arXiv:2601.17169v1 [math.CO] 23 Jan 2026

禁含子锦标赛的竞赛图中反馈顶点集问题的复杂性

Sophie Spirkl*，Yun Xing，滑铁卢大学组合学与优化系

2026年1月27日

摘要

本文研究禁含子锦标赛的竞赛图中的最小反馈顶点集问题（MFBVS）的复杂性。一般竞赛图中的 MFBVS 问题已知是 NP 完全的。我们证明，对于禁含 W_5 和禁含 U_5 的竞赛图，MFBVS 问题属于 P类；而对于禁含 T_5 的竞赛图，该问题仍为 NP 完全。此外，我们证明了对于所有 H，使禁含 H 的竞赛图中的 MFBVS 问题属于 P类的一项必要条件。我们还表明，该必要条件并不充分。

1 引言

1.1 预备知识

竞赛图是一种简单有向图，对于任意一对不同的顶点（u，v），恰有一条弧以 $\{u, v\}$ 为端点。若 u，v 是竞赛图中的顶点，且它们之间的弧从 u 出发并以 v 为终点，则将这条弧记作（u，v）。本文中所有竞赛图均为有限图。

本文中使用以下定义。设 G 为一个竞赛图。G 的子竞赛图是 G的一个诱导子图。令 $u, v \in V(G)$和 $X, Y \subseteq V(G)$。我们用$u \to v$ 表示 v 是 u的出邻点；若 X 中的每个顶点都是 Y中所有顶点的出邻点，则用 $X \Rightarrow Y$ 表示。我们用 $N^-(v)$表示 v 的入邻点集，用 $N^+(v)$表示 v的出邻点集。如果一个竞赛图是传递的，则

*我们感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的支持，[资助编号为 RGPIN-2020-03912]。本研究由加拿大自然科学与工程研究委员会（CRSNG）资助，[参考编号为 RGPIN- 2020-03912]。本项目部分由安大略省政府资助。本文研究工作是在 Spirkl 担任阿尔弗雷德·P·斯隆研究员期间开展的。

对于所有满足 $u \to v$, $v \to w$的 $u, v, w \in V(G)$，都有 $u \to w$。有向三角形是一个非传递的三顶点竞赛图。受 Neumann-Lara[10], 提出的有向图着色概念启发，我们将集合 $X \subseteq V(G)$称为 G 的独立集，如果诱导子图 $G[X]$ 是传递的。我们将竞赛图 G的补图 G定义为通过反转 G的每条弧而得到的有向图。我们还将顶点集 $S \subseteq V(G)$的补集定义为 $V(G) \setminus S$。

根据 [1], ，我们如下定义竞赛图的反向边图。设 G是一个具有 n 个顶点的竞赛图，$(v_1, \ldots, v_n)$是顶点集 $V(G)$的一个次序。若 $i > j$，则边$(v_i, v_j) \in E(G)$称为一条反向边 。 G 的反向边图 B 是一个顶点集为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$的无向图，当且仅当(v_i, v_j)是 G 中的一条反向边时，边 $v_i v_j \in E(B)$存在。所有竞赛图都具有以下众所周知的性质:

命题1 (民间定理)。 设 G 是一个竞赛图。以下条件等价:
(1) G 是传递的。*(2)* G 不包含有向三角形。*(3)* G 是无环的。*(4)* G 在其顶点 $V(G)$上存在一个拓扑序。*(5)* 存在 $V(G)$ 的一个次序，使得其反向边图不含边。

定义 1.1.1 (反馈顶点集)。 设 G 是一个竞赛图。集合 $S \subseteq V(G)$ 是反馈顶点集，当且仅当 $V(G) \setminus S$ 是独立集。

本文关注如何求出竞赛图的最小反馈顶点集。该问题由 Speckenmeyer 于 1990年提出，对于一般竞赛图而言是 NP 完全[13]。

问题 1 (**MFBVS**：竞赛图的最小反馈顶点集问题)。给定一个竞赛图 G，求出其中反馈顶点集的最小大小 G。

由于反馈顶点集的补图是独立集，MFBVS 问题等价于以下问题:

问题 2 (**MISP**：竞赛图的最大独立集问题)。给定一个竞赛图 G，求出其中独立集的最大大小 G。

问题3 (**MISP，判定版本**)。
给定一个竞赛图 G 和 $k \in \mathbb{Z}_+$， G 中是否存在一个大小至少为 k的独立集?

我们也可以如下定义 MFBVS 的加权版本：设 G 是一个竞赛图，并设 $w : V(G) \to \mathbb{Q}_+$ 是定义在 G 的顶点集上的权重赋值。集合 $S \subseteq V(G)$ 的权重定义为 $\sum_{v \in S} w(v)$。现在我们可以定义 MFBVS 的加权版本:

问题4 (加权最小反馈顶点集问题：竞赛图的加权最小反馈顶点集问题)。

$Give$在竞赛图 G 中，求反馈顶点集的最大权重，其中 G .

同样地，这等价于以下问题：

问题5 (加权最大独立集问题：竞赛图中的加权最大独立集问题)。

Giv在竞赛图 G 中，求独立集的最大权重，其中 $G.$

问题6 （加权最大独立集问题，判定版本）。
给定竞赛图 G 和 $k \in \mathbb{Q}_+$， G 中是否存在权重至少为 k 的独立集?

本文主要研究 MISP 和 WMISP，而非 MFBVS 和 WMFBVS。我们使用 MISP 来指代问题3，即判定版本，尽管我们的大多数算法实际上都会找到一个最大独立集。同样地，我们使用 WMISP 来指代问题5。注意，MISP 是 WMISP 的一个特例。

1.2 动机

自然会产生这样的问题：MISP 是否为 NP 完全问题。下面的定理归功于 Speckenmeyer：

Th定理 1.1 (Speckenmeyer, [13])。 竞赛图上的 *MISP* 是 *NP* 完全问题 $e.$

我们给出这一结果的形式化证明，因为 [13] 仅包含该证明的概要。我们的证明是 Speckenmeyer 证明的简化版本。
证明。 我们首先定义图的最小顶点覆盖问题 .
一个顶点覆盖 $C \subseteq V(G)$是一个顶点集，使得每条 $e \in E(G)$都至少有一个端点属于 C。最小顶点覆盖是大小最小的顶点覆盖。

问题 7 $(\mathbf{MVCP})$**.** 给定一个图 G，求G的最小顶点覆盖的大小。

众所周知，MVCP 是 NP 完全的。（证明见[4]的第3章。）为了证明 MISP 的 NP完全性，我们证明 MVCP 可归约到 MISP。给定一个图 $G = (V, E)$，其中 $V = \{v_1, ..., v_n\}$，我们构造如下图$G' = (V', E)$，其中

$$V' = \{v_1, v_1', ..., v_n, v_n'\}.$$

设 T 是 V' 上的竞赛图，其在次序 $(v_1, v_1', ..., v_n, v_n')$ 下的反向边图为 G'。设 C^* 是 G 的最小顶点覆盖。我们断言， $V' \setminus C^*$ 是 T 中的最大独立集。显然，由于 C^* 是 G 中的最小顶点覆盖，我们有 C^* 也是 G' 中的最小顶点覆盖。因此，$G' \setminus C^*$ 不含边，由命题1可知， $T \setminus C^*$ 是传递的，所以 $V' \setminus C^*$ 是

