arXiv:2601.17140v1 [math.AP] 23 Jan 2026

对称哑铃形区域上诺伊曼特征函数的节线缺陷

THOMAS BECK 和 ANDREW LYONS

Abstract. 我们研究定义在对称哑铃形区域上的诺伊曼特征函数对的节点亏格。随着连接颈部的宽度缩小，这些特征函数收敛到定义在哑铃两端上的诺伊曼特征函数，以及颈部内的一维斯图姆-刘维尔解。在这一极限下，相应的特征值变为重数为二的简并特征值。根据 Courant 节点域定理，节点亏格定义为特征值指标与节点域数量之差，且已知其非负。我们证明，当颈部宽度较小时，哑铃区域特征函数的节点亏格不小于极限特征函数在两端上的节点亏格，并给出节点亏格相等的条件。由此，我们确立了判定哑铃形区域上零节点亏格特征函数的准则。

1. Introduction

我们研究诺伊曼拉普拉斯算子的特征函数的节点集，这些特征函数对应于一个重数为 2 的特征值的扰动。特征函数定义在一个对称哑铃形区域上，该区域可视为两个互不相连的区域经由一条细颈连接后形成的扰动。对于一个具有分段光滑边界的任意有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，我们考虑满足以下条件的诺伊曼特征函数 u

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)\, u = 0, & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其特征值为 λ。此处 ∂_ν 表示沿边界 $\partial\Omega$ 的法向导数。于是，u 的节点集是水平集 $\{(x,\ y) \in \Omega :\ u(x,\ y) = 0\}$ 的闭包，它将 Ω 划分为若干连通区域，称为节点域，在这些区域中，u 始终严格为正或严格为负。如果 u 的节点集由 Ω 的闭包中的互不相交的闭曲线组成，我们就称该节点集不含交叉点。拉普拉斯特征函数可描述各种介质中的振动模态，而 u 的节点集则描述在能量为 λ 的振动过程中保持静止的点。特征函数的节点集很大程度上取决于 Ω 的几何，并且对区域扰动十分敏感。因此，对这一问题的研究一直是一个经典且活跃的研究领域 [10, 31]。

令 $[\![u,\Omega]\!]$ 表示满足 (1.1) 的函数 u 在其定义域 Ω 中的节点域数量。Courant 节点域定理 [12] 断言，$[\![u,\Omega]\!]$ 不超过 Ω 的诺伊曼谱中特征值 λ 的最小指标。如果某个特征函数满足 $[\![u,\Omega]\!] = \mathrm{index}(\lambda, \Omega) := \min\{j :\ \lambda = \lambda_j\}$，那么我们将该特征函数 u 及相应的特征值 λ 称为 ***Courant*** 尖锐。更一般地，节点亏格

$$\vartheta(u, \Omega) := \mathrm{index}(\lambda, \Omega) - [\![u, \Omega]\!] \geq 0 \tag{1.2}$$

可作为衡量 Courant 尖锐性的指标。在一维区域上，(1.1) 的特征函数和特征值全都是 Courant 尖锐的；按照特征值在谱中的位置标记的第 j 个特征函数，其节点集由 $j-1$ 个内部点组成，并恰好分隔出 j 个节点域。特别是，这一性质在区间区域的扰动下保持稳定。相比之下，在高维区域 [14, 22, 26, 27] 上定义的 Courant 尖锐特征函数只有有限多个。

一般而言，节点集没有交叉点，节点域数量应在区域扰动 [30] 下保持稳定。然而，在某些存在节点集交叉的情形下，节点域数量并不稳定，在一般域变形 [4, 23, 24] 下可能减少（但不会增加）。因此，对于一般区域而言，节点亏格是一个难以计算的量，因为其特征函数和特征值可能无法显式求出。为理解节点亏格而发展出的另一种方法，是将其表示为特征函数节点域的狄利克雷到诺伊曼映射的莫尔斯指标 [5, 6, 7, 8]。

我们研究定义在对称哑铃形区域上的方程（1.1）的特征函数。该区域由两个互不相交的有界平面区域通过一条细颈连接而成，其精确定义见第1.1节。针对某个数据集的随机块模型会生成一个具有不同簇的图，这些簇即彼此连接较弱的子图；哑铃形区域，或更一般地说，由有限个子区域通过细颈连接而成的链域，可作为具有这种结构的大型数据集的连续模型[28, 29]。与低能特征值对应的节点域构成一种自然划分，可体现社群结构。在 [3, 定理 1.1]中，Beck、Canzani 和 Marzuola 给出了链域上方程（1.1）的特征函数所产生的节点域数量上界，该上界不受细连接颈部结构的影响。他们通过确定互不相交的平面区域的若干几何常数来控制 Courant锐利诺伊曼特征函数的特征值，并进而应用法贝尔-克拉恩定理，得出节点域面积关于这些几何常数的下界。他们的结果表明，链域的 Courant 尖锐特征函数数量有限，且其数量上界不受颈部宽度影响。他们的研究还表明，定义在链域上的 Courant 尖锐特征函数的定性节点行为不受连接颈部宽度的影响。

哑铃形区域的对称性意味着，随着颈部退化，极限谱中会出现重数为偶数的特征值。为了理解节点亏格如何随颈部宽度变化，我们首先确定趋于同一极限的特征值分支的次序。在 [1, 定理 2.5]中，Arrieta 建立了由细颈连接的区域的诺伊曼特征值的一阶变化规律。然而，这项工作依赖于极限特征值为单重的假设，而这一假设不适用于我们的区域，因为该区域具有对称性。我们借鉴 [1, 20], 中使用的技巧，为分离区域上重数为2的极限特征值建立了类似的估计。同时，相应的特征函数估计有助于控制颈部宽度变化时相应特征函数所产生的节点域数量。综合起来，这些定量结果加深了我们对小幅区域形变下节点亏格的理解。

1.1. 区域定义与主要结果陈述。 我们研究对称哑铃形区域 Ω_ϵ上的诺伊曼特征函数的节点亏格。该哑铃形区域由两个相同的分片光滑区域组成，它们由一条细颈连接；当 ϵ 趋于0时，细颈退化为一条线段。该区域的诺伊曼谱包含趋于同一极限的一对特征值。Ω_ϵ 的正式定义如下：

定义 1.1 （分离区域，Ω_0）。 设Ω_L 和Ω_R 是一对互不相交的有界平面区域，其边界光滑，但有有限个顶点。我们将$\Omega_0 = \Omega_L \cup \Omega_R$ 定义为分离区域，它关于竖直线 $\{x = \frac{1}{2}\}$ 对称，且与线段 $[0,1]\times\{0\}$不相交。此外，对某个固定的 $\ell > 0$，并令 $p_0 = (0,0)$ 和 $p_1 = (1, 0)$，边界 $\partial\Omega_0$ 在 p_0, p_1 附近是局部平坦的，具体而言

$$\{(0, y) : |y| < \ell\} \subset \partial\Omega_L \quad and \quad \{(1, y) : |y| < \ell\} \subset \partial\Omega_R.$$

定义 1.2 （哑铃形区域，Ω_ϵ）。 设 $g \in C^1([0,1])$ 是一个正函数，满足 $\|g\|_{L^\infty} \le 1$，其中 $g(x) = g(1-x)$ 对所有 $x \in [0,1]$ 都成立，且 $g(0)\ g(1) < \ell$。对于 $0 < \epsilon \le 1$，令

$$R_\epsilon = \{(x,y) : 0 < x < 1 : 0 < y < \epsilon g(x)\} \tag{1.3}$$

用作连接颈部，与分离区域 Ω_0不相交。然后，我们将哑铃形区域 Ω_ϵ定义为对 Ω_0 作如下扰动所得:

$$\Omega_\epsilon = \Omega_0 \cup R_\epsilon \cup \{(0,y) : 0 < y < \epsilon g(0)\} \cup \{(1,y) : 0 < y < \epsilon g(1)\}.$$

根据这些定义，Ω_ϵ 退化为分离区域 Ω_0 与线段$[0,1] \times \{0\}$ 的并集，其中 $\epsilon \to 0$。Ω_ϵ 的一个示例见图 1，其中 Ω_L 和 Ω_R 为正方形区域。

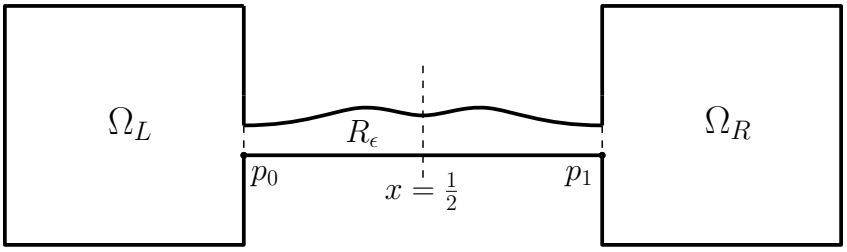

FIGURE 1. 哑铃形区域 Ω_ϵ的一个示例。

众所周知，在 Ω_ϵ上定义的狄利克雷拉普拉斯算子的特征函数会在 ϵ 趋于零时局部化到分离区域 Ω_0 [3, 13, 25]。此时，Ω_ϵ 的狄利克雷谱收敛到 Ω_0, 的狄利克雷谱，退化的颈部不起作用。然而，当 ϵ较小时，Ω_ϵ 上诺伊曼拉普拉斯算子的特征函数与 Ω_0 上特征函数的限制十分相似；后者通过 R_ϵ 中斯图姆–刘维尔方程的解连接起来，具体表述见下文的定理 1.11。例如，Ω_ϵ 的第二诺伊曼特征函数类似于在 Ω_0 上取不同符号常数、并在颈部由一个单变量单调函数连接的函数。如 [25] 针对一般哑铃形区域所示，第二诺伊曼特征函数的节点集无法延伸到远离颈部的位置。一般而言，令 $\{\lambda_j^\epsilon\}_{j=1}^\infty$ 表示 Ω_ϵ 的诺伊曼特征值，其对应的(Ω_ϵ)-归一化特征函数为 L^2 $\{\varphi_j^\epsilon\}_{j=1}^\infty$，并设

$$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty \cup \{\tau_n\}_{n=1}^\infty \tag{1.4}$$

按包含重数的顺序排列，其中$\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ 包含 Ω_0的诺伊曼特征值，而 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ 包含斯图姆–刘维尔方程的狄利克雷特征值

$$-(g(x)v'(x))' = \tau g(x)v(x) \text{ in } (0,1). \tag{1.5}$$

于是，由 [1, 定理 2.2]，对每个 $j \in \mathbb{N}$，极限 $\lim_{\epsilon\to 0} \lambda_j^\epsilon$ 都存在，且等于 λ_j。因此，与狄利克雷情形不同，R_ϵ 的几何会影响 Ω_ϵ的诺伊曼谱；该谱收敛到 Ω_0 的诺伊曼特征值，以及式 (1.5) 中的狄利克雷特征值。

注意，由分离区域 Ω_0, 的对称性可知，Ω_L 中重数为 m的每个诺伊曼特征值，在序列 $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ 中恰好出现 $2m$ 次。我们考虑恰有两个特征值分支收敛到元素 $\mu \in \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ 的情形，并作如下非退化假设。

假设 1.3 (简单特征值假设)。 我们假设 $\mu \in \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$，其中 μ 是 Ω_L的单诺伊曼特征值，且满足 $\mu \notin \{\tau_n\}_{n=1}^\infty$。

对于满足该假设的特征值 μ，令 ϕ 为 Ω_L中对应的诺伊曼特征函数。令$\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 表示 Ω_ϵ 中的一对特征函数，其特征值分别为 $\lambda^{\epsilon,\,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,\,o}$，并收敛于 μ。下文的引理 2.1证明了这一记号的合理性。我们的第一个结果以 Ω_ϵ 中任一特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 或 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点亏格为依据，给出了其节点亏格相对于 Ω_L中 ϕ的节点亏格的下界。这需要对 ϕ 在 $p_0 \in \partial\Omega_L$处的行为作出如下非退化假设；我们回顾一下， p_0 是 Ω_L 上颈部 R_ϵ 连接处的点。

假设 1.4 (非消失假设)。 我们假设 $\phi(p_0) \neq 0$，因此 ϕ 的节点集与 $p_0 \in \partial\Omega_L$ 的某个邻域不相交。

我们的第一个定理考察节点亏格 (1.2)，内容如下：

定理 1.5。 在假设 *1.3* 和 *1.4* 下，存在一个常数 $\epsilon_0 > 0$，它仅取决于 Ω_0，的几何、定义 R_ϵ 的函数 g 以及特征对 (μ, ϕ)，使得对 $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$\vartheta(\varphi^{\epsilon,e}, \Omega_\epsilon) \geq 2\vartheta(\phi, \Omega_L) \quad and \quad \vartheta(\varphi^{\epsilon,o}, \Omega_\epsilon) \geq 2\vartheta(\phi, \Omega_L),$$

若 ϕ 在 Ω_L 中的节点集不含交叉点，则等号成立。

这一结果以 ϕ 在 Ω_L 中的节点亏格为依据，给出了扰动特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 在 Ω_ϵ 中的节点亏格下界，证明见第 4 节和第 5 节。若 ϕ 的节点集没有交叉点，因而不自相交，那么我们发现，当颈部扰动足够小时， $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点集同样不含交叉点，并且 $[\![\varphi^{\epsilon,\,e},\ \Omega_L]\!] = [\![\varphi^{\epsilon,\,o},\ \Omega_L]\!] = [\![\phi,\ \Omega_L]\!]$。作为定理 1.5 的直接推论，我们得到一个判据，用以判断 Ω_L 中的 Courant 尖锐特征函数何时会导出扰动哑铃形区域 Ω_ϵ 中的一对 Courant 尖锐特征函数。

推论 1.6. 如果 ϕ 在Ω_L 中是 *Courant* 尖锐的，且其节点集中不含交叉点，那么对于所有 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$, $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 是在Ω_ϵ中的一对 *Courant* 尖锐特征函数。

反之，如果 ϕ 在Ω_L中不是 *Courant* 尖锐的，那么对于所有 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$, $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 都不是Ω_ϵ 中的 *Courant* 尖锐特征函数。

当 $\mu = 0$时，特征函数 ϕ 在 Ω_L 中是常数，因此其节点集中不含交叉点。在这种情况下，推论 1.6 得出了一个已知事实：Ω_ϵ 中的前两个特征函数必然是 Courant 尖锐的。

注 1.7. 如果给定分离区域Ω_0 及颈函数 g不满足假设 *1.3* 或假设 *1.4*，那么对Ω_0 和 g进行一般扰动后，两个假设都会成立。

1.1.1. 特征函数与特征值估计。 定理 1.5 证明中的关键要素包括对较小的 $\epsilon > 0$ 下特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的近似，以及一种确定相应特征值 $\lambda^{\epsilon,\,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,\,o}$ 在 Ω_ϵ 的 Neumann 谱中的位置的方法。

给定特征函数 ϕ，它在 Ω_L 中满足 (1.1)，对应的特征值为 μ。假设 ϕ^e 和 ϕ^o 是 ϕ 关于竖直线 $\left\{x = \frac{1}{2}\right\}$ 反射得到的偶对称和奇对称函数，它们定义在分离区域 Ω_0 上。注意到节点集在特征函数缩放下保持不变，因此我们对特征函数进行归一化，使得 $\|\varphi^{\epsilon,\,e}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = \|\varphi^{\epsilon,\,o}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = 1$，且 $\|\phi^e\|_{L^2(\Omega_0)} = \|\phi^o\|_{L^2(\Omega_0)} = 1$。沿用上文的记号，$(\lambda^{\epsilon,e}, \varphi^{\epsilon,e})$ 和 $(\lambda^{\epsilon,o}, \varphi^{\epsilon,o})$ 是在 Ω_ϵ 中满足 (1.1) 的一对特征对，且

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lambda^{\epsilon,e} = \lim_{\epsilon\to 0} \lambda^{\epsilon,o} = \mu.$$

虽然根据假设 1.3， μ 是 Ω_L 的单诺伊曼特征值，但 (1.5) 在连接区间 (0，1) 上的 Sturm-Liouville特征函数仍会影响谱流。我们记

$$\Theta_\lambda(a,b)=\int_0^1 g(x)\left|\frac{d}{dx}\xi_\lambda^{a,b}(x)\right|^2dx-\lambda\int_0^1 g(x)\left|\xi_\lambda^{a,b}(x)\right|^2dx \tag{1.6}$$

