关于测地图的嵌入偶图的刻画

Frasser C.E.

工程科学博士，敖德萨国立理工大学，乌克兰

摘要。
寻找测地图一般分类的问题仍未解决。我们认为，实现这一目标的障碍之一在于，测地图缺乏结构描述。换言之，就其中包含的完全图、路径和圈的描述而言，它们的基本性质尚未建立。缺少这些信息，使得测地图的生成和枚举（作为其一般分类不可或缺的组成部分）成为一项困难的任务。本文利用所谓的嵌入偶图，考察测地图的结构性质。为此，我们 formulates 了消除偶圈 *C*-对顶点对的非测地性的充要条件，同时确立了测地图的嵌入偶图的双测地性。从某种意义上说，这使我们得出结论：测地图的基本构件正是这一类双测地图。

关键词。 特征刻画、分类、嵌入偶图、测地图、双测地图。

引言

在开始设计计算机网络时，通常已知信息源的总集合、用户集合以及它们之间的两两距离。信息源包括复杂的知识库，其中涵盖数据库和专用软件，用于存储海量信息。人们通过特定的计算机化方法访问信息。信息用户可能包括拥有连接网络所需技术手段的特定组织和实体。信息经过处理和分析后，所得内容会被整理到一个复杂的知识库中。这些知识库之间通过传输信道建立联系，而信道的布局必须使信息传输速度最大化。显然，只有在每对网络中心之间都由传输信道连接时，才能满足这一条件。如果将每个信息中心指定为无向图的一个顶点，并令边对应传输信道，就得到一个完全图；事实上，它也是一个测地图。采用这种连接方式连接各信息中心，可以最大限度地缩短信息传输所需时间，这等同于最大化信息传输速度。然而，随着中心数量增加，建设网络的材料成本也会上升，在这种情况下，完全图的结构就不再适用 [3]。显然，构建直径尽可能小的测地网络更为理想。该网络包含具有特殊结构的嵌入偶图，接下来我们将对其进行描述，尝试从不同角度刻画测地图。我们认为，这有助于更好地理解如何解决测地图一般分类这一开放问题 [2]。

论测地图的若干结构性质

在偶圈中，任意一对 diametrically opposite vertices 都由两条测地线连接，这两条测地线分别由构成该圈的两条等长路径确定。从网络角度看，偶圈会导致信息传输信道重复。如果要求较高的网络可靠性 [3], ，那么这种结构可能最为合适。然而，如果需要在维持较高数据传输速度的同时尽量降低网络搭建成本，这种结构便不合适。可以在偶圈中引入一组弦来消除传输信道的重复，由此得到的结构称为嵌入偶图。为了描述测地图中嵌入偶图的基本性质，我们需要先介绍一些基本概念。

图 G 的顶点集和边集分别记为 V(G) 和 E(G)。从 v_0 到 v_n 的路径是由 G 中不同顶点 $v_0v_1\ldots v_n$ 组成的序列，记为 $P(v_0, v_n)$。图 G 中路径 P 的边数决定了该路径的长度，表示为 |P|。如果 G 中任意一对顶点之间都存在一条路径，则称图 G 为连通图。$u, v \in V(G)$之间的距离记为 $d_G(u, v)$，它是连接顶点 u, v的最短路径长度。G 的直径记为 $d(G)$，是任意一对顶点之间的最大距离。与图 G 的顶点 v 关联的边数称为 v 的度，记为 $\deg(v)$。在图 G 中，任何满足 $\deg(v) \geq 3$ 的顶点 v 都称为节点。线段是这样一条路径：其仅有的节点是端点 u 和 v。若且唯若存在一个图可通过在图 G_1 和/或 G_2的边上插入顶点而得到，则称两个图 G_1 和 G_2 同胚。注意，任何连通图都与自身同胚。完全图是任意一对顶点之间都有一条边相连的图。具有 n 个顶点的完全图记为 K_n。圈是由 G 中不同顶点 $v_0v_1\ldots v_nv_0$ 组成的序列。如果图 G 的圈 C 的长度 |C| 为偶数（奇数），则称 C 为偶圈（奇圈）。设 C 为偶圈。若 $u, v \in V(C), u \neq v$，则 C 中恰有两条路径连接顶点 u 和 v。其中一条路径记为 $C(u, v)$，另一条记为 $C(v, u)$。偶圈 C 上的两个顶点 x, y 称为 C-对置点，如果 $|C(x, y)| = |C(y, x)|$。连接圈 C 上不超过两个顶点 u, v 的路径 $A(u, v)$称为弦，如果 $|A(u, v)| < |C(u, v)|$ 且 $|A(u, v)| < |C(v, u)|$。图 G 的子图 H 是一个图，其顶点和边分别是 G 的顶点和边的子集。连接 G 的顶点 u, v 的最短路径 $\Gamma(u, v)$称为测地线。如果图 G 中任意一对顶点之间都存在唯一一条测地线，则称 G 为测地图。如果图 G 中任意一对顶点之间至多有 K 条不同的测地线，则称 G 为 K-测地图。当 $K = 1$时，K-测地图是测地图；当 $K = 2$ 时，是双测地图；当 $K = 3$时，是三测地图。

