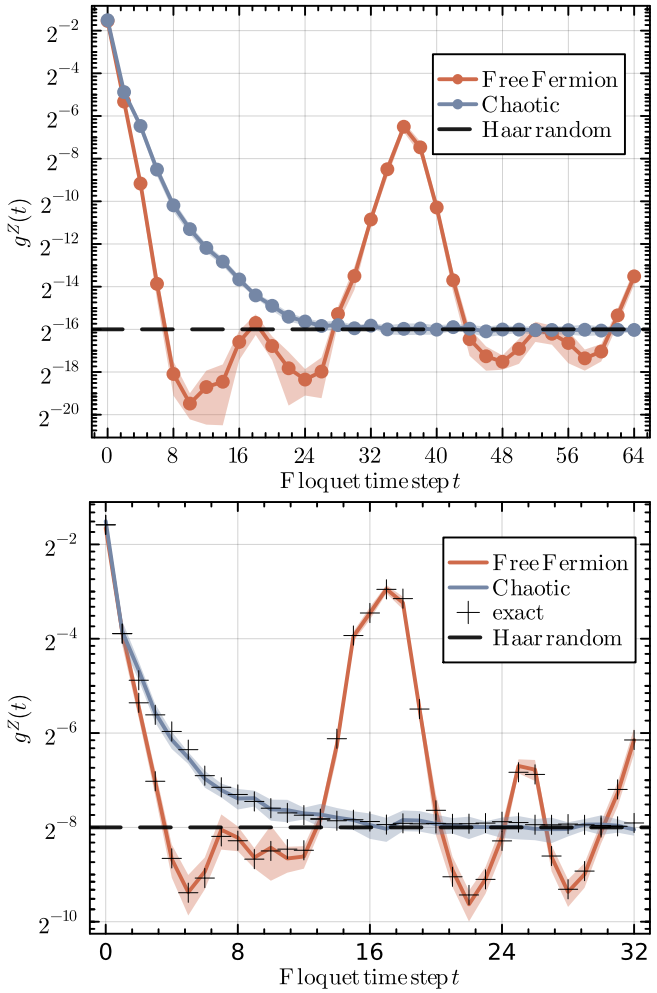

图8. 对于具有 $N = 16$ 个上自旋和 $N = 8$ 个下自旋、采用开放边界条件的 $J = 1$、$b = 0.8$ 一维踢伊辛模型（KIM），泡利矩阵 $O = \sigma^Z_{N/2}$ 的生成函数 $g^Z(t) =: g^O(t)$。曲线对应于参数为 $J = 1$、$b = 0.8$ 的 KIM，其中（i）$h = 1.2$（混沌）和（ii）$h = 0$（自由费米子）。参数定义见公式（11–13）（其中 $\tau = 1$）。虚线表示公式（31）所述的晚时间极限。阴影区域表示样本方差的不确定性，详见附录 D。$N = 8$ 的精确值通过计算公式（29）中的时间演化算符的精确算符尺寸分布 p_l 获得，进而通过公式（30）确定 $g^Z(t)$。两条曲线的数值和不确定性区域（阴影区域）均由使用矩阵乘积态（MPS）获得的 1000 个样本计算得到，具体方法见附录 D。

一个常数因子，该因子至多为 $d^2 = 4$，其中局域希尔伯特空间维数为 $d = 2$。因此，$|\psi_t\rangle = \mathcal{U}^t_{\mathrm{KI}} |\psi_0\rangle$ 的精确矩阵乘积态表示的键维数 χ_t 上界为 $\chi_t \leq \min(4^t, \chi_{\max})$，其中 $\chi_{\max} = 2^{N/2}$是最大纠缠态的键维数，而 N 表示系统尺寸。总体而言，计算式（D1）的一个样本所需的计算量随 $O(N\chi_t^3)$ 增长。

在实际操作中，我们设定一个截断阈值 ϵ_0，它是最大截断权重的固定值：在

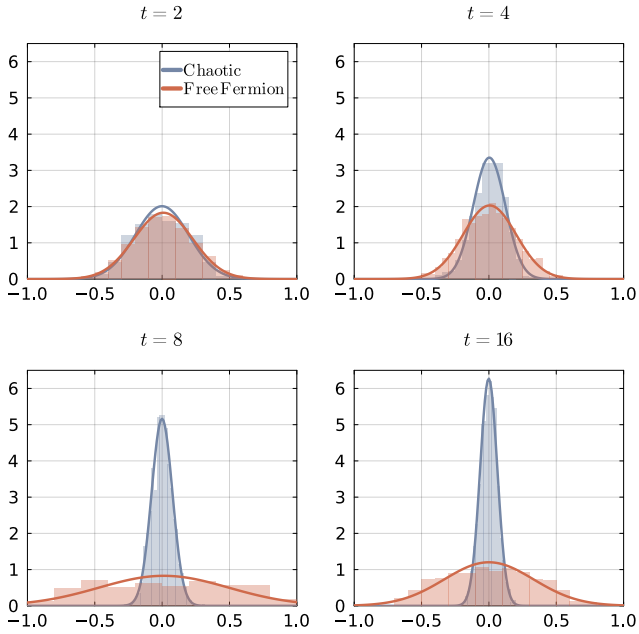

图9. 不同时间步下模拟可观测量的直方图 $\{O_t(s)\}_s$，对应图 6 中系统尺寸为 $N = 8$ 的数据。粗线为高斯曲线，其均值和方差与相应数据相同。

将门 $U_{i,\ j}$ 作用于一个键维数为χ_i的矩阵乘积态（MPS）$|M\rangle$ 的第 i，j 和第 $_j < 4\chi_i$ 个站点之间后，我们用一个键维数为$\chi'_{i,\ j} < 4\chi_{i,\ j}$的新矩阵乘积态（MPS）$|M'\rangle$ 近似该状态，使得

$$\| U_{i,j} |M\rangle - |M'\rangle \| \leq \epsilon_0. \tag{D3}$$

这意味着，我们将 $O_t(s)$ 计算到误差 $\epsilon = O(\epsilon_0, N, t)$。最终，我们希望利用公式（D2）计算 $g^O(t)$。对于混沌动力学，晚期时间的值为 $g^O(t) \to 1/(2^N + 1)$。因此，为了在晚期时间获得 $g^O(t)$ 的正确结果，我们通常需要确保 $\epsilon \ll 2^{-N}$。借助合理的计算资源，通过将 $\epsilon_0 \ll 2^{-N}$ 设得足够小，我们可以对系统尺寸为 $N = O(20)$ 的系统做到这一点。对于一个由 $N = 8$ 个格点组成的小系统，我们使用公式（29）将 MPS 模拟与 $g^O(t)$ 的精确算符计算进行比较。结果如图6和图8所示，两者完全吻合。