其中， $\xi^{a,}{}_{\lambda}{}^{b}$ 在特征值为 λ 且满足边界条件 $\xi^{a,}{}_{\lambda}{}^{b}(0)=a$ 和 $\xi^{a,}{}_{\lambda}{}^{b}(1)=b$的条件下求解（1.5）。（1.6）中的量衡量了 λ 的能量刻画与对称狄利克雷型之间的差异，并给出了由 $\lambda^{\epsilon,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,o}$给出的特征值分支的一阶变化，具体如以下结论所述。

定理 1.8。 在假设 *1.3* 下，$\Omega\Omega_\epsilon$ 上趋于 μ （当 $\epsilon\to 0$ 时）的两个特征值分支可写为

$$\lambda^{\epsilon,e}=\mu+\epsilon\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0),\phi^e(p_1)\right)+o(\epsilon),$$
$$\lambda^{\epsilon,o}=\mu+\epsilon\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1)\right)+o(\epsilon).$$

在本文中， $o(\epsilon)$中的隐含常数仅取决于 Ω_0, 的几何、（1.3）中的函数 g 以及特征对（μ， ϕ）。定理 1.8 给出了所需的特征值渐近式，用于确定区域发生小扰动后，特征值指标 index($\lambda^{\epsilon,e}$，Ω_ϵ) 和 index($\lambda^{\epsilon,o}$, Ω_ϵ) 如何变化。

注 *1.9.* 给定如 *(1.4)* 中的 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，令 k 为满足 $\tau_k<\mu$ 的最大整数，其中若 $0\le\mu<\tau_1$，则 $k=0$。那么，在假设 *1.3* 下，根据 [1, 定理 2.2]，存在 $\epsilon_0>0$，使得对于 $0<\epsilon<\epsilon_0$，$\lambda^{\epsilon,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,o}$ 以某种顺序成为 Ω_ϵ 的第 *2* 指标$(\mu,\Omega_L)+k-1$ 和第 *2* 指标$(\mu,\Omega_L)+k$ 个诺伊曼特征值。定理 *1.8* 指出，这一顺序由 $\Theta_\mu(\phi^e(p_0)\ \phi^e(p_1))$ 与 $\Theta_\mu(\phi^o(p_0)\ \phi^o(p_1))$ 的相对大小决定。

注1.10. 我们将看到，只要 μ 不是 *(1.5)* 的诺伊曼特征值， $\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0)\ \phi^e(p_1)\right)$ 和 $\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0)\ \phi^o(p_1)\right)$ 均非零。此外，在假设 *1.3* 和 *1.4* 下，恒有

$$\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0),\phi^e(p_1)\right)\neq\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1)\right),$$

因此，特别是如果其中一个变化为零，那么另一个必然非零。更多详情请参见引理*4.3*和注*4.4*。

定理 1.8 是对 [1], 中定理2.5(a)的推广；该定理证明了相同的特征值估计，但其情形为： μ 是 Ω_0, 中与 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$不相交的单诺伊曼特征值，因此 Ω_ϵ 只有一个特征值分支收敛到 μ。在同一情形下， [1] 中的定理2.7(a)给出了 Ω_ϵ 与 Ω_0, 的相应特征函数之间的估计，并且同样利用了颈部中的一个适当函数 $\xi^{a,}{}_{\mu}{}^{b}$。第 2 节和第 3 节中的分析将这些结果推广到我们的情形。在下述定理中，我们令 $\xi_\mu^{\phi^e}$ 为满足 (1.5)、特征值为 μ 且边界条件为 $\xi_\mu^{\phi^e}(0)=\phi^e(p_0)$ 和$\xi_\mu^{\phi^e}(1)=\phi^e(p_1)$的函数。函数 $\xi_\mu^{\phi^o}$ 以类似方式定义。

定理 1.11。 在假设 *1.3* 下，Ω_ϵ 上的正交归一特征函数，其特征值为 $\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}$，满足

$$\|\varphi^{\epsilon,e}-\phi^e\|^2_{H^1(\Omega_0)}=o(\epsilon),\qquad \left\|\varphi^{\epsilon,e}-\xi_\mu^{\phi^e}\right\|^2_{H^1(R_\epsilon)}=o(\epsilon),$$
$$\|\varphi^{\epsilon,o}-\phi^o\|^2_{H^1(\Omega_0)}=o(\epsilon),\qquad \left\|\varphi^{\epsilon,o}-\xi_\mu^{\phi^o}\right\|^2_{H^1(R_\epsilon)}=o(\epsilon).$$

这一结果意味着 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 分别与分离区域 Ω_0, 中的特征函数 ϕ^e 和 ϕ^o 十分相似；而在颈部，扰动特征函数的行为则类似于对 Sturm-Liouville 方程 (1.5) 的解进行延拓。对于确定特征函数在小的正值 ϵ下产生的节点域数量而言，这一比较至关重要。定理 1.8 和 1.11 在第 2 节和第 3 节中得到证明，证明方法是将 Arrieta 的原始证明从 [1] 推广到具有重数的特征值。这些定理中的估计为研究 Ω_ϵ 中的节点亏格 (1.2) 并证明定理 1.5 奠定了基础。

1.1.2. 谱划分。 Helffer、Hoffmann-Ostenhof 和 Terracini 发现，方程 (1.1) 的 Courant 尖锐特征函数所产生的节点域构成 Ω [9] 的最小二部等分划分，这项工作为寻找 Courant 尖锐特征函数提供了动机。也就是说，方程 (1.1) 的特征函数的节点域使能量泛函达到最小值

$$\sup_{1\le i\le k}\left\{\lambda_1(D_i)\,:\,\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}D_j\right\}$$

在 $\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}D_j$ 的所有由 k 个子区域 [16] 构成的划分中。这里， $\lambda_1(D_i)$ 是在 $\partial D_i\subset\Omega$ 上施加狄利克雷边界条件、在 $\partial D_i\cap\partial\Omega$ 上施加诺伊曼边界条件时，D_i 上的最小拉普拉斯特征值。此后，在正方形、环面、球面和其他对称域上，也发现了具有不同边界条件的 Courant 尖锐特征函数 [2, 17, 18, 19]。定理 1.5 中的不等式拓展了近期寻找 Courant 尖锐特征函数的研究。

例如，考虑 Ω_L 为矩形 $[0,M]\times[0,1]$ 的情形，其中 $M^2>1$ 是无理数且接近 1。此时，Ω_L 的所有诺伊曼特征值都是单重的，并且我们可以选择颈部定义函数g 和连接点 p_0、 p_1 ，使得对于 Ω_L 的诺伊曼谱中的任意 μ ，假设 1.3 和 1.4 均成立。若 $M>1$ 足够接近 1，直接计算可得，Ω_L 的第 1、2、4 和 9 个诺伊曼特征函数是仅有的 Courant 尖锐特征函数。图 2 展示了各特征函数的节点域，并根据相应特征值在谱中的位置标注；颜色用于区分正负号。

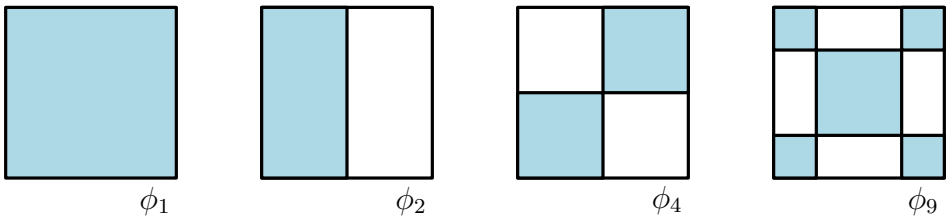

FIGURE 2. 近似正方形域上的 Courant 尖锐特征函数。

注意到， ϕ_1、 ϕ_2 的节点集在区域的闭包中不含交叉点，因此若 ϵ足够小，推论 1.6 保证 Ω_ϵ中至少存在四个 Courant 尖锐特征函数。由于矩形域 Ω_L中只有四个 Courant 尖锐特征函数，推论 1.6 还表明，当 $\epsilon>0$ 足够小时，Ω_ϵ 中对应于 Ω_ϵ 的特征值分支（其起始值为(1.4)所给出的 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$中的特征值）的 Courant 尖锐特征函数不超过八个。注意到， ϕ_4 和 ϕ_9 的节点集含有自交点。直观而言，我们预期此类交叉点会在区域扰动下张开，从而相应地减少节点域的数量。因此，我们猜想，对于一般的长度 M 和颈部定义函数 g，Ω_ϵ中对应于 Ω_ϵ 的特征值分支（其极限属于 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$）的 Courant 尖锐特征函数恰有四个。

我们使用 MATLAB 对定理 1.5 和推论 1.6 进行简要的数值说明。在下文的图 3 和图 4 中，展示了对称矩形哑铃形区域的若干特征函数的 MATLAB 近似。该哑铃形区域具有直颈（即 $g \equiv 1$），其中 $\Omega_L = [0, M] \times [0, 1]$，且 $M^2 = (28)^{2/3}$ 是无理数。

在图 3 中，展示了哑铃形区域的第 6 和第 7 个诺伊曼特征函数。这对应于矩形的一个特征对 (μ, ϕ)，其中 $\mu = \frac{4\pi^2}{M^2}$ 和 ϕ 是 $\cos(2\pi x/M)$ 的倍数。由于满足假设 ~~1.3~~ 和 1.4，并且 ϕ 是 Ω_L 的第三个 Courant 尖锐特征函数，其节点集中没有交叉点，根据推论 1.6，对于足够小的颈部宽度，我们预计矩形哑铃形区域中会存在一对 Courant 尖锐特征函数。特征值 μ 位于连接区间 $[0, 2]$，的第一和第二个狄利克雷特征值之间，因此，这对特征函数是哑铃形区域中的第 6 和第 7 个诺伊曼特征函数。图 3 所示的节点集表明，这些特征函数确实是 Courant 尖锐的。

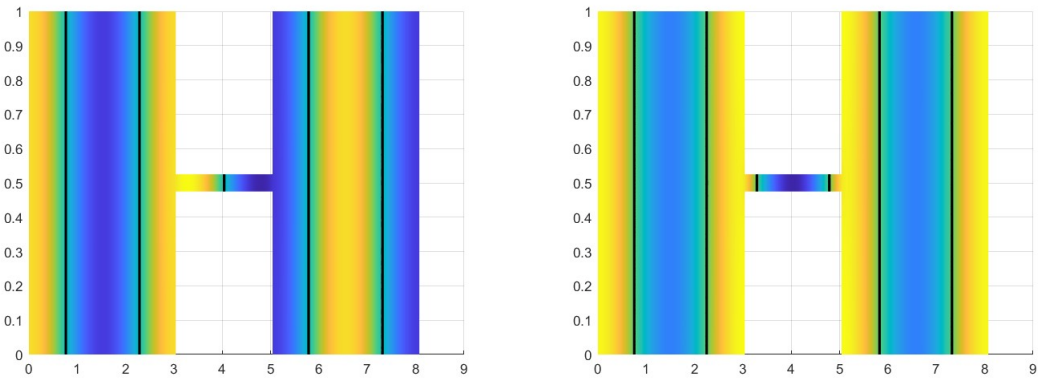

FIGURE 3. 矩形哑铃形区域上的一对 Courant 尖锐特征函数。图片来源：Steven Zucca

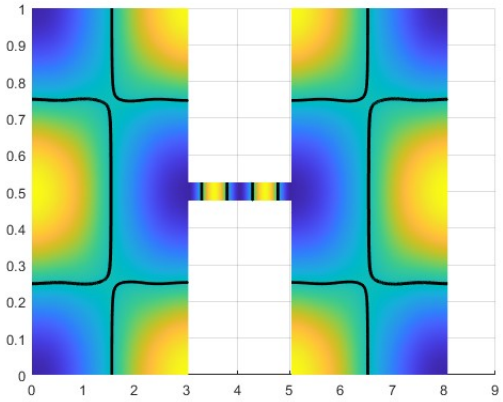

FIGURE 4. 一个没有节点交叉的矩形哑铃形区域特征函数。图片来源：Steven Zucca

图 4 展示了哑铃形区域的第 31 个诺伊曼特征函数。它对应于矩形的一个特征对 (μ, ϕ)，其中 $\mu = \frac{\pi^2}{M^2} + 4\pi^2$，而 ϕ 是 $\cos(\pi x/M)\cos(2\pi y)$ 的一个倍数。

由于满足假设 1.3 和 1.4，且 ϕ 有 6 个节点域，定理 1.5 指出，当颈部宽度足够小时，哑铃形区域中的扰动特征函数的节点亏格至少为 2（$14-6$） $=16$。特征值 μ 介于连接区间 $[0,2]$, 的第 4 和第 5 个狄利克雷特征值之间，因此该特征函数是哑铃形区域中的第 31 个诺伊曼特征函数。图 4 所示的节点集表明节点亏格为 $31-11=20>16$, 与定理 1.5 一致。请注意，这也为我们上述的启发式观点提供了证据： ϕ 的节点集中的交叉点在这一区域扰动下已经张开，导致哑铃形区域中特征函数的节点亏格增加。

1.2. **概要**。 本文结构如下。全文中，我们均在假设 1.3 下进行研究。在第 2 节和第 3 节中，我们证明定理 1.8 和 1.11 中关于特征值和特征函数的估计，主要沿用 $[1,$Sections $4-5]$ 中采用的策略。在第 2 节中，我们利用特征值的变分表述，得到从 μ 出发的每个特征值分支的上界。第 3 节则共同建立特征值的下界和特征函数的估计。在第 4 节中，我们在假设 1.4 下研究斯图姆–刘维尔方程 (1.5)，从而将定理 1.8 中的特征值排序与该方程的奇解和偶解的零点数联系起来。最后，在第5节中，我们通过计算特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 在 R_ϵ中的节点域数目，并估计它们在 Ω_L 和 Ω_R中的节点域数目的上界，证明定理 1.5。最后这一步论证依赖法贝尔-克拉恩定理，以排除面积足够小的节点域。

2. An Eigenvalue Upper Bound

本节中，我们在假设 1.3 下，为对应于正交归一特征函数 $\varphi^{\epsilon,e},\varphi^{\epsilon,o}$、源自 μ 的特征值分支 $\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}$ 建立一个上界。本节的分析沿用 $[1,$ Section $4]$, 中的方法；该文考虑的是 μ 为 $\Omega_0=\Omega_L\cup\Omega_R$ 的单诺伊曼特征值的情形。本节与第 3 节中类似的特征值估计相结合，从而证明定理 1.8。特征值上界是通过特征值的变分表述推导出的，因此我们先介绍将要用到的一些测试函数。

令 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ 表示 Ω_0 上方程 (1.1) 的诺伊曼特征值，令 $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ 表示单位区间上方程 (1.5) 的狄利克雷特征值。和之前一样，我们设

$$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}=\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty},$$

按顺序排列并按重数计数。利用假设 1.3，设 Ω_0 上方程 (1.1) 的特征值 μ 对应于特征函数 ϕ^e,ϕ^o，且在该序列中恰好以 λ_n 和 λ_{n+1} 出现。沿用 $[1]$, 中的技巧，令 $E\colon H^1(\Omega_0)\to H^1(\mathbb{R}^2)$ 为有界线性延拓，并定义

$$\psi_j^\epsilon=\begin{cases}E\phi_k, & \text{if } \lambda_j=\mu_k\\ \begin{cases}0, & \text{in } \Omega_0\\ \epsilon^{-1/2}\gamma_m, & \text{in } R_\epsilon\end{cases} & \text{if } \lambda_j=\tau_m\end{cases}$$

其中， ϕ_k 是在 Ω_0 中满足方程 (1.1)、关于 $L^2(\Omega_0)$归一化且特征值为 μ_k 的解，而 γ_m 是在 $[0,1]$ 中满足方程 (1.5)、关于 $L^2([0,1])$归一化且狄利克雷特征值为 τ_m的解。由于特征值 μ_k 在对称区域 $\Omega_0=\Omega_L\cup\Omega_R$的诺伊曼谱中出现偶数次，我们可以选择 ϕ_k，使它们相对于竖直线 $\{x=\frac{1}{2}\}$交替为偶函数和奇函数。对于 m 分别为奇和偶的情形，函数 γ_m 相对于 $\{x=\frac{1}{2}\}$ 分别为偶对称和奇对称。我们还选择延拓算子 E 以保持这种对称性。

