arXiv:2601.17078v1 [cs.CC] 23 Jan 2026

什么是多项式时间可计算的 $\mathbf{L}^2$ 函数?

ArasBacho[1],Svetlana Selivanova[2],和 Martin Ziegler[3]1 加州理工学院, [2] 俄罗斯科学院西伯利亚分院 A.P. Ershov 研究所, [3] 韩国科学技术院

摘要。 我们为 L^2 函数给出了两种自然的多项式时间可计算性定义，并证明它们不可比较（除非 $\#\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{FP}_1$）。

目录

什么是 *Polynomial-Time* 可计算的 $\mathbf{L}^2$ 函数? .1*Aras Bacho*[1], *Svetlana Selivanova*[2], *and Martin Ziegler*[3]1 引言.1 1.1 概述.2 1.2 连续函数的可计算性与复杂性.2 2 什么是多项式时间可计算的 $\mathbf{L}^2$ 函数? .3 2.1 均值中的阶梯可计算性.4 3 多项式时间可计算性的概念比较.5 3.1 定理 4 的证明：#P 等价性.6 3.2 将离散问题编码为连续问题.7 3.3 定理5的证明：傅里叶多项式时间可计算，但非步可计算.8 3.4 定理 6 的证明：步可计算，但非傅里叶多项式时间可计算.9 3.5 定理 7 的证明.10 3.6 定理 8+9+10 的证明概要.11

4 应用.11
4.1 热方程.11 参考文献.13

> 一个好的定义胜过千条引理！（改编自Doron Zeilberger的观点*82*）有定义的数学家知道该以什么为基础。有两个定义的数学家则永远拿不准。（改编自*Segal*定律）

1 引言

接收二进制字符串作为输入的算法 $\mathcal{A}$ 的计算成本，通常根据 n该输入的长度来衡量，更准确地说：当 $t_{\mathcal{A}}(x) < \infty$ 表示 $\mathcal{A}$ 在输入 $x \in \{0,1\}^*$ 上执行的步数时，人们通常会考虑其最坏情况运行时间 $t_{\mathcal{A}}(n) = \max\{t_{\mathcal{A}}(x) : |x| \leq n\}$: 这一函数显然是定义良好的（即逐点有限的），并且是类型为 $\mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ 的非递减函数；其渐近增长是经典复杂性理论的核心研究对象。最坏情况成本的这种良定义性

$$t_{\mathcal{A}}(n) \;=\; \max\left\{t_{\mathcal{A}}(x) : x \in X_n\right\} \tag{1}$$

同样显然适用于在任何可数域 X上进行的计算，只要为其配备一个由 X的有限子集构成的单调覆盖 X_n：例如 $X_n = \{$具有 $|V| \le n$ 个顶点$\}$的图 $G = (V, E)$。

或许鲜为人知，但至少在《可计算分析》中，这属于众所周知的定理 [30, 定理 7.1.5 +7.2.7]，：即使将“有限”推广为“紧”，方程（1）仍然定义良好；具体而言，当定义域 $X = \bigcup_n X_n$ 是一个经过适当编码的 [25] σ紧拓扑空间，且具有紧覆盖 $X_n \subseteq X_{n+1}$时，情况便是如此。例如，$t_{\mathcal{A}}(n) = \max\{t_{\mathcal{A}}(x,\ n)\colon 0 \le x \le 1\}$ 当 $\mathcal{A}$ 表示一个用于计算连续全函数 $f\colon [0;\ 1] \to \mathbb{C}$ 的算法时，该表达式仍然定义良好；这里的含义是按照 [18, 定义2.11] 或 [30, 例7.2.14], 逐点逼近 $x \mapsto f(x)$，误差不超过 2^{-n}。这种定义良好性对于实数（及复数）连续函数丰富的复杂性理论至关重要 [18,8], ，其中包括对适当函数空间上（均匀）连续函数的常用算子和泛函所引发的复杂性膨胀的研究。

事实上，《可计算分析》长期以来只关注连续函数[11]：因为任何终止的计算 $\mathcal{A}(x)$本身都依赖于其输入 x，也就是说，$\mathcal{A}$ 只能读取 $x \in X$所传达的无限信息中的有限前缀。可积函数是连续函数的推广。它们自然地出现在测度论中，也作为偏微分方程的解（的弱导数）出现。一个 p-可积函数 $f\colon [0;\ 1] \to \mathbb{C}$ 在技术上是一个映射的等价类，其中各映射仅在 $[0;1]$ 的某个零测度子集上有所不同。合理地说，不能用算法求值 $x \mapsto f(x)$来定义对这类广义 f 的计算。定性可计算性的更好定义早已为人熟知，且彼此等价 [24,30,20,7]。本文延续了此前对定量／复杂性理论定义 [28,21,22,3]的探索。

1.1 概述

第 1.2 小节回顾了连续函数计算中常见的、在可计算性和复杂性理论（多项式时间、#P）意义下等价的概念。第 2 节将 L^2 函数的三个自然版本（a、b、c）形式化。版本（c）涉及平均情况复杂度，详见第 2.1 小节。第 3 节比较这些概念，展示它们之间存在的蕴含关系及其缺失之处（除非 $\#\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{FP}_1$），同时也将其与第 1.2 小节中的连续情形联系起来。证明推迟至第 3.1 节及后续小节。

第 4 节从我们的新视角探讨热方程：对于版本 (a)，它最终被证明会将多项式时间初始条件映射为多项式时间解。这与经典情形形成对比，见注释 14。

1.2 连续函数的可计算性与复杂性

连续函数可计算性的一个等价定义 $f \in \mathcal{C}[0;\ 1]$,基于魏尔斯特拉斯逼近定理，并已成功推广：仅需算法输出逼近 f 的高斯二进有理数多项式序列 p_n 的系数向量，使其在 ∞-范数下的误差不超过

2^{-n} [24, §I.0.3]。回忆一下，高斯二进有理数的形式为（$x+iy$）$/2^n$，其中 x, y, $n \in \mathbb{Z}$。

事实上，这类多项式构成的集合是可数的，且在 $\mathcal{C}$[0中稠密; 1] 这是由 Stone-Weierstrass 定理得出的。这启发我们给出 [30, 定义 8.1。2]对于固定可分度量空间中的点 x，可根据它是否能通过某个固定可数稠密子集中的元素序列进行可计算逼近来定义其可计算性；X, d逼近误差至多为 x 2^{-n} 。遗憾的是，即使是 $\mathcal{C}$[0; 1] 这个替代定义在定性上等价，在定量计算成本方面却可能相差指数级 [18, §8]。因此，在尝试定义平方可积函数的多项式时间可计算性时，我们多少有些无所适从f : [0; 1] $\to \mathbb{C}$ [21]。以下关于 $\mathcal{C}$[0; 1] 的多项式时间计算的另一种刻画，来自 [18, 定理 2。22] ，确实提供了一些指引:

定义 1. 令 $\mathcal{C}[0;1]$ 表示全体连续复函数的集合f : $[0;1] \to \mathbb{C}$。称这样的 f 可在多项式时间内计算，当且仅当存在一个高斯整数双重序列 $\bar{v} = (v_{n,L,\ell})$ $\in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$，以 $n \in \mathbb{N}$ 和$0 \le \ell < L \in \mathbb{N}$ 为索引，并满足 ***(i)***、***(ii)*** 和 ***(iii)***:

i) $\left|f(\ell/L) - v_{n,L,\ell}/2^n\right| \le 2^{-n}$***ii)*** $(n, L, \ell) \mapsto$ 的 实部 $v_{n,L,\ell}$及 虚部$v_{n,L,\ell} \in \mathbb{Z}$ 均可在关于 $n + \log L$的多项式时间内计算

iii) f 具有多项式连续模 *[3,* 事实 *3]:*

$$|t - t'| \le 2^{-\operatorname{poly}(n)} \;\Rightarrow\; |f(t) - f(t')| \le 2^{-n} \quad . \tag{2}$$

若满足 ***(i)***、***(iii)*** 和 ***(ii')***，则称 f 可在#P中计算:

ii') Both $\{0,1\}^* \ni 1^n\,0\,\mathrm{bin}(L)\,\mathrm{bin}(\ell) \mapsto \operatorname{Re} v_{n,L,\ell}, \operatorname{Im} v_{n,L,\ell} \in \mathbb{Z}$ *are in* GapP. □

回顾一下，#P $\supseteq$ FP 表示多项式见证计数问题类 s

$$\varphi(\vec{v}) \;=\; \operatorname{Card}\left\{\vec{w} \in \{0,1\}^* : |\vec{w}| \le \operatorname{poly}(|\vec{v}|), \vec{w} \in P\right\} \;\ge 0, \quad P \in \mathsf{P} \tag{3}$$

而 GapP $\supseteq$#P 是该类在取反／减法运算下的闭包 [12]。此外，GapP 对多项式乘积和指数和封闭 [9, 引理 3.1]。除 [19, 定义 13+14]外，这里不允许（重复、自适应且可后处理的）#P 预言机访问：这样无需攀升至计数层次，就能提出更精确（双关）的复杂性结论，例如定理 4 中的结论。注意，在 (ii') 中，$\mathcal{O}($ $n + \log|\ell|$) 是输入长度，因此它推广了 (ii)，也就是说，映射 $1^n\,0\,\mathrm{bin}(L)$ $\mathrm{bin}(\ell) \mapsto \mathrm{Re}v_{n,\ L,\ \ell}$，$\mathrm{Im}v_{n,\ L,\ \ell}$属于 FP。

2 什么是多项式时间可计算的 L2 函数?

我们来考虑可分空间 L^2[0; 1] ，它由定义在 [0; 1] 上的复值平方可积函数构成。回顾一下，这个集合配备了内积 $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ 和诱导范数 $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$，从而使 L^2[0; 1]成为希尔伯特空间。

$\mathrm{L}^2[0;1]$ 是巴拿赫空间层次 L^p[0; 1] （ $1 \le p \le \infty$）中的一个特例；这类空间推广并包含了第 1.2 小节中范数为 $\|\cdot\|_\infty$ 的空间 $\mathcal{C}[0;1]$ 。

微积分中，$\mathrm{L}^2[0;1]$的可数稠密子集有（至少）两种常见选择：a）具有高斯二进有理数系数的傅里叶级数；b）由高度为高斯二进有理数的等距区块构成的分段常值函数。这提示我们:

定义*2. a)* 称 $f \in L^2[0;1]$ 在多项式时间内傅里叶可计算，当且仅当存在一个高斯整数双重序列 $\bar{c} = (c_{k,n}) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$，由 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 索引，且满足 *(a i)*、*(a ii)* 和 *(a iii)*：*a i)* $\left|\tilde{f}_k - c_{k,n}/2^n\right| \le 2^{-n}$ *a ii)* $(n,k) \mapsto Re\, c_{k,n}$, $Im c_{k,n} \in \mathbb{Z}$ 均可在关于 $n + log\,|k|$ 的多项式时间内计算 *a iii)* 对于 $K = 2^{\mathrm{poly}(m)}$，~，有 $\left\|f - \mathcal{F}_K(f)\right\|_2 \le 2^{-m}$，其中 $\mathcal{F}_K(f,t) := \sum_{|k|\le K} f_k \cdot exp(2\pi ikt)$ 表示傅里叶级数的前 $2K+1$ 项，其系数为 $\tilde{f}_k = \int_0^1 exp(-2\pi ikt) \cdot f(t)\, dt$。

a') 若且唯若满足 *(ai)*、*(a iii)* 和 *(a' ii)*，则称 f 为 #P 中的傅里叶可计算函数：*a' ii)* $\{0,1\}^* \ni 1^n 0\,\mathrm{bin}(k) \mapsto \mathrm{Re}c_{k,n}$ 和 $\mathrm{Im}c_{k,n} \in \mathbb{Z}$ 均属于 GapP。

b) 若存在一个以 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \le s < S \in \mathbb{N}$ 为指标的 ¯高斯整数多重序列 $h = (h_{S,s,n})$，使得 *(bi)*、*(bii)* 和 *(b iii)* 均成立，则称 $f \in L^2[0;1]$ 在多项式时间内阶梯可计算：*b i)* $\left|\hat{}f_{S,s} - h_{S,s,n}/2^n\right| \le 2^{-n}$ *b ii)* $(S,s,n) \mapsto Re\, h_{S,s,n}$ 和 $Im h_{S,s,n} \in \mathbb{Z}$ 均可在关于 $n + log\,|S|$ 的多项式时间内计算 *b iii)* 对于 $S = 2^{\mathrm{poly}(m)}$，有 $\left\|f - \mathcal{S}_S(f)\right\|_2 \le 2^{-m}$，其中 $\mathcal{S}_S(f,t) := \hat{}f_{S,s}$ 表示具有 S 个等距步骤、复数高度为 $\hat{}f_{S,s}$ 的分段常值函数 $= S \cdot \int_{s/S}^{(s+1)/S} f(t)\, dt$。

b') 若满足 *(b i)+(b iii)+(b' ii)*，则称 $f \in \mathrm{L}^2[0;1]$ 在 #P 中为阶梯可计算：*b' ii)* $\{0,1\}^* \ni 1^n 0\,\mathrm{bin}(S)\,\mathrm{bin}(s) \mapsto \mathrm{Re}\, h_{S,s,n}$ 和 $\mathrm{Im} h_{S,s,n} \in \mathbb{Z}$ 均属于 GapP。

c) 若存在一个高斯整数多重序列 $h = (h_{S,s,n})$，使得 *(ci)*、*(bii)* 和 *(b iii)* 成立，则称 f 在平均 意义下为多项式时间阶梯可计算：*c i)* $\sqrt{\sum_{s=0}^{S(n)-1} \left|\hat{}f_{S(n),s} - h_{S(n),s,n}/2^n\right|^2 / S(n)} \le 2^{-n}$ 对于 $S(n) = 2^{\mathrm{poly}(n)}$。*c')* 若满足 *(c i)+(b' ii)+(b iii)*，则称 f 在 #P 的平均 意义下为阶梯可计算。