在图9中，我们展示了某些特定时刻采样值 $\{O_t(s)\}_s$ 的分布。对于混沌时间演化，经过几个时间步后，$\{O_t(s)\}$ 的分布可用高斯分布很好地描述；随着时间推移，分布逐渐变窄。对于自由费米子参数区间内的非遍历时间演化，$\{O_t(s)\}_s$ 的分布偏离高斯分布，尤其是在 $g^O(t)$ 出现复现的时刻。

对于 $D = 2$，我们使用投影纠缠对态（PEPS）[144] 来模拟式（25）中 Kitaev Floquet算符下的时间演化。与矩阵乘积态（MPS）一样，键维数会随时间呈指数增长。对于我们的

目的而言，与针对 $D=1$ 的 MPS 模拟相比，主要有两点不同。

首先，由于张量网络中存在环，施加门后的局部 SVD 截断不再是最优的。全局最优截断称为全更新 [146], ，而我们采用的临时 SVD 方法称为简化更新 [147]。

其次，期望值 $\langle\psi_t(\theta_s)|O|\psi_t(\theta_s)\rangle$ 无法精确计算，因此人们开发了多种受控的近似方法来处理这一问题。在某些假设下，计算式（D1）中这类期望值的成本通常按$O(\chi^{14})$ [148]的规模增长。这严重限制了我们能够模拟的时间步数。我们选择采用双层边界 MPS 方法，参见例如 [149, 150], ，该方法将“双”层作为 MPS-MPO 乘积来计算 $\langle\psi_t(\vec{\theta}_s)|O|\psi_t(\vec{\theta}_s)\rangle$。

$$\langle\psi_t(\vec{\theta}_s)|O|\psi_t(\vec{\theta}_s)\rangle = \langle \mathrm{MPS}|\mathrm{MPO}\cdots\cdots\mathrm{MPO}|\mathrm{MPS}\rangle. \quad \text{(D4)}$$

在方格晶格上，边界 MPS 定义为沿一个空间方向排列的双张量的第一行和最后一行，中间各行则为 MPO。对于蜂窝晶格上的模拟，MPO 呈阶梯形；与方格晶格相比，我们利用其较低的连通度来提高收缩效率。我们为边界 MPS 设置动态截断阈值 ϵ 。与之前一样，当 $\epsilon \ll 2^{-t^2}$ 足够小时，我们可以准确估计样本方差。在这里，我们将结果与 $g^O(t)$ 早期时间值的最坏情况（即可能的最小值）进行比较——由于 t 非常小，这种做法是可行的。

关键的是，只在初始乘积态的局域可观测量所对应的光锥范围内对其进行演化，就能显著降低计算成本。对于 Kitaev Floquet 模型，单点算符的光锥内量子比特数按 n 增长$n=8$，28，60，.....当 $t=1$，2，3，.....时。由于光锥的尺寸迅速增大，因此考察中间时间步也很有意义；这些时间步对应于依次施加式（25）中的三种不同 $e^{-i\tau H_\alpha}$、 $\alpha=Z$、X、Y。在模拟中，我们选择了这样的顺序：在 $t=1$时，只施加 X 项。因此，九个时间步对应三个完整周期。

在 Clifford 点 $J_\alpha=\pi/4$， $h_\alpha=0$， $\alpha=X$， Y， Z我们可以解析地计算初始泡利串的时间演化（也可以使用稳定子形式进行数值计算）。图 10 展示了精确结果和 PEPS 模拟。

图 11 展示了可观测量的分布。随着算符大小增大，它们会显著偏离高斯分布，并趋近于狄拉克 δ 函数。

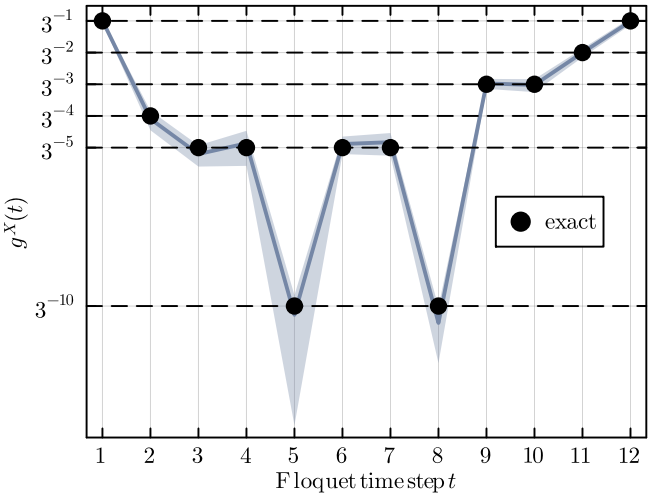

图 10。对于 Clifford 点 $J_\alpha=\pi/4, h_\alpha=0$ 处的二维 Kitaev Floquet 系统，泡利矩阵 $O=\sigma^X$ 的生成函数 $g^O(t)=:g^X(t)$。参数定义见公式 (16-17)（其中 $\tau=1$）。注意，我们还纳入了中间时间步，如附录 D 中所述。我们取系统尺寸，使其在任意时刻都大于算符大小。两条曲线的数值及其不确定性区域（阴影区域）是根据使用 PEPS 获得的 1000 个样本计算的，具体方法见附录 D。由于时间演化算符 $\sigma^X(t)$ 在任意时刻都是单个泡利串，因此有 $g^O(t)=3^{-|O(t)|}$，其中 $|O(t)|$ 是泡利权重。