令 $M(\lambda_n)$表示 λ_n 在 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$中的重数，并令 $M_e(\lambda_n)$和 $M_o(\lambda_n)$分别表示在满足 $\lambda_j=\lambda_n$的那些 j中，偶函数和奇函数 ψ_j^ϵ的个数。注意， $M_e(\lambda_n)+M_o(\lambda_n)=M(\lambda_n$。此外，根据 $[1,$ 定理 $2.2]$，Ω_ϵ 存在 $M(\lambda_n)$个特征值分支 λ_j^ϵ，其 $\lim_{\epsilon\to0}\lambda_j^\epsilon=\lambda_n$。以下引理建立了偶函数和奇函数 ψ_j^ϵ 与 Ω_ϵ中方程 (1.1) 的偶对称和奇对称特征函数之间的对应关系。

引理 2.1。对于足够小的 $\epsilon>0$，在 Ω_ϵ 中存在一个特征函数的正交归一基，使得对于每个 $\lambda_n\le\mu$，在那些特征值为 λ_j^ϵ 且满足 $\lim_{\epsilon\to0}\lambda_j^\epsilon=\lambda_n$ 的特征函数中，该基中恰有 $M_e(\lambda_n)$ 个函数关于竖直线 $\left\{x=\frac{1}{2}\right\}$ 为偶对称，且有 $M_o(\lambda_n)$ 个函数关于该竖直线为奇对称。 –

特别地，根据假设 1.3，将该引理应用于 $\lambda_n=\mu$，其中 $M_e(\mu)=M_o(\mu)=1$，便证明了e，o 记号的合理性。引理 2.1 表明，对于足够小的扰动，区域 Ω_0 的对称性会延续为 Ω_ϵ中特征函数的对称性。回顾其构造可知，颈部 R_ϵ 也具有对称性。尤为重要的是，该引理确保正交性得以保持，即

$$(\varphi^{\epsilon,e},\phi^o)_{\Omega_0}=(\varphi^{\epsilon,o},\phi^e)_{\Omega_0}=0$$

当 $\epsilon>0$ 较小时。

引理 *2.1* 的证明。对于 $\psi\in H^1(\Omega_\epsilon)$，令 $S\psi$ 表示 ψ 关于竖直直线 $x=\frac{1}{2}$ 的反射。若 φ 是 Ω_ϵ 中方程 (1.1) 的解，特征值为 λ，那么 $\varphi\pm S\varphi$ 要么恒等于零，要么是 Ω_ϵ 中方程 (1.1) 的另一个非恒零解，特征值为 λ。注意，当且仅当 $\varphi\pm S\varphi$ 中有一个恒等于零时，φ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 偶对称或奇对称。由于 Ω_ϵ 关于直线 $\{x=\frac{1}{2}\}$ 对称，我们可以同时找到 S 的一组特征基以及 Ω_ϵ 的诺伊曼特征函数。换言之，我们可以找到 Ω_ϵ 的一组诺伊曼特征函数正交归一基，其中所有函数关于 $\{x=\frac{1}{2}\}$ 都是奇对称或偶对称。 –

为了统计这些特征函数中在 $\epsilon>0$ 较小时呈偶对称或奇对称的数量，我们使用 $[1,$ 定理 $2.2]$ 的第二部分。该部分指出，若方程 (1.1) 在 Ω_ϵ 中的任一特征函数 φ^ϵ 的特征值趋于 λ_n，则它必须在 $H^1(\Omega_\epsilon)$ 中收敛到其在满足 $\lambda_j=\lambda_n$ 的那些 ψ_j^ϵ 上的投影。正交归一基中 Ω_ϵ 有 $M(\lambda_n)$ 个这样的特征函数，另有 $M(\lambda_n)$ 个这样的 ψ_j^ϵ；任何偶对称或奇对称特征函数 φ^ϵ 都自动与任何奇对称或偶对称的 ψ_j^ϵ 正交。因此，当 $\epsilon>0$ 较小时，偶对称和奇对称特征函数 φ^ϵ 的数量必定分别与 ψ_j^ϵ 中的数量相同，证明完毕。□

为理解区域扰动下的谱流，我们利用特征值的变分刻画，并考虑选取恰当测试函数所得到的瑞利商。在以下表述中，我们根据次序区分源自 μ 的特征值分支，并设 $\lambda^{\epsilon,\uparrow}\ge\lambda^{\epsilon,\downarrow}$。

引理 2.2。设 $\lambda^{\epsilon,\downarrow}$、$\lambda^{\epsilon,\uparrow}$ 表示当 $\epsilon\to0$ 时趋近于 μ 的上下特征值分支。则对于充分小的 $\epsilon>0$,

$$\lambda^{\epsilon,\downarrow}\le\mu+\epsilon\min\left\{\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0),\phi^e(p_1)\right),\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1)\right)\right\}+o(\epsilon),$$
$$\lambda^{\epsilon,\uparrow}\le\mu+\epsilon\max\left\{\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0),\phi^e(p_1)\right),\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1)\right)\right\}+o(\epsilon),$$

其中 Θ_μ 由（*1.6*）给出。

这一结果凸显了 Θ_μ 在控制特征值一阶变化中的作用。它还表明，对于任一特征值 $\lambda^\epsilon\in\{\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}\}$，$\lambda^\epsilon-\mu\le C\epsilon$。在第 3 节中，我们将引理 2.2 与一个特征值下界结合起来，该下界确定了相对于 Θ_μ的分支顺序。

引理 *2.2* 的证明。 在整个证明过程中，除非另有说明，我们均取 Ω_ϵ 上的内积为 L^2，由此诱导的范数为$\|\cdot\|$。对于其他集合 U，我们用 $(\cdot,\cdot)_U$和 $\|\cdot\|_U$分别表示 $L^2(U)$ 内积和范数。对于 $f \in H^1(\Omega_0)$，我们定义

$$E_\epsilon^\mu f = \begin{cases} f(x,y), & \text{if } (x,y) \in \Omega_0 \\ f(-x,y) + \frac{x}{\epsilon}\left(\xi_\mu^f(\epsilon) - f(-x,y)\right), & \text{if } (x,y) \in R_\epsilon,\ 0 \le x < \epsilon \\ f(2-x,y) + \frac{1-x}{\epsilon}\left(\xi_\mu^f(1-\epsilon) - f(2-x,y)\right), & \text{if } (x,y) \in R_\epsilon,\ 1-\epsilon < x \le 1 \\ \xi_\mu^f(x), & \text{if } (x,y) \in R_\epsilon,\ \epsilon \le x \le 1-\epsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

作为 f 到 Ω_ϵ 的延拓，使得 $E_\epsilon^\mu f \in H^1(\Omega_\epsilon)$。这里， ξ_μ^f 表示满足特征值μ和边界条件 $\xi_\mu^f(0) = f(p_0)$ 及 $\xi_\mu^f(1) = f(p_1)$ 的方程 (1.5) 的解。我们还设

$$\widetilde{E}_\epsilon^\mu f = \begin{cases} f(x,y), & \text{if } (x,y) \in \Omega_0 \\ \xi_\mu^f(x), & \text{if } (x,y) \in R_\epsilon \end{cases} \tag{2.2}$$

作为 f 到 Ω_ϵ 的延拓，使得 $\widetilde{E}_\epsilon^\mu f \in H^1(\Omega_0) \cap H^1(R_\epsilon)$（但不一定属于 $H^1(\Omega_\epsilon)$）。注意，$E_\epsilon^\mu f$和 $\widetilde{E}_\epsilon^\mu f$都保持关于 $\{x = \frac{1}{2}\}$ 的任意偶对称或奇对称。对于 $\phi \in \{\phi^e, \phi^o\}$，差值 $E_\epsilon^\mu \phi - \widetilde{E}_\epsilon^\mu \phi$ 非零的区域位于 R_ϵ 内，大小为 $O(\epsilon^2)$。此外，由于 $\partial\Omega_L$ 和 $\partial\Omega_R$ 分别包含以 p_0 和 p_1 为中心的线段， ϕ及其梯度在 p_0 和 p_1 的邻域内有界。因此，(2.1) 和 (2.2) 中的算子彼此非常接近，具体而言

$$\left\| E_\epsilon^\mu \phi - \widetilde{E}_\epsilon^\mu \phi \right\|_{R_\epsilon}^2 + \left\| \nabla\left(E_\epsilon^\mu \phi - \widetilde{E}_\epsilon^\mu \phi \right) \right\|_{R_\epsilon}^2 = O(\epsilon^2). \tag{2.3}$$

假设在 $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 中存在 $n-1$ 个 $\lambda_j < \mu$条目，因此由 [1, 定理 2.2]可知， $\lambda^{\epsilon,\downarrow}$ 是 Ω_ϵ 在 $\epsilon > 0$较小时的第 n个特征值。令 $\chi_\epsilon^e = E_\epsilon^\mu \phi^e$ 和 $\chi_\epsilon^o = E_\epsilon^\mu \phi^o$ 分别为分离区域 Ω_0上的偶对称和奇对称特征函数的延拓。存在非零函数

$$f^e \in W^e := \operatorname{span}\{\psi_1^\epsilon, \ldots, \psi_{n-1}^\epsilon, \chi_\epsilon^e\}$$

$$f^o \in W^o := \operatorname{span}\{\psi_1^\epsilon, \ldots, \psi_{n-1}^\epsilon, \chi_\epsilon^o\}$$

使得 f^e， f^o都与在 Ω_ϵ中满足 (1.1) 的前 $n-1$个特征函数 φ_1^ϵ、.....、 φ_{n-1}^ϵ正交。这些函数存在是因为 $\dim\ W^e = \dim\ W^o = n$。于是

$$\lambda^{\epsilon,\downarrow} \le \min\left\{ \frac{\|\nabla f^e\|^2}{\|f^e\|^2}, \frac{\|\nabla f^o\|^2}{\|f^o\|^2} \right\}. \tag{2.4}$$

因为 f^e， f^o都可作为瑞利商的测试函数。

令 $f \in \{f^e, f^o\}$为使 (2.4) 取最小值的函数，并令 $\chi_\epsilon \in \{\chi_\epsilon^e, \chi_\epsilon^o\}$、 $\phi \in \{\phi^e, \phi^o\}$具有 f的指标。我们可以写成

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \psi_i^\epsilon + a_n \chi_\epsilon$$

因此

$$\|\nabla f\|^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow} \|f\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{Q}_\epsilon \mathbf{a} \ge 0 \tag{2.5}$$

对于$\mathbf{a}^T = (a_1, \ldots, a_n)$以及$\mathbf{Q}_\epsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$由（$\mathbf{Q}_\epsilon$）$_{ij} = q_{i,j}$给出，其中

$$\begin{aligned} q_{i,j} &= q_{j,i} = \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\psi_j^\epsilon\right) - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \psi_j^\epsilon\right) \quad \text{for} \quad 1 \le i,j \le n-1 \\ q_{i,n} &= q_{n,i} = \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\chi_\epsilon\right) - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \chi_\epsilon\right) \quad \text{for} \quad 1 \le i \le n-1 \\ q_{n,n} &= \|\nabla\chi_\epsilon\|^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\|\chi_\epsilon\|^2. \end{aligned}$$

根据 [1, 引理 3.9]，我们有

$$\left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\psi_j^\epsilon\right) = O(\epsilon^{1/2}) \quad \text{and} \quad \left(\psi_i^\epsilon, \psi_j^\epsilon\right) = O(\epsilon^{1/2})$$

对于 $i \neq j$。此外，由于 R_ϵ 在大小上是 O（ϵ），

$$||\nabla\psi_i^\epsilon||^2 = \lambda_i + O(\epsilon) \quad \text{and} \quad ||\psi_i^\epsilon||^2 = 1 + O(\epsilon).$$

利用这些结果，我们发现 $\mathbf{Q}_\epsilon$ 的对角元近似于谱隙

$$q_{i,i} = \lambda_i - \lambda^{\epsilon,\downarrow} + O(\epsilon) \tag{2.6}$$

对于 $i = 1,\ldots,n-1$。当 ϵ 足够小时，对 i 一致地，这些量均为负，因为 $\lim_{\epsilon\to 0}\lambda^{\epsilon,\downarrow} = \mu = \lambda_n > \lambda_i$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$。与此同时，

$$q_{i,j} = O(\epsilon^{1/2}) \quad \text{for} \quad i \neq j$$

其中 $1 \leq i,j \leq n-1$。最后，对于 $1 \leq i \leq n-1$，我们回顾 $\chi_\epsilon = E_\epsilon^\mu\phi$，因此

$$\begin{aligned} q_{i,n} &= (\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\chi_\epsilon) - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \chi_\epsilon\right) \\ &= \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\widetilde{E}_\epsilon^\mu\phi\right) + \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\left(E_\epsilon^\mu - \widetilde{E}_\epsilon^\mu\right)\phi\right)_{R_\epsilon} - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \widetilde{E}_\epsilon^\mu\phi\right) - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \left(E_\epsilon^\mu - \widetilde{E}_\epsilon^\mu\right)\phi\right)_{R_\epsilon} \\ &= \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\widetilde{E}_\epsilon^\mu\phi\right) - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \widetilde{E}_\epsilon^\mu\phi\right) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

~利用 (2.3) 中的估计以及 $E_\epsilon^\mu\phi = E_\epsilon^\mu\phi$ 在 Ω_0 中这一事实。我们可以将 Ω_ϵ 上的内积分拆分为 Ω_0 和 R_ϵ 上的积分。注意到，由于分离区域上的特征函数具有正交性，Ω_0 上的积分恒为零。因此，

$$q_{i,n} = \left(\nabla\psi_i^\epsilon, \nabla\xi_\mu^\phi\right)_{R_\epsilon} - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left(\psi_i^\epsilon, \xi_\mu^\phi\right)_{R_\epsilon} + O(\epsilon) = (\mu - \lambda^{\epsilon,\downarrow})\left(\psi_i^\epsilon, \xi_\mu^\phi\right)_{R_\epsilon} + O(\epsilon) = o(\epsilon^{1/2})$$

通过使用分部积分。上面的最后一个等式依据的是这一事实：$\lim_{\epsilon\to 0}\lambda^{\epsilon,\downarrow} = \mu$.

由 (2.5)，存在 $\mathbf{Q}_\epsilon$ 的一个特征值 $\mathbf{q}_\epsilon \geq 0$，即

$$\det\left(\mathbf{Q}_\epsilon - \mathbf{q}_\epsilon I\right) = 0.$$

沿最后一列展开 $\mathbf{Q}_\epsilon - \mathbf{q}_\epsilon I$ 的行列式，可得 $q_{n,n} = \mathbf{q}_\epsilon + o(\epsilon)$。应用 (2.3)，得到

$$\begin{aligned} q_{n,n} &= \|\nabla\chi_\epsilon\|^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\|\chi_\epsilon\|^2 = \|\nabla E_\epsilon^\mu\phi\|^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\|E_\epsilon^\mu\phi\|^2 \\ &= \left(\|\nabla\phi\|_{\Omega_0}^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\|\phi\|_{\Omega_0}^2\right) + \left(\left\|\nabla\xi_\mu^\phi\right\|_{R_\epsilon}^2 - \lambda^{\epsilon,\downarrow}\left\|\xi_\mu^\phi\right\|_{R_\epsilon}^2\right) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

再次将 Ω_ϵ 上的积分拆分为 Ω_0 和 R_ϵ 上的积分，并用 $\widetilde{E}_\epsilon^\mu\phi$ 替换 $E_\epsilon^\mu\phi$。由于 ξ_μ^ϕ 仅是 x 的函数，我们得到

$$\begin{aligned} q_{n,n} &= \mu - \lambda^{\epsilon,\downarrow} + \int_0^1\int_0^{\epsilon g(x)}\left(\left|\nabla\xi_\mu^\phi\right|^2 - \lambda^\epsilon\left|\xi_\mu^\phi\right|^2\right)dydx + o(\epsilon) \\ &= \mu - \lambda^{\epsilon,\downarrow} + \epsilon\int_0^1 g(x)\left(\left|\frac{d}{dx}\xi_\mu^\phi\right|^2 - \lambda^\epsilon\left|\xi_\mu^\phi\right|^2\right)dx + o(\epsilon) \\ &= \mu - \lambda^{\epsilon,\downarrow} + \epsilon\Theta_\mu\left(\phi(p_0), \phi(p_1)\right) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

其中 Θ_μ 在 (1.6) 中给出。由于 $\mathbf{q}_\epsilon \geq 0$ 和 $q_{n,n} = \mathbf{q}_\epsilon + o(\epsilon)$，这意味着下分支特征值满足以下上界：

$$\lambda^{\epsilon,\downarrow} \leq \mu + \epsilon\min\left\{\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0), \phi^e(p_1)\right), \Theta_\mu\left(\phi^o(p_0), \phi^o(p_1)\right)\right\} + o(\epsilon).$$