~傅里叶系数序列（f_k）构成了众所周知的 $\mathrm{L}^2[0;\ 1]$ 与 ℓ^2之间的帕塞瓦尔等距映射。并且，(a iii) 表示上述傅里叶级数的收敛速度不低于指数多项式级；类似地，(b iii) 表示分段平均阶梯函数的收敛速度不低于指数多项式级。事实上，根据 [3, 定理~ ^ 17c+a]，(a iii) 和 (b iii) 等价。注意$f_0 = f_{1,\ 0}$。

2.1 均值中的步可计算性

定义2中的 (b i) 和 (c i) 均要求二进制[1] 精度 n 的S-阶近似能够在关于 n的多项式运行时间内达到，但是

[1] 即绝对误差 2^{-n}：关于 *binary* 与 *unary* 精度的讨论，请参见 [3, §1.3.4] 。

在 (b) 中，对每个 $S \in \mathbb{N}$ 都成立，且独立于 n；而在 (c) 中，仅对 $S(n) = 2^{p(n)}$ 成立，其中 $p \in \mathbb{N}[N]$为某个固定值。换言之，(b,ı) 要求将每个步骤 #s 分别近似到保证的最坏情况误差 2^{-n}以内，而 (ci) 则相当于以平均情况误差 2^{-n}进行近似；(b') 和 (c') 也同样如此。

在 L^2 情形下，欧几里得误差范数 (c i) 可以说比最大误差范数 (b i) 更自然。下文的定理 4 和定理 6 分别适用于 (c) 和 (c')，而非 (b) 和 (b')。注意，当 $S(n) = 2^{p(n)}$ 满足 (ci) 时，对任意非常数 $q \in \mathbb{N}[N]$，$S(n) = 2^{p(q(n))}$ 也成立。这又是列昂尼德·列文的平均情况复杂度概念 [1,定义 18.4] 在实数计算 [26,16] 中自然出现的一个例子。实际上，关于最坏情况精度的平均多项式运行时间，等价于关于最坏情况运行时间的平均多项式精度：

引理 3。设 $\mathcal{A}$ 表示一个算法，它对输入 $s \in \mathbb{N}$ 进行计算，生成一个无限序列的高斯有理数近似 $\left(h_{s,\,p}\right)_{p=0}^{\infty}$ 其绝对误差2^{-p} 不超过某个有限或无限复数序列 $(h_s)_{s\geq 0}$中第 s 个元素。

令时间$_{\mathcal{A}}(s,p)$ 表示 $\mathcal{A}$ 生成上述第 n 个二进制近似所需的步数；对于 $t \in \mathbb{N}$，令精度$_{\mathcal{A}}(s,t)$ 表示 $\mathcal{A}$在 t 步内达到的近似误差（以 $1/2$ 为底的指数 n）。那么，对于任意的 k、n、$t \in \mathbb{N}$,

$$\left\{s : \mathrm{time}_{\mathcal{A}}^{1/k}(s,n) \leq t\right\} \;=\; \left\{s : \mathrm{prec}_{\mathcal{A}}(s,t^k) \geq n\right\} \;.$$

特别地，对于关于 s的任意概率分布，期望值 $\mathbb{E}_s$ 满足 :

$$\mathbb{E}_s\big[\mathrm{time}_{\mathcal{A}}^{1/k}(s,n)\big] \;\leq\; \mathcal{O}(n) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}_s\big[\mathrm{prec}_{\mathcal{A}}(s,t^k)\big] \;\geq\; \Omega(t) \;.$$

3 多项式时间可计算性概念的比较

本节汇集了上述 L^2-函数计算复杂性概念之间的关系与区别。与往常一样，下标 1 表示限制于一元输入的复杂性类 [1,练习 2.20]。

定理 4. 函数 $f \in \mathrm{L}^2[0;1]$ 在#P 中是傅里叶可计算的（*a'*），当且仅当 f 在#P 中按均值是阶梯可计算的（*c'*）。

定理5. 存在一个函数 $f \in \mathrm{L}^2[0;1]$，它在ˆ多项式时间内是傅里叶可计算的（*a*），但$f_{S,0} \in \mathbb{C}$ 在$S(n) = 2^{n^2+n}$ 情况下不能在多项式时间内计算（*b*），除非$\#\mathsf{P}_1 \subseteq \mathsf{FP}_1$。

定理 6。存在一个函数 $f \in \mathrm{L}^2[0;\ 1]$，它在平均意义（*c*）下可由多项式时间逐步-˜计算，但 $f_0 \in \mathbb{C}$ 除非 $\#\mathsf{P}_1 \subseteq \mathsf{FP}_1$，否则无法在多项式时间（*a*）内计算。

接下来回顾 $\mathcal{C}[0;\ 1] \subseteq \mathrm{L}^2[0;\ 1]$。

定理 7。如果 $f \in \mathcal{C}[0;1]$ 按照定义 *1* 是可计算的，那么它也同时是#P 中的傅里叶可计算函数（*a'*）和#P 中的阶梯可计算函数（*b'*）。

[18, 定理 5.32de] 展示了一个多项式时间可计算的 $f \in \mathcal{C}^\infty[0;1]$ 使得~ ^ 满足 $f_0 = f_{1,0}$ 不是多项式时间可计算的（a+b），除非 $\#\mathsf{P}_1 \subseteq \mathrm{FP}_1$。

定理 8. 如果 $f \in \mathcal{C}[0;1]$ 是多项式时间内阶梯可计算的 ***(b)***，且具有多项式连续模 ***(iii)***，那么根据定义 ***1***， f 可在多项式时间内计算。

回想一下，连续函数的傅里叶级数不一定逐点收敛。

定理 9. 如果 $f \in \mathcal{C}[0;1]$ 在 $\#\mathsf{P}$ 中傅里叶可计算 ***(a')***，且具有多项式连续模 ***(iii)***，那么根据定义 ***1***， f 可在 $\#\mathsf{P}$ 中计算。

定理 10. 存在 $f \in \mathcal{C}^\infty[0;1]$，它在多项式时间内傅里叶可计算 ***(a)***，但除非 $\#\mathsf{P}_1 \subseteq \mathrm{FP}_1$，否则 $f(0)$ 不能在多项式时间内计算。