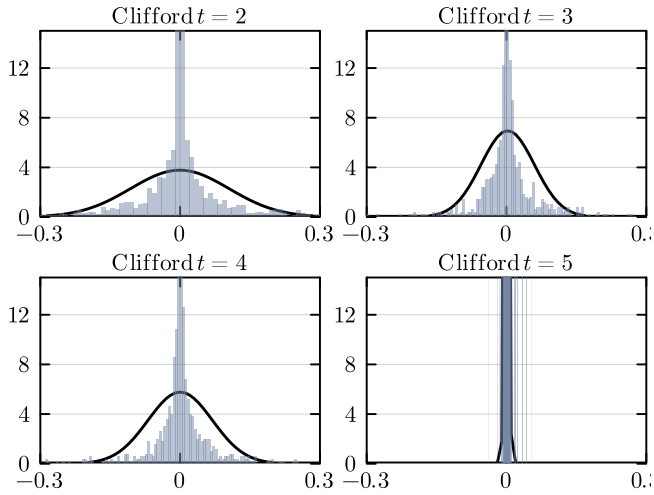

图 11：模拟可观测量的直方图 $\{O_t(s)\}_s$ 对于图 10 中数据在不同时间步下的结果。粗曲线为均值和方差与相应数据一致的高斯分布。

附录 E：四面体系综的高阶矩

在本附录中，我们计算第 k 阶矩的一般表达式，其中四面体系综 $\mathcal{E}_T$ 描述于第 V 节中。具体而言，我们计算 $N_k \equiv \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 \rho_i^{\otimes k}$ 的一般表达式，其中 $\bar{\rho}_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}+\vec{n}_i\cdot\vec{\sigma}\right)$，单位向量 $\vec{n}_i$指向布洛赫球上一个正四面体的顶点。

我们首先展开每个单量子比特态的张量积，并观察到每一项都由一组站点构成：泡利算符作用于这些站点 E ，

而恒等算符作用于其余站点。按照子集的基数 $|E|$对这一求和进行排序会更方便：

$$\left(\mathbb{I}+\vec{n}_i\cdot\vec{\sigma}\right)^{\otimes k}=\sum_{m=0}^{k}\sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,k\}\\|E|=m}}\left(\bigotimes_{j\notin E}\mathbb{I}_j\right)\left(\bigotimes_{j\in E}\vec{n}_i\cdot\vec{\sigma}_j\right), \tag{E1}$$

然后显式展开 E中各格点上的泡利分量：

$$\bigotimes_{j\in E}\vec{n}_i\cdot\vec{\sigma}_j=\sum_{\{a_j\}_{j\in E}}\left(\prod_{j\in E}n_i^{a_j}\right)\bigotimes_{j\in E}\sigma_j^{a_j}, \tag{E2}$$

其中 $a_j\in\{x,y,z\}$。

我们接下来定义 m阶四面体矩张量：

$$T^m_{a_1,\dots,a_m}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}n_i^{a_1}\cdots n_i^{a_m},\qquad T^0=1, \tag{E3}$$

其值仅取决于 m （与格点的选择无关）。因此，对于 $E=\{1,2,\dots,m\}$，总是可以对其进行计算。

最后，结合公式（E1）–（E3），矩算符 N_k 可写成以下紧凑形式：

$$N_k=\frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{k}\sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,k\}\\|E|=m}}\sum_{a_1,\dots,a_m}T^m_{a_1,\dots,a_m}\sigma^{a_1,\dots,a_m}(E)$$
$$\text{where}\quad \sigma^{a_1,\dots,a_m}(E)=\sigma_{e_1}^{a_1}\otimes\sigma_{e_2}^{a_2}\otimes\dots\sigma_{e_m}^{a_m}\bigotimes_{j\notin E}\mathbb{I}_j, \tag{E4}$$

其中 $E=\{e_1<e_2<\dots<e_m\}$。

方程（E4）给出了将 N_k 分解为四面体矩张量和泡利算符张量积的形式。

1. 显式矩至四阶

在此，我们通过直接计算方程（E4），给出 N_k 对应的矩算符的显式表达式，其中 $k\le 4$。正如预期，它们与以下对象类似在 $k\le 2$ 时的 Haar分布。我们对四面体作如下明确选择（类似于第 V 节中的选择）： $\vec{n}_1=(1,1,1)/\sqrt{3}$ $\vec{n}_2=(1,-1,-1)/\sqrt{3}$,$\vec{n}_3=(-1,1,-1)/\sqrt{3}$，以及 $\vec{n}_4=(-1,-1,1)/\sqrt{3}$。

一阶（$k=1$）。根据对称性，所有一阶矩张量均为零：$T^1_a=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}n_i^a=0$，其中$a=x,y,z$。因此，我们有 $N_1=\frac{\mathbb{I}}{2}$。

二阶（$k=2$）。唯一非零的二阶矩张量为对角形式：$T^2_{ab}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}n_i^an_i^b=\frac{1}{3}\delta_{ab}$。因此，我们有 $N_2=\frac{1}{4}\left(\mathbb{I}+\frac{1}{3}\sum_{a=x,y,z}\sigma_1^a\sigma_2^a\right)$。

三阶（$k=3$）。在三阶下，矩算符包含张量阶数为 $m=0$、2、3 的项。因此，它可写为 $N_3=N_3^{(0)}+N_3^{(2)}+N_3^{(3)}$，其中

$$N_3^{(0)}=\frac{\mathbb{I}}{8},\qquad N_3^{(2)}=\frac{1}{24}\sum_{a=x,y,z}\sum_{1\le i<j\le 3}\sigma_i^a\sigma_j^a$$
$$N_3^{(3)}=\frac{1}{8\sqrt{27}}\sum_{\pi\in\Sigma_3}\sigma_1^{\pi(x)}\sigma_2^{\pi(y)}\sigma_3^{\pi(z)},$$

其中 Σ_3 是阶数为 3 的对称群（我们将其作用于 $\{x,y,z\}$）。

四阶（$k=4$）。在四阶时，矩算符包含张量阶数为$m=0$、2、3、4 的贡献，因此可分解为 $N_4=N_4^{(0)}+N^{(2)4}+N_{(3)4}+N_{(4)4}$，其中

$$N_4^{(0)}=\frac{\mathbb{I}}{16},\qquad N_4^{(2)}=\frac{1}{48}\sum_{a=x,y,z}\sum_{1\le i<j\le 4}\sigma_i^a\sigma_j^a,$$
$$N_4^{(3)}=\frac{1}{16\sqrt{27}}\sum_{1\le i<j<l\le 4}\sum_{\pi\in\Sigma_3}\sigma_i^{\pi(x)}\sigma_j^{\pi(y)}\sigma_l^{\pi(z)},$$
$$N_4^{(4)}=\frac{1}{144}\Bigg[\sum_{a=x,y,z}\sigma_1^a\sigma_2^a\sigma_3^a\sigma_4^a$$
$$+\sum_{\substack{a,b=x,y,z\\a\neq b}}\sum_{(c_1,c_2,c_3,c_4)\in\mathrm{Perm}(a,a,b,b)}\sigma_1^{c_1}\sigma_2^{c_2}\sigma_3^{c_3}\sigma_4^{c_4}\Bigg]. \tag{E5}$$