现在我们确定上分支特征值 $\lambda^{\epsilon,\uparrow}$ 的一个上界。首先假设 φ_n^ϵ 是偶对称的。令 $\psi_{i_1}^\epsilon,\ldots,\psi_{i_m}^\epsilon$ 中相对于 $\{x=\frac{1}{2}\}$ 为奇对称的那些为 $i_m \le n-1$，其中 ψ_j^ϵ。根据引理 2.1，当 $\epsilon>0$ 足够小时，Ω_ϵ 中恰有 m 个相对于 $\{x=\frac{1}{2}\}$ 为奇对称的特征函数，其特征值满足 $\lim_{\epsilon\to 0}\lambda_j^\epsilon<\mu$。我们将 Ω_ϵ 的这些特征函数记为 $\varphi_{i_1}^\epsilon,\ldots,\varphi_{i_m}^\epsilon$。于是，存在一个非零函数

$$f\in W':=\operatorname{span}\{\psi_{i_1}^\epsilon,\ldots,\psi_{i_m}^\epsilon,\chi_\epsilon^o\}$$

使得 f与这些特征函数 $\varphi_{i_1}^\epsilon$、……、$\varphi_{i_m}^\epsilon$正交。这个函数存在，因为 $\dim W'=m+1$。利用区域的对称性，f 也与 Ω_ϵ中满足 (1.1) 的所有偶特征函数正交，因此 f与 Ω_ϵ中的前 n个特征函数 φ_1^ϵ、……、φ_n^ϵ 正交。与之前相同，f 的瑞利商给出了 $\lambda^{\epsilon,\uparrow}$的一个上界。

我们构造一个大小为 $(m+1)\times(m+1)$ 的矩阵 $\mathbf{Q}_\epsilon$，使得

$$f=\sum_{j=1}^m a_j\psi_{i_j}^\epsilon+a_{m+1}\chi_\epsilon^o,\qquad \|\nabla f\|^2-\lambda^{\epsilon,\uparrow}\|f\|^2=\mathbf{a}^T\mathbf{Q}_\epsilon\mathbf{a}\ge 0$$

其中 $\mathbf{a}^T=(a_1、\ldots\ldots、a_{m+1})$。通过这种方式构造 f，我们避免在 $\mathbf{Q}_\epsilon$中体现 (2.6) 里的谱隙 $\lambda^{\epsilon,\uparrow}-\lambda^{\epsilon,\downarrow}$。相反，矩阵 $\mathbf{Q}_\epsilon$ 在所有对角项和非对角项上具有与上述相同的界（特别是因为对于 $1\le j\le m-1$，$\lim_{\epsilon\to 0}\lambda^{\epsilon,\uparrow}=\mu>\lambda_{i_j}$），但现在我们得到

$$-o(\epsilon)\le\ q_{m+1,m+1}=\|\nabla\chi_\epsilon^o\|^2-\lambda^{\epsilon,\uparrow}\|\chi_\epsilon^o\|^2=\mu-\lambda^{\epsilon,\uparrow}+\epsilon\Theta_\mu(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1))+o(\epsilon),$$

给出

$$\lambda^{\epsilon,\uparrow}\le\mu+\epsilon\Theta_\mu(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1))+o(\epsilon).$$

若相反，φ_n^ϵ 是奇对称的，则我们可以得到类似结果，只需将 ϕ^o 替换为 ϕ^e，因此必有

$$\lambda^{\epsilon,\uparrow}\le\mu+\epsilon\max\left\{\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0),\phi^e(p_1)\right),\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0),\phi^o(p_1)\right)\right\}+o(\epsilon),$$

证明完毕。 □

3. 特征值下界

本节旨在确定特征值分支 $\lambda^{\epsilon,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,o}$ 的下界。结合第 2 节的结果，这些下界将给出定理 1.8 中一阶特征值变化的精确公式。随后，我们将利用这些下界估计相应的特征函数，并证明定理 1.11。为此，我们首先给出一个估计，考察分离区域 $\Omega_0=\Omega_L\cup\Omega_R$上扰动特征函数的正交投影。本节的分析沿用 [1, 第 5], 节的方法；该节同样研究了 μ 是 $\Omega_0=\Omega_L\cup\Omega_R$的单诺伊曼特征值的情形。

命题 3.1。令 $\updownarrow$ 表示 $\uparrow$或 $\downarrow$。若定义

$$f_\epsilon^\updownarrow=\varphi^{\epsilon,\updownarrow}-\left(\varphi^{\epsilon,\updownarrow},\phi^e\right)_{\Omega_0}\phi^e-\left(\varphi^{\epsilon,\updownarrow},\phi^o\right)_{\Omega_0}\phi^o,$$

then

$$\left\|f_\epsilon^\updownarrow\right\|_{\Omega_0}^2=o\left(\left\|\nabla f_\epsilon^\updownarrow\right\|_{\Omega_0}^2\right).$$

请注意，本命题中的内积是在分离区域 Ω_0, 上取的，特征函数 ϕ^e，ϕ^o 定义于此。函数 $f_\epsilon^\updownarrow$经过构造，与特征函数 ϕ^e，ϕ^o 正交，

相对于 $L^2(\Omega_0)$ 内积而言。因此，命题 3.1 描述了 $\varphi^{\epsilon,\,e}$，$\varphi^{\epsilon,\,o}$ 在特征基 $\{\phi^e,\phi^o\}$上的正交投影的狄利克雷型的渐近行为。命题 3.1 的证明可直接由命题 5.1]得出。

此后，设 $\varphi^\epsilon \in \{\varphi^{\epsilon,e},\varphi^{\epsilon,o}\}$ 在 Ω_ϵ 中满足方程 (1.1)，对应特征值为 $\lambda^\epsilon \in \{\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}\}$。本节以下陈述均与标签无关。我们发现，当 ϵ足够小时，扰动特征函数 φ^ϵ与方程 (1.5) 的一个解在颈部 R_ϵ上的延拓十分相似。设 $M:\ H^1(R_\epsilon) \to H^1((0,1))$ 为如下算子

$$Mf(x) = \frac{1}{\epsilon g(x)} \int_0^{\epsilon g(x)} f(x,y)dy \tag{3.1}$$

该算子对 R_ϵ上的函数沿 y 方向取平均。若设 ξ_ϵ 在 (0,1) 上满足斯图姆–刘维尔方程 (1.5)，对应特征值为 λ^ϵ，且边界条件为

$$\xi_\epsilon(0) = T_L\varphi^\epsilon, \quad \text{and} \quad \xi_\epsilon(1) = T_R\varphi^\epsilon \tag{3.2}$$

其中 T_L，T_R分别表示对通道左右端点处的函数取平均，即 $T_Lf = Mf(0)$ 和 $T_Rf = Mf(1)$，其中 M 如 (3.1) 所示，则 ξ_ϵ在 R_ϵ中与 φ^ϵ十分接近，具体表述如下。

命题 3.2. 与 *(1.4)* 中一样，令$\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ 表示 *(1.5)* 的狄利克雷特征值。在假设 *1.3* 下，存在一个正的常数 C，使得

$$\|\varphi^\epsilon - \xi_\epsilon\|_{R_\epsilon}^2 \le C\epsilon^2 \left\|\frac{\partial\varphi^\epsilon}{\partial y}\right\|_{R_\epsilon}^2 \left(1 + \sum_{i=1}^\infty \frac{\tau_i}{(\lambda^\epsilon - \tau_i)^2}\right).$$

假设 1.3 中，μ 不是 (1.5) 的狄利克雷特征值，这使得命题 3.2 中的不等式保持有限。 [1, 定理 2.2] 中的估计保证了 (1) $\lambda^\epsilon - \mu = o$，因此当 ϵ充分小时，λ^ϵ 与 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$保持正距离。命题 3.2 的证明可由 [1, 命题 5.3]的证明直接推出。结合起来，命题 3.1 和 3.2 足以确定 λ^ϵ的一个下界，证明策略与 [1, 第 5]节情形 (a) 中相同。与引理 2.2 不同，以下论述根据特征函数对称性区分不同分支，这一点已由引理 2.1 确立。

引理 3.3。 令 $\lambda^\epsilon \in \{\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}\}$ 表示趋近于 μ （当 $\epsilon \to 0$时）的两个特征值分支中的任意一个。当 ϵ足够小时，

$$\lambda^\epsilon \ge \mu + \epsilon\Theta_\mu\left(\phi(p_0),\phi(p_1)\right) + o(\epsilon)$$

其中，Θ_μ 由 *(1.6)* 给出，$\phi \in \{\phi^e,\phi^o\}$ 与 λ^ϵ的指标相匹配。

结合引理 2.2，该结果将 (1.6) 中的 Θ_μ 确认为一阶特征值变化，并证明了定理 1.8 中的估计。引理 3.3 的证明也为建立定理 1.11 中的特征函数估计奠定了框架。

引理 *3.3* 的证明。 在假设 1 下。3, [1, 命题 5.4] 指出，存在正的常数C_1，C_2 使得

$$\begin{aligned}\lambda^\epsilon \ge \|\nabla\varphi^\epsilon\|_{\Omega_0}^2 + \lambda^\epsilon\|\varphi^\epsilon\|_{R_\epsilon}^2 + C_1\left\|\frac{\partial\varphi^\epsilon}{\partial y}\right\|_{R_\epsilon}^2 + \left\|\frac{\partial\varphi^\epsilon}{\partial x} - \xi_\epsilon'\right\|_{R_\epsilon}^2 \\ - \lambda^\epsilon\|\varphi^\epsilon - \xi_\epsilon\|_{R_\epsilon}^2 - C_2\epsilon^3\int_0^1 g\left|\xi_\epsilon'\right|^2 + \epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们利用命题 3.2 以及 $\|\varphi^\epsilon\|^2{}_{\Omega_\epsilon} = 1$ 这一事实，将（3.3）改写为

$$0 \geq \|\nabla\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} - \lambda^\epsilon \|\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} + C_1 \left\| \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial y} \right\|^2_{R_\epsilon} + \left\| \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x} - \xi'_\epsilon \right\|^2_{R_\epsilon} - C_2\epsilon^3 \int_0^1 g\,|\xi'_\epsilon|^2 + \epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right).$$

对于某个新的正常数 C_1。为便于记号，可将其简化为

$$0 \geq \|\nabla\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} - \lambda^\epsilon \|\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} - C_2\epsilon^3 \int_0^1 g\,|\xi'_\epsilon|^2 + \epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right) + R\left(\varphi^\epsilon\right) \tag{3.4}$$

其中 $R(\varphi^\epsilon)$表示由下式给出的非负余项

$$R\left(\varphi^\epsilon\right) := C_1 \left\| \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial y} \right\|^2_{R_\epsilon} + \left\| \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x} - \xi'_\epsilon \right\|^2_{R_\epsilon} \geq 0,$$

其中回顾一下，ξ_ϵ 满足 (1.5)，其特征值为 λ^ϵ，边界条件为 (3.2)。

令 $a = (\varphi^\epsilon, \phi^e)_{\Omega_0}$ 和 $b = (\varphi^\epsilon, \phi^o)_{\Omega_0}$，使得

$$\begin{aligned}
\|\nabla\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} &= \|\nabla\varphi^\epsilon - a\nabla\phi^e - b\nabla\phi^o\|^2_{\Omega_0} + \mu\left(|a|^2 + |b|^2\right), \\
\|\varphi^\epsilon\|^2_{\Omega_0} &= \|\varphi^\epsilon - a\phi^e - b\phi^o\|^2_{\Omega_0} + \left(|a|^2 + |b|^2\right).
\end{aligned}$$

根据 [1, 定理 2.2]，系数满足 $|a|^2+|b|^2 = 1+o(1)$，不过我们会在本证明后续部分进一步改进这一估计。命题 3.1 指出

$$\|\varphi^\epsilon - a\phi^e - b\phi^o\|^2_{\Omega_0} = o\left(\|\nabla\varphi^\epsilon - a\nabla\phi^e - b\nabla\phi^o\|^2_{\Omega_0}\right)$$

因此，(3.4) 表明

$$\begin{aligned}
(\lambda^\epsilon - \mu)\left(1 + o(1)\right) \geq \|\nabla\varphi^\epsilon - a\nabla\phi^e - b\nabla\phi^o\|^2_{\Omega_0}\left(1 + o(1)\right) - C_2\epsilon^3 \int_0^1 g\,|\xi'_\epsilon|^2 \\
+ \epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right) + R\left(\varphi^\epsilon\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

为汇总非负项，我们令

$$\widetilde{R}\left(\varphi^\epsilon\right) := \|\nabla\varphi^\epsilon - a\nabla\phi^e - b\nabla\phi^o\|^2_{\Omega_0}\left(1 + o(1)\right) + R\left(\varphi^\epsilon\right) \geq 0 \tag{3.6}$$

于是 (3.5) 进一步化简为

$$(\lambda^\epsilon - \mu)\left(1 + o(1)\right) \geq \epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right) - C_2\epsilon^3 \int_0^1 g\,|\xi'_\epsilon|^2 + \widetilde{R}\left(\varphi^\epsilon\right). \tag{3.7}$$

我们声称，当 $\epsilon \to 0$ 时，$T_L\varphi^\epsilon \to a\phi^e(p_0) + b\phi^o(p_0)$ 且 $T_R\varphi^\epsilon \to a\phi^e(p_1) + b\phi^o(p_1)$。若非如此，则 [1, 引理 3.6]将推出

$$\epsilon\Theta_{\lambda^\epsilon}\left(T_L\varphi^\epsilon, T_R\varphi^\epsilon\right) - C_2\epsilon^3 \int_0^1 g\,|\xi'_\epsilon|^2 + \widetilde{R}\left(\varphi^\epsilon\right)$$

有一个 $|\ln\epsilon|^{-1}$ 的倍数作为下界。因此，由 (3.7) 可得，$\lambda^\epsilon - \mu$同样有一个 $|\ln\epsilon|^{-1}$ 的倍数作为下界。然而，引理 3.3 给出的特征值上界表明，$\lambda^\epsilon - \mu$ 有一个 ϵ 的倍数作为上界，这就产生了矛盾。因此，必有

$$\begin{aligned}
T_L\varphi^\epsilon &\to a\phi^e(p_0) + b\phi^o(p_0) \\
T_R\varphi^\epsilon &\to a\phi^e(p_1) + b\phi^o(p_1)
\end{aligned}$$

如 $\epsilon \to 0$。到目前为止，除了估计 $|a|^2 + |b|^2 = o(1)$ 外，我们还无法确定 a，b，但 Ω_ϵ 的对称性意味着只有一个可能非零，正如引理 2.1 所示。更确切地说，取 $\varphi^\epsilon = \varphi^{\epsilon,\,e}$ 可得 $b = 0$

而取 $\varphi^{\epsilon}=\varphi^{\epsilon,\ o}$ 可得 $a=0$。根据对称性区分特征值分支后，方程 (3.7) 因此给出下界

$$\begin{aligned}\lambda^{\epsilon,e}&\geq\mu+\epsilon\Theta_{\mu}\left(\phi^{e}(p_0),\phi^{e}(p_1)\right)+\widetilde{R}\left(\varphi^{\epsilon,e}\right)+o(\epsilon),\\ \lambda^{\epsilon,o}&\geq\mu+\epsilon\Theta_{\mu}\left(\phi^{o}(p_0),\phi^{o}(p_1)\right)+\widetilde{R}\left(\varphi^{\epsilon,0}\right)+o(\epsilon).\end{aligned}\tag{3.8}$$

结合第 2 节给出的特征值上界，式 (3.8) 中的不等式确定了特征值变分的主导项，并完成了定理 1.8 的证明。此外，这些不等式还表明，非负余项必须满足

$$\widetilde{R}\left(\varphi^{\epsilon,e}\right)=o(\epsilon)\quad\text{and}\quad\widetilde{R}\left(\varphi^{\epsilon,o}\right)=o(\epsilon),\tag{3.9}$$

由此我们可以近似特征函数 $\varphi^{\epsilon,\ e}$、$\varphi^{\epsilon,\ o}$，并再次依照[1,第 5] 节证明定理 1.11。□