T 中的独立集。反设存在 S'，使得 $|S'| < |C^*|$ 且 $T \setminus S'$ 是传递的。现在令 $S = \{v_i \in V\colon \{v_i, v_i'\} \cap S' \neq \varnothing, i \in [n]\}$。假设 S 不是 G 的顶点覆盖，那么存在一条边 $e = \{v_i, v_j\} \in E(G\backslash S)$，满足$i < j$。此时，$\{v_i, v_i', v_j\} \subseteq V' \setminus S'$ 在 T 中诱导出一个有向三角形，因此由命题1可知，$T \setminus S'$ 不是传递的，矛盾。因此，S 是 G 的顶点覆盖。由于$|C^*| > |S'| \geq |S|$，这与 C^* 的最小性矛盾。因此，求出 T 中最大独立集的大小，即可得到 G 中最小顶点覆盖的大小。■

设 G，H 为竞赛图。如果 G 不含与 H同构的诱导子图，我们称 G 其为 H-自由。本文主要着手研究以下问题：对于哪些 H，限制在 H-自由竞赛图上的 WMISP 可以在多项式时间内（关于竞赛图的规模）求解；以及对于哪些 H，限制在 H-自由竞赛图上的 MISP 是 NP 完全的？这一问题的动机来源于图中的类似问题，参见例如 [9, 11]。

Erdős 和 Moser 在 [3] 中证明，如果 H 是传递竞赛图，那么 H-自由竞赛图的数量是有限的。因此，当 H 为传递的时，限制在H-自由竞赛图上的 WMISP 可以在多项式时间内求解。如果 H 由 3 个顶点组成且不是传递的（即，H 是一个有向三角形），那么根据命题1，每个 H-自由竞赛图都是传递的。因此，我们的问题的第一个非平凡情形是 $|H| = 4$。以下是具有 4 个顶点的四种竞赛图（在同构意义下）：

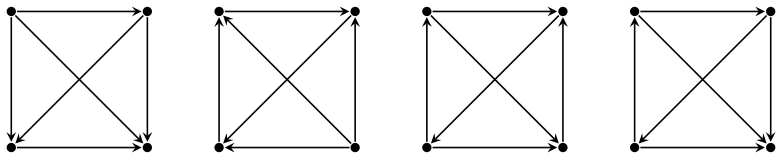


图1：在同构意义下，所有含4个顶点的竞赛图。

下面的结论很容易证明，但值得一提：

定理1.2。对于 H-自由竞赛图，加权最大独立集问题可在多项式时间内求解，当且仅当 $|V(H)| = 4$。

证明。 K_4-自由竞赛图只有有限多个，因此，对于 K_4-自由竞赛图，加权最大独立集问题可在常数时间内求解。注意到，由于传递子锦标赛是自补的，因此，在 H-自由竞赛图上的最大独立集问题与在 H-自由竞赛图上的最大独立集问题等价。注意$B_4 \cong D_4$，所以只需证明，在 B_4-自由竞赛图上的加权最大独立集问题属于P类，且在 C_4-自由竞赛图上的加权最大独立集问题属于P类。

设 G 是一个带有权重赋值 w 的 B_4-自由竞赛图，且它不是传递的；令 $S^* = \{v_1, ..., v_k\}$ 为 G 上加权最大独立集问题的一个最优解，使得 $v_i \to v_j$ 当且仅当 $i < j$。那么，$\{v_2, ..., v_k\} \in N^+(v_1)$。注意，由于 G 是 B_4-自由的，$N^+(v)$ 是一个

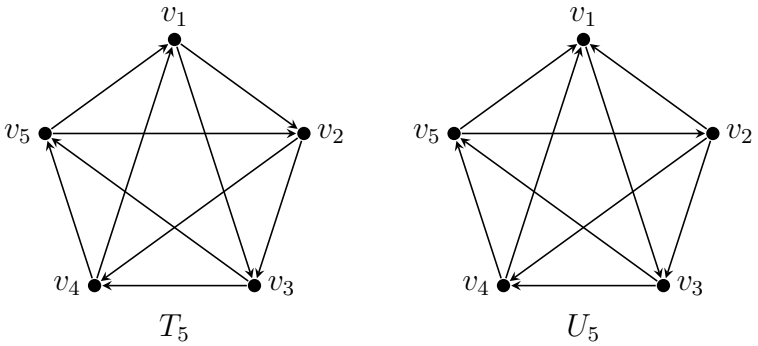
对所有 $v \in V$（G）都成立的独立集。因此，我们可以假设 N^+（v_1）$= \{v_2, ..., v_k\}$。于是，$v_1 \in$ $\arg\max_{v \in V\ (G)}$ w（N^+（v）$\cup \{v\}$）。 v_1 只有 n 种选择，因此我们可以检查 $\{N^+$（v）$\cup \{v\}$ 中所有集合的权重： $v \in V$（G）$\}$，从而找到最优解。显然，这可以在多项式时间内完成。

现在，设 G 是一个不传递的 C_4-自由竞赛图，其权重赋值为 w。设 $T = \{a, b, c\}$ 是 G 中一个满足 $a \to b \to c$ 的有向三角形。由于 G 是 C_4-自由的， $G \backslash T$ 中的每个顶点要么是 T 的公共出邻点，要么是 T 的公共入邻点。令 T^+ 为 T 的公共出邻点， T^- 为 T 的公共入邻点。我们声称 $T^- \Rightarrow T^+$。反之，设 $v_1 \in T^+$、$v_2 \in T^-$ 满足 $v_1 \to v_2$，则 $\{v_1, v_2, a, b\}$ 在 G 中诱导出一个 C_4。这意味着，我们可以将每个 C_4-自由竞赛图分解为一系列顶点子集 S_1，... ...， S_k，使得每个 S_i 要么是有向三角形，要么是独立集，并且 $S_i \Rightarrow S_j$ 当且仅当 $i < j$。换言之， G 的每个强连通分量大小为 1 或 3。对于每个满足 S_i 且诱导出有向三角形的 i，令 $S_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ 满足 w（a_i）$\geq w$（b_i）$\geq w$（c_i）。令 $S = \{S_i$： $i \in [k]$、S_i 独立集 $\}$，并令 $S' = \bigcup_{S_i}$ 有向三角形 $\{a_i, b_i\}$。显然， $S \cup S'$ 是 G 上加权最大独立集问题的一个最优解，并且可以在多项式时间内找到 $S \cup S'$。■

1.3 我们的主要结果

我们关注 H 有 5 个顶点的情况。当 H 有 5 个顶点时，刻画 H-自由竞赛图通常更加困难。不过，对于某些具有 5 个顶点的 H， H-自由素竞赛图这一类已经得到研究。（我们将在第 2 节定义素竞赛图。）例如，Latka 给出了 [6]中W_5-自由素竞赛图的结构定理，Liu 则给出了 U_5-自由素竞赛图的结构定理。我们证明，可以将 H-自由竞赛图上的 WMISP 归约为素 H-自由竞赛图上的 WMISP。利用这些结构定理，我们进一步给出了素 H-自由竞赛图上 WMISP 的一些复杂性结果。

以下是这五个顶点竞赛图 T_5、 U_5、 W_5:



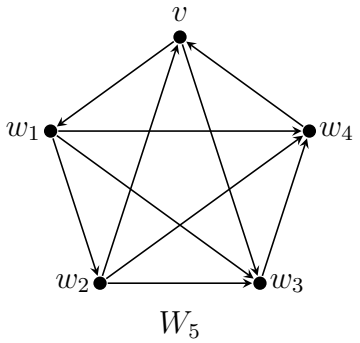


图 2： T_5， U_5 和 W_5。

在第 2.2 节中，我们将展示：

定理 1.3。 对于 W_5-自由竞赛图，加权最大独立集问题可以在多项式时间内求解。

在第 2.3 节中，我们将证明：

定理 1.4。 对于 U_5-自由竞赛图，加权最大独立集问题可以在多项式时间内求解。

我们还给出竞赛图 H 的一个必要条件，使得将 MISP 限制在H-自由竞赛图上的问题可以在多项式时间内求解。

定义 1.3.1。 如果竞赛图 G 的每个子竞赛图 G'都包含一个出（入）度至多为1的顶点，那么该竞赛图是 *1*-出（入）退化的。

定理 1.5. 如果 *MISP* 在限制为无 H 的竞赛图上可以在多项式时间内求解，那么 H 既是 *1*- 入退化的，也是 *1*- 出退化的。

注意， T_5 不是 1-入退化的，因此我们有以下推论：

推论 1.3.2. T_5-自由竞赛图上的 *MISP* 是 *NP* 完全问题。

2 多项式时间算法

2.1 到素竞赛图的多项式时间归约

若一个顶点集 $X \subseteq V$（G）满足：对于每个顶点 $v \in V$（G）$\backslash X$，要么 $v \Rightarrow X$，要么 $X \Rightarrow v$，则称其为齐次集。若齐次集 X 是平凡的，则 $|X| \leq 1$ 或 $|X| = |V$（G）$|$；否则称其为非平凡的。如果一个竞赛图没有非平凡齐次集，则称其为素 竞赛图。

我们首先通过一个类似于图版本结果的证明，证明以下定理:

定理 2.1.1。 如果 *WMISP* 对于 P 个素 H-自由竞赛图属于 P，那么 *WMISP* 对于所有 H-自由竞赛图都属于 P。

以下结果有助于证明 **定理 2.1.1**。

定理 2.1.2（Haglin 和 Wolf，[5]）。 一个具有 n 个顶点的竞赛图的所有极小非平凡齐次集都可以在 O（n^4）中找到。

定理 2.1.1 的证明。假设我们要为一个带权的 H-自由、且不是素的竞赛图 G 求解加权最大独立集问题。设 G 的权重函数为 w。令 $X \subset V$（G）为一个最小的非平凡齐次集。我们声称 X 诱导出一个素竞赛图：若存在 $U \subseteq X$，它是 $G[X]$中的非平凡齐次集，那么 U 也是 G中的非平凡齐次集，因此 U 是G中一个更小的非平凡齐次集，这与 X 是最小的相矛盾。因此， X 诱导出一个素竞赛图。根据定理 2.1.2，可以在 O（n^4）中找到这样的 X。

我们声称，可以将该问题归约为求解一个比G更小的竞赛图上的加权最大独立集问题。令 S为 V（G）的一个最大权重独立子集。若 $S \cap X$ 非空，则可以将 S 划分为三个集合 S_1、S_2、$S \cap X$，使得 $S_1 \Rightarrow S \cap X \Rightarrow S_2$。我们声称， $S \cap X$ 是 X 中最大权重的传递子竞赛图。反设存在一个非空独立集 $U \subseteq X$，使得 w（U）$>w$（$S \cap X$），则有 w（$S_1 \cup U \cup S_2$）$> w$（S），且 $S_1 \cup X \cup S_2$ 是独立的，这与 S的选取相矛盾。令 w^*（X）表示 X中独立集的最大权重。因此， S 要么与 X 相交，且交集的权重为 w^*（X），要么与 X不相交。现在，我们用一个新的单个顶点 x 替换集合 X，其权重为 w^*（X），并且对所有 $v \in V$（G）$\backslash X$，当且仅当 $v \Rightarrow X$时， $v \to x$ 成立。将新竞赛图记为 G/X，其权重函数为 w'。若 S 与 X不相交，则 $S \setminus X \cup \{x\}$ 是 G/X中权重为 w（S）的独立集；若 S 与 S 不相交，则 S 仍存在于 G/X中。另一方面，令 R 为 G/X中的最大权重独立集。若$x \notin R$，则 R 以相同权重存在于 G 中；若 $x \in R$，则（$R \setminus \{x\}$）$\cup$（$S \cap X$）是 G中权重相同的独立集。因此，求解 G/X 上的加权最大独立集问题所得的值，与求解 G上的加权最大独立集问题所得的值相同。由于 X 是非平凡的， $|X| > 1$，因此 $|V$（G/X）$| < |V$（G）$|$。

现在，假设我们有一个算法 A，能在多项式时间内求解不含 H 的素竞赛图上的加权最大独立集问题，那么我们可以对一般竞赛图执行以下操作：首先找到一个极小非平凡齐次集 X，并计算最优解

S 上加权最大独立集问题的最优解，使用算法 A 求解。然后，将 X 替换为一个权重为 $w(S)$ 的单一顶点，从而得到图 G/X。我们重复这一过程，直到得到一个素竞赛图（即不存在非平凡齐次集）。随后，使用算法 A 求解该素竞赛图上的加权最大独立集问题，由此得到原始竞赛图上加权最大独立集问题的最优解。

我们声称，若在含有 n个顶点的素竞赛图上求解加权最大独立集问题的运行时间为 $f(n)$，则求解加权最大独立集问题的运行时间至多为 $O(n^5)+O(n)f(n)$。注意，该算法是递归的，但由于 $|G/X| \leq |G| - 1$，递归最多进行 n 次。每次迭代中，我们处理一个至多含有 n 个顶点的竞赛图，并执行两项操作：找出一个极小非平凡齐次集，耗时 $O(n^4)$；计算竞赛图 $G[X]$上的最优解，耗时 $f(n)$。因此，总运行时间有界于 $O(n^5) + O(n)f(n)$。因此，如果 f 是多项式，那么该算法就在多项式时间内运行。 ■

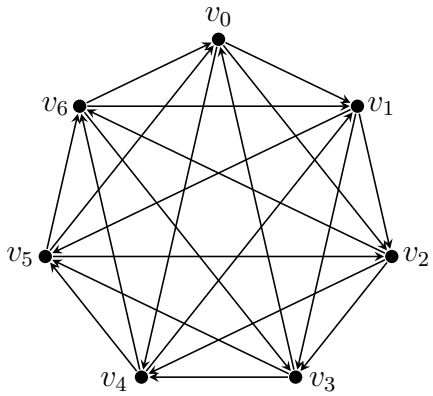
2.2 排除 W_5

沿用 [7],的记号，我们定义以下竞赛图：

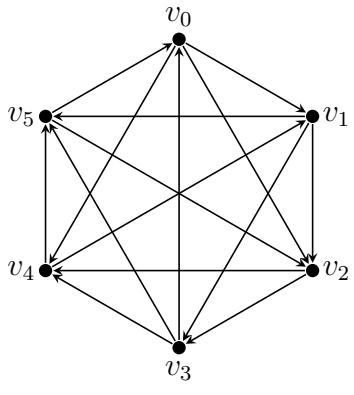
定义 2.2.1 定理。 设 $n \geq 1$ 为奇数。竞赛图 T_n、U_n、W_n 定义如下：