3.1 定理 4 的证明：$\#\mathsf{P}$-等价性

回顾一下，根据 [3, 定理 17c+a]，(aiii) 与 (biii) 等价；此外，GapP 在多项式乘积和指数和下封闭（见 [9,引理 3.1]）。另记

$$e_{S,s,k} := \left(\exp(2\pi i k \tfrac{s+1}{S}) - \exp(2\pi i k \tfrac{s}{S})\right) \cdot S/(2\pi i k) \in \mathbb{C} . \tag{4}$$

这些复系数是多项式时间可计算的（ [30,§7.3] [3,例子 4]）；更准确地说：存在高斯整数$e_{S,s,k,n} \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$，可在关于 $n + \log k + \log S$的多项式时间内计算，使得$|e_{S,s,k} - e_{S,s,k,n}/2^n| \le 2^{-n}$；为方便起见，令$e_{S,s,0} := 1$ 且$e_{S,s,0,n} := 2^n$，于是对所有s, k，都有$|e_{S,s,k}| \le S$。

首先假设 (a)： $f \in \mathrm{L}^2[0;1]$ 在 #P 中是傅里叶可计算的： $|\tilde{f}_k - c_k, {}_n/2^n| \le 2^{-n}$，其中 Re$c_{k,n}$、Im$c_{k,n} \in \mathbb{Z}$均可在多项式时间内计算，且 $n + \log k$，并可访问 CH 预言机。记下$f_{S,s} = f_0 + \sum_{k\neq 0} f_k \cdot e_{S,s,k}$。现在令$h_{S,s,K,n}$: $= \sum_{|k|\le K} c_{k,m} \cdot e_{S,s,k,m'}$，其中 $m := n + \log K + \log S + \mathcal{O}(1)$，且$m' := n + \log K + \log F + \mathcal{O}(1)$；这里 $F \in \mathbb{N}$是某个常数（仅依赖于 f），使得 $\max_k |\tilde{f}_k| \le F$；该常数存在，因为 ($\tilde{f}_k$) $\in \ell^2 \subset \ell^\infty$。由 GapP 在二元乘法和指数和下封闭可知，$h_{S,s,K,n}$ 属于 GapP，因为根据 (a iii) 和 [3,定理 17ac]，log S、log $K \le$均为 poly(n)：这就证明了 (b' ii)。 [3, 定理 17ac] 还推出

$$4^{-n} \ge \left\|\mathcal{S}_S\big(\mathcal{F}_K(f)\big) - \mathcal{F}_K(f)\right\|_2^2 = \sum_{s=0}^{S-1} \left|\hat{f}_{S,s} - h_{S,s,K}\right|^2 / S$$

~对于 $h_{S,\ s,\ K} := \sum_{|k|\le K} f_k \cdot e_{S,\ s,\ k}$。此外

$$\begin{aligned} |h_{S,s,K} - h_{S,s,K,n}/2^{m+m'}| &\le \sum_{|k|\le K} |c_k - c_{k,m}/2^m| \cdot |e_{S,s,k}| \\ &\quad + \sum_{|k|\le K} |c_k| \cdot |e_{S,s,k} - e_{S,s,k,m'}/2^{m'}| \\ &\le (2K+1) \cdot 2^{-m} \cdot S \ + \ (2K+1) \cdot F \cdot 2^{-m'} \end{aligned}$$

$\leq 2^{-n}$ 根据上述对 K, S和 m, m'的选择：证明 (c i)，从而证明 f 在 #P 中的平均意义下的步可计算性 (c')。

现在反过来假设 (c')：根据 (b iii)，$f \in \mathrm{L}^2[0;1]$ 在均值意义下是 #P 中的阶梯可计算函数，且 $h_{S,s,n}$ 对于 $S = \mathrm{poly}(n)$ 属于 GapP。那么 $c_{k,S} :=_{-} \sum_{s=0}^{S-1} \hat{} f_{S,s} \cdot e_{S,s,k}$ 具有

$$|\tilde{f}_k - c_{k,S}|^2 \leq \sum\nolimits_k |\tilde{f}_k - c_{k,S}|^2 = \|f - \mathcal{S}_S(f)\|_2^2 \leq 4^{-n}$$

由帕塞瓦尔等式和 (b iii) 得出。此外，$c_{k,S,n} := -\sum_{s=0}^{S-1} h_{S,s,m} \cdot e_{S,s,k,m'}$ 属于 GapP。并且

$$\begin{aligned} |c_{k,S} - c_{k,S,n}/2^{m+m'}| &\leq \sum\nolimits_{s=0}^{S-1} |\hat{f}_{S,s} - h_{S,s,m}/2^m| \cdot |e_{S,s,k}| \\ &\quad + \sum\nolimits_{s=0}^{S-1} |\hat{f}_{S,s}| \cdot |e_{S,s,k} - e_{S,s,k,m'}/2^{m'}| \\ &\leq S \cdot 2^{-m} + S \cdot 2^{-m'} \end{aligned}$$

$\leq 2^{-n}$ 对于上述 K, S和 m, m'的取值：可得 (a i)，进而得到 f 在 #P 中的傅里叶可计算性 (a)。

3.2 将离散问题编码为连续问题

在第 3.3 和 3.4 小节中，我们将把离散决策问题和计数问题编码为实数和函数，使得对后者进行高效近似，就能恢复前者。类似的技术早已广为人知 [27,23,17,14]。对于不熟悉此类编码的读者，我们在此回顾其中的一些基本细节。请注意，计算一个实数意味着用二进有理数将其近似到任意给定的误差界 2^{-n}。

注 *11*。固定一个离散判定问题 $P \subseteq \mathbb{N}$，并令 $r_P := \sum_{N \in P} 2^{-N} \in [0;2]$ 表示其二进制展开为 P特征函数的实数。

a) P 可判定，当且仅当 r_P 可计算 [18, 定理 2.3], [30, 引理 4.2.1]。b) 等价关系 (a) 并非一致的：不存在任何算法能根据给定的 r_P [29]近似值决定 P，[30, 定理 4.1.13.3]。c) 等价关系 (a) 不适用于计算复杂性：存在多项式时间可计算的 r_P，使得 $P \notin \mathrm{P}$，无论千禧年大奖难题 [18,如何，8]定理 2。d) 从二进制编码转向三进制编码，令 $r'_P := \sum_{N \in P} 3^{-N}$。那么，$r'_P$ 是多项式时间可计算的，当且仅当 $P \in$P；而且这一等价关系是一致的。