定理 1.11 中颈部 R_{ϵ} 上的特征函数估计由命题 3.2、式 (3.9) 以及[1, 引理 3.1]推出；该引理表明，式 (1.5) 的解关于其边界值连续。具体而言，因为 R_{ϵ} 的面积为 $O(\epsilon)$,

$$\left\|\varphi^{\epsilon,e}-\xi_{\mu}^{\phi^{e}}\right\|_{H^{1}(R_{\epsilon})}^{2}\leq2\left\|\varphi^{\epsilon,e}-\xi_{\epsilon}^{e}\right\|_{H^{1}(R_{\epsilon})}^{2}+2\left\|\xi_{\epsilon}^{e}-\xi_{\mu}^{\phi^{e}}\right\|_{H^{1}(R_{\epsilon})}^{2}=o(\epsilon)$$

其中，$\xi_{\mu}^{\phi^{e}}$ 是满足式 (1.5) 的解，其特征值为 μ，边界条件为 $\xi_{\mu}^{\phi^{e}}(0)=\phi^{e}(p_0)$ 和 $\xi_{\mu}^{\phi^{e}}(1)=\phi^{e}(p_1)$。同时，由于式 (3.6) 中的各项分别均为非负，式 (3.9) 意味着

$$\left\|\nabla\left(\varphi^{\epsilon,e}-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)_{\Omega_0}\phi^{e}\right)\right\|_{\Omega_0}^{2}=o(\epsilon),\tag{3.10}$$

因此，结合命题 3.1,

$$\left\|\varphi^{\epsilon,e}-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)_{\Omega_0}\phi^{e}\right\|_{H^{1}(\Omega_0)}^{2}=o(\epsilon).\tag{3.11}$$

为完成定理 1.11 的证明，我们说明如何利用这一结果在 Ω_0 上建立特征函数估计。利用三角不等式, (3.11) 表明存在某个常数 C（该常数可能随行而变），使得

$$\|\varphi^{\epsilon,e}-\phi^{e}\|_{H^{1}(\Omega_0)}^{2}\leq C\left(1-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)\right)^{2}+o(\epsilon).\tag{3.12}$$

因为 $\|\varphi^{\epsilon,\ e}\|^{2}{}_{\Omega_{\epsilon}}=1$ 且 $\left(\varphi^{\epsilon,\ e},\ \phi^{e}\right)=1+o(1)$，所以

$$\begin{aligned}1-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)\leq C\left(1-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)^{2}\right)&=C\left(\left\|\varphi^{\epsilon,e}-\left(\varphi^{\epsilon,e},\phi^{e}\right)\phi^{e}\right\|_{\Omega_0}^{2}+\left\|\varphi^{\epsilon,e}\right\|_{R_{\epsilon}}^{2}\right)\\&\leq C\left(\left\|\varphi^{\epsilon,e}-\xi_{\mu}^{\phi^{e}}\right\|_{R_{\epsilon}}^{2}+\left\|\xi_{\mu}^{\phi^{e}}\right\|_{R_{\epsilon}}^{2}\right)+o(\epsilon).\end{aligned}$$

此前在 R_{ϵ} 上建立的特征函数估计，以及通道的大小为 $O(\epsilon)$这一事实，因此意味着 $\left(\varphi^{\epsilon,\ e},\ \phi^{e}\right)=1+O(\epsilon)$, 从而 (3.12) 给出了 Ω_0 上所需的偶特征函数估计。对 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 进行同样的分析即可完成定理 1.11 的证明。

4. Eigenvalue Branch Order

本节通过建立定理 1.8 中的一阶特征值变化与定理 1.11 中 Sturm-Liouville特征函数 $\xi_{\mu}^{\phi^{e}}$，$\xi_{\mu}^{\phi^{o}}$ 所产生的零点个数之间的联系，确定小 ϵ 时特征值分支 $\lambda^{\epsilon,e},\lambda^{\epsilon,o}$ 的排序。特征函数的零点个数取决于特征值 μ，可通过将 μ 与 (1.5) 的狄利克雷特征值进行比较来量化。命题 4.5 对这些结果作了精确表述。从现在起，我们同时采用

假设 1.3 和 1.4，特别是这确保了 μ 不是 (1.5) 的狄利克雷特征值，且 Sturm-Liouville特征函数 $\xi_\mu^{\phi^e}$,$\xi_\mu^{\phi^o}$ 不恒为零。

为方便记号，令 $\xi^e = \xi_\mu^{\phi^e}$ 和 $\xi^o = \xi_\mu^{\phi^o}$ 为满足式 (1.5) 中微分方程、对应特征值 μ 的特征函数。注意，ξ^e 是偶对称的，ξ^o 是奇对称的，并满足边界条件

$$\xi^e(0) = \xi^e(1) = \phi^e(p_0),$$
$$\xi^o(0) = -\xi^o(1) = \phi^o(p_0).$$

利用对称性、分部积分以及 ξ^e 和 ξ^o 所满足的方程，我们可以将特征值变分 (1.6) 表示为 (0，1) 任一端点处特征函数行为的形式。为保持一致，我们写作

$$\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0), \phi^e(p_1)\right) = -2g(0)\xi^e(0)\xi^{e\prime}(0) \quad \text{and} \quad \Theta_\mu\left(\phi^o(p_0), \phi^o(p_1)\right) = -2g(0)\xi^o(0)\xi^{o\prime}(0). \tag{4.1}$$

注意，当 $\mu = 0$ 时，偶特征函数 ξ^e 是常数函数，且 $\Theta_0\left(\phi^e(p_0)\ \phi^e(p_1)\right) = 0$。同时，我们可以将奇特征函数 ξ^o 表示为以下函数的倍数

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{g(t)} dt, \tag{4.2}$$

这意味着 $\Theta_0\left(\phi^o(p_0)\ \phi^o(p_1)\right)$ 为正，并且谱流会在该区域扰动下发生分岔。对于更大的特征值，我们发现这种特征值分支的分裂仍然存在。

注4.1。当 $g \equiv 1$ 时，特征函数 ξ^e、ξ^o 对所有 μ 都是显式的。在我们的假设下，根据（*4.1*）中的简化表达式，我们发现，对于这一特定的边界函数，Θ_μ（ϕ^e（p_0） ϕ^e（p_1））和 Θ_μ（ϕ^o（p_0） ϕ^o（p_1））在 μ 为正时符号相反。

已知 [11, 第 8] 章中，ξ^e、ξ^o 的零点交错；由对称性可知，它们的零点数必须恰好相差一个。此外，由于 ξ^e 和 ξ^o 满足非退化Sturm-Liouville方程，它们的零点都是单零点，并且 $\xi^{e\prime}$、$\xi^{o\prime}$ 在这些零点处不为零。因此，由于 ξ^e(0) 与 ξ^e(1) 同号，ξ^e 必须有偶数个零点；类似地，ξ^o 必须有奇数个零点。下文分别将 N_e、N_o 记为 ξ^e、ξ^o 在 (0，1) 中的零点数。

引理 4.2. 令 k 为满足 $\tau_k < \mu$的最大整数；若 $0 \le \mu < \tau_1$，则 $k = 0$，其中 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 *(1.5)* 的狄利克雷特征值。于是

$$N_e = \begin{cases} k, & k\ even \\ k+1, & k\ odd \end{cases} \qquad and \qquad N_o = \begin{cases} k+1, & k\ even \\ k, & k\ odd. \end{cases}$$

.

通过将特征值 μ 与狄利克雷谱进行比较，该结果由此精确给出了特征函数 ξ^e, ξ^o 在区间 (0,1) 上产生的节点域数量。回顾一下，在假设 1.3 下，μ 与 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$不相交。作为一个特例，若 $\mu = 0$，则 ξ^e 是常数函数，其节点集为空；而由 (4.2) 可知，函数 ξ^o 在 $x = \frac{1}{2}$ 处有一个零点。由于边界函数g 为正且有正的下界，当 $\mu = 0$时，这是 ξ^o 在 (0,1) 内唯一的零点。 –

引理 *4.2* 的证明。设 γ_n 是式 (1.5) 的一个狄利克雷特征函数，其特征值为 τ_n。则 γ_k 和 γ_{k+1} 分别在 (0，1) 内有 $k-1$ 个和 k 个内部零点，从而分别将 $[0,1]$ 分成 k 个和 $k+1$ 个节点域。

首先，假设 $\mu < \tau_{k+1}$，其中 $k \ge 0$。将斯图姆比较定理 [11] 应用于 ξ^e，ξ^o，并结合 γ_{k+1}，可知 γ_{k+1} 在 ξ^e的每个内部节点域中都有一个零点，ξ^o。这不包括 (0，1) 两端的区间，因为 ξ^e，ξ^o 在端点处不为零。因此，

$$N_e - 1, N_o - 1 \le k.$$

如果 $0 \leq \mu < \tau_1$，使得 $k = 0$，那么可立即推出 $N_e = 0$ 和 $N_o = 1$，因为这两个量均非负，而 N_e 是偶对称的，N_0 是奇对称的。另一方面，如果对某个 $k \geq 1$有 $\tau_k < \mu$，将斯图姆比较定理应用于 ξ^e，ξ^o，并结合 γ_k，可知 ξ^e 和 ξ^o 在 γ_k的每个节点域中都有一个零点。因此，

$$N_e, N_o \geq k.$$

再次利用 N_e 为偶对称、N_o 为奇对称这一事实，即可得到所需结果 . □

引理 4.2 展示了 ξ^e, ξ^o 的节点集如何受特征值 μ支配。为了确定从 μ出发的特征值分支 $\lambda^{\epsilon,e}, \lambda^{\epsilon,o}$ 如何分裂，我们需要考虑式（1.6）中由Θ_μ 给出的变化。

引理4.3。 $N_e > N_o$ 当且仅当 $\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0)\ \phi^e(p_1)\right) > \Theta_\mu\left(\phi^o(p_0)\ \phi^o(p_1)\right)$。

结合引理 4.2，这一结论使我们能够仅凭特征值 μ的信息区分上、下特征值分支，并且与注4.1保持一致。在第5节中，我们利用定理 1.11 比较 $\varphi^{\epsilon,e}, \varphi^{\epsilon,o}$ 在 R_ϵ 中分别产生的节点域数量与 N_e, N_o产生的节点域数量，从而将引理4.3扩展为关于 Ω_ϵ中节点域的结论。

注4.4。 由于 N_e 和 N_o 的奇偶性不同，引理*4.3*表明，$\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0)\ \phi^e(p_1)\right)$与 $\Theta_\mu\left(\phi^o(p_0)\ \phi^o(p_1)\right)$ 至多有一个为零。当且仅当 μ 是方程(1.5)的诺伊曼特征值时，才会出现这种情况。

引理*4.3*的证明。 不失一般性，假设 $\xi^e(0) = \xi^o(0)$为正。在 ξ^e, ξ^o之间，在该区间内零点最多的函数，恰好是离原点最近处有零点的那个函数。令$x_0 \in (0,1)$表示 ξ^e, ξ^o 的最小零点，使得两个函数在 $[0, x_0)$上都为正。由于每个函数都满足斯图姆–刘维尔微分方程，我们可以写出

$$-\left(g\xi^{e\prime}\right)'\xi^o = \mu g\xi^e\xi^o \quad \text{and} \quad -\left(g\xi^{o\prime}\right)'\xi^e = \mu g\xi^o\xi^e.$$

在$(0, x_0)$上分部积分，得到：

$$W\left(\xi^e, \xi^o\right)(x_0) = \frac{1}{2g(x_0)}\left(\Theta_\mu\left(\phi^e(p_0), \phi^e(p_1)\right) - \Theta_\mu\left(\phi^o(p_0), \phi^o(p_1)\right)\right) \tag{4.3}$$

其中，$W(\xi^e, \xi^o)(x_0)$表示 ξ^e, ξ^o 在 x_0处的朗斯基行列式。如果 $\xi^e(x_0) = 0$，那么 $\xi^{e\prime}(x_0) < 0$，且 $W(\xi^e, \xi^o)(x_0)$为正。或者，如果 $\xi^o(x_0) = 0$，那么$\xi^{o\prime}(x_0) < 0$，且 $W(\xi^e, \xi^o)(x_0)$为负，这意味着

$$N_e > N_o \quad \text{if and only if} \quad \xi^e(x_0) = 0 \quad \text{if and only if} \quad W\left(\xi^e, \xi^o\right)(x_0) > 0.$$

由于 g 为正，(4.3) 得证。 □

重要的是，假设 1.3 和 1.4 足以保证 $\lambda^{\epsilon,\,e}$、$\lambda^{\epsilon,\,o}$ 对应的一阶特征值变化 (1.6) 彼此不相等。结合引理 4.2 和 4.3，可立即得到以下结果，该结果突出了特征值 μ 相对于 (1.5) 的狄利克雷特征值的位置如何决定 (1.6) 中的分支变化。

命题 4.5。 设 N_e、N_o 分别表示 ξ^e 和 ξ^o 在 $(0,\ 1)$中的零点数，并设 $k \geq 1$ 满足$\tau_k < \mu < \tau_{k+1}$（如果 $\mu < \tau_1$，则为 $k = 0$）。那么，

(i) 如果 k 为偶对称，则

$$N_e = k, \quad N_o = k+1, \quad \textit{and} \quad \Theta_\mu(\phi^e(p_0), \phi^e(p_1)) < \Theta_\mu(\phi^o(p_0), \phi^o(p_1));$$

(ii) 若 k 是奇对称的，则

$$N_e = k+1, \quad N_o = k, \quad \textit{and} \quad \Theta_\mu(\phi^e(p_0), \phi^e(p_1)) > \Theta_\mu(\phi^o(p_0), \phi^o(p_1)).$$

令 index(μ, Ω_L) 表示 Ω_L 的诺伊曼谱中特征值 μ 的指标；令 index($\lambda^{\epsilon,e}$,Ω_ϵ)、index($\lambda^{\epsilon,o}$,Ω_ϵ) 分别表示 Ω_ϵ 的诺伊曼谱中特征值 $\lambda^{\epsilon,e}$、 $\lambda^{\epsilon,o}$ 的指标。正如注 1.9 所强调的，定理 1.8、命题 4.5 和 [1, 定理 2.2]共同推出了以下关于特征值指标的陈述。

推论 4.6. 存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

(i) 若 k 是偶对称，则

$$\text{指标}\,(\lambda^{\epsilon,\,e},\,\Omega_\epsilon) = 2\,\text{指标}\,(\mu,\,\Omega_L) + k - 1 \quad \text{且指标}\,(\lambda^{\epsilon,\,o},\,\Omega_\epsilon) = 2\,\text{指标}\,(\mu,\,\Omega_L) + k;$$

(ii) 若 k 是奇对称，则

$$\text{指标}\,(\lambda^{\epsilon,\,e},\,\Omega_\epsilon) = 2\,\text{指标}\,(\mu,\,\Omega_L) + k \text{和指标}\,(\lambda^{\epsilon,\,o},\,\Omega_\epsilon) = 2\,\text{指标}\,(\mu,\,\Omega_L) + k - 1.$$

5. Nodal Domains of the Perturbed Eigenfunctions

本节中，我们确定受扰区域 Ω_ϵ内 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点集的定性行为。在继续采用假设 1.3 和 1.4 的条件下，我们利用定理 1.11，确定每个特征函数的节点域数量，并证明以下命题。

命题 5.1。 设 $[\![\phi,\Omega_L]\!]$ 表示 Ω_L 中 ϕ 的节点域数量；同样，设 $[\![\varphi^{\epsilon,\,e},\Omega_\epsilon]\!]$,$[\![\varphi^{\epsilon,\,o},\Omega_\epsilon]\!]$ 分别表示 Ω_ϵ 中 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点域数量。最后，设 $k \geq 0$ 如命题 *4.5* 所述。则存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对所有 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，均有：

(i) 如果 k 是偶对称的，则

$$[\![\varphi^{\epsilon,e},\Omega_\epsilon]\!] \leq 2[\![\phi,\Omega_L]\!] + k - 1 \quad and \quad [\![\varphi^{\epsilon,o},\Omega_\epsilon]\!] \leq 2[\![\phi,\Omega_L]\!] + k;$$

(ii) 如果 k 是奇对称的，则

$$[\![\varphi^{\epsilon,e},\Omega_\epsilon]\!] \leq 2[\![\phi,\Omega_L]\!] + k \quad and \quad [\![\varphi^{\epsilon,o},\Omega_\epsilon]\!] \leq 2[\![\phi,\Omega_L]\!] + k - 1.$$

