arXiv:2601.17200v1 [math.SP] 23 Jan 2026

三对角托普利茨矩阵的对角对称化*

JOHANN VERWEE†

摘要。 我们为可对称化情形 $ac > 0$ 下的实三对角托普利茨矩阵$A_n(a,b,c)$（对角线元素为 b，次对角线元素为 a，超对角线元素为 c）构建了一个自成体系的框架。通过对角相似变换，可将 $A_n(a,b,c)$ 变为对称托普利茨矩阵，从而得到显式的特征值对、切比雪夫行列式／特征多项式公式，以及逆矩阵的闭式格林核。作为应用，我们在由该相似变换诱导的自然加权希尔伯特空间中，给出了精确的极端特征值和条件性公式。对于经典循环数矩阵$A_n(d,d+1,1)$，我们证明 $\det(A_n(d,d+1,1)) = 1+d+\cdots+d^n$，并得到该循环数多项式的有限余弦乘积分解，同时给出定量界以及用循环数表示的显式逆矩阵。

关键词。 三对角托普利兹矩阵，对角对称化，切比雪夫多项式，逆核，条件数，循环数

AMS 学科分类。 15A18,15B05, 33C45, 11B83

1. 引言。 三对角托普利兹矩阵是少数几类结构化矩阵之一，其特征值、行列式和逆矩阵都可以同时写成闭式公式。本文的目标有二。首先，我们提出一个简洁的对角对称化 原理，将若干经典计算整合为一个陈述，并清楚揭示自然的加权内积。其次，我们运用这一框架，将循环数模型提炼为一个具体推论。这里，循环数 （以 d 为进制）指多项式 $1+d+\cdots+d^n$，它也等于 $(d^{n+1}-1)/(d-1)$，其中 $d \neq 1$。在此情形下，我们推导出一个有限余弦乘积分解，并给出超出行列式恒等式的信息（特别是条件性和显式逆核）。

核心观察是，当 $ac > 0$ 时，托普利兹矩阵 $A_n(a,\ b,\ c)$ 通过对角相似变换与一个非对角元为 $\sqrt{ac}$ 的对称三对角托普利兹矩阵相似。这一相似变换不仅传递特征值，还确定了原非对称矩阵成为自伴矩阵的正确希尔伯特空间。一旦明确这一点，若干谱特征和解析特征便可直接得到。

现在我们固定记号并陈述主要结果。在下文中，$n \geqslant 1$ 是一个整数，$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$，其中 $a \neq 0$ 且 $c \neq 0$，并记

$$s := \sqrt{ac}, \qquad q := \frac{s}{c}. \tag{1}$$

只要 $ac > 0$。因此 $s > 0$ 和 $q \neq 0$，并且有 $q^2 = a/c$ 和 $cq = a/q = s$。

2. 对角对称化与加权

自伴性。我们从推动全文其余部分的对角相似变换开始。在可对称化情形 $ac > 0$ 下，该映射十分初等，但精确记录下来仍很有用，因为它能自然地产生一个加权内积，使得$A_n(a,\ b,\ c)$ 成为自伴矩阵。

定义 **1**（三对角托普利茨模型）。对于 $n \geqslant 1$ 以及参数 a、b、$c \in \mathbb{R}$，我们将 $A_n(a$、b、$c)$ 表示为具有以下对角线元素的 $n \times n$ 三对角托普利兹矩阵

*于2026年1月27日提交给编辑。

†独立研究者（mverwee@gmail.com）。

b，下对角线元素为 a，上对角线元素为 c，即

$$A_n(a,b,c)=\begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \ddots & \vdots \\ 0 & a & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

现在我们采用以下固定假设 $ac>0$，并在全文中固定使用 (1) 中的参数 s 和 q。为简洁起见，令

$$A_n := A_n(a,b,c), \qquad S := S_n(b,s) = A_n(s,b,s),$$
$$D := \operatorname{diag}\left(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1}\right), \qquad W := D^{-2}.$$

采用这一记号后，对角相似变换只需一行计算即可完成。

引理 2（对角对称化）。有

$$D^{-1}A_nD = S. \tag{2}$$

等价地，A_n 在由 W 所诱导的加权内积下是自伴的，即

$$A_n^TW = WA_n. \tag{3}$$

证明。由于 D 是对角矩阵，对角线元素保持不变。对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$，有

$$\left(D^{-1}A_nD\right)_{i,i+1} = D_{ii}^{-1}\,c\,D_{i+1,i+1} = q^{-(i-1)}cq^i = cq = s,$$

类似地

$$\left(D^{-1}A_nD\right)_{i+1,i} = D_{i+1,i+1}^{-1}\,a\,D_{ii} = q^{-i}aq^{i-1} = \frac{a}{q} = s.$$