要看出 (d)，注意到

$$0 \in P \iff r'_P \geq 1, \qquad 0 \notin P \iff r'_P \leq 1/2 \ :$$

通过将 r'_P近似到误差不超过 $< \frac{1}{2}$，可以区分这两种情况。在情况 $0 \in P$中，将 r'_P替换为 $r'_P - 1$，从而强制$0 \notin P$，接下来便可以恢复“$1 \in P$? ”。事实上，有

$$N \in P \Leftrightarrow r'_P \geq 3^{-N}, \quad N \notin P \Leftrightarrow r'_P \leq 3^{-N}/2 = \sum\nolimits_{n>N} 3^{-n} \qquad (5)$$

前提是 0，1，...，$N-1 \notin P$。随后以精度4^{-N}，从 r'_P中反复减去 3^{-0}，3^{-1}，...，3^{-N+1}（至多重复 N次条件减法）：这样，尽管存在误差传播，公式（5）中的两种情况在数值上仍保持“充分分离”。□

公式（5）表明，所有第 n项 $n > N$ 的和至多为第 N 项的一半。在下文中，我们在将离散计数问题编码为 L^2-函数时，也会确保类似的数值“良分离”(*)，并采用更复杂的编码方式。

3.3 定理5的证明：傅里叶但非步多项式时间

回想一下，

$$\hat{f}_{S,0} \;=\; \tilde{f}_0 + \sum\nolimits_{k\neq 0} \tilde{f}_k \cdot e_{S,0,k}, \quad e_{S,0,k} \;=\; \big(\exp(2\pi i k/S) - 1\big) \cdot \tfrac{S}{2\pi i k} \tag{6}$$

根据公式（4）。我们还记录$|e_{S,0,k}| \le 1$并且，对于 $|k/S| \ll 1$,$e_{S,0,k} \approx 1$，由洛必达法则可得；更准确地说，

$$|k/S| \le 1 \quad\Longrightarrow\quad |e_{S,0,k} - 1| \le |k/S| \;. \tag{7}$$

我们还记录

$$\sum\nolimits_{n\ge N} 2^{-n^2} \;=\; \sum\nolimits_{m\ge 0} 2^{-(N^2+2mN+m^2)} \;\le\; 2^{-N^2+\mathcal{O}(1)} \;.$$

现在，为了按定理5中的要求构造 f，不失一般性，固定一个 #P1 完全的 φ：$\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$，其形式为

$$\varphi(m) \;=\; \mathrm{Card}\big\{\vec{w} \in \{0,1\}^m : \vec{w} \in P\big\}, \quad P \in \mathsf{P} \tag{8}$$

并令 f 为系数为下列数值的傅里叶级数

$$\tilde{f}_k \;:=\; 2^{-m^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 : \mathrm{bin}_m(w) \in P \\ 0 : \mathrm{bin}_m(w) \notin P \end{matrix} \right\}, \quad k = 2^m + w,\ w \in \{0,1,\dots,2^m-1\} \tag{9}$$

其中

$$\mathrm{bin}_m\Big(\sum\nolimits_{j=0}^{m-1} b_j 2^j\Big) \;:=\; (b_0,\dots,b_{m-1}) \;\in\; \{0,1\}^m$$

˜ ˜和 $f_k :\equiv 0$，对 $k \le 1$ 成立。上述系数序列 f_k 满足定义2aiii)，事实上还是多项式时间可计算的（定义2a i+ii)，因为 $P \in \mathsf{P}$ 且 $\log|k| = \mathcal{O}(m)$；此外，该序列平方可和，因此定义了一个 L^2 函数 f。

ˆ ˜直观地看，根据方程（6）、（7）和（9），$f_{S,0} \approx \sum f_k$ 应当允许在关于 N 的多项式时间内，从 $f_{S,0}$ 恢复 $\varphi(N)$，对所有充分大的 N均如此，从而得出证明。要使这一想法严谨，˜注意，在 $\sum_k f_k$中，情形 $\varphi(N) \ge 1$ 与情形 $\varphi(N) = 0$ 之间“充分分离”（第 3.2 小节）；也就是说，一个见证 W对 $N \in P$的权重 f_{2^N+W}，

大于所有可能的见证 w 对所有 $n > N$ 的总权重：对于$K := 2^N + W$ 且满足 $0 \le W < 2^N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{bin}_N(W) \in P \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_K = 2^{-N^2} &\overset{(*)}{\gg} 2^{-N^2-N+\mathcal{O}(1)} \\ &= \sum_{m>N} 2^m \cdot 2^{-m^2} \;\ge\; \sum_{m>N} \sum_{w=0}^{2^m-1} \tilde{f}_{2^m+w} \;=\; \sum_{k \ge 2^{N+1}} \tilde{f}_k \;.\end{aligned}$$

此外，这两种情况在$\hat{f}_{S,\,0}$ 中也有明显区分，对于 $S := 2^{N^2+N}$:

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}_{S,0} - \sum_{k<2^{N+1}} \tilde{f}_k\right| \;&\le\; \sum_{k<2^{N+1}} \underbrace{\tilde{f}_k}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left|e_{S,0,k} - 1\right|}_{\le k/S \text{ by (7)}} + \sum_{k \ge 2^{N+1}} |\tilde{f}_k| \cdot \underbrace{|e_{S,0,k}|}_{\le 1} \\ &\le\; 2^{N+1} \cdot (2^{N+1}/2^{N^2+N}) \;+\; \sum\nolimits_{k \ge 2^{N+1}} |\tilde{f}_k| \;\overset{(*)}{\le}\; 2^{-N^2-N+\mathcal{O}(1)} \;.\end{aligned}$$