此外，如果 ϕ 的节点集在 Ω_L 中没有交叉点，那么上述所有陈述中的等号均成立。

将这一结果与第 4 节中的推论 4.6 结合起来，即可得到定理 1.5。为证明命题 5.1，我们根据 Ω_ϵ的一个划分进行局部分析。在 [3]，中给出一族链域的诺伊曼特征函数的节点域数量上界时，也使用了这一划分的一个版本（该族包括本文所研究的对称哑铃形区域）。该划分的性质以及与之相适应的单位分解，取决于区域的某些几何量，而这些几何量与颈部宽度 ϵ 无关。我们根据基域 Ω_1 （即带有 $\epsilon = 1$ 的哑铃形区域 Ω_ϵ ）和L^* 来定义这些量：$= \text{Length}(\partial\Omega_0) + \text{Length}(\{y = g(x) : x \in [0,1]\}) + 1$。注意， L^* 为 Ω_ϵ 的周长对所有 $0 < \epsilon < 1$ 提供了一个上界。现在我们定义四个几何量：

- 归一化曲率常数， κ^*：我们定义 $\kappa^* > 0$，使得 $\partial\Omega_1$ 的每个光滑弧段的曲率均不超过 κ^*/L^*。

- 顶点控制常数， δ^*：常数 $\delta^* > 0$ 的定义满足以下条件。对于每个顶点 $p \in \partial\Omega_1$， $\partial\Omega_1$ 在以 p 为圆心、$L^*\delta^*$ 为半径的圆盘中的连通分支由两条在 p处相接的光滑曲线组成。经过适当旋转后，我们可以假设它们在 p 处的切线与某个 $0 < \theta_0 < \pi$对应的直线 $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\theta_0}{2}$ 重合。这两条曲线是关于 x 轴的图，位于直线 $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\theta_0}{4}$和 $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{3\theta_0}{4}$之间，且斜率不超过 $1/\delta^*$。

- 归一化切距常数， σ^*：常数 σ^* 的定义满足：对于 $\eta \le L^*\delta^*$，切距定义为

$$\inf_{u\in K_\eta}\sup_{\delta>0}\left\{\delta:\ \mathrm{dist}\Big(\gamma(u)+sn(u),\partial\Omega_0\Big)=s \text{ for all } s\in[0,\delta]\right\},$$

  下界为 $\sigma^*\eta$。这里， $\gamma : K_\eta \to \mathbb{R}^2$ 是 $\partial\Omega_0$ 的参数化，排除了$\partial\Omega_0$ 中以每个顶点为中心、半径为 η 的圆盘内的部分，其中区间并为 K_η，而 $n(u)$是 $\gamma(u)$处 $\in \partial\Omega_0$的内向单位法向量。（注意，这个常数在 [3]中记作 τ^* 。）
- 颈部宽度常数， w^*：常数 w^* 的定义旨在控制颈部的宽度和正则性，使得 $\min_{x\in[0,1]} g(x) \ge w^*$ 且 $\max_{x\in[0,1]} |g'(x)| \le 1/w^*$。

有了这些 常数作为准备，我们现在可以定义划分并描述它的一些性质 s.

引理 5.2。存在一个小常数 $\delta_0 > 0$，它取决于上述几何常数，使得对于任意 $\delta < \delta_0$ 和 $\epsilon < \delta/4$，Ω_ϵ 可以划分为

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{j=0}^{4} \Omega_j^\delta(\epsilon)$$

其中满足以下条件：

1) $\Omega_2^\delta(\epsilon)$ 是 Ω_ϵ 与以 δ 为半径、分别以 $\partial\Omega_L$ 和 $\partial\Omega_R$ 的每个顶点为圆心的圆盘的交集。*2)* $\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 是 Ω_ϵ 与以 δ 为半径、分别以颈部两端的 $p_0 = (0, 0)$ 和 $p_1 = (1, 0)$ 为圆心的圆盘的交集。*3)* $\Omega_3^\delta(\epsilon)$ 是颈部 $R_\epsilon\backslash\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 的余部。*4)* $\Omega_1^\delta(\epsilon)$ 是 $\{(x, y) \in \Omega_L \cup \Omega_R : \mathrm{dist}((x, y), \partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R) < \frac{3}{4}\sigma^*\delta\}\backslash\left(\Omega_2^\delta(\epsilon) \cup \Omega_4^\delta(\epsilon)\right)$，而 $\Omega_0^\delta(\epsilon)$ 定义为

$$\Omega_0^\delta(\epsilon) = \Omega_\epsilon\backslash\bigcup_{j=1}^{4}\Omega_j^\delta(\epsilon).$$

此外，存在一个常数 C^*，使得存在一个适用于此划分的单位分解 χ_j^δ，其梯度几乎处处有界于 $C^*\delta^{-1}$。这里， σ^* 是归一化切距常数，而C^* 仅取决于上文定义的四个几何常数。

受 [3, 定义 3.1] 的启发，该划分将 Ω_L，Ω_R 边界的光滑部分、其顶点以及颈部 R_ϵ 的邻域分隔开来。当 Ω_L 和 Ω_R 为正方形区域时，下面的图 5 展示了这种划分的一个示例。引理 5.2 的证明见 [3, 第 3.2] 节，尤其参见 [3, 引理3.2]。

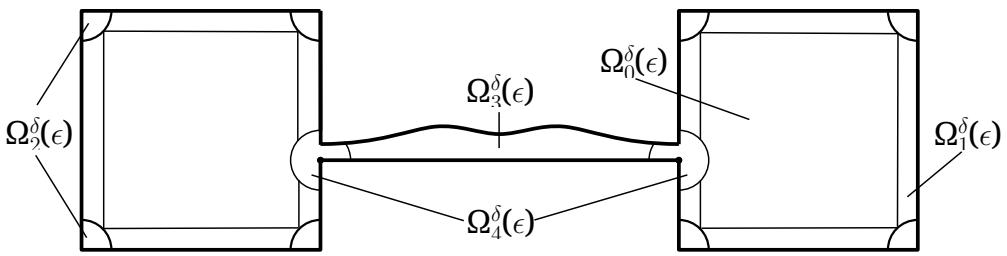

FIGURE 5. 引理 5.2 中给出的 Ω_ϵ 划分。

常数 δ_0 还可以选取为使得 $\partial\Omega_L$ 和 $\partial\Omega_R$ 在 $\Omega_1^\delta(\epsilon)$ 中的连通分支能够按照 [3, 引理 3.1] 的方式被拉直。也就是说，如果 $\partial\Omega_L \cap \Omega_1^\delta(\epsilon)$ 的一个连通分支具有参数化表示$\{\gamma(s)\colon\ s \in I\}$，并且 $n(s)$ 表示 $\partial\Omega_L$ 在 $\gamma(s)$ 处指向内部的单位法向量，那么，对于 $0 < \delta < \delta_0$,

$$F : I \times \left[0, \tfrac{3}{4}\sigma^*\delta\right] \to \Omega_L, \qquad (s,t) \mapsto (x,y) = \gamma(s) + tn(s) \tag{5.1}$$

是到其像上的微分同胚，其雅可比行列式有上界和下界。有关此构造的更多细节，请参见 [22, 第 3] 节。通过微分同胚也可以将 R_ϵ 的顶部边界拉直，从而使我们能够得出以下关于与 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$相交的节点域的结果。

引理 5.3。 设 δ_0 如引理 *5.2* 中所述。存在一个正的常数 δ，与 ϵ和 δ无关，使得若对于 $\varphi^{\epsilon,e}$ 的某个节点域 D，有 $\|\varphi^{\epsilon,e}\|_{L^2(\Omega_4^\delta(\epsilon)\cap D\cap R_\epsilon)} \geq \frac{1}{2}\|\varphi^{\epsilon,e}\|_{L^2(D)}$，其中某个 $0 < \delta < \delta_0$，则集合

$$\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in D \cap R_\epsilon \text{ for some } y \in \mathbb{R}\}$$

的大小至少为 δ。对于 $\varphi^{\epsilon,o}$的节点域，同样的结论也成立。

该结论给出了任意此类节点域在 x 轴上的投影下界。具体而言，它意味着这两个特征函数都不会在颈部边缘附近的小邻域内产生节点域。

引理 *5.3* 的证明。 我们对 $\varphi^{\epsilon,e}$ 给出证明，因为类似的论证也适用于 $\varphi^{\epsilon,o}$。按照 [3, Lemma 6.2] 的证明，设 D 是 $\varphi^{\epsilon,e}$ 的一个节点域，且与 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$ 相交。将 $\varphi^{\epsilon,e}$ 乘以一个常数；由于这不会改变节点域，我们不妨设 $\|\varphi^{\epsilon,e}\|_{L^2(D)} = 1$。令

$$F(x,y) := \left(x, yg(x)^{-1}\right) : R_\epsilon \to [0,1] \times [0,\epsilon] \tag{5.2}$$

表示一个将边界展平并保持竖直线不变的微分同胚。与 (5.1) 中出现的微分同胚类似，注意到 F 的雅可比行列式由颈部宽度常数 w^* 控制，且该界与 ϵ 无关。于是 $V = F(D \cap R_\epsilon)$ 包含于宽度为 ϵ 的带状区域中，并且 $v = \varphi^{\epsilon,e} \circ F^{-1} \in H^1(V)$ 满足

$$\int_V v^2 \geq c > 0 \quad \text{and} \quad \int_V |\nabla v|^2 \leq C\mu$$

对于某些常数 c，C，它们与 ϵ 和 δ 无关。

不失一般性，考虑 $\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 在 p_0 附近的区域，存在某个 x^*，满足 $0 \leq x^* < \delta < \delta_0 < 1/4$，使得

$$\int_{V(x^*)} v^2(x^*, y)dy \geq c\delta^{-1} > 4c,$$

其中 $V(x^*) = \{y : (x^*,\ y) \in V\}$ 是 V 在 $x = x^*$ 处的截面。我们将 v 在 V 外恒等地延拓为零。注意，由于 v 在竖直线$\{x = 0\}$ 或水平线 $\{y = 0\}$ 或 $\{y = \epsilon\}$ 上并非恒为零，这个延拓不属于 $H^1(\mathbb{R}^2)$。然而，若将此延拓记为 w，则

$$w(\cdot, y) \in H^1([x^*, \delta]) \quad \text{and} \quad \int_{V(x^*)} \int_{x^*}^{\delta} |\nabla w|^2 \, dxdy \leq C\mu.$$

利用微积分基本定理可写为

$$w(x,y) = w(x^*, y) + \int_{x^*}^{x} \partial_t w(t,y)dt,$$

于是我们可以表示为

$$\begin{aligned} w^2(x,y) &= w^2(x^*,y) + 2w(x^*,y)\int_{x^*}^{x}\partial_t w(t,y)dt + \left(\int_{x^*}^{x}\partial_t w(t,y)dt\right)^2 \\ &\geq w^2(x^*,y) - 2\left|w(x^*,y)\right|\left|\int_{x^*}^{x}\partial_t w(t,y)dt\right| + \left(\int_{x^*}^{x}\partial_t w(t,y)dt\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}w^2(x^*,y) - \left(\int_{x^*}^{x}\partial_t w(t,y)dy\right)^2 \end{aligned}$$

由杨氏不等式可得。根据柯西-施瓦茨不等式，这意味着

$$w^2(x,y) \geq \frac{1}{2}w^2(x^*,y) - |x-x^*|\int_{x^*}^{x}\left|\partial_t w(t,y)\right|^2 dt. \tag{5.3}$$

对 $y \in V(x^*)$ 上的 (5.3) 积分，得到

$$\begin{aligned} \int_{V(x^*)} w^2(x,y)dy &\geq \frac{1}{2}\int_{V(x^*)} w^2(x^*,y)dy - |x-x^*|\int_{V(x^*)}\int_{x^*}^{x}\left|\partial_t w(t,y)\right|^2 dtdy \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{V(x^*)} v^2(x^*,y)dy - |x-x^*|\int_{V(x^*)}\int_{x^*}^{\delta}|\nabla w|^2 dxdy \\ &\geq 2c - C\mu|x-x^*| \end{aligned}$$

因此

$$\int_{y_1}^{y_2} w^2(x,y)dy \geq c > 0$$

对所有满足 $x \geq x^*$ 的 $|x-x^*| \leq c(C\mu)^{-1} =: \tilde{\delta}$。注意， $\tilde{\delta}$ 与 ϵ 和 δ无关。由于 w 在 V之外等于˜零，这意味着 V与 $\{x = x^* + \delta\}$有非空交集。由于 F保持竖直线不变且 D 是连通的，因此得到了所需的结果。□

在颈部的其余部分，我们使用定理 1.11 中的估计，来确定 R_ϵ 中扰动特征函数的节点计数。根据第 4 节，我们沿用记号 $\xi^e = \xi_\mu^{\phi^e}$ 和 $\xi^o = \xi_\mu^{\phi^o}$ ，它们是满足 (1.5) 的解，其边界条件由 ϕ^e， ϕ^o 确定。

引理 5.4. 令 N_e、 N_o 分别表示 ξ^e、 ξ^o 在(0,1) 中的零点个数。存在一个常数$\delta_0 > 0$，使得对每个 $0 < \delta < \delta_0$，我们都可以找到 $\epsilon_0 > 0$ ，使得若 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，则

(i) $\varphi^{\epsilon,e}$ 在 $\Omega_3^\delta(\epsilon)$ 中的节点集由 N_e 条互不相交的曲线组成，每条曲线均与 R_ϵ的顶部和底部边界相交；*(ii)* $\varphi^{\epsilon,o}$ 在 $\Omega_3^\delta(\epsilon)$ 中的节点集由 N_o 条互不相交的曲线组成，每条曲线均与 R_ϵ的顶部和底部边界相交。

此外，在 $\partial\Omega_3^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$的左侧， $\varphi^{\epsilon,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,o}$ 分别与 $\phi^e(p_0)$ 和 $\phi^o(p_0)$同号；在 $\partial\Omega_3^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$的右侧，它们分别与 $\phi^e(p_1)$ 和 $\phi^o(p_1)$同号。

该结果表明，当 ϵ足够小时， $\varphi^{\epsilon,e}$ 和 ξ^e在颈部产生的节点域数量，与 $\varphi^{\epsilon,o}$ 和 ξ^o类似地产生的节点域数量相同。结合引理4.3可知，在$\lambda^{\epsilon,e}$ 和 $\lambda^{\epsilon,o}$之间，上特征值分支恰好对应于在 R_ϵ中产生更多节点域的特征函数。

引理 *5.4* 的证明。我们给出 $\varphi^{\epsilon,e}$ 的证明，因为对 $\varphi^{\epsilon,o}$ 也可作类似论证。首先证明 $\varphi^{\epsilon,e}$ 不可能有一个节点域包含在颈部的狭窄子集中：假设 $\varphi^{\epsilon,e}$ 有一个节点

域 D 包含在 R_ϵ 的一个宽度为 $c_1 > 0$ 的子集中，即 $D \subseteq R_\epsilon \cap \{(x, y) : x_0 \le x \le x_0 + c_1\}$ 对某个 x_0 成立。令

$$F : R_\epsilon \to [0, 1] \times [0, \epsilon]$$

˜如(5.2)所示，并令 F 为 F 先关于颈部上边界反射、再将所得边界分支粘合后的复合映射。于是，Area $\left(\tilde{F}(D)\right) \le 2c_1\epsilon$，且 $\tilde{F}(D)$包含于周长为 2ϵ的平坦圆柱中。根据圆柱的法贝尔-克拉恩不等式， [3, 引理 6.3]，当 ϵ足够小时，

$$\text{Area}\left(\tilde{F}(D)\right) \ge 2\epsilon\lambda_1(\mathbb{D})^{1/2}\lambda_1(\tilde{F}(D))^{-1/2} \tag{5.4}$$

˜其中， $\lambda_1(\cdot)$表示该集合的最小狄利克雷特征值，而 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘。利用 $\varphi^{\epsilon,\ e} \circ F$ 在˜第一特征值的变分表述中，我们得到 $\lambda_1(F(D)) = C\mu$，因此(5.4)表明

$$c_1 \ge C^{-1/2}\lambda_1(\mathbb{D})^{1/2}\mu^{-1/2}.$$

因此，若令 $c_1^* < C^{-1/2}\lambda_1(\mathbb{D})^{1/2}\mu^{-1/2}$，则在 $R_\epsilon \cap \{(x,\ y)$中不存在 $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 的节点域： $x_0 \le x \le x_0 + c_1^*\}$。由于 c_1^* 可以选取得与 ϵ无关，这就为颈部中任一节点域在 x 轴上的投影大小提供了一个下界。

现在我们证明，对于足够小的 $\epsilon > 0$，可以用一组竖直线对 R_ϵ 进行划分，这些竖直线之间的距离不超过 c_1^*，并且 $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 与 ξ^e 在每条竖直线上符号相同。根据定理 1.11，存在某个正常数 C，使得

$$\int_U \int_0^{\epsilon g(x)} |\varphi^{\epsilon,e} - \xi^e|^2 + |\nabla(\varphi^{\epsilon,e} - \xi^e)|^2 \, dydx = o(\epsilon) < C\epsilon \tag{5.5}$$