引理 1。 ([5]) 连通图 G 是测地图，当且仅当 G 不包含这样的偶圈 C：对于 C-上的每一对相对顶点 u， v $d_G(u,\ v) = d(C)$。 □

定理 1。 ([4]) 设 G 与完全图 K_4；G 是测地图，当且仅当：

1. G 的六条线段都是测地线。 2. G 中恰含三条线段的每个圈都是奇圈。 3. G 中恰含四条线段的所有圈长度相等。

□

设H为由一个不自交的偶圈C与一组n条顶点不相交弦 $A_1 = A(x_1, x_{n+1})$， $A_2 = A(x_2, x_{n+2}), \ldots,$ $A_n = A(x_n, x_{2n})$的并所得到的图，

其端点分别对应于各对 $(x_1, x_{n+1}), (x_2, x_{n+2}), \ldots, (x_n, x_{2n})$；其中，$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$ 是 H 的三度顶点（节点）按顺时针方向依次进行的循环标记，起点为任意选定的节点。接着，我们将H中的一条弧 $C(u, v)$定义为偶圈C上连接H的两个节点u和v的顶点和边所构成的路径。我们用 $|C(x, y)|$ 表示C中连接任意两个顶点x和y 的最短路径长度。若 $C(x, y)$为一条弧，此定义同样适用。若偶圈C上由H中两条弦A和B的端点所截出的弧内不含其他弦的端点，则称这两条弦为相邻。由一对相邻弦及其对应的所对弧生成的圈，其长度记作如下形式：

$$\left|C_i^j\right| = \left|C\left(x_i, x_j\right)\right| + |A(x_i, x_{n+i})| + \left|A\left(x_j, x_{n+j}\right)\right| + \left|C\left(x_{n+i}, x_{n+j}\right)\right|,$$

对于 $i = 1$，……，n，其中 x_i、x_j 是 H 中两个连续的节点，$j > i$ 对应 $i \leq n-1$，$j = 1$ 对应 $i = n$。

测地图 G 的嵌入偶图 H，若包含一个极小偶圈 C，则它是 G 的一个子图 H，由偶圈 C 及其弦系（定义如上）组合而成，并满足：在 H 中，任意一对相邻弦及其在 C 上所对的弧，或一条弦与一条弧，都不构成长度小于 $|C|$ 的偶圈。

基于前文所述概念，下面给出我们的主要定理。

定理 2. 设 H 为一个嵌入偶图，具有由 n 条顶点不相交弦组成的弦系，且其偶圈 C 的长度为 $2L$，其中 $L \geq 2,$，且e $2 \leq n \leq L$. 当且仅当 H 中满足以下条件时，其弦系才能消除 C-对顶点之间的非测地性，并保持所有非-C-对顶点之间的测地性 H:

1. 由一条弧和一条弦组成的每个圈的长度都是奇数,
2. $|C_1^2| = |C_2^3| = |C_3^4| = \cdots = |C_{n-1}^n| = |C_n^1| = |C| = 2L$

证明：必要性将通过反证法证明。

情形 *1*。假设存在一个嵌入偶图H，其弦系消除了所有C-对置顶点对的非测地性，并保留了所有非C-对置顶点对的测地性；该图满足条件 2，但至少存在一个偶圈 C^*，它由弧 $C(x_i, x_{n+i})$ 或弧 $C(x_{n+i}, x_i)$ 与一条弦 A_i组成，其中 $i = 1, \ldots, n$。那么，H中的 C^* 是一个由圈C的一条弧和一条弦组成、长度小于$2L$的偶圈。但这与H是嵌入偶图的定义矛盾。

情况 *2*。现在假设存在一个嵌入偶图H，其弦系消除了所有C-对顶点对的非测地性，并保持所有非C-对顶点对的测地性；该图满足条件 1，但其中存在偶圈C_i^j 使得 $\left|C_i^j\right| \neq 2L$。若对某一对 $i, j, \left|C_i^j\right| < 2L$，则$H$包含一对相邻弦及其各自所对的弧，它们构成一个长度小于 $|C|$ 的偶圈。这

与H的定义矛盾。因此，假设$\left|C_i^j\right| > 2L$。我们来考察其中一个圈C_i^j。不失一般性，假设C_i^j是圈C_1^2（图1）。

在H中选取顶点$v \in C$，$v \in C_1^2$，它位于由弧$C(x_1,\ x_{n+1})$和弦$A_1 = A(x_1,\ x_{n+1})$形成的奇圈上，使得

$$|C(v, x_{n+1})| = |A_1| + |C(x_1, v)| - 1 \tag{1}$$

现在选取顶点u，使得u和v是C_1^2-对置顶点，同时也是H中C-对置顶点。于是

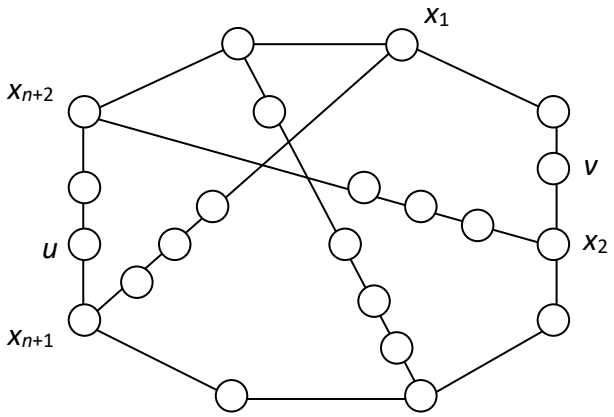


图. *1*。

$$|C(u, x_{n+1})| + |C(x_{n+1}, v)| = L,$$

即

$$|C(x_{n+1}, v)| = L - |C(u, x_{n+1})| \tag{2}$$

令（1）等于（2），得到

$$|A_1| + |C(x_1, v)| - 1 = L - |C(u, x_{n+1})|,$$

这意味着

$$|C(u, x_{n+1}) + |A_1| + |C(x_1, v)| = L + 1. \tag{3}$$

由于$|C_1^2| > 2L$，也就是说，$|C_1^2| \geq 2L + 1$和$|C(u, x_{n+1}) + |A_1| + |C(x_1, v)| = L + 1$,

$$|C(v, x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2}, u)| \geq L. \tag{4}$$

已知在H中，$|\Gamma(u, v)|$必须小于或等于$L - 1$，关联式(3)和(4)表明，唯一的测地线$\Gamma(u, v)$不在C_1^2上。但它也不在C上，因为u和v是C-对顶点。现在考虑由弦A_1、其中一条弦