- T_n 是顶点集为 $\{v_1, ..., v_n\}$ 的竞赛图，其中若 $j - i \equiv 1、2、.....、\frac{n-1}{2}$（模 n）。
- U_n 是由 T_n 通过反转两端均位于$\{v_1, v_2, ..., v_{(n-1)/2}\}$中的所有边得到的竞赛图。
- W_n 是顶点集为 $\{v, w_1, ..., w_{n-1}\}$ 的竞赛图，其中若 $i < j$，且 $\{w_i : i\ even\} \Rightarrow v \Rightarrow \{w_i : i\ odd\}$。

现在我们定义另外几个竞赛图。令 I_n 为具有 n个顶点的传递竞赛图。令 Q_7 为顶点集为 $\mathbb{Z}_7$、边集为 $\{(i, j) : j - i \in \{1, 2, 4\}\}$ 的竞赛图。由于 Q_7 是点传递的，我们可以将 $Q_7 - v$ 定义为从 Q_7中删除一个顶点后得到的竞赛图。 Q_7 也称为7阶Paley竞赛图。



Q_7



$Q_7 - v$

图3： Q_7 和 $Q_7 - v$

定理 2.2.2 (Latka， [6])。*</style>*一个素竞赛图是 W_5-自由的，当且仅当它同构于 I_1、I_2、$Q_7 - v$、Q_7、T_n 或 U_n （其中某个奇数 $n \geq 1$）。

现在我们引入两个引理，以证明**定理1.2**。

引理 2.2.3. 类 $\{T_n$： $n \geq 1$、n 奇数$\}$ 上的加权最大独立集问题可在多项式时间内求解。

证明。 在 [8], 中，Liu 证明了 T_n 是 D_4-自由的。然后，根据 1.3， $\{T_n$： $n \geq 1, n$ 奇数$\}$ 上的加权最大独立集问题可在多项式时间内求解。■

引理 2.2.4. 类 $\{U_n$： $n \geq 1$、n 奇数$\}$ 上的加权最大独立集问题可在多项式时间内求解。

证明。 设 $n \geq 1$ 是一个奇数，并假设我们要在 $V(G)$上求解 $G \cong U_n$的加权最大独立集问题，其权重赋值为 w 。我们可以假设 $n \geq 5$。首先，我们希望按照 U_n的定义，将顶点标记为 $v_1, ..., v_n$。简言之，我们称之为 $V(G)$的适当标号。以下是 U_n 关于 $n \geq 5$定义的两个有用性质：

- $v_{\frac{n-1}{2}}$是唯一入度为 1 的顶点，其入邻点是 v_n；

对于 $n \geq 5$。

显然，我们可以在多项式时间内找到图 G 的一种正确标号方式。

现在，利用适当标号，我们令 $A = \{v_{\frac{n+1}{2}}, ..., v_n\}$ 和 $B = \{v_1, ..., v_{\frac{n-1}{2}}\}$。令 S 为 $G \cong U_n$ 的一个最大权独立集。如果 $S \subseteq A$ 或 $S \subseteq B$，那么由于 A, B 都是独立的，我们有 $S = A$ 或 $S = B$。否则，我们可以假设 $S \cap A \neq \varnothing$ 和 $S \cap B \neq \varnothing$。

我们首先断言， U_n 没有恰有两个顶点属于 B 的有向三角形。假设 v_i, v_j, v_k 诱导出一个有向三角形，且 $v_i \in A$, v_j, $v_k \in B$ 满足 $j > k$。由于 $v_i \in A$, $i > j > k$。于是 $v_j \to v_k$ ，因为 v_j, $v_k \in B$ 满足 $j > k$，因此 $v_k \to v_i$, $v_i \to v_j$，这意味着 $i - k < \frac{n}{2}$ 和 $i - j > \frac{n}{2}$。这与 $j > k$矛盾。 –

若 $|S \cap A| = 1$，那么由于 U_n 与 B中恰有两个顶点时不会构成有向三角形，因此可得 $S \cap B = B$。现在假设 $|S \cap A| \geq 2$。令 v_i 为 $S \cap A$ 中索引最小的顶点，令 v_j 为 $S \cap A$ 中索引最大的顶点。我们断言 $S' = \{v_i, v_{i+1}, ..., v_j\} \subseteq S$。假设 $v_k \notin S$ 且 $i < k < j$，那么由 S 的极大性可得， v_k 与 S 中的两个顶点构成一个有向三角形。令 v_k、v_p、v_q 构成一个有向三角形，使得 v_p、$v_q \in S$。由于 A 是无环的，因此有 $\{v_p, v_q\} \cap B \neq \varnothing$。不失一般性，我们可以假设 $p < q$。那么，要么 $\{v_p, v_q\} \subseteq B$，要么 $v_p \in B$、$v_q \in A$。下面分三种情况讨论。首先假设 v_p、$v_q \in B$。这不可能，因为不存在与 B 中两个顶点构成有向三角形的情况。其次，假设 $v_p \in B$、$v_q \in A$ 且 $q < k$。那么 $v_q \to v_k$、$v_k \to v_p$、$v_p \to v_q$。这意味着 $k - p > \frac{n}{2}$，因此 –

$j - p > \frac{n}{2}$。因此，$\{v_j, v_p, v_q\}$ 是一个有向三角形，这与 S 独立矛盾。第三，假设 $v_p \in B$, $v_q \in A$ 且 $q > k$，那么类似的论证可得 $\{v_i, v_p, v_q\}$ 是一个有向三角形。因此，这样的 v_k 不存在，也就是说 $S' = \{v_i, v_{i+1}, ..., v_j\} \subseteq S$。这表明我们只需找到 i, j 来修正 $S \cap A$。

现在假设我们固定了 i, j（因此也固定了 $S \cap A$）。我们断言 $S \cap B = B \setminus \{v_k : v_j \to v_k, v_k \to v_i\}$。如果 $v_j \to v_k$ 和 $v_k \to v_i$，那么 $\{v_j, v_k, v_i\}$ 诱导出一个有向三角形，因此 $v_k \notin S$。另一方面，假设 $v_l \in B \setminus \{v_k : v_j \to v_k, v_k \to v_i\}$ 和 $v_k \notin S$。由于没有有向三角形在 B 中包含两个顶点，因此 v_l 与 $S \cap A$ 中的两个顶点共同诱导出一个有向三角形。设 $\{v_p, v_q, v_l\}$ 是这样一个三角形，且满足 $i \leq p < q \leq j$，那么 $\{v_i, v_j, v_l\}$ 也是一个有向三角形，因此 $v_l \in \{v_k : v_j \to v_k, v_k \to v_i\}$，这就产生了矛盾。因此 $S \cap B = B \setminus \{v_k : v_j \to v_k, v_k \to v_i\}$。注意，根据 U_n 的定义，我们有 $B \setminus \{v_k : v_j \to v_k, v_k \to v_i\} = B \setminus \{v_k : i - \frac{n}{2} < k < j - \frac{n}{2}\}$。

因此，总共有 S 种情况：

1. $S = A$ 或 $S = B$2. $|S \cap A| = 1$ 且 $S \cap B = B$3. 对于某些 $\frac{n+1}{2} \leq i < j \leq n$ 和 $S \cap B = B \setminus \{v_k : i - \frac{n}{2} < k < j - \frac{n}{2}\}$