这里，Perm(a、a、b、b) 表示多重集 $\{a,a,b,b\}$ 的所有不同排列所构成的集合。

[1] J. Preskill，《NISQ 时代及之后的量子计算》，Quantum **2**，79（2018）。[2] M. P. Fisher、V. Khemani、A. Nahum 和 S. Vijay，《随机量子电路》，《凝聚态物理年度评论》**14**，335（2023年）。[3] B. Bertini、P. W. Claeys 和 T. Prosen，《时空对偶性所产生的精确可解多体动力学》，arXiv:2505.11489（2025年）。[4] A. Nahum、S. Vijay 和 J. Haah，随机幺正电路中的算符扩展，Phys. Rev. X **8**，021014（2018）。[5] C. W. von Keyserlingk、T. Rakovszky、F. Pollmann 和 S. L. Sondhi，无守恒定律系统中的算符流体力学、OTOC 与纠缠增长，Phys. Rev. X**8**，021013（2018）。[6] T. Zhou 和 A. Nahum，混沌多体系统中的纠缠膜，Phys. Rev. X **10**，031066

(2020年)。
[7] ANahum、J. Ruhman、S. Vijay 和 J. Haah, 《随机幺正动力学下的量子纠缠增长》, Phys. Rev. X 7, 031016 (2017)。[8] B. Bertini、P. Kos 和 T. Prosen, 《最大多体量子混沌最简模型中的纠缠传播》, Phys. Rev. X 9, 021033 (2019)。[9] K. Klobas、B. Bertini 和 L. Piroli, 《"规则54"量子元胞自动机中的精确热化动力学》, 《物理评论快报》126, 160602 (2021)。[10] A. Chan、A. De Luca 和 J. T. Chalker, 《多体量子混沌最简模型的求解》, Phys. Rev. X 8, 041019 (2018)。[11] G. Giudici、F. M. Surace 和 H. Pichler, 《通过 Floquet 动力学揭示 pxp多体疤痕态》, 《物理评论快报》133, 190404 (2024)。[12] T. Farrelly, 《量子元胞自动机综述》, Quantum 4, 368 (2020)。[13] P. Arrighi, 《量子元胞自动机概述》, Natural Comp. 18, 885 (2019)。[14] F. Arute、K. Arya、R. Babbush、D. Bacon、J. C. Bardin、R. Barends、R. Biswas、S. Boixo、F. G. S. L. Brandao、D. A. Buell、B. Burkett、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、R. Collins、W. Courtney、A. Duns worth、E. Farhi、B. Foxen、A. Fowler、C. Gidney、M. Giustina、R. Graff、K. Guerin、S. Habegger、M. P. Harrigan、M. J. Hartmann、A. Ho、M. Hoffmann、T. Huang、T. S. Humble、S. V. Isakov、E. Jeffrey、Z. Jiang、D. Kafri、K. Kechedzhi、J. Kelly、P. V. Klimov、S. Knysh、A. Korotkov、F. Kostritsa、D. Landhuis、M. Lindmark、E. Lucero、D. Lyakh、S. Mandr`a、J. R. McClean、M. McEwen、A. Megrant、X. Mi、K. Michielsen、M. Mohseni、J. Mutus、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、M. Y. Niu、E. Ostby、A. Petukhov、J. C. Platt、C. Quintana、E. G. Rieffel、P. Roushan、N. C. Rubin、D. Sank、K. J. Satzinger、V. Smelyanskiy、K. J. Sung、M. D. Trevithick、A. Vainsencher、B. Villalonga、T. White、Z. J. Yao、P. Yeh、A. Zalcman、H. Neven 和 J. M. Martinis, 《使用可编程超导处理器实现量子霸权》, 《自然》574, 505–510 (2019)。[15] X. Zhang、W. Jiang、J. Deng、K. Wang、J. Chen、P. Z hang、W. Ren、H. Dong、S. Xu、Y. Gao、 *et al.*, 《Floquet对称性保护拓扑相的数字量子模拟》, 《自然》607, 468 (2022)。[16] E. B. Jones、L. E. Hillberry、M. T. Jones、M. Fasihi、P. Roushan、Z. Jiang、A. Ho、C. Neill、E. Ostby、P. Graf、*et al.*, 《在数字量子处理器上生成小世界复杂网络》, Nature Comm. 13, 4483 (2022)。[17] J. Zhang、P. W. Hess、A. Kyprianidis、P. Becker、A. Lee、J. Smith、G. Pagano、I.-D. Potirniche、A. C. Potter、A. Vishwanath、N. Y. Yao 和 C. Monroe, 《离散时间晶体的观测》, 《自然》543, 217–220 (2017)。[18] C. Huerta Alderete、S. Singh、N. H. Nguyen、D. Zhu、R. Balu、C. Monroe、C. M. Chandrashekar 和 N. M. Linke, 《可编程囚禁离子量子计算机上的量子行走和狄拉克元胞自动机》, Nature Comm. 11 (2020)。[19] S. J. Evered、M. Kalinowski、A. A. Geim、T. Manovitz、D. Bluvstein、S. H. Li、N. Maskara、H. Zhou、S. Ebadi、M. Xu、J. Campo、M. Cain、S. Ostermann、S. F. Yelin、S. Sachdev、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin, 《在中性原子量子计算机上探测Kitaev 蜂窝模型》, 《自然》645, 341–347 (2025)。
[20] R. White、V. Ramesh、A. Impertro、S. Anand、F. Cesa、G. Giudici、T. Iadecola、H. Pichler 和 H. Bernien, 《双物种里德堡处理器上的量子元胞自动机》, arXiv 预印本（2026）。[21] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, 《利用里德堡原子实现量子信息》, Rev. Mod. Phys. 82, 2313 2010（）。[22] A. M. Kaufman 和 K.-K. Ni, 《利用超冷原子与分子的光镊阵列开展量子科学》, Nature Phys. 17, 1324（2021）。[23] H. J. Manetsch、G. Nomura、E. Bataille、X. Lv、K. H. Leung 和 M. Endres, 《包含 6,100 个高度相干原子量子比特的光镊阵列》, 《自然》647, 60（2025）。[24] L. Pause、L. Sturm、M. Mittenb¨uhler、S. Amann、T. Preuschoff、D. Sch¨affner、M. Schlosser 和 G. Birkl, 《超强二维光镊阵列: 包含 1000 多个原子量子比特》, Optica 11, 222（2024）。[25] R. Tao、M. Ammenwerth、F. Gyger、I. Bloch 和 J. Zei- her, 《光学晶格中大规模原子阵列的高保真探测》, 《物理评论快报》133, 013401（2024）。[26] A. Browaeys 和 T. Lahaye, 《利用独立操控的里德堡原子研究多体物理》, 《自然·物理》16, 132（2020）。[27] P. Schauß、J. Zeiher、T. Fukuhara、S. Hild、M. Cheneau、T. Macr`ı、T. Pohl、I. Bloch 和 C. Groß, 《伊辛量子磁体中的结晶》, 《科学》347, 1455（2015）。[28] H. Labuhn、D. Barredo、S. Ravets、S. De L´es´eleuc、T. Macr`ı、T. Lahaye 和 A. Browaeys, 《可调谐的二维单个里德堡原子阵列，用于实现量子伊辛模型》, 《自然》534, 667（2016）。[29] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Om- ran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、 *et al.*, 《在 51 原子量子模拟器上探测多体动力学》, 《自然》551, 579（2017）。[30] S. de L´es´eleuc、S. Weber、V. Lienhard、D. Barredo、H. P. B¨uchler、T. Lahaye 和 A. Browaeys, 《将多能级里德堡原子精确映射为相互作用自旋1/2粒子，以实现伊辛模型的量子模拟》, 《物理评论快报》120, 113602（2018）。[31] P. Schauss, 《利用里德堡原子对横场伊辛模型进行量子模拟》, Quantum Science Tech. 3, 023001 2018（）。[32] E. Guardado-Sanchez、P. T. Brown、D. Mitra、T. De- vakul、D. A. Huse、P. Schauß 和 W. S. Bakr, 《在 2 8, 021069 2018d 量子伊辛自旋系统中探测反铁磁关联的猝灭动力学》, Phys. Rev. X（）。[33] V. Lienhard、S. de L´es´eleuc、D. Barredo、T. Lahaye、A. Browaeys、M. Schuler、L.-P. Henry 和 A. M. L¨auchli, 《观测反铁磁相互作用合成伊辛模型中关联的时空增长及其动态调谐》, Phys. Rev. X 8, 021070（2018）。[34] S. de L´es´eleuc、V. Lienhard、P. Scholl、D. Barredo、S. Weber、N. Lang、H. P. B¨uchler、T. Lahaye 和 A. Browaeys, 《观测里德堡原子相互作用玻色子的对称性保护拓扑相》, 《科学》365, 775（2019）。[35] A. Keesling、A. Omran、H. Levine、H. Bernien、H. Pich- ler、S. Choi、R. Samajdar、S. Schwartz、P. Silvi、S. Sachdev、P. Zoller、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin, 《可编程里德堡模拟器上的量子基布尔–祖列克机制与临界动力学》