这就证明了（2）。对于（3），对（2）取转置可得

$$DA_n^TD^{-1} = S_n(b,s) = D^{-1}A_nD,$$

并在左侧乘以 D^{-1}，在右侧乘以 D。由于 $W=D^{-2}$，因此得到 ds
$A_n^TW = WA_n$。 □

注 3（典范加权希尔伯特空间）。如果 $ac>0$ 和 $W=D^{-2}$ 如上所述，那么（3）等价于以下陈述：A_n 关于内积

$$\langle x,y\rangle_W := x^TWy \qquad (x,y\in\mathbb{R}^n).$$

特别地，A_n 具有一组完备的特征向量，它们关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ 正交。

引理 2 中的相似变换将谱问题归结为对称情形。下面我们详细说明对角化、用切比雪夫多项式表示的行列式，以及逆矩阵的格林核。

3. 谱与切比雪夫行列式公式。 对称三对角托普利兹矩阵的对角化是经典结果，可以通过简短的离散傅里叶正弦计算加以证明。我们给出完整证明，因为这是使后续论证保持自洽的最简便方式。

引理 4（对称特征向量的正交性）。设 S 为实对称矩阵。若 $Su = \lambda u$ 和 $Sv = \mu v$ 满足 $\lambda \neq \mu$，则 $u^T v = 0$。

证明。我们计算 $\lambda u^T v = (Su)^T v = u^T S^T v = u^T S v = \mu u^T v$。由于 $\lambda \neq \mu$，这迫使 $u^T v = 0$。 □

现在我们转向谱和特征向量的显式公式。对称化后的情形是经典结果，而对角相似变换将其传回复原到 A_n。

定理5（显式特征对）。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，定义

$$\theta_k := \frac{k\pi}{n+1}, \qquad \lambda_k := b + 2s\cos(\theta_k).$$

那么 λ_1、……、λ_n 是 A_n的特征值。此外，相应的右特征向量 $r^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ 可选取为其分量为

$$r_j^{(k)} = q^{j-1}\sin(j\theta_k), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

其中 q 如(1)所示。

证明。 由引理 2， A_n 与 $S_n(b,s)$相似，因此只需对$S_n(b,s)$进行对角化。固定 $1 \leqslant k \leqslant n$，并考虑分量为 $u_j^{(k)}$ =sin $(j\theta_k)$ 的向量 $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$。对于 $2 \leqslant j \leqslant n-1$，$S_n(b,s)\,u^{(k)}$ 的第 j 个分量等于

$$s\sin((j-1)\theta_k) + b\sin(j\theta_k) + s\sin((j+1)\theta_k).$$

利用 sin $((j-1)\ \theta_k)$ + sin $((j+1)\ \theta_k)$ = 2cos (θ_k) sin $(j\theta_k)$，可得

$$(b + 2s\cos(\theta_k))\sin(j\theta_k) = \lambda_k u_j^{(k)}.$$

在 $j = 1$ 和 $j = n$ 处，同一恒等式也成立，因为

$$\sin(0\cdot\theta_k) = 0 \qquad \text{and} \qquad \sin((n+1)\theta_k) = \sin(k\pi) = 0,$$

它们体现了边界条件。因此 $S_n(b,s)\,u^{(k)} = \lambda_k u^{(k)}$。

特征值 $\lambda_k = b + 2s$ cos (θ_k) 两两不同，因为 cos (θ) 在 $(0,\pi)$ 上严格递减，且 $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \pi$。由于 $S_n(b,s)$ 是对称的，引理4表明，特征向量 $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ 在欧几里得内积下两两正交；特别地，它们线性无关。因此， $S_n(b,s)$ 有n 个线性无关特征向量，且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 穷尽其谱。

最后，由引理 2 可得

$$A_n\left(Du^{(k)}\right) = DS_n(b,s)\,u^{(k)} = \lambda_k\left(Du^{(k)}\right).$$

由于 $\left(Du^{(k)}\right)_j = q^{j-1}$ sin $(j\theta_k)$，这就证明了（4）。 □

特征值给出了特征多项式的因式分解，尤其是行列式的因式分解。将该行列式表示为第二类切比雪夫多项式 U_m 的形式较为方便，其定义为 $U_0(x)$ = 1,$U_1(x)$ = $2x$，递推关系为 $U_{m+1}(x)$ = $2x\,U_m(x)$ − $U_{m-1}(x)$。