对于情况1，需要检查 $O(1)$ 个集合；对于情况2，需要检查 $O(n)$ 个集合；对于情况3，需要检查 $O(n^2)$ 个集合。显然，利用给定的 U_n 的适当标记，可以在多项式时间内计算所有这些集合的权重，并且我们已经证明可以在多项式时间内计算该适当标记。因此，我们可以在多项式时间内枚举 S 的所有可能候选项。因此，在 U_n 中计算独立集的最大权重属于多项式时间。■

现在我们可以证明**定理 1.3**：

定理 1.3. W_5-自由竞赛图上的加权最大独立集问题可在多项式时间内求解。

证明。根据定理 2.1.1，只需证明我们可以在多项式时间内求解素的 W_5-自由竞赛图上的加权最大独立集问题。设 G 是一个有 $n \geq 8$ 个顶点的 W_5-自由传递竞赛图。根据定理 2.2.2，G 同构于 T_n 或某个奇数 $n \geq 1$ 对应的 U_n。我们可以在多项式时间内检查所有顶点是否具有相同的出度。如果所有顶点的出度都相同，那么 $G \cong T_n$，并且根据引理 2.2.3，我们可以在多项式时间内求解 G 上的加权最大独立集问题。否则，$G \cong U_n$，并且根据引理 2.2.4，我们可以在多项式时间内求解 G 上的加权最大独立集问题。因此，可以在多项式时间内求解 W_5-自由竞赛图上的 MISP。■

2.3 排除 U_5

下面给出所有素的 U_5-自由竞赛图的结构定理:

定理 2.3.1 (Liu, [7])。 设 G 是一个素竞赛图。当且仅当 G 是 T_n 时， G 才是 U_5-自由的；其中， G 是某个奇数 $n \geq 1$ ，或者 $V(G)$ 可以划分为集合 X、 Y、 Z ，使得 $X \cup Y$、 $Y \cup Z$和 $Z \cup X$ 都是独立的。

引理 2.3.2. 存在一个多项式时间算法，以一个素 U_5-自由竞赛图G为输入，并返回 $V(G)$的一个划分(X, Y, Z)，使得 $X \cup Y$、 $Y \cup Z$和 $Z \cup X$都是独立的。

证明。T 以下算法由 Seokbeom Kim 提出（私人通信）：

(X, Y, Z)-划分

要求： G是一个 U_5-自由的素竞赛图，且 $G[T]$ 是一个有向三角形
函数 FindPartition(G,T)
$T = \{x_0, y_0, z_0\}$, $X = \{x_0\}$， $Y = \{y_0\}$， $Z = \{z_0\}$, $S = X \cup Y \cup Z$
当 $S \neq V(G)$ **时执行**
对于 $i \in V(G) \setminus S$ **执行**
如果 i与 S 构成一个有向三角形**则**
如果 $X \cup Y \cup \{i\}$ 包含一个有向三角形**则**
$Z \leftarrow Z \cup \{i\}$
否则，如果 $X \cup Z \cup \{i\}$ 包含一个有向三角形**则**
$Y \leftarrow Y \cup \{i\}$
else
$X \leftarrow X \cup \{i\}$
结束如果
$S \leftarrow S \cup \{i\}$
结束如果
结束循环
结束循环
返回 (X, Y, Z)
结束函数

我们声称，该算法将终止，并为结构定理返回一个正确的划分。我们注意到， T 中三个顶点的标签在对称意义下必然是正确的。现在，归纳地考虑算法的某一步，假设 S中的所有顶点都已被正确标记。如果 $S \neq V(G)$ ，那么我们声称，存在一个不在 S 中的顶点，使其与 S 诱导出一个有向三角形。由于我们从一个有向三角形开始，因此归纳地假设 $G[S]$ 是强连通的。由于 $S \neq V(G)$ 且 G 是素的，因此存在一个顶点 $i \notin S$ ，它在 S中同时具有一个入邻点和一个出邻点。由于 $G[S]$是强连通的，且 $N^+(v) \cap S, N^-(v) \cap S$将 S划分为两个非空部分，因此存在 $u \in N^+(v) \cap S, v \in N^-(v) \cap S$，使得 $u \to v$。

现在，这给出了 $S \cup \{i\}$中的一个有向三角形 $\{u, v, i\}$。现在，在 $G[S \cup \{i\}]$中，所有顶点的标签都能被正确确定，因为 u, v, i 中恰有一个分别属于 X, Y, Z ，并且我们已经将 u, v 正确标记。此外， $G[S \cup \{i\}]$ 是强连通的，从而保持了我们的归纳假设。归纳地，该算法将每个顶点都正确标记为 X, Y, Z中的一个。显然，该算法在多项式时间内运行。 ■

该算法表明，如果我们想确定无 U_5 的素竞赛图上的加权最大独立集问题的复杂度，那么可以安全地假设我们具有结构定理中所述的划分 (X， Y， Z)。利用这个引理，我们可以证明以下结果：

定理 1.4. 无 U_5 的竞赛图上的加权最大独立集问题可以在多项式时间内求解 $e.$

为了证明**定理 1.4**，我们先定义证明中会用到的一些术语：

定义 2.3.3. 设 G 是一个竞赛图，其具有关于 $V(G)$ 的三划分 (X, Y, Z)。如果一个有向三角形由顶点 $x \in X$、$y \in Y$、$z \in Z$ 组成，并且满足 $x \to y$、$y \to z$、$z \to x$，则称它为 XYZ 三角形。

引理 2.3.4. 设 G 是一个竞赛图。如果 $v \in V(G)$ 和 $V(G)$ 可以划分为集合 X、Y、Z，使得 $X \cup Y$、$Y \cup Z$ 和 $Z \cup X$ 都是独立的，那么要么每个包含 v 的有向三角形都是 XYZ 三角形，要么每个包含 v 的有向三角形都是 XZY 三角形。

证明。 由于 $X \cup Y$， $Y \cup Z$， $Z \cup X$都是独立集，因此所有包含v的有向三角形都必须分别包含来自 X， Y， Z的一个顶点。现在，假设 $v \in X$且存在y_1， $y_2 \in Y$， z_1，$z_2 \in Z$，使得 $\{v, y_1, z_1\}$是一个 XYZ三角形，而 $\{v, z_2, y_2\}$是一个 XZY三角形。由于 $v \to y_1$， $y_2 \to v$且 $X \cup Y$是传递的，我们必有 $y_2 \to y_1$。类似地，$z_1 \to z_2$。但注意到 $z_1 \to z_2$， $z_2 \to y_2$， $y_2 \to y_1$， $y_1 \to z_1$，因此 $Y \cup Z$不是传递的，矛盾。■

引理 2.3.5。 如果 G 是一个素 U_5-自由竞赛图，那么我们可以在多项式时间内找到一个三划分 (X, Y, Z)，将 $V(G)$ 划分为三部分，使得 $X \cup Y$、$Y \cup Z$、$Z \cup X$ 都是独立的，并且 G 中的所有有向三角形都是 XYZ 三角形。