$A_j, j = n, n-1, \dots, 3$以及它们所张的弧构成的圈。注意到$|C^*| \geq 2L$。由此可知，对于唯一的测地线$\Gamma(u,v)$（图1）

$$|\Gamma(u,v)| = |C^*| - |A_1| + |C(x_1,v)| + |C(u,x_{n+1})| \leq L-1,$$

这等价于

$$|C^*| \leq |A_1| - |C(x_1,v)| - |C(u,x_{n+1})| + L - 1$$

$$|C^*| \leq 2|A_1| - (|A_1| + |C(x_1,v)| + |C(u,x_{n+1})|) + L - 1. \quad (5)$$

将（3）代入（5），得到

$$|C^*| \leq 2|A_1| - L - 1 + L - 1$$

$$2L \leq |C^*| \leq 2|A_1| - 2$$

$$L \leq |A_1| - 1 < |A_1|$$

$$L < |A_1|,$$

这意味着，弦的长度大于C上对应的两条弧中任意一条的长度。这与上述弦的定义相矛盾。

最后，考虑由弦 A_2 （这些弦中的一条）A_j、 $j = 3$、4、...、 n 以及它们所截出的弧构成的圈 C^{**} 。此时，

$$|\Gamma(u,v)| = |C^{**}| - |A_2| + |C(v,x_2)| + |C(x_{n+2},u)| \leq L-1$$

$$|C^{**}| \leq |A_2| - |C(v,x_2)| - |C(x_{n+2},u)| + L - 1.$$

$$|C^{**}| \leq 2|A_2| - (|A_2| + |C(v,x_2)| + |C(x_{n+2},u)|) + L - 1 \quad (6)$$

由（4）和（6），我们现在得到

$$2L \leq |C^{**}| \leq 2|A_2| - (|A_2| + |C(v,x_2)| + |C(x_{n+2},u)|) + L - 1 \leq 2|A_2| - L + L - 1$$

$$2L \leq 2|A_2| - 1 < 2|A_2|$$

$$L < |A_2|,$$

这又导致了矛盾。

综上所述，我们得出结论：测地线 $\Gamma(u,v)$ 位于C上、C_1^2上，或同时位于两者上。

Since according to (4) $|C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| \geq L$,

$$\text{either } |C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| = L \text{ or } |C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| > L.$$

如果 $|C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| = L$，那么$H$ 包含三条长度为 L 的测地线 $\Gamma(u,v)$：其中一条包含于 C_1^2 中，另外两条包含于C中。这与我们的假设矛盾。

若 $|C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| > L$，则 H 中包含两条长度为 L 的测地线 $\Gamma(u,v)$，它们都包含在 C 中，这再次与我们的假设矛盾。

只有在以下情形下才不会产生矛盾：

$$|C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)| = L - 1$$

在这种情况下，这对相邻弦 A_1, A_2 及其所对弧构成一个圈，其中 H 有唯一一条长度为 $L-1$ 的测地线 $\Gamma(u,v)$，并且

$$\begin{aligned} C_1^2 &= (|C(u,x_{n+1}) + |A_1| + |C(x_1,v)|) + (|C(v,x_2)| + |A_2| + |C(x_{n+2},u)|) \\ &= (L+1) + (L-1) = 2L. \end{aligned}$$

同样的推理可以推广到任意圈 C_i^j。因此，我们得出

$$|C_1^2| = |C_2^3| = |C_3^4| = \cdots = |C_{n-1}^n| = |C_n^1| = |C| = 2L$$

现在来证明充分性。

假设 H 满足定理 2 的条件 1 和 2。

情形 *1*。如果对于给定的j，H中两个C-对置顶点u和v是弦 A_j 的端点，那么 $d_H(u,v) = |A_j| < L$，且弦 A_j 是H中唯一的测地线。

情况 *2*。设u、v是C-对置顶点，但它们并非同时为弦A_j的端点，其中 $u, v \in C_j^{j+1}$。如果u和v不是C_j^{j+1}-对置顶点，那么考虑到条件 2，即 $C_j^{j+1} = 2L$，我们得出 $d_H(u,v) < L$，且唯一的测地线 $\Gamma(u,v)$ 位于 C_j^{j+1} 上。如果u和v是C_j^{j+1}-对置顶点（图 2），则令 $C_j^{j+1} = C_1^2$。于是我们得到

$$|C(v,x_1)| + |A_1| + |C(x_{n+1},u)| = |C(u,x_{n+2})| + |A_2| + |C(x_2,v)| = L;$$