命题 6（行列式与特征多项式）。设 $x := b/(2s)$。则

$$\det(A_n) = s^n U_n(x). \tag{5}$$

等价地， A_n 的特征多项式为

$$\chi_n(t) = \det(tI_n - A_n) = s^n U_n\left(\frac{t-b}{2s}\right).$$

证明。根据相似变换，我们有

$$\det(A_n) = \det(S_n(b,s)).$$

令 $\Delta_n := \det(S_n(b,s))$。沿第一行展开可知， Δ_n 满足连分式递推

$$\Delta_n = b\,\Delta_{n-1} - s^2\,\Delta_{n-2} \qquad (n \geqslant 2),$$

初始值为 $\Delta_0 = 1$ 和 $\Delta_1 = b$。令 $\Delta_n = s^n \delta_n$，可得

$$\delta_n = \frac{b}{s}\delta_{n-1} - \delta_{n-2} = 2x\,\delta_{n-1} - \delta_{n-2} \qquad (n \geqslant 2),$$

其中 $\delta_0 = 1$ 和 $\delta_1 = 2x$。因此，对所有 n，都有 $\delta_n = U_n(x)$，从而证明了 (5)。将 b 替换为 $t-b$，并注意到 s 保持不变，即可得到特征多项式公式。 □

4. 闭式逆核与有隙区间中的衰减。除了特征值和行列式之外，对角对称化也为求显式逆矩阵提供了简洁途径。文献中已有多个关于三对角托普利兹矩阵逆矩阵的著名公式（例如参见 da Fonseca–Petronilho [1] 和 Us- mani [2]）；这里我们给出一种用切比雪夫多项式表示的简洁形式，并说明它如何立即推出在一致正定区域 $b > 2\sqrt{ac}$中的非对角线元素呈指数衰减。

—

定理 7（逆核）。设 $x := b/(2s)$。若 $U_n(x) \neq 0$，则 A_n 可逆，并且对于 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，有

$$\left(A_n^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{s}\, q^{\,i-j}\, \frac{U_{i-1}(x)\,U_{n-j}(x)}{U_n(x)}. \tag{6}$$

对于 $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$，也有等价公式

$$\left(A_n^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{s}\, q^{\,i-j}\, \frac{U_{j-1}(x)\,U_{n-i}(x)}{U_n(x)}.$$

等价地，逆矩阵满足加权对称关系

$$\left(A_n^{-1}\right)_{ij} = q^{2(i-j)}\left(A_n^{-1}\right)_{ji}.$$

证明。由引理 2，可得 $A_n = DSD^{-1}$，其中 $S = S_n(b,s)$，因此

$$A_n^{-1} = DS^{-1}D^{-1} \qquad \text{and} \qquad \left(A_n^{-1}\right)_{ij} = q^{\,i-j}\left(S^{-1}\right)_{ij}.$$

因此，只需在对称情形 $A_n = S$（即 $q = 1$）下证明 (6)。记作$b = 2sx$。由命题 6，假设 $U_n(x) \neq 0$ 可推出 $\det(S) \neq 0$。

我们采用标准扩展 $U_{-1}(x) := 0$。定义序列 $(f_k)_{k=0}^{n+1}$ 和 $(g_k)_{k=0}^{n+1}$ 如下:

$$f_k := (-1)^{k-1} U_{k-1}(x), \qquad g_k := (-1)^{k-1} U_{n-k}(x).$$

于是 $f_0 = 0$ 和 $g_{n+1} = 0$，并且对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$，切比雪夫递推给出齐次关系

$$sf_{k-1} + bf_k + sf_{k+1} = 0, \qquad sg_{k-1} + bg_k + sg_{k+1} = 0. \tag{7}$$

事实上，由于 $b = 2sx$，我们计算得

$$sf_{k-1} + bf_k + sf_{k+1} = (-1)^k s\left(U_{k-2}(x) - 2x\,U_{k-1}(x) + U_k(x)\right) = 0,$$

对于 g，类似可得。

接下来，对于 $0 \leqslant k \leqslant n$，定义离散朗斯基行列式

$$W_k := f_k g_{k+1} - f_{k+1} g_k.$$

将 (7) 使用两次并消去各项，可验证 W_k 是 k的常数。更明确地，将 (7) 中第一个恒等式乘以 g_{k+1}，第二个乘以 f_{k+1}，然后相减，得到

$$s\left(f_k g_{k+1} - f_{k+1} g_k\right) = s\left(f_{k+1} g_{k+2} - f_{k+2} g_{k+1}\right),$$

因此 $W_k = W_{k+1}$。在 $k = n$ 处求值，得

$$W_k = W_n = f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n = -f_{n+1} g_n.$$

由于 $f_{n+1} = (-1)^n U_n(x)$ 且 $g_n = (-1)^{n-1} U_0(x) = (-1)^{n-1}$，我们得到对所有 k 均有 $W_k = U_n(x)$。

对于 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$，定义

$$G_{ij} := \frac{1}{s\,U_n(x)} \begin{cases} f_i g_j, & i \leqslant j, \\ f_j g_i, & i > j. \end{cases}$$