证明。 在引理 2.3.2 的证明中，我们注意到，起初有一个 XYZ 三角形$\{x_0, y_0, z_0\}$。我们将通过归纳法证明， S 中的每个顶点都包含在一个 XYZ三角形中；由此即可得到结论，这也正是引理 2.3.4 的结果。算法开始时这一点成立。当我们将顶点 i 添加到 S时，可知存在顶点 $p, q \in S$，它们与 i构成一个有向三角形。根据引理 2.3.4，由于 $p \in S$，可知这个三角形是一个 XYZ 三角形。■

因此，从现在起，我们可以假设 G 是一个素 U_5 自由竞赛图，其划分为 (X、Y、Z)，且 G 中所有有向三角形均为 XYZ。现在，令 $X = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$、$Y =$

$\{y_1, ..., y_q\}$、 $Z = \{z_1, ..., z_r\}$，使得这些指标为每个集合提供自然拓扑排序。我们将描述一种多项式时间算法，通过动态规划求出 G 中的最大权重独立集。我们首先证明一个对该算法有用的引理:

引理 2.3.6。令 G, X, Y, Z 如上所定义。令 $S_{i,\ j,\ k} = \{x_i, x_{i+1}, ..., x_p\} \cup \{y_j, y_{j+1}, ..., y_q\} \cup \{z_k, z_{k+1}, ..., z_r\}$。已知所有满足 $i \in [p], j \in [q], k \in [r]$ 的 $G[S_{i,j,k}]$ 的加权最大独立集问题最优解，我们可以在多项式时间内计算出 G 的加权最大独立集问题最优解。

证明。令 S^* 为 G 上加权最大独立集问题的一个最优解。为计算最优解，我们考虑以下 3 种情况:

- **情况1：** $x_0 \notin S^*$
- **情况2：** $x_0 \in S^*$， $N^+(x_0) \cap Y \cap S^* \neq \varnothing$
- **情况3：** $x_0 \in S^*$， $N^+(x_0) \cap Y \cap S^* = \varnothing$

情况1： $x_0 \notin S^*$:
那么， S^* 也是 $G[S_{1,1,1}]$的最优解。我们只需检查 $G[S_{1,1,1}]$的最优解。

情况2： $x_0 \in S^*$ 和 $N^+(x_0) \cap Y \cap S^* \neq \varnothing$:
令 Y' 为 Y 中 x_0 的入邻点集合，并令 m 为满足 $y_m \in N^+(x_0) \cap S^*$的最小指标。令 Z'为 y_m的所有入邻点组成的集合。令 $A = X \setminus \{x_0\}$、$B = \{y_m, ..., y_q\}$，并令 C为 Z中既是 y_m的出邻居、又是 x_0的出邻居的顶点集合。若 S' 是 $G[A \cup B \cup C]$的最优解，我们断言$R^* = \{x_0\} \cup S' \cup Y' \cup Z'$ 是 G的最优解。

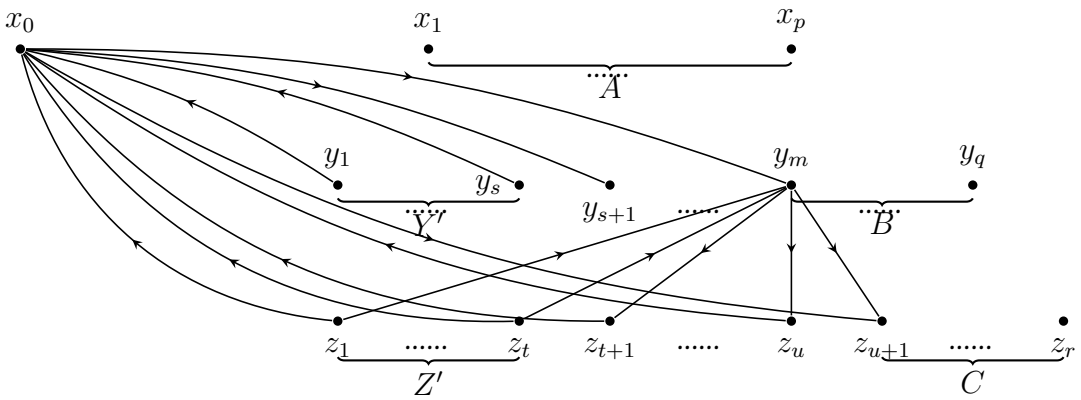


图 4：情况2示意图

我们首先证明 $S^* \subseteq \{x_0\} \cup Y' \cup Z' \cup A \cup B \cup C$。假设不然；由于 $A \cup \{x_0\} = X$，我们只需考虑 $S^* \cap Y$和 $S^* \cap Z$。由于 $Y \setminus (Y' \cup B)$ 是索引为 $i < m$ 的 x_0 的出邻居集合y_i，根据 y_m 的定义，我们知道 $Y \setminus (Y' \cup B)$ 不相交

于 S^*。对于 $S^* \cap Z$，我们有 $Z \setminus (C \cup Z') = Z \cap N^+(y_m) \cap N^-(x_0)$。由于该集合中的每个顶点都与 y_m 和 x_0 构成一个有向三角形，因此该集合也与 S^* 不相交，证毕。

为了证明该断言，还需证明 R^* 在 G中是独立的。由于$Y' \Rightarrow \{x_0\} \cup A$ 以及所有三角形都是 XYZ，因此 R^* 中不存在包含 Y'中顶点的有向三角形。因此， R^* 中的每个有向三角形都使用了 B 中的一个顶点。由于 $Z' \Rightarrow B$，不存在使用 Z'的 R^* 中的有向三角形。现在， R^* 中的每个有向三角形都使用了 C中的一个顶点，并且由于 $x_0 \Rightarrow C$ ，不存在使用 x_0的 R^* 中的有向三角形。因此， R^* 中的每个有向三角形都属于 S'，根据定义， S' 是独立的。因此， R^* 是独立的。

情况3： $x_0 \in S^*$， $N^+(x_0) \cap Y \cap S^* = \varnothing$:
令 Y'为 Y中 x_0的所有入邻点的集合，我们断言在此情况下 $S^* = X \cup Y' \cup Z$。注意，由于 $Y' \Rightarrow x_0 \Rightarrow X \setminus \{x_0\}$ 且 $X \cup Y$是独立的，因此可得$Y' \Rightarrow X$。由于所有三角形都是 XYZ，因此 S^* 不含有向三角形，从而 S^*是独立的。注意， S^* 包含了所有可能属于 S^* 的顶点（因为我们假设 $x_0 \in S^*$ 且 S^* 在 $S^* \cap Y$中没有出邻点），因此它是一个最优解。

现在，令 $n = |V(G)|$。注意，在情况1中，我们只需检查已有的一个解，因此若情况1发生，运行时间为 $O(1)$。对于情况2，我们需要计算集合 S'， Y'， Z'。至多考虑 n 个 m 的可能取值；对于每个取值，根据我们的假设，我们可以在 $O(1)$ 时间内求得 S'，而对于其余两个集合，我们需要花费 $O(n^2)$ 的时间来找到它们。因此，所需运行时间为 $O(n)$。对于情况3，我们只需找到集合 Y'，它也属于 $O(n)$。因此，总运行时间为多项式，这就完成了证明。■