这意味着

$$|C(v,x_1)| + |A_1| = L - |C(x_{n+1},u)|. \tag{7}$$

与此同时，

$$|C(v,x_{n+1})| + |C(x_{n+1},u)| = |C(u,x_1)| + |C(x_1,v)| = L;$$

这意味着

$$|C(v, x_{n+1})| = L - |C(x_{n+1}, u)|. \tag{8}$$

令（7）等于（8），现在得到

$$|C(v, x_{n+1})| = |C(v, x_1)| + |A_1|,$$

也就是说，弦 A_1 和弧$C(x_1, x_{n+1})$ 构成一个长度小于 $|C| = 2L$ 的偶圈，这与条件 1 矛盾。

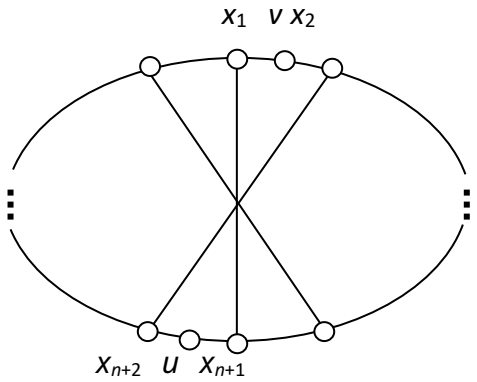


图. *2*.

情形 *3.* 如果u、v是C中彼此相对的顶点，且不属于圈 C_1^2、 C_2^3、…、 C_{n-1}^n、 C_n^1 中的任何一个，那么u和v都属于由圈C的一段弧与一条弦构成的某个圈。由于这个奇圈的长度小于 $2L$，因此 $d_H(u, v) < L$。由此，对于偶圈C及其任意一对彼此相对的顶点u和v，我们得到 $d_H(u, v) < d(C)$，结论由引理 1 立即得出。□

推论 1. 如果定理 *2* 的嵌入偶图 H 有 $n = 2$ 条弦, 那么 H 是测地图.

证明。显然，当 $n = 2$ 时，H 同胚于完全图 K_4。

i) C_1^2、 C_2^1、 C 均恰好包含四条线段。定理 2 的条件 2 保证 $|C_1^2| = |C_2^1| = |C|$，即包含四条线段的三个圈，具有相等的长度，因此定理 1 的条件 3 得证。ii) 将一条弦及其对应的两条弧连接后得到的圈，每个都恰好包含三条线段。定理 2 的条件 1 保证它们全都是奇的。因此，定理 1 的条件 2 也得证。iii) 根据定理 2，陈述 i) 和 ii) 意味着位于C上的四条线段全都是测地线。另外两条线段是弦 A_1 和 A_2。但是 $|A_1| < L$ 和 $|A_2| < L$。这意味着它们都是H中的测地线。因此，G的六条线段都是测地线。定理 1 的条件 1 也随之得证。

Th因此，H满足定理 1 的条件 1、2 和 3。推论 1 现在得出 s. □

推论 **2.** 若 H 中弦的数量 n 满足 $3 \le n \le L$, 则 H 是双测地.