, 《自然》**568** , 207（2019）.

[36] F. M. Surace、P. P. Mazza、G. Giudici、A. Lerose、A. Gambassi 和 M. Dalmonte, 《里德堡原子量子模拟器中的格点规范理论与弦动力学》, Phys. Rev. X 10, 021041（2020年）。[37] P. Scholl、M. Schuler、H. J. Williams、A. A. Eberharter、D. Barredo、K.-N. Schymik、V. Lienhard、L.-P. Henry、T. C. Lang、T. Lahaye、 *et al.*, 《利用数百个里德堡原子对二维反铁磁体进行量子模拟》, 《自然》595, 233（2021年）。[38] D. Bluvstein、A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、S. Ebadi、T. T. Wang、A. A. Michailidis、N. Maskara、W. W. Ho、 *et al.*, 《控制驱动里德堡原子阵列中的量子多体动力学》, 《科学》371, 1355（2021年）。[39] C. Lippe、T. Klas、J. Bender、P. Mischke、T. Niederpr¨um 和 H. Ott, 《三维随机跃迁模型的实验实现》, Nature Comm. 12, 6976（2021年）。[40] S. Ebadi、T. T. Wang、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、D. Bluvstein、R. Samajdar、H. Pichler、W. W. Ho、 *et al.*, 《256原子可编程量子模拟器上的物质量子相》, 《自然》595, 227（2021年）。[41] G. Semeghini、H. Levine、A. Keesling、S. Ebadi、T. T. Wang、D. Bluvstein、R. Verresen、H. Pichler、M. Kali-nowski、R. Samajdar、 *et al.*, 《在可编程量子模拟器上探测拓扑自旋液体》, 《科学》374, 1242（2021年）。[42] J. Choi、A. L. Shaw、I. S. Madjarov、X. Xie、R. Finkel-stein、J. P. Covey、J. S. Cotler、D. K. Mark、H.-Y. Huang、A. Kale、H. Pichler、F. G. S. L. Brand˜ao、S. Choi 和 M. Endres, 《利用多体量子混沌制备随机态并进行基准测试》, 《自然》613, 468（2023年）。[43] C. Chen、G. Bornet、M. Bintz、G. Emperauger、L. Leclerc、V. S. Liu、P. Scholl、D. Barredo、J. Hauschild、S. Chatterjee、M. Schuler、A. M. L¨auchli、M. P. Zaletel、T. Lahaye、N. Y. Yao 和 A. Browaeys, 《二维里德堡原子阵列中的连续对称性破缺》, 《自然》616, 691（2023年）。[44] A. L. Shaw、Z. Chen、J. Choi、D. K. Mark、P. Scholl、R. Finkelstein、A. Elben、S. Choi 和 M. Endres, 《在60原子模拟型量子模拟器上对高度纠缠态进行基准测试》, 《自然》628, 71（2024年）。[45] D. Gonz´alez-Cuadra、M. Hamdan、T. V. Zache、B. Braverman、M. Kornja˘ca、A. Lukin、S. H. Cant´u、F. Liu、S.-T. Wang、A. Keesling、M. D. Lukin、P. Zoller 和 A. Bylinskii, 《在（2+ 1）D 里德堡量子模拟器上观测弦断裂》, 《自然》642, 321（2025年）。[46] T. Manovitz、S. H. Li、S. Ebadi、R. Samajdar、A. A. Geim、S. J. Evered、D. Bluvstein、H. Zhou、N. U. Koy-luoglu、J. Feldmeier、 *et al.*, 《可编程模拟器上的量子粗化与集体动力学》, 《自然》638, 86（2025年）。[47] F. Fang、K. Wang、V. S. Liu、Y. Wang、R. Cimmino、J. Wei、M. Bintz、A. Parr、J. Kemp、K.-K. Ni 和 N. Y. Yao, 《利用原子阵列探测开放量子系统中的临界现象》, 《科学》390, 601（2025年）。[48] A. Senoo、A. Baumg¨artner、J. W. Lis、G. M. Vaidya、Z. Zeng、G. Giudici、H. Pichler 和 A. M. Kaufman, 《原子阵列中的高保真纠缠与相干多量子比特映射》, arXiv:2506.13632（2025年）。[49] R. B.-S. Tsai, X. Sun, A. L. Shaw, R. Finkelstein, and M. Endres, 《高保真里德堡纠缠门的基准测试与保真度响应理论》, PRX Quantum 6, 010331 (2025). [50] G. Emperauger, M. Qiao, C. Chen, F. Caleca, S. Bocini, M. Bintz, G. Bornet, R. Martin, B. G´ely, L. Klein, D. Barredo, S. Chatterjee, N. Y. Yao, F. Mezzacapo, T. Lahaye, T. Roscilde, and A. Browaeys, 《里德堡编码自旋链中的 Tomonaga-Luttinger 液体行为》, Phys. Rev. X 15, 031021 (2025). [51] D. Bluvstein, H. Levine, G. Semeghini, T. T. Wang, S. Ebadi, M. Kalinowski, A. Keesling, N. Maskara, H. Pichler, M. Greiner, *et al.*, 《基于纠缠原子阵列相干输运的量子处理器》, 《自然》604, 451 (2022). [52] S. J. Evered, M. Kalinowski, A. A. Geim, T. Manovitz, D. Bluvstein, S. H. Li, N. Maskara, H. Zhou, S. Ebadi, M. Xu, *et al.*, 《在中性原子量子计算机上探测 Kitaev 蜂窝模型》, 《自然》645, 341 (2025). [53] Y. Zeng, P. Xu, X. He, Y. Liu, M. Liu, J. Wang, D. J. Papoular, G. V. Shlyapnikov, and M. Zhan, 《通过里德堡阻塞纠缠不同同位素的两个单个原子》, 《物理评论快报》119, 160502 (2017). [54] C. Sheng, J. Hou, X. He, K. Wang, R. Guo, J. Zhuang, B. Mamat, P. Xu, M. Liu, J. Wang, and M. Zhan, 《混合物种原子阵列的无缺陷任意几何组装》, 《物理评论快报》128, 083202 2022( ). [55] K. Singh, S. Anand, A. Pocklington, J. T. Kemp, and H. Bernien, 《具有连续模式运行的双元素二维原子阵列》, Phys. Rev. X 12, 011040 2022( ). [56] K. Singh, C. E. Bradley, S. Anand, V. Ramesh, R. White, and H. Bernien, 《利用旁观量子比特阵列对相关相位误差进行电路中途校正》, 《科学》380, 1265 (2023). [57] S. Anand, C. E. Bradley, R. White, V. Ra mesh, K. Singh, and H. Bernien, 《双物种里德堡阵列》, Nature Phys. 20, 1744 (2024). [58] T. Prosen, 《量子运动的混沌与复杂性》, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 7881 (2007). [59] T. Prosen, 《量子遍历性与量子动力学保真度之间的一般关系》, Phys. Rev. E 65, 036208 2002( ). [60] A. Kitaev, 《精确可解模型及其拓展中的任意子》, Ann. Phys. 321, 2 (2006). [61] S. Lloyd, 《通用量子模拟器》, 《科学》273, 1073 1996( ). [62] H. F. Trotter, 《关于算子半群的乘积》, Proc. American Math. Soc. 10, 545 (1959). [63] M. Suzuki, 《分形路径积分的一般理论及其在多体理论和统计物理中的应用》, J. Math. Phys. 32, 400 (1991). [64] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, 《混沌量子能谱的表征及能级涨落规律的普适性》, 《物理评论快报》52, 1 (1984). [65] F. Haake, 《混沌的量子特征》（Springer US, 波士顿, MA, 1991）第583–595页。[66] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics* 1 , 第 Vol.（Springer Science & Business Media, 2013）。[67] S. H. Shenker and D. Stanford, 《多重激波》, JHEP 2014 (12), 1。 , 1.