对于任意大小为 $|U|$的 $U \subseteq (0,\ 1)$。令

$$f_\epsilon(x) := \int_0^{\epsilon g(x)} |\varphi^{\epsilon,e} - \xi^e|^2 + |\nabla(\varphi^{\epsilon,e} - \xi^e)|^2 \, dy \ge 0,$$

并定义 $\tilde{U} = \{x \in U : \ f_\epsilon(x) \le 2C|U|^{-1}\epsilon\}$。于是，

$$\int_U f_\epsilon(x)dx \ge \int_{U\setminus\tilde{U}} f_\epsilon(x)dx > 2C|U|^{-1}\epsilon|U\setminus\tilde{U}|,$$

因此由 (5.5) 得，$|U\setminus\tilde{U}| < \frac{1}{2}|U|$。由此可得， $|\tilde{U}| > \frac{1}{2}|U|$。将 $(0,\ 1)$ 划分为大小小于 $c_1^*/2$ 的集合 U_j，因此可以得到一个由点 $\{x_j^*\}$ 构成的有限序列，使得

$$|x_i^* - x_j^*| \le c_1^* \quad \text{and} \quad f_\epsilon(x_j^*) \le 2C|U_j|^{-1}\epsilon.$$

我们还可以选择这些点，使得对于所有 j， $\xi^e(x_j^*) \ne 0$ 。由于该序列是有限的，我们可以用 ϵ 的某个统一倍数来作为 $f_\epsilon(x_j^*)$ 的上界。

对于 $x \in (0,\ 1)$，令 $R_\epsilon(x)$ 表示 R_ϵ 在 x 处的截面。由于 ξ^e 仅取决于 x，我们断言，对于充分小的 $\epsilon > 0$， $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 与 ξ^e 沿每个 $R_\epsilon(x_j^*)$ 的符号相同。为反证起见，假设对于某个 j， $\xi^e(x_j^*)$ 为负，而对于某个 y^*， $\varphi^{\epsilon,\ e}(x_j^*,\ y^*)$ 为正。令 $c_2^* = \min_j |\xi^e(x_j^*)|$，并且

$$p(y) := \varphi^{\epsilon,e}(x_j^*, y) - \xi^e(x_j^*)$$

使得 $p(y^*) > c_2^*$，并且

$$|p(y) - p(y^*)|^2 = \left|\int_y^{y^*} p'(t)dt\right|^2 \le |y - y^*| \int_0^{\epsilon g(x_j^*)} |p'(t)|^2 dt \le \epsilon f_\epsilon(x_j^*).$$

这意味着，当 ϵ 足够小时， $p(y) > c_2^*/2$ 对截面中的所有 y 均成立。然而，这与 (5.5) 矛盾，因此 $\varphi^{\epsilon,e}$ 和 ξ^e 在 R_ϵ 的截面上所有 x_j^* 处具有相同的符号。

根据构造，在竖直线 $R_\epsilon(x_j^*)$ 和 $R_\epsilon(x_{j+1}^*)$ 之间不存在 $\varphi^{\epsilon,e}$ 的节点域。由连续性可知，$\varphi^{\epsilon,e}$ 在该区域中的某些点处为零，当且仅当 $\xi^e(x)$ 在某个 $x \in (x_j^*, x_{j+1}^*)$ 处为零。对于 $\delta < \delta_0$，取 δ_0 如引理 5.2 中所述；如有必要，我们可以进一步减小 c_1^*，以确保 $c_1^* < \delta$。于是，当 δ 足够小时，我们可以断定，$\varphi^{\epsilon,e}$ 在 $\Omega_3^\delta(\epsilon)$ 中的节点集包含 N_e 条不同曲线，这些曲线与 R_ϵ 的顶部和底部边界相交，并且 $\varphi^{\epsilon,e}$ 沿 $\partial\Omega_3^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$ 与 ξ^e 具有相同的符号。取相对于 ξ^e 的零点间距足够小的 δ，则有 $\varphi^{\epsilon,e}$ 沿 $\partial\Omega_3^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$ 的左侧分支与 $\phi^e(p_0)$ 具有相同的符号，并且沿 $\partial\Omega_3^\delta(\epsilon) \cap R_\epsilon$ 的右侧分支与 $\phi^e(p_1)$ 具有相同的符号。□

引理 5.3 和 5.4 提供了关于颈部 R_ϵ 中 $\varphi^{\epsilon,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,o}$ 的节点集的信息。现在我们转而研究它们在主体区域 Ω_L 和 Ω_R中的节点集。为此，我们利用定理 1.11，将扰动特征函数的节点集与 ϕ^e 和 ϕ^o 的节点集进行比较。我们首先证明，若 $\varphi^{\epsilon,e}, \varphi^{\epsilon,o}$ 在某个节点域上的限制，其 L^2-质量有足够大的比例位于 Ω_L 或 Ω_R中，那么我们就能得到该节点域面积的一个下界，且此下界与 ϵ 无关。

引理 5.5。存在常数 $c^* > 0, \epsilon_0 > 0$，与 $\epsilon > 0$ 无关，使得若 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ 且 D 是 $\varphi^{\epsilon,e}$ 的一个节点域，并且 $\|\varphi^{\epsilon,e}\|_{L^2(D\cap(\Omega_L\cup\Omega_R))} \geq \frac{1}{2}\|\varphi^{\epsilon,e}\|_{L^2(D)}$，则

$$\mathrm{Area}(D) \geq c^*.$$

$\varphi^{\epsilon,o}$ 及其节点域也满足相同的估计。

注 5.6。引理 *5.5* 的证明仅依赖于以下事实：$\varphi^{\epsilon,e}$ 是区域 Ω_ϵ上的诺伊曼特征函数，且其特征值存在一个与 ϵ 无关的界。特别地，该证明并未使用假设 *1.4*。

引理的证明 *a 5.5*。首先注意到，根据 [3, 引理 3.3]，令 $u = \varphi^{\epsilon,e}$ 并令 $\lambda = \lambda^{\epsilon,e}$，我们有

$$\int_D |\nabla u|^2 = \lambda \int_D u^2, \tag{5.6}$$

对于 $u = \varphi^{\epsilon,o}$ 和 $\lambda = \lambda^{\epsilon,o}$的另一种选择，这一点同样成立。如同 [3, 第 3.3]节中一样，我们使用引理 5.2 中的划分来定义内部、边界、角部和颈部节点域。我们固定 δ，使得 $0 < \delta < \delta_0$，其中 δ_0 按照引理 5.2 进行选择。对于 $u = \varphi^{\epsilon,e}$，令 $u_j = \chi_j^\delta u$。我们称 u 的节点域 D 为一个

- 内部节点域 如果$\|u_0\|_{L^2(D)} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$；
- 边界节点域 如果$\|u_1\|_{L^2(D)} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$；
- 角点节点域 如果$\|u_2\|_{L^2(D)} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$ 或$\|u_4\|_{L^2(D\cap(\Omega_L\cup\Omega_R))} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$；
- 颈部节点域 如果$\|u_3\|_{L^2(D)} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$ 或$\|u_4\|_{L^2(D\cap R_\epsilon)} \geq \frac{1}{8}\|u\|_{L^2(D)}$。

注意，u 的每个节点域都至少属于这些类别中的一种。由于我们考虑满足以下条件的节点域

$$\|u\|_{L^2(D\cap(\Omega_L\cup\Omega_R))} \geq \tfrac{1}{2}\|u\|_{L^2(D)},$$

D 必须是内部、边界或角点节点域。通过将 u 乘以适当的常数（这不会改变节点域），我们可以假设 $\|u\|_{L^2(D)} = 1$。

在每种情况下，我们都找到一个面积与 D 相当的集合 V，以及一个瑞利商有界的函数 $v \in H_0^1(V)$。随后可应用法贝尔-克拉恩定理 [15, 21]，得到 D 面积的下界，正如引理陈述所示。下文给出的这些估计中的常数，取决于特征值 λ 的一个上界、固定的 δ，以及引理 5.2 之前给出的几何常数（尤其是通过引理 5.2 中的常数 C^*），但至关重要的是，它们与 $\epsilon > 0$ 无关。由于这可由用于计算节点域数量的 [3, 第 4, 5] 节中的证明得出，我们将分别概述每种情况下的关键思路。

若 D 是内部节点域，则我们沿用 [3, 第 4.1] 节中的论证：由于此时 $u_0 \in H_0^1(D)$，我们使用 $v = u_0 = \chi_0^\delta u$ 和 $V = D$。由 (5.6) 以及引理 5.2 中 χ_0^δ 的梯度界可得

$$\int_D |\nabla u_0|^2 \Big/ \int_D u_0^2 \le 8^2 \int_D |\nabla u_0|^2 \Big/ \int_D u^2 \le C_0^*.$$

法贝尔-克拉恩定理由此给出下界

$$\pi \lambda_1(\mathbb{D}) \mathrm{Area}(D) \le C_0^*,$$

其中 $\lambda_1(\mathbb{D})$ 是单位圆盘的第一狄利克雷特征值。通过重排此不等式，我们得到 D 面积的一个下界，且该下界与 ϵ 无关。

若 D 是边界节点域，则存在一个子集 b_δ，它属于 $\partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R$ 的一个光滑连通分支，并包含于 $\Omega_1^\delta(\epsilon)$ 中，使得

$$\int_{\{\mathrm{dist}((x,y),b_\delta)<3\sigma^*\delta/4\}} u_1^2 \ge c_1^* \int_D u^2 = c_1^*$$

对于某个常数 c_1^*，该常数仅取决于 $\partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R$ 的光滑连通分支总数。我们使用 (5.1) 中的拉直微分同胚，并在拉直后的边界处对 u_1 作反射，论证与 [22, 方程 (13) –(17)], [3, 引理 4.1] 中的论证相同。由此可得，存在一个利普希茨集 V、一个函数 $v \in H_0^1(V)$ 和一个常数 C_1^*，使得

$$\mathrm{Area}(V) \le C_1^* \mathrm{Area}(D) \quad \text{and} \quad \int_V |\nabla v|^2 \Big/ \int_V v^2 \le C_1^*.$$

再次应用法贝尔-克拉恩定理，可得到 D面积的所需下界 .

最后，如果 D 是一个角点节点域，我们按照 [3, 第 5] 节的做法，将分析进一步分为两种情形，具体取决于

$$\|u_2\|_{L^2(D)} \ge \tfrac{1}{8} \|u\|_{L^2(D)} = \tfrac{1}{8} \quad \text{or} \quad \|u_4\|_{L^2(D\cap(\Omega_L\cup\Omega_R))} \ge \tfrac{1}{8} \|u\|_{L^2(D)} = \tfrac{1}{8}. \tag{5.7}$$

在 (5.7) 的第一种情形下，存在 $\partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R$ 的一个顶点 v_0，其开角为 θ_0，并且存在一个常数c_2^*，该常数仅取决于顶点总数，使得

$$\int_{D\cap\{\mathrm{dist}((x,y),v_0)<\delta\}} u_2^2 \ge c_2^*.$$

设 $S_{\theta_0}(\delta) = \{(r,\ \theta) \in \mathbb{R}^2 \colon r < \delta,\ |\theta| < \theta_0/2\}$ 是一个精确扇形的子集，则存在集合 $V \subset S_{\theta_0}(\delta)$和函数 $v \in H^1(V)$，满足 $v \equiv 0$ 在 $\partial V \cap S_{\theta_0}(\delta)$上，且面积$(V) \le C_2^*$面积$(D)$，并且

$$\int_V v^2 \ge (C_2^*)^{-1}, \qquad \int_V |\nabla v|^2 \le C_2^*. \tag{5.8}$$

这些估计可通过对 u_2 施加变换得到，该变换将 v_0处相交的 $\partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R$ 的光滑连通分支进行平移、旋转和拉直。变换的细节见 [3, 引理 5.1] 的证明。与引理 5.3 中一样，我们将 v 在 V 之外延拓为零，从而得到一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、但不一定属于 $H^1(\mathbb{R}^2)$的函数 w 。根据 (5.8) 中的第一个估计，存在某个 x^* 满足 $|x^*| < \delta$，使得

$$\int_{V(x^*)} w(x^*, y)^2 \, dy \ge (C_2^*)^{-1} \delta^{-1},$$

其中，$V(x^*) = \{y \colon (x^*, y) \in V\}$ 是在 x^* 处 V 的截面。现在的思路是利用 (5.8) 中的第二个估计，得到邻近 $x > x^*$ 的下界 $\int_{y_1}^{y_2} w(x,y)^2 \, dy \ge \frac{1}{2}(C_w^*)^{-1}\delta^{-1}$，-并据此证明存在一个截断函数 χ，其支集包含于 $S_{\theta_0}(\delta)$ 的内部，使得

$$\int_V |\chi w|^2 \ge (\tilde{C}_2^*)^{-1}, \qquad \int_V |\nabla(\chi w)|^2 \le \tilde{C}_2^*,$$

˜其中 C_2^* 是一个常数，仅取决于 C_2^* 和 δ。完全按照命题 [3,Proposition 5.1] 从等式 (37) 到等式 (42) 的证明即可得到这一结果。由于 $w = v = 0$ 在 $\partial V \cap S_{\theta_0}(\delta)$ 上成立，我们有 $\chi v \in H_0^1(V)$，因此法贝尔-克拉恩定理给出了 V 面积所需的下界，进而也给出了 D 的下界。

在 (5.7) 的第二种情形中，不妨设 $\|u_4\|_{L^2(D\cap\Omega_R)} \geq \frac{1}{16}$。由于 Ω_R 的边界由 u_4 支集内的一条竖直线构成，我们可以令 $\theta_0 = \pi$、$v = u_4$ 和 $V = \Omega_R \cap \operatorname{supp} u_4$，使得 (5.8) 成立。因此，我们可以应用与第一种情形相同的论证，得到 D 的面积下界。

因此，在所有情形下，我们都能得到 D 的面积下界，该下界由 λ、固定的 δ 以及引理 5.2 之前给出的几何常数决定，从而完成引理的证明。□

接下来，我们结合引理 5.5、定理 1.8 和 1.11，比较 Ω_L 和 Ω_R 中 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 与 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点集结构，以及 ϕ^e 和 ϕ^o 的节点集结构。

引理 5.7. 对每个 $\delta > 0$，令 $\Omega_L(\phi^e, \delta)$ 为 $\Omega_0^\delta(\epsilon)$ 的子集，定义如下：

$$\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_L) > \delta \text{ and } \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) > \delta\}.$$

这里，N_{ϕ^e} 是 ϕ^e的节点集，将 Ω_L 分隔成 $\eta_e := [\![\phi^e, \Omega_L]\!]$ 个节点域。于是，存在常数 $\delta_0 > 0$，使得对每个 $0 < \delta < \delta_0$，都存在 $\epsilon_0 > 0$，满足

(i) $\Omega_L(\phi^e, \delta)$ 由 η_e 个连通分支组成；*(ii)* 对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，$\varphi^{\epsilon,e}$ 在区域 $\Omega_L \backslash \Omega_L(\phi^e, \delta)$内没有严格包含于该区域的节点域；*(iii)* 对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，$\varphi^{\epsilon,e}$ 在 $\Omega_L(\phi^e, \delta)$中的符号与 ϕ^e 相同。

此外，如果 ϕ^e 的节点集不含交叉点，那么还可以进一步选择 $\delta < \delta_0$ 和 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) \leq \delta\}$$

有 $\eta_e - 1$ 个连通分支。对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，每个分支在 Ω_L内部的边界由两条曲线组成，其中一条曲线上有 $\varphi^{\epsilon,\,e} > 0$ 另一条曲线上有 $\varphi^{\epsilon,\,e} < 0$。

类似的陈述在 Ω_R 上也成立，并且对于 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 以及 ϕ^o也成立。

该结果表明，当对颈部施加足够小的扰动后，$\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 在 $\Omega_L \cup \Omega_R$ 内的节点集必定位于 ϕ^e 和 ϕ^o 的节点集的某个邻域内，或分别位于边界$\partial\Omega_L \cup \partial\Omega_R$附近。这使我们能够对扰动特征函数在某个远离 p_0 的子集 Ω_L 中产生的节点域数量进行界定；对于 Ω_R 中某个远离 p_1的子集，也可类似处理。