如果我们希望在多项式时间内求解 $G[\{x_i, ..., x_p\} \cup \{y_j, ..., y_q\} \cup \{z_k, ..., z_r\}]$ 上的加权最大独立集问题，只需知道对于所有 $i' > i$， $j' \geq j$ 和 $k' \geq k$，集合 $G[\{x_{i'}, ..., x_p\} \cup \{y_{j'}, ..., y_q\} \cup \{z_{k'}, ..., z_r\}]$ 上的最优解。（根据对称性，也可以是 $i' \geq i$， $j' > j$ 和 $k' \geq k$，或者 $i' \geq i$， $j' \geq j$ 和 $k' > k$。）现在我们可以证明主定理了。

定理 1.4 的证明。 根据引理 2.1.1，只需证明在素 U_5-自由竞赛图上，WMISP 属于 P类。给定一个素 U_5-自由竞赛图 G 上的 WMISP，我们首先将 $V(G)$ 划分为三个集合 X、 Y、 Z，使得 $X \cup Y$、 $Y \cup Z$ 和 $Z \cup X$ 均为独立集。根据引理 2.3.2，我们可以在多项式时间内找到这样的划分。根据引理 2.3.4，我们可以假设 G 中的所有三角形都是 XYZ 三角形。令 $X = \{x_1, ..., x_p\}$、 $Y = \{y_1, ..., y_q\}$ 和 $Z = \{z_1, ..., z_r\}$，使得这些下标分别为每个集合上的自然拓扑排序。对于 $i \in [1, p]$、 $j \in [1, q]$、 $k \in [1, r]$，我们定义 $X_i = \{x_i, ..., x_p\}$、 $Y_j = \{y_j, ..., y_q\}$、 $Z_k = \{z_k, ..., z_r\}$。我们还定义 $X_{p+1} = Y_{q+1} = Z_{r+1} = \varnothing$。

算法如下：

素 U_5-自由竞赛图的加权最大独立集问题

要求： G 是素 U_5-自由竞赛图，具有如下划分 (X, Y, Z)（见 2.3.1），其权重函数为 w： $V(G) \to \mathbb{Q}_+$

对所有 $a \in [p], b \in [q], c \in [r]$， $\mathrm{OPT}(a, b, c) \leftarrow 0$

对所有 $a = p+1, b \in [q], c \in [r]$， $\mathrm{OPT}(a, b, c) \leftarrow w(Y_b) + w(Z_c)$

对于 $i = p, \ldots, 1$ **执行**

  对于 $j = q, \ldots, 1$ **执行**

    对于 $k = r, \ldots, 1$ **do**

      $S_1 = \mathrm{OPT}(i+1, j, k)$

      $S_2 = w(X_i \cup Z_k \cup (Y_j \cap N^-(x_i)))$

      对于 $y_m \in N^+(x_i) \cap Y_j$ **执行**

        $Y' = N^-(x_i) \cap Y_j$, $Z' = N^-(y_m) \cap Z_k$

        $C = Z_k \cap N^+(y_m) \cap N^+(x_i)$

        $n \leftarrow$ C中顶点的最小索引

        $S_{3,\ m} = w(\{x_i\} \cup Y' \cup Z' \cup \mathrm{OPT}(i+1,\ m,\ n))$

        $\mathrm{OPT}(i,\ j,\ k) =$最大值$\{S_1, S_2, S_{3,m}$： $m \in [q]\ \ s.t.\ \ y_m \in N^+(x_i) \cap Y_j\}$

      结束循环

    结束循环

  结束循环

结束循环

返回 $\mathrm{OPT}(1,\ 1,\ 1)$

上述算法的正确性已在引理 2.3.6 的证明中给出。关于算法的运行时间，我们注意到有 4 个 for 循环，每个循环都遍历顶点的一个子集，因此总共需要运行 $O(n^4)$ 次循环。对于循环内的每一步，注意到我们需要 $O(n)$ 时间来计算$S_{3,\ m}$ 针对每个 y_m，而所有其他步骤的时间复杂度均为 $O(1)$。因此，总运行时间为 $O(n^5)$，属于多项式时间。■

3 NP完全性结果

在第 3 节中，我们讨论 MISP 仍然是 NP 完全的无 H 竞赛图类。

3.1 排除 1-退化锦标赛

定义 3.1.1。 对于一个有 n 个顶点的图 G，我们将图 $G \cup nK_1$（即有 n 个额外孤立顶点的 G）记为 G^+。

定义 3.1.2。 对于图类 $\mathcal{C}$，我们将图类 $\{G^+ : G \in \mathcal{C}\}$记为 $\mathcal{C}^+$。

以下是定理 1.1 证明的一个推论：

定理 3.1.3. 如果 $\mathcal{C}$ 是一个图类，使得在 $\mathcal{C}$ 上的 *MVCP*（最小顶点覆盖问题）是 *NP* 完全的，那么在反向边图属于 $\mathcal{C}^+$的竞赛图上，*MISP* 是 *NP* 完全的。

证明。 直接使用 $\mathcal{C}$ 中的图进行定理 1.1 的归约即可得出这一结论。 ■

现在我们可以证明定理 1.5 了。关键思路是使用定理 1.1 证明中采用的同一归约，并应用以下引理：

引理 3.1 (Chvátal, Poljak [2, 12])。 图G 上的最小顶点覆盖问题等价于 G' 上的最小顶点覆盖问题，其中 G' 由将 G的每条边替换为一条含 *3* 条边的路径得到。

定理 1.5. 如果能够在多项式时间内求解限制在 H-自由竞赛图上的 *MISP*，那么 H 既是 *1*-入退化的，也是 *1*-出退化的。

证明。 令 $\mathcal{C}$ 为这样一类图：它们可由另一张图的每条边替换为一条含 3 条边的路径得到。根据引理 3.1 和定理 3.1.3，在反向边图属于 $\mathcal{C}^+$ 的竞赛图上求解 MISP 是 NP 完全的。我们声称，若竞赛图 T 的反向边图属于 $\mathcal{C}^+$，则 T 是 1-入退化且 1-出退化的。

令 G为一个图，其 $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}, E(G) = \{e_1, ..., e_m\}$。令 G'为将 G 的每条边替换为一条含 3 条边的路径后得到的图。我们将对应于边 e_i 的两个内部顶点记为 e_{ia} 和 e_{ib}。现在有 $V(G')$ $=\{v_1, ..., v_n, e_{1a}, e_{1b}, ..., e_{ma}, e_{mb}\}$。现在可以构造图 G'^+，其顶点集为 $\{v_1, v'_1, ..., e_{mb}, e'_{mb}\}$，边集为 $E(G')$。令 T 为这样一个竞赛图：在枚举 $\sigma = (v_1, v'_1, ..., v_n, v'_n, e_{1a}, e'_{1a}, e_{1b}, ..., e_{mb}, e'_{mb})$下，其反向边图为 G'^+。