[68] D. A. Roberts and D. Stanford, 《利用二维共形场论中的四点函数诊断混沌》, 《物理评论快报》115, 131603 (2015). [69] D. A. Roberts, D. Stanford, and L. Susskind, 《局域化激波》, JHEP 2015 (3), 1. [70] J. Maldacena, S. H. Shenker, and D. Stanford, 《混沌界限》, JHEP 2016 (8), 1. [71] C. W. von Keyserlingk, T. Rakovszky, F. Pollmann, and S. L. Sondhi, 《无守恒定律系统中的算符流体力学、OTOC与纠缠增长》, Phys. Rev. X 8, 021013 (2018). [72] L. Piroli and J. I. Cirac, 《量子元胞自动机、张量网络与面积律》, 《物理评论快报》125, 190402 2020( ). [73] D. Abanin, W. De Roeck, W. W. Ho, and F. Huveneers, 《周期驱动封闭量子系统多体预热化的严格理论》, 《数学物理通讯》354, 809–827 (2017). [74] T. Ishii, T. Kuwahara, T. Mori, and N. Hatano, 《可积周期系统中的加热》, 《物理评论快报》120, 220602 (2018). [75] M. Heyl, P. Hauke, and P. Zoller, 《量子局域化限制数字量子模拟中的Trotter误差》, Science Adv. 5, eaau8342 (2019). [76] K. Chinni, M. H. Mu˜noz Arias, I. H. Deutsch, and P. M. Poggi, 《量子模拟中Floquet映射的动力学结构不稳定性导致的Trotter误差》, PRX Quantum 3, 010351 (2022). [77] E. Vernier, B. Bertini, G. Giudici, and L. Piroli, 《可积数字量子模拟：广义吉布斯系综与Trotter转变》, 《物理评论快报》130, 260401 2023( ). [78] M. S. Rudner, N. H. Lindner, E. Berg, and M. Levin, 《周期驱动二维系统中的反常边缘态与体边对应》, Phys. Rev. X 3, 031005 (2013). [79] D. V. Else, B. Bauer, and C. Nayak, 《受时间平移对称性保护的物质预热相》, Phys. Rev. X 7, 011026 (2017). [80] A. Kyprianidis, F. Machado, W. Morong, P. Becker, K. S. Collins, D. V. Else, L. Feng, P. W. Hess, C. Nayak, G. Pagano, N. Y. Yao, and C. Monroe, 《预热离散时间晶体的观测》, 《科学》372, 1192 1196 2021– ( ). [81] M. Kalinowski, N. Maskara, and M. D. Lukin, 《数字里德堡模拟器中的非阿贝尔Floquet自旋液体》, Phys. Rev. X 13, 031008 (2023). [82] E. H. Lieb and D. W. Robinson, 《量子自旋系统的有限群速度》, Comm. Math. Phys. 28, 251 1972( ). [83] M. B. Hastings and T. Koma, 《谱隙与关联的指数衰减》, Comm. Math. Phys. 265, 781 2006( ). [84] M. B. Hastings, 1713《量子系统中的局域性》, 载于 *Quantum Theory from Small to Large Scales: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 95, August 2010* 2012 (牛津大学出版社,). [85] P. Hosur, X.-L. Qi, D. A. Roberts, and B. Yoshida, 《量子信道中的混沌》, JHEP 2016 (2), 1. [86] Z. Gong, A. Nahum, and L. Piroli, 《反常动力学中的粗粒化纠缠与算符增长》, 《物理评论快报》128, 080602 (2022).