3.4 定理 6 的证明：步进但非傅里叶多项式时间

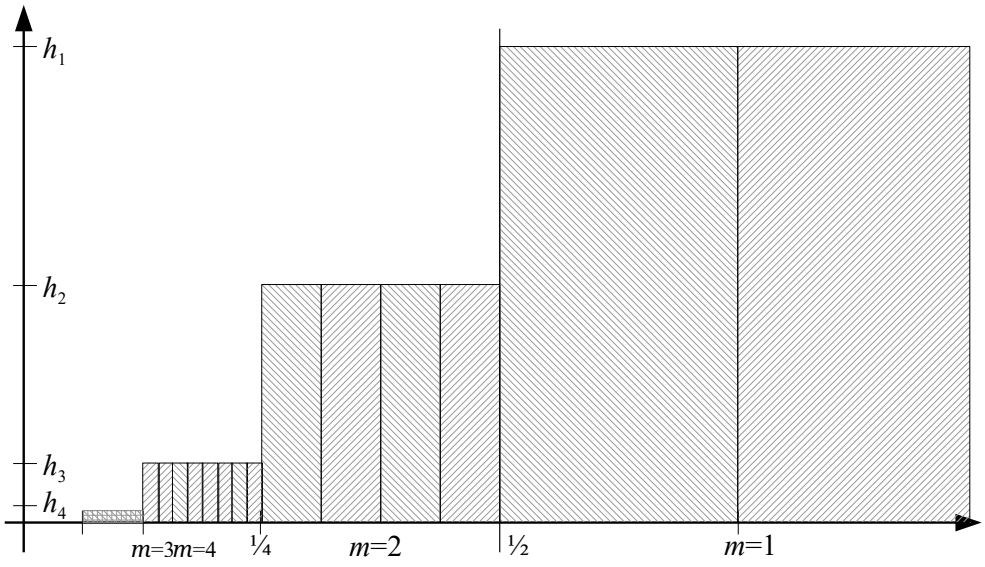


图 1。 根据定理 6 的证明说明 g 的构造

我们采用 [10, §3]中的构造；另请参见 [18, 定理 5.32]的证明。为此，固定一个 #P1-完全的 φ： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 不失一般性地设其形式为 (8)。按如下方式，将 φ 编码为实数 $\int_0^1 g(t)\,dt$，用于一个具有无限递减阶梯宽度的分段常数函数g： $[0;\ 1] \to [0;\ \ 1]$。将 (0; 1]划分为相邻的子区间 $I_m :=(2^{-m};\ \ 2^{-m+1}]$，每个可能的参数$m \in \mathbb{N}_+$ 对应一个子区间；再将每个 I_m 进一步划分为 2^m 个宽度为 4^{-m} 的子子区间$I_{m,\ \vec{w}}$，每个可能的 $\vec{w} \in \{0,1\}^m$对应一个；参见图 1。如果 $\vec{w} \notin P$, 则令限制$g_{m,\ \vec{w}} := g|_{I_{m,\ \vec{w}}}$恒等于零；而在$g_{m,\ \vec{w}} :\equiv 2^{-m^2}$的情况下

$\vec{w} \in P$。由此分配给每个参数 m 及见证 $\vec{w}$ 的面积满足以下良好分离条件：

$$4^{-N} \cdot 2^{-N^2} \overset{(*)}{\gg} 4^{-N^2-3N+\mathcal{O}(1)} = \sum\nolimits_{n>N} \sum\nolimits_{w=0}^{2^n-1} 4^{-n} \cdot 2^{-n^2} .$$

这表明，可以在关于 N 的多项式时间内，从总面积 $\int_0^1 g(t)$ 中恢复 $\varphi(N)$ $dt = \tilde{f}_0 \in \mathbb{C}$。现在，我们证明 g 可在多项式时间内实现步可计算性（定义 2b），从而完成定理 6 的证明。请注意，定义2b) 要求用给定宽度的阶梯 $1/S$ 进行近似，因此我们需要高效地对构成 g 的“窄”阶梯求平均，尽管该面积编码了 φ。对于步骤 $s = 0$，这是 #P1-困难的；回顾一下定理5（的证明）。但我们无需对每个 s 进行（b）最坏情况近似，只需证明其平均意义下的近似（c）。为此，固定 $N \in \mathbb{N}$，并令 $S := 2^N$：对于所有 $m \le N/2$ 和所有 $w < 2^m$，$I_{m,\,w}$ 等于或包含某个阶梯 $\big(s/S;\ (s+1)/S\big]$ 属于 $\mathcal{S}_S(f)$，其高度 $h_{S,\,s} = g_{m,\,\vec{w}}$ 因而可在关于 $m \le \mathcal{O}(N)$ 的多项式时间内直接精确读出。另一方面，对于所有 $m \ge \sqrt{N}$，$|g_{m,\,\vec{w}}| \le 2^{-m^2}$ 显然可以用高度为零的阶梯 $h_{S,\,s}$ 在平均意义下近似。

3.5 定理 7 的证明

记

$\mathcal{L}_{L,\,n}(\bar{v},\ t) := (L \cdot t - \ell) \cdot v_{n,\,L,\,\ell+1}/2^n + (1 - L \cdot t + \ell) \cdot v_{n,\,L,\,\ell}/2^n$，$\frac{\ell}{L} \le t \le \frac{\ell+1}{L}$ 对于由 $\bar{v}$ 诱导的分段线性函数，并记下

$$\int_\sigma^\tau \mathcal{L}_{L,n}(\bar{v},t)\,dt = (\tau-\sigma)\cdot\big(L\cdot\tfrac{\tau+\sigma}{2} - \ell\big)\cdot v_{n,L,\ell+1}/2^n + (\tau-\sigma)\cdot\big(1 - L\cdot\tfrac{\tau+\sigma}{2} + \ell\big)\cdot v_{n,L,\ell}/2^n, \quad \tfrac{\ell/L}{\le}\sigma \le \tau \le \tfrac{\ell+1}{L} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}_{L,n}(\bar{v})}_k = {} & \sum_{\ell=0}^{L-1} \big((\ell+1)\cdot v_{n,L,\ell} - \ell\cdot v_{n,L,\ell+1}\big) \\ & \cdot \big(\exp(-2\pi i k\tfrac{\ell+1}{L}) - \exp(-2\pi i k\tfrac{\ell}{L})\big)/(2\pi i k\cdot 2^n) \\ & + \sum_{\ell=0}^{L-1} \big(\exp(-2\pi i k\tfrac{\ell+1}{L})\cdot(1+2\pi i k\tfrac{\ell+1}{L}) - \exp(-2\pi i k\tfrac{\ell}{L})\cdot(1+2\pi i k\tfrac{\ell}{L})\big) \\ & \cdot L\cdot\frac{v_{n,L,\ell+1}-v_{n,L,\ell}}{4\pi^2k^2\cdot 2^n}, \qquad k\neq 0\end{aligned} \tag{11}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}_{L,n}(\bar{v})}_0 = \sum\nolimits_{\ell=0}^{L-1} \big((\ell+1)\cdot v_{n,L,\ell+1} - \ell\cdot v_{n,L,\ell}\big)/(L\cdot 2^n) .$$

$\widetilde{\mathcal{L}_{L,\,n}(\bar{v})}_k$ 和 $\widetilde{\mathcal{L}_{L,\,n}(\bar{v})}_{S,\,s}$ 与定理 4 的证明类似，因此在 $\bar{v}$ 属于 GapP 时也可视为可由 #P 计算，这归因于 GapP 上述的闭包性质。而 (iii) 意味着 $\big|\tilde{f}_k - \widetilde{\mathcal{L}_{L\,n}\,\bar{v},\,()}_k\big| \le 2^{-m}$ 适用于 $m = n + \log k + \log L + \mathcal{O}(1)$ 和 $L = 2^{\mathrm{poly}(m)}$；类似地，$\big|\hat{f}_{S,\,s} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\,n}\,\bar{v},\,()}_{S,\,s}\big| \le 2^{-m}$ 适用于 $m = n + \log S + \log L + \mathcal{O}(1)$ 和 $L = 2^{\mathrm{poly}(m)}$。