证明。根据定理 2，属于 C 的每一对顶点在 H 中都有唯一的测地线。设 u、v 是属于 H 的弦系的两个顶点，且 $u \in A_i$、 $v \in A_j$、 $i \neq j$。已知弦对 A_i 和 A_j （包括相邻的弦 A_i 和A_j ）位于两个圈 C' 和 C'' 上，这两个圈由这两条弦以及它们所截出的两条对应内弧和外弧构成。可以验证，如果 u 和 v 不是 C'-对置的，那么顶点 u 和 v 要么在 C' 中由唯一的测地线 $\Gamma(u、 v)$ 相连，要么在 C'' 中由唯一的测地线$\Gamma(u、 v)$ 相连（如果该测地线位于 C'' 上）。如果顶点 u 和 v 是 C'-对置的，那么 u、v 要么在 C' 中由两条测地线 $\Gamma(u、 v)$ 相连，要么在 C'' 中由唯一的测地线 $\Gamma(u、 v)$ 相连（如果该测地线位于 C'' 上）。因此，含有 n 条弦的 H, $3 \le n \le L$，是双测地的。□

推论 3。 定理 *2* 中的嵌入偶圈 H 若 $n = 2$ 则为测地；若 $3 \le n \le L$。□

定理3。 包含于测地图 C（一个偶圈 C （其长度为极小值）的任何极小偶圈 G 都会生成一个 H（按照定理 *2* 的意义），且该嵌入偶图是 G 的子图。

证明。 由于C 是一个极小偶圈，因此G中不存在长度小于 $|C|$ 的偶圈。 现在，由于G是测地图，根据引理 1，对于C在G中的任意一对对置顶点，必然有 $d_G(x, y) < d(C)$。因此，必须在G中用一组路径连接C的顶点，以消除所有C对置顶点对的非测地性。根据定理 2，在G中，必须为C找到这些路径之间的一组弦，使其满足条件 1 和 2。因此，对于包含于G中的极小偶圈C，图G必须生成一个嵌入偶图H作为其子图。 □

推论4. 设 G 是一个连通图。 若 G 中至少存在一个极小偶圈 C ，它不能生成定理 *2* 的嵌入偶图 H 作为 G 的子图，则 G 不是测地图。 □

总结

迄今为止，测地图的分类包括以下类型的图族：奇圈图、没有偶圈的仙人掌图、完全图 K_n 及其同胚图 K_n^i、包含完全图截面子图的测地图（其中包括杠铃图、棒棒糖图、风车图和三角蛇图）、彼得森图和霍夫曼–辛格尔顿图，以及与它们同胚的某些特殊图族、树、团树、由仿射平面的一般化构造而成的某些具有直径为二的团的特殊类型的图、某些直径为三且结构描述与莫尔图相似的图、利用三元系和对称区组设计构造的直径为四和五的图，以及可能还存在但我们尚不了解的其他图族。一般而言，不仅测地图的分类尚未解决，双测地图和三测地图的分类也是图论中的未解问题 [1]。每个测地图也都是双测地图。关于鲜为人知的双测地图，尤其是那些并非测地图的双测地图，目前已知的图族很少：本文所述的嵌入偶图、可分双测地图

、完美双测地图、可收缩为测地图的双测地图、梯形结构，以及利用三元系和对称区组设计构造的双测地图。三测地图的研究则少得多，但 [1] 中描述了其中两种构造。最后，*K*-测地图有若干重要应用。在网络拓扑设计中，受控的路径冗余使其适用于需要考虑路径多样性的情形；在路由算法中，测地性使路由决策更容易作出，因为可以控制需要考虑的最短路径数量；在容错系统中，如果*K*-测地网络具有较高的连通度，便可确保网络韧性，而受控的最短路径数量也有助于在网络故障后重新路由；此外，它们还可用于分布式计算系统，以便轻松设计具有可预测模式的网络通信 [3]。

参考文献

1. C.E. Frasser，《测地图与区组设计：综述》，《科学杂志·里昂》62 (2025) 第20-24页。 2. C.E. Frasser，《寻找测地图一般分类的开放问题》，《德国国际现代科学杂志》 36 (2022) 第7-9页。 3. C.E. Frasser，与某些类别的*K*-测地计算机网络相关的拓扑分析与综合，《德国国际现代科学杂志》85 (2024) 第29-36页。 4. J.G. Stemple，《与完全图同胚的测地图》，《纽约科学院年刊》319 (1979) 第512-517页。5. J.G. Stemple、M.E. Watkins，《论平面测地图》，《组合理论杂志》4 (1968) 第101-117页。