引理 *5.7* 的证明。我们对 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 以及 ϕ^e 在 Ω_L中的情形证明该引理，但同样的证明也适用于特征函数 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 和 ϕ^o，以及 Ω_R中的情形。函数 ϕ^e 是 Ω_L中的特征函数，与 ϵ无关，并且具有 η_e 个节点域。因此，存在一个依赖于 ϕ^e 但与 ϵ无关的常数 δ_0，使得性质 *(i)* 对所有 $0 < \delta < \delta_0$均成立。

由于 $\Omega_L \backslash \Omega_L(\phi^e,\ \delta)$ 的面积有界于 δ 的某个常数倍，通过在必要时减小 δ_0 并按引理 5.5 选取 ϵ_0，我们可知，对于所有 $0 < \delta < \delta_0$ 和 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，性质 *(ii)* 均成立。

固定 δ，且满足 $0 < \delta < \delta_0$，存在一个常数 $c_1 = c_1(\delta)$，与 ϵ 无关，使得 $|\phi^e| > c_1$ 在 $\Omega_L(\phi^e, \delta)$ 中成立。差值 $\varphi^{\epsilon,e} - \phi^e$ 满足

$$\Delta(\varphi^{\epsilon,e} - \phi^e) = -\mu(\varphi^{\epsilon,e} - \phi^e) - (\lambda^{\epsilon,e} - \mu)\varphi^{\epsilon,e},$$

根据定理 1.8 和 1.11，该值有上界，且不超过 ϵ 在 $L^2(\Omega_L)$ 中的某个倍数。对每个固定的 $\delta < \delta_0$，在 $\Omega_L(\phi^e, \delta)$ 中应用内部椭圆正则性估计，存在 $\epsilon_0 > 0$，其取决于 $c_1(\delta)$，使得对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，特征函数 $\varphi^{\epsilon,e}$ 和 ϕ^e 在 $\Omega_L(\phi^e, \delta)$ 中符号相同。因此，性质 *(iii)* 成立。

如果 ϕ^e 的节点集在 Ω_L的闭包中没有交叉点，那么它必由 $\eta_e - 1$ 光滑不相交曲线组成，这些曲线将 Ω_L 划分为 η_e 个连通分支的二分划分，其中 ϕ^e 严格为正或严格为负。因此，存在 δ_0，使得对所有 $0 < \delta < \delta_0$，集合

$$\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) \le \delta\}$$

具有 $\eta_e - 1$ 个连通分支，而集合 $\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) = \delta\}$ 由 $\eta_e - 1$ 对曲线组成，其中每一对曲线上，ϕ^e 在一条曲线上为正，在另一条曲线上为负。此外，存在一个常数$c_2 = c_2(\delta) > 0$，使得在 $\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x,N_{\phi^e}) = \delta\}$上 $|\phi^e| > c_2$。我们选取一个 $\delta > 0$，使集合 $\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) = \delta\}$ 与 Ω_L的任一顶点之间的距离至少为 $\frac{1}{4}\delta$。在假设 1.4 下，我们还可以选取 δ，以确保集合 $\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x,N_{\phi^e}) \le \delta\}$ 不包含 p_0。由于$\Delta(\varphi^{\epsilon,e} - \phi^e) = O(\epsilon)$ 属于 $L^2(\Omega_L)$，我们可以利用诺伊曼问题在 $\partial\Omega_L$ 的光滑部分上的椭圆正则性，确定存在一个依赖于 $c_2(\delta)$ 的 $\epsilon_0 > 0$，使得对于 $0 < \epsilon_0 < \epsilon$，$\varphi^{\epsilon}$、^{e} 和 ϕ^e在 $\{x \in \Omega_L : \operatorname{dist}(x, N_{\phi^e}) = \delta\}$上符号相同。□

接下来，我们证明 $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 在 $\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 的两个连通分支中分别与 ϕ^ϵ 和 ϕ^o 具有相同的符号。为此，利用引理 5.3、5.4 和 5.5 证明，两个特征函数都不可能具有完全包含于 $\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 内的节点域。

引理 5.8。存在一个与 $\epsilon > 0$ 无关的常数 $\delta_0 > 0$，使得对于每个 $0 < \delta < \delta_0$，我们都可以找到 $\epsilon_0 > 0$，使得对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，

(i) $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \{x < \frac{1}{2}\}$中与 $\phi^e(p_0)$ 具有相同的符号；
(ii) $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \{x < \frac{1}{2}\}$中与 $\phi^o(p_0)$ 具有相同的符号。

在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \{x > \frac{1}{2}\}$ 中，相应的陈述同样成立。

注意，假设 1.4 保证 $\phi^e(p_0)$ 和 $\phi^o(p_0)$ 非零。若 N_e，N_o 如引理 5.4 中所述，则引理 5.8 使我们可以得出结论：$\varphi^{\epsilon,\ e}$ 在 R_ϵ 中的节点域数量等于 $N_e + 1$，而 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 在 R_ϵ 中的节点域数量等于 $N_o + 1$。这还意味着，Ω_ϵ 中任一特征函数的节点域数量，等于 R_ϵ 中的节点域数量与 $\Omega_0 = \Omega_L \cup \Omega_R$ 中的节点域数量之和，减去颈部两端各自被重复计数的两个节点域。

引理 *5.8* 的证明。我们首先固定 $\delta_0 > 0$，使引理 5.2 和引理 5.4 的结论成立，并使 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \Omega_L$ 的面积小于引理 5.5 中的常数 c^*。由于 Ω_L 在 p_0 附近局部平坦，对于每个 $0 < \delta < \delta_0$，存在 $\epsilon_0 > 0$，使得当 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ 时，我们可以利用椭圆正则性和定理 1.11 得出结论：$\varphi^{\epsilon,\ e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 沿边界 $\partial\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \Omega_L$ 的半圆部分，分别与 $\phi^e(p_0)$ 和 $\phi^o(p_0)$ 具有相同的符号。

我们令 $\delta > 0$ 为引理 5.3 中的常数，并在 $\delta = \delta/2$ 的条件下应用引理 5.4（如有必要则减小 δ，以确保 $\delta/2 < \delta_0$）。如有必要，减小 ϵ_0，即可确保对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，$\varphi^{\epsilon,\ e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \Omega_\epsilon$ 中满足 $x > \tilde{\delta}$的部分上，分别与 $\phi^e(p_0)$ 和 $\phi^o(p_0)$ 具有相同的符号。

如果引理 5.8 的结论不成立，那么 $\varphi^{\epsilon,\ e}$ 或 $\varphi^{\epsilon,\ o}$ 必定有一个节点域完全包含在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \Omega_\epsilon$ 的部分区域内，其中 $x < \tilde{\delta}$。在这种情况下，引理 5.5 表明，限制在该节点域上的特征函数的至少一半 L^2 质量必须包含在 $\Omega_4^\delta(\epsilon) \cap \Omega_\epsilon$ 所包含的部分中，即在 R_ϵ内。根据引理 5.3，这样的节点域必定延伸越过 $x = \delta$，从而产生矛盾，并完成证明。□

结合引理5.7和5.8，我们可以得到 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 的节点域数量上界：这些节点域分别与 Ω_L 和 Ω_R 相交，该上界取决于 $[\![\phi,\,\Omega_L]\!]$以及 ϕ 在 Ω_L中的节点域数量，如以下陈述所述。

命题 5.9。令 η_e 为 ϕ^e 在 Ω_L中的节点域数。存在一个常数 $\epsilon_0>0$，使得对于 $0<\epsilon\leq\epsilon_0$，$[\![\varphi^{\epsilon,e},\Omega_L]\!]\leq\eta_e$. 此外，若 ϕ^e 没有节点交叉，则 $[\![\varphi^{\epsilon,e},\,\Omega_L]\!]=\eta_e$。对于 $\varphi^{\epsilon,o}$ 和 ϕ^o，以及在 Ω_R中，类似的结论也成立。

这一结果表明，在哑铃形区域中，方程 (1.1) 的特征函数所产生的节点域数不会因颈部的小幅扰动而增加。在 [30], Uhlenbeck 证明了节点交叉在一般域变形下具有不稳定性，例如，在狄利克雷情形中，[4, 23] 对此作了量化。如果一个节点交叉消失，那么节点域数就会减少，从而为命题 5.9 中的不等式提供了几何解释。我们发现，在没有节点交叉的情况下，Ω_L 中的节点域数在小幅 $\epsilon>0$下保持不变。

命题 *5.9* 的证明。对 $\varphi^{\epsilon,\,o}$ 和 ϕ^o，以及 Ω_R中的情形，同样的证明也成立，因此我们只关注 Ω_L中的 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 和 ϕ^e。我们固定 δ 和 ϵ_0，使引理5.7和5.8的结论成立。对于足够小的 ϵ，如果 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 有一个节点域与 Ω_L 相交，那么根据引理 5.7 的第（*ii*）部分和引理 5.8，它也必须与 $\Omega_L(\phi^e,\,\delta)$相交。因此，根据引理 5.7 的第（*i*）和（*iii*）部分，$\varphi^{\epsilon,\,e}$ 与 Ω_L相交的节点域至多有 η_e 个。

现在假设 ϕ^e 的节点集在 Ω_L的闭包中没有交叉点。根据引理 5.7，se t

$$\{x\in\Omega_L:\operatorname{dist}(x,N_{\phi^e})\leq\delta\}$$

那么它由 η_e-1 个连通分支组成；对于 $0<\epsilon<\epsilon_0$，函数 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 在 Ω_L内部，每个连通分支边界的两段上都从正变为负。因此，$\varphi^{\epsilon,\,e}$ 的节点集在 Ω_L中至少包含 η_e-1 条光滑不相交曲线，因此 $\varphi^{\epsilon,\,e}$ 与 Ω_L相交的节点域恰有η_e 个。□

引理 5.4 和命题 5.9 的结果共同证明了本节的主要结果，即命题 5.1。也就是说，若 $\eta_e=[\![\phi^e,\Omega_L]\!]=[\![\phi^o,\Omega_L]\!]$，那么当 ϵ 足够小时，

$$[\![\varphi^{\epsilon,e},\Omega_\epsilon]\!]\leq 2\eta_e+N_e-1,$$
$$[\![\varphi^{\epsilon,o},\Omega_\epsilon]\!]\leq 2\eta_e+N_o-1$$

因为两个特征函数的节点集都不与 $\Omega_4^\delta(\epsilon)$ 相交。引理 4.2 给出了 N_e,N_o 与 μ 相对于 (1.5) 的狄利克雷谱的位置之间所需的关系。若 ϕ 的节点集在 Ω_L 中没有交叉点，则可得到所需的等式

$$[\![\varphi^{\epsilon,e},\Omega_\epsilon]\!]=2\eta_e+N_e-1,$$
$$[\![\varphi^{\epsilon,o},\Omega_\epsilon]\!]=2\eta_e+N_o-1.$$

特别地，在这种情况下将此结果与推论 4.6 结合，可知扰动后特征函数在 Ω_ϵ 上的节点亏损为零。

References

[1] Jos´e Arrieta. 哑铃形区域上的特征值收敛速率：单特征值情形。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(9):3503– 3531, 1995.[2] Ram Band, Michael Bersudsky, and David Fajman. Neumann 2-重铺砖的 Courant 尖锐特征值。 *Lett. Math. Phys.*, 107(5):821–859, 2017.

[3] Thomas Beck, Yaiza Canzani, and Jeremy Marzuola. 链域 Courant尖锐Neumann特征值的统一上界。 *J. Geom. Anal.*, 34, 2024.[4] Thomas Beck, Marichi Gupta, and Jeremy Marzuola. 受扰矩形域的节点集开口。 *Ann. HenriPoincaré*, 25(11):4889–4929, 2024.[5] Gregory Berkolaiko, Yaiza Canzani, Graham Cox, and Jeremy Marzuola. 谱最小划分、节点亏格与狄利克雷到诺伊曼映射：一般情形。 *Calc. Var. PDE*, 61(203), 2022.[6] Gregory Berkolaiko, Graham Cox, Bernard Helffer, and Mikael Persson Sundqvist. 用精细狄利克雷到诺伊曼映射计算节点亏格。 *J. Geom. Anal.*, 32(246), 2022.[7] Gregory Berkolaiko, Graham Cox, and Jeremy Marzuola. 节点亏格、谱流与狄利克雷到诺伊曼映射。 *Lett. Math. Phys.*, 109(7):1611–1623, 2019.[8] Gregory Berkolaiko, Peter Kuchment, and Uri Smilansky. 台球特征函数的临界划分与节点亏格。 *Geom. Funct. Anal.*, 22(6):1517–1540, 2012.[9] Virginie Bonnaillie-No¨el and Bernard Helffer. 节点与谱最小划分——2016年的研究现状。载于 *Shapeoptimization and spectral theory*，第353–397页。德格鲁伊特开放出版社，华沙，2017.[10] Shiu-Yuen Cheng. 特征函数与节点集。 *Comm. Math. Helvetici*, 51:43–55, 1976.[11] Earl Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. 麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多—伦敦，1955.[12] Richard Courant and David Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*. Interscience出版社（约翰·威立父子公司旗下部门），纽约—伦敦，1962。（第二卷由 R. Courant 撰写。）[13] Daniel Daners. 变化域上的狄利克雷问题。 *J. Diff. Equations*, 188(2):591–624, 2003.[14] Nicol`o De Ponti, Sara Farinelli, and Ivan Yuri Violo. 非光滑情形下的 Pleijel节点域定理。 *Trans. Amer.Math. Soc. Ser. B*, 11:1138–1182, 2024.[15] Georg Faber. 证明：在所有面积和张力相同的均匀膜中，圆形膜的基音最低。 *Math.-Phys. Kl.*, 第169–172页，1923年。[16] Bernard Helffer and Thomas Hoffmann-Ostenhof. 圆柱上的窄带或具有诺伊曼条件的类薄环区域的谱最小划分。载于 *Operator methods in mathematical physics*，第227卷， *Oper. Theory Adv. Appl.*丛书，第107–115页。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2013.[17] Bernard Helffer and Thomas Hoffmann-Ostenhof. 各向异性环面上的最小划分。 *J. Spectr. Theory*, 4(2):221–233, 2014.[18] Bernard Helffer, Thomas Hoffmann-Ostenhof, and Susanna Terracini. 关于谱最小划分：球面情形。载于 *Around the research of Vladimir Maz'ya. III*，第13卷， *Int. Math. Ser. (N. Y.)*丛书，第153–178页。施普林格，纽约，2010.[19] Bernard Helffer and Mikael Persson Sundqvist. 欧几里得球中的节点域。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(11):4777– 4791, 2016.[20] Shuichi Jimbo. 奇异扰动域中特征值的扰动公式。 *J. Math. Soc. Japan*, 45(2):339–356, 1993.[21] Edgar Krahn. 关于 Rayleigh 提出的圆的最小性质。 *Math. Ann.*, 94:97–100, 1925.[22] Corentin L´ena. Neumann与Robin特征函数的 Pleijel节点域定理。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 69(1):283–301, 2019.[23] Andrew Lyons. 重数为2的拉普拉斯特征值对应的特征函数的节点集。 *Ann. Math. Qué.*, 49(1):105–153, 2025.[24] Saikat Maji, Mayukh Mukherjee, and Soumyajit Saha. 度量扰动下的节点域数量、Courant尖锐性与边界交点。 *Preprint, arXiv:2507.04928*, 2025.[25]Saikat Maji and Soumyajit Saha. 哑铃域上的特征函数局域化与节点几何。 *Preprint, arXiv:2309.11441*, 2023.[26] ˚Ake Pleijel. 关于 Courant 节线定理的评注。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 9:543–550, 1956.[27] Iosif Polterovich. 自由膜的 Pleijel节点域定理。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(3):1021–1024, 2009.[28] Amit Singer and Hau-Tieng Wu. 随机样本的联络拉普拉斯算子的谱收敛。 *Information andInference: A Journal of the IMA*, 6(1):58–123, 2017.[29] Nicol´as Garc´ıa Trillos and Dejan Slep˘cev. 谱聚类一致性的变分方法。 *Appl. Comput.Harmon. Anal.*, 45(2):239–281, 2018.[30] Karen Uhlenbeck. 特征函数的一般性质。 *Amer. J. Math.*, 98(4):1059–1078, 1976.[31] Steve Zelditch. *Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian manifold*，第125卷。美国数学会，2017。

Department of Mathematics, John Mulcahy Hall, Fordham University
Email address: tbeck7@fordham.edu

Department of Mathematics, Mathematics & Science Center, Emory University
Email address: ahlyons@emory.edu