3.6 定理 8+9+10 的证明思路

在详细阐述上述定理的证明之后，我们可以转换视角，着重关注其余结果的证明思路。

证明（定理 *8*）。注意到

$$\begin{aligned}\left|f(\ell/L)-\hat{f}_{L,\ell}\right| &= \left|L\cdot\int_{\ell/L}^{(\ell+1)/L} f(\ell/L)-f(t)\,dt\right| \\ &\le L\cdot\int_{\ell/L}^{(\ell+1)/L}|f(\ell/L)-f(t)|\,dt \quad \le\ 2^{-n}\end{aligned}$$

对于 $L:=2^{\mathrm{poly}(n)}$: (i)+(ii) 因此可由 (b i) 和 (b ii) 得出。 □

接下来注意 [13, §I.3 推论 II]:

事实 12 如果 $f\in \mathrm{L}^2[0;1]$ 具有多项式连续模 *(iii)*，那么

$$\left\|f-\mathcal{F}_K(f)\right\|_\infty \ \le\ \mathcal{O}(n\cdot 2^{-n}) \quad \textit{for } K=2^{\mathrm{poly}(n)}\ .$$

证明（定理 *9*）。因此，对傅里叶级数的前 $2^{\mathrm{poly}(n)}$ 项求和即可近似 f；由于 GapP 的上述闭包性质，其复杂性属于 #P。□

证明（定理 *10*）。回想一下，我们在定理5的证明中，将一个 #P₁-难问题编码进了 $\sum_k \tilde{f}_k = f(0)$，其中 $0\le \tilde{f}_k \le k^{-\log^k}$根据方程（9）。特别地，对于每个固定的$d$， $|(2\pi ik)^d\cdot \tilde{f}_k| \le k^{d-\log k}$绝对可和：回想一下， $2\pi ik f_k$ 是函数 f'的一阶导数的傅里叶系数。因此，我们在定理5的证明中构造的函数 $f\in \mathrm{L}^2[0;1]$ 对每个 $d\in\mathbb{N}$都d次可微。□

4 应用

4.1 热方程

考虑单位区间上带周期边界条件的热方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ x\in[0,1)\bmod 1,\ t>0,\\ u(x,0)=f(x), \end{cases} \tag{12}$$

其中 $f\in L^2[0,1]$。众所周知，该问题有唯一解 u，且对任意固定的 $t>0$, $u(\cdot,\ t)\in C^\infty[0,1]$ （因此对于所有 $s>0$，在 $H^s[0,1]$ 中亦然）。回忆一下，如果存在一种算法，能够在关于 n 的多项式时间内，根据给定的 $n\in\mathbb{N}$ 输出一个 $r_n\in\mathbb{Z}$ 序列，使得 $|r-r_n/2^n|\le 2^{-n}$，那么 $r\in\mathbb{R}$ 就是 多项式时间可计算的。

定理 13。设 $t>0$ 是多项式时间可计算实数。
如果初始函数 $f\in L^2[0,1]$ 可在多项式时间内进行傅里叶计算，那么时间 t 时的解 $u(\cdot,t)$ 也可在多项式时间内进行傅里叶计算。

证明。 方程 (12) 的解为

$$u(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{f}_k e^{-4\pi^2k^2t}e^{2\pi ikx},$$

因此， $u(\cdot,t)$的傅里叶系数为 $\tilde{u}_k(t)=\tilde{f}_k e^{-4\pi^2k^2t}$。

由于 f 是多项式时间内傅里叶可计算的，因此存在一个多项式 p和一个由高斯整数组成的双重序列（$c_{k,n}$），使得定义2中的 ai)、aii) 成立，并且 $\|f-\mathcal{F}_K(f)\|_2\le 2^{-n}$ 满足 $K=2^{p(n)}$。

根据帕塞瓦尔恒等式，

$$\left\|u(\cdot,t)-\mathcal{F}_K(u(\cdot,t))\right\|_2^2=\sum_{|k|>K}|\tilde{u}_k(t)|^2=\sum_{|k|>K}|\tilde{f}_k|^2e^{-8\pi^2k^2t}\le\sum_{|k|>K}|\tilde{f}_k|^2\le 2^{-2n},$$

因此

$$\left\|u(\cdot,t)-\mathcal{F}_K(u(\cdot,t))\right\|_2\le 2^{-n},$$

因此，对于相同的 $K=2^{p(n)}$， $u(\cdot,t)$满足 aiii)。

现在我们需要构造一个高斯整数双重序列 $(d_{k,n})$，使得 ai)、aii) 对 $u(\cdot,t)$ 成立。由于 t 是多项式时间可计算的，我们可以在多项式时间内计算序列 $|t-t_m/2^m|\le 2^{-m}$。我们可以在多项式时间内计算一个整数序列 $b_{k,m}$ （即虚部为零的高斯整数序列），使得 $\left|e^{-4\pi^2k^2t}-b_{k,m}/2^m\right|\le 2^{-m}$，因为指数函数是多项式时间可计算的，论证 $4\pi^2k^2t$ 也是如此。我们还有 $\left|\tilde{f}_k-c_{k,m}/2^m\right|\le 2^{-m}$。

由 aiii) 以及 $n=0$，我们有 $K_0=2^{p(0)}$，使得 $\|f-\mathcal{F}_{K_0}(f)\|_2\le 1$，因此 $\|f\|_2\le|\mathcal{F}_{K_0}(f)|_2+1$。由于 K_0 是常数，我们可以在常数时间内计算出一个有理数 M，使得 $\|f\|_2\le M$ （通过近似 $|k|\le K_0$ 的有限个系数 f_k，其中系数的数量为 ˜，使用给定的 $c_{k,1}$）。

定义

$$\alpha_n=\left\lceil\sqrt{\frac{\ln M+n\ln 2}{4\pi^2t}}\right\rceil.$$

对于 $|k|\ge\alpha_n$，我们有 $|\tilde{u}_k(t)|\le Me^{-4\pi^2k^2t}\le 2^{-n}$；对这些 k，令 $d_{k,n}=0$。