[87] A. C. Potter 和 R. Vasseur, 《混合量子电路中的纠缠动力学》, 载于 *Entanglement in Spin Chains: From Theory to Quantum Technology Applications* , A. Bayat、S. Bose 和 H. Johannes- son 编（施普林格国际出版公司，Cham，2022年），第 211–249 页。[88] E. Gillman、F. Carollo 和 I. Lesanovsky，具有可控量子关联的（1 + 1）维量子元胞自动机中的非平衡相变，《物理评论快报》125，100403（2020年）。[89] C. Noel、P. Niroula、D. Zhu、A. Risinger、L. Egan、D. Biswas、M. Cetina、A. V. Gorshkov、M. J. Gul- lans、D. A. Huse、 *et al.*，在囚禁离子量子计算机中实现测量诱导量子相，《自然》Phys. 18，760（2022年）。[90] J. M. Koh、S.-N. Sun、M. Motta 和 A. J. Minnich，借助电路中途读出在超导量子处理器上实现测量诱导纠缠相变，Nature Phys. 19，1314（2023年）。[91] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，量子多体疤痕与遍历性的微弱破缺，Nature Phys. 17，675（2021年）。[92] I. I. Beterov 和 M. Saffman，里德堡阻塞、f¨orster 共振以及不同原子种类的量子态测量，《物理评论A》92，042710（2015年）。[93] Y. Aharonov 和 J. Anandan，循环量子演化过程中的相位变化，《物理评论快报》58，1593（1987年）。[94] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Cˆot´e 和 M. D. Lukin，中性原子的快速量子门，《物理评论快报》85，2208（2000年）。[95] F. Cesa 和 H. Pichler，全局驱动的里德堡原子阵列中的通用量子计算，《物理评论快报》131，170601（2023年）。[96] A. Pagano、S. Weber、D. J aschke、T. Pfau、F. Meinert、S. Montangero 和 H. P. B¨ uchler，锶-88里德堡原子受控相位门的误差预算，Phys. Rev. Res. 4，033019（2022年）。[97] C. Fromonteil、R. Tricarico、F. Cesa 和 H. Pich- ler，里德堡阻塞过程的哈密顿–雅可比–贝尔曼方程，Phys. Rev. Res. 6，033333（2024年）。[98] F. A. Astolfi、S. Jandura 和 G. Pupillo，里德堡阻塞态间转移的庞特里亚金极大值原理：一种半解析方法，arXiv:2512.13549（2025年）。[99] S. Jandura 和 G. Pupillo，里德堡原子的时间最优双量子比特门和三量子比特门，Quantum 6，712（2022年）。[100]B. Bertini、P. Kos 和 T. Prosen， 1 + 1 维双幺正晶格模型的精确关联函数，《物理评论快报》123，210601（2019）。[101] A. J. Daley、I. Bloch、C. Kokail、S. Flannigan、N. Pear- son、M. Troyer 和 P. Zoller，量子模拟中的实用量子优势，《自然》607，667（2022年）。[102] Y. Kim、A. Eddins、S. Anand、K. X. Wei、E. Van Den Berg、S. Rosenblatt、H. Nayfeh、Y. Wu、M. Za- letel、K. Temme、 *et al.*，容错之前量子计算实用性的证据，《自然》618，500（2023年）。[103] J. Tindall、M. Fishman、E. M. Stoudenmire 和 D. Sels，IBM Eagle 踢击伊辛实验的高效张量网络模拟，PRX Quantum 5，010308（2024年）。[104] H.-J. Liao、K. Wang、Z.-S. Zhou、P. Zhang 和 T. Xi- ang