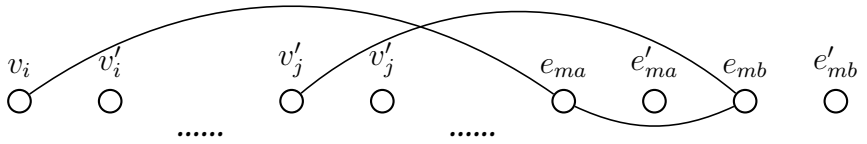


图5： G^+中的一条长度为 3 的路径示例（v_i， e_{ma}， e_{mb}， v_j）

考虑 T 的一个子竞赛图，其顶点集为 S，并反设$T[S]$ 没有出度为 1 的顶点。令 v 为 S 在枚举σ下的最后一个顶点。若 $v \in \{v_1, v_1', ..., v_n, v_n'\}$，则 v的出度为 0。若 $v \in \{e_{1a}', e_{1b}', ..., e_{ma}', e_{mb}'\}$，则 v不与任何反向边关联，因此 v的出度仍为 0。若 $v \in \{e_{1a}, ..., e_{ma}\}$，则$v$ 与一条连接到 v之前顶点的反向边关联，因此 v 的出度至多为 1。由此可得 $v \in \{e_{1b}, ..., e_{mb}\}$；令 $v = e_{xb}$，其中 $x \in [m]$。若 v的出度至少为 2，则由于 v 在 $T[S]$中至少与 2 条反向边关联，可得 $e_{ma} \in S$。若$e_{ma}' \in S$，则 e_{ma}' 的出度至多为 1；若 $e_{ma}' \notin S$，则 $e_{ma} \in S$ 的出度至多为 1。因此 T 是 1-出退化的。

现在假设 H 不是 1-出退化的，那么它包含一个子竞赛图 H'，其中所有顶点的出度都至少为 2。根据上述结果，T 是 H'-自由的，因此 T 是 H-自由的。此外，根据引理 3.1 和定理 1.1 中的归约，我们可以利用 T 中 MISP 的一个解来求解 G中的 MVCP。因此，针对 H-自由竞赛图的 MISP 是 NP 完全的。通过反转竞赛图 G中的所有边，我们得到其补图 G。显然，针对 G 的 MISP 等价于针对 G的 MISP，因此，将上述结果中的“出度”替换为“入度”后，结论同样成立。因此，如果能在多项式时间内求解针对 H-自由竞赛图的 MISP，那么 H 就是 1-入退化且 1-出退化的。证明至此结束。■

推论 1.3.2。 针对 T_5-自由竞赛图的 *MISP* 是 *NP* 完全的。

3.2 排除 k-蛇

由定理 1.5 可知，自然会让人想知道其逆命题是否成立。也就是说，对于每个 H，如果它是 1-入退化且 1-出退化的，那么是否都能在多项式时间内求解 H-自由竞赛图的 MISP？遗憾的是，答案是否定的。下面我们给出一个竞赛图 H，它既是 1-入退化的，也是 1-出退化的，但我们可以证明，H-自由竞赛图上的 MISP 是 NP 完全的。

定义 3.2.1。 k-蛇是指顶点为 $v_1, ..., v_k$ 的竞赛图，使得反向边图 B_σ 在枚举 $\sigma = (v_1, ..., v_k)$ 下的边集为 $E(B_\sigma) = \{v_i v_{i+1} : i \in [k-1]\}$。

定理 3.2.2。 k-蛇既是 *1*-入退化的，也是 *1*-出退化的。

证明。 设 T是一个 k-蛇，且 $S \subseteq V(T)$。那么，反向边图 $T[S]$ 在次序$(v_1, ...v_k)$下由若干条路径构成。反向边图中的第一个顶点和最后一个顶点至多关联 1 条反向边。因此，第一个顶点的入度至多为 1，最后一个顶点的出度至多为 1。■

定理 3.2.3。 无 *7*-蛇形锦标赛上的 *MISP* 问题是 *NP* 完全。

证明。 （概述）我们采用与定理 1.5 证明中相同的构造，但需要更改 $V(G'^{+})$ 的枚举顺序。对于任意边 $v_i v_j \in E(G)$（假设 $i < j$），我们将该边记为 e_{ij}。我们对边排序，使得 $e_{ij,\ a}$ 位于

在 $e_{kl,\ a}$ 之后，当且仅当 $i < k$ 或 $i = k,\ j < l$。然后我们按照定理 1.5 的证明继续进行。

令 $V = \{v_1, v_1', ..., v_n, v_n'\}, E = V(G^+) \setminus V$。注意，图 $G^+[E]$ 中不存在 4-蛇形。假设 G^+ 中存在一个 7-蛇形，其顶点为 $\{x_1, ..., x_7\}$，且在次序 $(x_1, ..., x_7)$ 下，$x_i x_{i+1}$ 对于 $i \in [6]$ 是一条边。根据 x_1, x_2, x_3 是否属于 V，可以分情况讨论。可以验证，在所有情况下，G^+ 中都没有可作为最后一个顶点 x_7 的候选顶点，这说明图 G^+ 是无 7- 蛇形的。因此，无 7- 蛇形竞赛图上的 MISP 是 NP 完全的。■

4 致谢

我们感谢 Sepehr Hajebi 与我们进行了许多有益的讨论，也感谢 Seokbeom Kim 允许我们纳入 (X、Y、Z)-划分算法。

参考文献

[1] Eli Berger、KrzysztofChoromanski、Maria Chudnovsky、Jacob Fox、Martin Loebl、Alex Scott、Paul Seymour 和 Stéphan Thomassé。“竞赛图与着色”。载于：组合理论杂志*B*辑 103.1 (2013)，第 1–20 页。ISSN：0095- 8956。DOI：https://doi.org/10.1016/j.jctb.2012.08.003。[2] Václav Chvátal。“Edmonds多面体与组合问题的层级”。载于：离散数学 4.4 (1973)，第 305–337 页。ISSN：0012-365X。DOI：https: //doi.org/10.1016/0012-365X(73)90167-2。[3] Paul Erdős 和 Leo Moser。“关于将有向图表示为多个排序的并”。载于：*Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 9 (1964)，第 125–132 页。[4] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：NP完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979。[5] David Haglin 和 Marty Wolf。“竞赛图中的凸子集”。载于：*SIAM*离散数学杂志9 (1996年2月)，第 63–70 页。DOI：10.1137/S0895480193251234。[6] Brenda Latka。“省略 N5 的竞赛图结构定理”。载于：图论杂志 42 (2003年3月)，第 165–192 页。DOI：10.1002/jgt.10081。[7] Gaku Liu。“U5-自由竞赛图的结构定理”。载于：图论杂志 78.1 (2014年3月)，第 28–42 页。ISSN：0364-9024。DOI：10.1002/jgt.21789。[8] Gaku Liu。《竞赛图的若干定理》。2012。arXiv：1207.0237 [math.CO]。网址：https://arxiv.org/abs/1207.0237。[9] Andrea Munaro。“次三次无三角形图的线图”。载于：离散数学 340 (2017年6月)，第 1210–1226 页。DOI：10.1016/j.disc.2017.01. 006。[10] V Neumann-Lara。“有向图的二色数”。载于：组合理论杂志*B*辑 33.3 (1982)，第 265–270 页。ISSN：0095-8956。DOI：https: //doi.org/10.1016/0095-8956(82)90046-6。[11] Giacomo Paesani、Daniël Paulusma 和 Paweł Rzążwski。“ H-自由图上的反馈顶点集与偶圈横截集：寻找大型块图”。载于：*SIAM*离散数学杂志 36.4 (2022)，第 2453–2472 页。DOI：10.1137/22M1468864。[12] Svatopluk Poljak。“关于图的稳定集与着色的一则注记”。载于：*Commen-tationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 015.2 (1974)，第 307–309 页。网址：http://eudml.org/doc/16622。[13] Ewald Speckenmeyer。“关于有向图中的反馈问题”。载于：计算机科学中的图论概念。1990，第 218–231 页。ISBN：978-3-540-46950-6。