对于 $|k|<\alpha_n$，选择一个辅助精度参数 $m=n+\lceil\log_2(M+2)\rceil+1$。

对于每个这样的 k，令 $P_{k,m}=c_{k,m}\cdot b_{k,m}\in\mathbb{Z}[i]$，并通过将 $P_{k,m}/2^{2m-n}$ 舍入到最近的高斯整数来定义 $d_{k,n}$：

$$d_{k,n}=\left\lfloor\frac{P_{k,m}}{2^{2m-n}}\right\rceil.$$

Then

$$\left|\tilde{u}_k(t)-d_{k,n}/2^n\right|\le 2^{-n}.$$

最后，让我们检查 u 的条件 aii)。对于 $|k|\ge\alpha_n$, $d_{k,\,n}=0$。对于$|k|<\alpha_n$, 注意到 $\alpha_n=O(\sqrt{n})$，因此 $\log|k|=O(\log\,n)$。计算 $c_{k,\,m}$ 所需的时间关于 $m+\log|k|=\mathrm{poly}(n)$ 是多项式的。计算 $b_{k,\,m}$ 所需的时间关于 m 是多项式的。乘法和舍入运算关于 $P_{k,\,m}$ 的位长度是多项式的，而该位长度为 $O(m)$。因此，$(n,\ k)\mapsto d_{k,\,n}$ 可在关于 $n+\log|k|$ 为多项式的时间内计算。□

注 *14*。与定理 13, [19, 定理 4e/§4.3] 相比，构造了一个多项式时间可计算初始条件 $f \in \mathcal{C}^\infty$，使得 $u(\cdot, 1)$ 是连续的，但除非 $\#\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{FP}_1$，否则作为连续函数并非多项式时间可计算；另见 [2]。

参考文献

1. Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。 *Computational Complexity: A Modern Approach*。剑桥大学出版社，2009年。2. Aras Bacho、Holger Boche 和 Gitta Kutyniok。拉普拉斯方程和扩散方程解的复杂性激增。 *arXiv*，2212.00693，2023年。3. Aras Bacho 和 Martin Ziegler。可积函数复杂性理论的二阶参数化。载于 Fran,cois Boulier、Chenqi Mou、Timur M. Sadykov 和 Evgenii V. Vorozhtsov 编， *Computer Algebra in Scientific Computing - 27th Inter-national Workshop, CASC 2025, Dubai, United Arab Emirates, November 24-28, 2025*年， *Proceedings* 16235 *Lecture Notes in Computer Science* 27 46 ，卷，页码 – 。施普林格，2025年。4. Holger Boche、Andrea Grigorescu、Rafael F. Schaefer 和 H. Vincent Poor。有色高斯噪声信道容量计算复杂性的刻画。*IEEE Trans. Commun.*，72(8):4844–4856，2024年。5. Holger Boche 和 Volker Pohl。在数字计算机上模拟模拟线性时不变系统时的复杂性激增。 *IEEE Trans. Signal Process.*，69:5005–5020，2021年。6. Holger Boche、Volker Pohl 和 H. Vincent Poor。因果预测最小均方误差计算复杂性的刻画。 *IEEE Trans. Inf.* ，( ): – 。 *Theory* 70 9 6627 6638, 2024

7. Vasco Brattka 和 Ruth Dillhage。具有基的可计算巴拿赫空间上紧算子的可计算性。 *Math. Log. Q.*，53(4-5):345–364，2007年。8. Mark Braverman 和 Stephen A. Cook。实数上的计算：科学计算的基础。 *Notices of the AMS*，53(3):318–329，2006年。9. Lance Fortnow。 *Counting complexity*，第81–107页。施普林格出版社，柏林、海德堡，1998年。10. Harvey Friedman。最大化与积分的计算复杂性。 *Advances in Mathematics* 53 80 98, 1984 ，：– 。

11. Andrzej Grzegorczyk。关于可计算实连续函数的定义。 *FM*，44 61 71，1957年：– 。12. Lane A. Hemachandra 和 Mitsunori Ogiwara。#P 在减法下是否封闭? *Current Trends in Theoretical Computer Science* 523 536, 1993 ，页码 – 。

13. Dunham Jackson。 *The Theory of Approximation*，第XI卷。美国数学会讨论班出版物，1930年。14. Akitoshi Kawamura。利普希茨连续常微分方程是多项式空间完全的。 *Computational Complexity*，19(2):305–332，2010年。15. Akitoshi Kawamura、Florian Steinberg 和 Martin Ziegler。关于泊松方程狄利克雷问题的计算复杂性。 *Mathematical Structures in Computer Science* 27 8 1437 1465, 2017 ，( ): – 。

16. Akitoshi Kawamura、Holger Thies 和 Martin Ziegler。哈密顿动力学的平均情形多项式时间可计算性。载于 *43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* 117 *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.* ，卷，页码 Art. No. 30，17，瓦德恩，2018年。达格斯图尔城堡。莱布尼茨信息中心。17. Ker-I Ko。最大值问题与 NP 实数。 *JCSS*，24:15–35，1982年。18. Ker-I Ko。 *Complexity Theory of Real Functions*。《理论计算机科学进展》。Birkh¨auser，波士顿，1991年。19. Ivan Koswara、Gleb Pogudin、Svetlana Selivanova 和 Martin Ziegler。线性演化系统偏微分方程经典解的位复杂性。 *Journal of Complexity* 101727, 2023 ，页码。

20. Daren Kunkle。可积函数空间上的 Type-2 可计算性。 *MLQ*，50(4,5):417–430，2004年。

21. Donghyun Lim、Svetlana Selivanova 和 Martin Ziegler。什么是多项式时间可计算的 L [2] 函数？载于 *Proc. 17th Int. Conf. Computability and Complexity in Analysis (CCA)*，页码 41 – 42，意大利博洛尼亚，2020。http://cca-net.de/cca2020/CCA2020Abstracts.pdf。22. Donghyun Lim 和 Martin Ziegler。连续数据的定量编码与复杂性理论。 *J. ACM*，72(1):4:1–4:39，2025年。23. Marian B. Pour-El 和 J. Ian Richards。一个没有可计算解的可计算常微分方程。 *Annals Math. Logic*，17:61–90，1979年。24. Marian B. Pour-El 和 J. I an Richards。 *Computability in Analysis and Physics*。《数学逻辑展望》。施普林格，柏林，1989年。25. Matthias Schr¨oder。允许类型二复杂性理论的空间：再探。 *MLQ*，50(4,5):443–459，2004年。26. Matthias Schr¨oder、Florian Steinberg 和 Martin Ziegler。实函数的平均情形位复杂性理论。载于 Ilias S. Kotsireas、Siegfried M. Rump 和 Chee K. Yap 编， *Mathematical aspects of computer and information sciences*， *LNCS*第9582卷，第505–519页，尚，2016年。施普林格。第六届国际会议，MACIS 2015，德国柏林，2015年11月11日至13日，修订精选论文。27. Ernst Specker。分析学中不能以构造性方式证明的定理。 ，( ): – 。28. Florian Steinberg。可积函数空间的复杂性理论。 *Logical Methods in Computer Science* 13 3 21, 39, 2017 ，( ): 第 篇论文。29. Alan M. Turing。论可计算数及其在判定问题中的应用。 *LMS*，42(2):230–265，1937年。30. Klaus Weihrauch。 *Computable Analysis*。施普林格，柏林，2000年。