，使用投影纠缠对算符模拟 IBM 的踢击伊辛实验

arXiv:2308.03082（2023年）。[105] S. Patra、S. S. Jahromi、S. Singh 和 R. Or´us，《IBM 最大型量子处理器的高效张量网络模拟》，Phys. Rev. Res. 6, 013326（2024年）。[106] A. M. Childs、Y. Su、M. C. Tran、N. Wiebe 和 S. Zhu，《具有对易子标度的 Trotter 误差理论》，Phys. Rev. X 11, 011020（2021年）。[107] S. Xu 和 B. Swingle，《量子多体系统中的信息扰乱动力学与非时序关联函数》，PRX Quantum 5, 010201（2024年）。[108] L. D'Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，《从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学》，Adv. Phys. 65, 239（2016）。[109] P. Kos、M. Ljubotina 和 T. Prosen，《多体量子混沌：与随机矩阵理论的解析联系》，Phys. Rev. X 8, 021062（2018）。[110] S. H. Shenker 和 D. Stanford，《黑洞与蝴蝶效应》，JHEP 2014 (3), 1。[111] M. K. Joshi、A. Elben、B. Vermersch、T. Brydges、C. Maier、P. Zoller、R. Blatt 和 C. F. Roos，《具有可调作用范围相互作用的囚禁离子量子模拟器中的量子信息搅乱》，Phys. Rev. Lett. 124, 240505（2020年）。[112] A. M. Green、A. Elben、C. H. Alderete、L. K. Joshi、N. H. Nguyen、T. V. Zache、Y. Zhu、B. Sundar 和 N. M. Linke，《有限温度下非时序关联函数的实验测量》，Phys. Rev. Lett. 128, 140601（2022年）。[113] J. Braum¨uller、A. H. Karamlou、Y. Yanay、B. Kannan、D. Kim、M. Kjaergaard、A. Melville、B. M. Niedziel¨ski、Y. Sung、A. Veps¨al *et al.*ainen、 *et al.*，《利用非时序关联函数探测量子信息传播》，Nature Phys. 18, 172（2022年）。[114] M. G¨arttner、J. G. Bohnet、A. Safavi-Naini、M. L. Wall、J. J. Bollinger 和 A. M. Rey，《在囚禁离子量子磁体中测量非时序关联和多量子谱》，Nature Phys. 13, 781（2017年）。[115] X.-L. Qi、E. J. Davis、A. Periwal 和 M. Schleier-Smith，《量子猝灭实验中的算符大小增长测量》，arXiv:1906.00524（2019）。[116] A. A. Mele，《量子信息中的 Haar 测度工具导论：初学者教程》，Quantum 8, 1340 2024( )。[117] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，《综述：多体局域化、热化与纠缠》，Rev. Mod. Phys. 91, 021001（2019）。[118] Y. Huang、Y.-L. Zhang 和 X. Chen，《多体局域化系统中的非时序关联函数》，Ann. der Phys. 529, 1600318（2017年）。[119] R. Fan、P. Zhang、H. Shen 和 H. Zhai，《多体局域化的非时序关联》，Science Bull. 62, 707（2017年）。[120] T. Zhou 和 D. J. Luitz，《混沌系统中时间演化算符的算符纠缠熵》，《物理评论B》95, 094206（2017年）。[121] J. M. Renes、R. Blume-Kohout、A. J. Scott 和 C. M. Caves，《对称信息完备量子测量》，J. Math. Phys. 45, 2171（2004）。[122] P. Jordan 和 E. P. Wigner，¨《关于泡利 ¨等价性禁止原理》，载于 *The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers*，由 A. S. Wightman 编（Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1993年），第109–129页。[123] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum computationand quantum information*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2010年）。[124] D. Gottesman，《容错量子计算理论》，《物理评论A》57，127（1998年）。[125] M. Moeckel 和 S. Kehrein，《哈伯德模型中的相互作用猝灭》，《物理评论快报》100，175702（2008年）。[126] A. Rosch、D. Rasch、B. Binz 和 M. Vojta，《光学晶格中排斥性费米原子的亚稳超流性》，《物理评论快报》101，265301（2008年）。[127] M. Marcuzzi、J. Marino、A. Gambassi 和 A. Silva，《猝灭后非可积量子自旋链中的预热化》，《物理评论快报》111，197203（2013年）。[128] B. Bertini、F. H. L. Essler、S. Groha 和 N. J. Robinson，《弱可积性破缺模型中的预热化与热化》，《物理评论快报》115，180601（2015年）。[129] G. P. Brandino、J.-S. Caux 和 R. M. Konik，《量子KAM定理初探：一维玻色气体量子猝灭带来的启示》，Phys. Rev. X 5，041043（2015年）。[130] S. J. Evered、D. Bluvstein、M. Kalinowski、S. Ebadi、T. Manovitz、H. Zhou、S. H. Li、A. A. Geim、T. T. Wang、N. Maskara、 *et al.*，《中性原子量子计算机上的高保真并行纠缠门》，《自然》622，268（2023年）。[131] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum，《纠缠动力学中的测量诱导相变》，Phys. Rev. X 9，031009（2019）。[132] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher，《量子芝诺效应与多体纠缠转变》，《物理评论B》98，205136（2018年）。[133] J. B. Kogut，《格点规范理论与自旋系统导论》，Rev. Mod. Phys. 51，659（1979年）。[134] R. Raussendorf，《用于通用量子计算的量子元胞自动机》，《物理评论A》72，022301（2005年）。[135] D. D'Alessandro，*Introduction to Quantum Control and Dynamics* 2，第2版，《应用数学进展》（Taylor & Francis / CRC出版社，阿宾顿，英国，2021年）。[136] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin，《利用中性原子并行实现高保真多量子比特门》，《物理评论快报》123，170503（2019）。[137] N. Khaneja、T. Reiss、C. Kehlet、T. Schulte-Herbr¨uggen 和 S. J. Glaser，《耦合自旋动力学的最优控制：利用梯度上升算法设计核磁共振脉冲序列》，《磁共振杂志》172，296（2005年）。[138] S. Ma、G. Liu、P. Peng、B. Zhang、S. Jandura、J. Claes、A. P. Burgers、G. Pupillo、S. Puri 和 J. D. Thompson，《原子量子比特中的高保真门与电路中途擦除转换》，《自然》622，279（2023年）。[139] G. Giudici、S. Veroni、G. Giudice、H. Pichler 和 J. Zeiher，《通过共振偶极-偶极相互作用实现里德堡原子的快速纠缠门》，PRX Quantum 6，030308（2025年）。[140] N. Maskara、S. Ostermann、J. Shee、M. Kalinowski、A. McClain Gomez

Krylov、N. Y. Yao、M. Head-Gordon、M. D. Lukin 和 S. F. Yelin，利用可重构量子处理器对分子和材料进行可编程模拟，《自然·物理》**21**，289（2025年）。[141] Z. Zeng、G. Giudici、A. Senoo、A. Baumg¨artner、A. M. Kaufman 和 H. Pichler，稳健量子多体态制备的绝热回波方案，arXiv:2506.12138（2025年）。[142] S. R. White，量子重整化群的密度矩阵表述，《物理评论快报》**69**，2863（1992年）。[143] G. Vidal，对轻度纠缠量子计算进行高效经典模拟，《物理评论快报》**91**，147902（2003年）。[144] J. I. Cirac 和 F. Verstraete，二维及更高维量子多体系统的重整化算法，arXiv cond-mat/0407066（2004年）。

[145] M. Fishman、S. R. White 和 E. M. Stoudenmire，《用于张量网络计算的 ITensor 软件库》，SciPost Phys. Codebases，4 (2022年)。[146] H. N. Phien、J. A. Bengua、H. D. Tuan、P. Corboz 和 R. Or´us，《改进的无限投影纠缠对态算法：快速全更新与规范固定》，《物理评论B》92，035142 (2015年)。[147] H. C. Jiang、Z. Y. Weng 和 T. Xiang，《二维量子格点模型张量网络态的精确确定》，《物理评论快报》101，090603 (2008)。[148] P. Corboz，《贝纳斯克张量网络算法讲座》，https://www.benasque.org/2020scs/talks_ contr/113_tensornetworks_lecture2.pdf (2020年)。[149] M. Lubasch、J. I. Cirac 和 M.-C. Banuls，《统一投影纠缠对态收缩方法》，New J. Phys. 16，033014 (2014年)。[150] M. Lubasch、J. I. Cirac 和 M.-C. Ba˜nuls，《有限投影纠缠对态算法》，《物理评论B》90，064425 (2014年)。