于是 G 是对称的，并且对于 $i \leqslant j$，我们有

$$G_{ij} = \frac{1}{s\,U_n(x)} (-1)^{i+j} U_{i-1}(x)\, U_{n-j}(x),$$

这正是 $q = 1$ 情形下的 (6)。

还需证明 $SG = I_n$。固定 j，并考虑 j-th 列 $u^{(j)} = (G_{1j},\ \ldots\ldots,\ G_{nj})^T$。对于 $k < j$，我们有 $u_k^{(j)} = {}_{sU_n}{}^{g_j(x)} f_k$，因此由 (7) 得到 $\left(Su^{(j)}\right)_k = 0$。对于 $k > j$，我们有 $u_k^{(j)} = {}_{sU_n}{}^{f_j(x)} g_k$，所以再次得到 $\left(Su^{(j)}\right)_k = 0$。在 $k = j$ 处，利用定义和 Wronskian 恒等式 $W_j = U_n(x)$，我们计算得

$$\begin{aligned} \left(Su^{(j)}\right)_j &= sG_{j-1,j} + bG_{jj} + sG_{j+1,j} \\ &= \frac{1}{U_n(x)} \left(f_{j-1} g_j + \frac{b}{s} f_j g_j + f_j g_{j+1} \right) \\ &= \frac{1}{U_n(x)} \left(-f_{j+1} g_j + f_j g_{j+1} \right) \qquad \text{by (7) at } k = j \\ &= \frac{W_j}{U_n(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此，对于每个 j 都有 $Su^{(j)} = e_j$，其中 e_j 是 $\mathbb{R}^n$ 的 j-th 标准基向量，故 $SG = I_n$ 和 $G = S^{-1}$。一般情形由 $A_n^{-1} = DS^{-1}D^{-1}$ 得出。 □

为了清晰地展示一致正定区域中的衰减估计，我们回顾 U_m的标准双曲参数化。

引理 8（U_m的双曲求值）。对于任意 $m \geqslant 0$ 以及任意 $\gamma \in \mathbb{R}$ 有

$$U_m(\cosh(\gamma)) = \frac{\sinh((m+1)\gamma)}{\sinh(\gamma)}.$$

证明。令 $F_m(\gamma) := \sinh((m+1)\gamma)/\sinh(\gamma)$。则 $F_0(\gamma) = 1$ 且 $F_1(\gamma) = 2\cosh(\gamma)$。由加法公式可得，对于 $m \geqslant 1$,

$$\sinh((m+2)\gamma) = 2\cosh(\gamma)\sinh((m+1)\gamma) - \sinh(m\gamma).$$

两边除以 $\sinh(\gamma)$ 得 $F_{m+1}(\gamma) = 2\cosh(\gamma)F_m(\gamma) - F_{m-1}(\gamma)$。因此，$F_m$ 满足在 $x = \cosh(\gamma)$处求值的 U_m 的定义递推关系和初始值，所述结论得证。 □

注 9（当 $x > 1$ 时的一种双曲形式）。当 $x > 1$ 时，存在 $\gamma > 0$ 使得 $x = \cosh(\gamma)$。由引理 8 可得 $U_m(\cosh(\gamma)) = \sinh((m+1)\gamma)/\sinh(\gamma)$，从而将 (6) 化为格林核：对于 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$,

$$\left(S_n(b,s)^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{s} \frac{\sinh(i\gamma)\sinh((n+1-j)\gamma)}{\sinh((n+1)\gamma)\sinh(\gamma)}.$$

在此情形下，可直接看出指数型非对角衰减。

推论 10（逆矩阵的指数衰减）。假设 $x = b/(2s) > 1$并令 $\eta := x + \sqrt{x^2-1} > 1$。则对每个 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$,

$$\left|\left(S^{-1}\right)_{ij}\right| \leqslant \frac{2}{s} \frac{1}{\eta - \eta^{-1}} \eta^{-|i-j|}.$$

因此，

$$\left|\left(A_n^{-1}\right)_{ij}\right| \leqslant \frac{2}{s} \frac{1}{\eta - \eta^{-1}} |q|^{i-j} \eta^{-|i-j|}.$$

证明。根据注 9，我们可以将对称逆矩阵元写成双曲正弦之比。令 $\eta = e^{\gamma}$（使得 $x = \cosh(\gamma)$），则有如下精确恒等式

$$\sinh(t) = \frac{\eta^t - \eta^{-t}}{2} \qquad (t \geqslant 0).$$

特别地，对于 $t \geqslant 0$，有 $\sinh(t) \leqslant \eta^t/2$ 且 $\sinh(t) \geqslant (\eta^t - \eta^{-t})/2$；将这两个界代入注 9 的公式，即可得到 S^{-1} 的所述估计。A_n^{-1} 的界则由 $A_n^{-1} = DS^{-1}D^{-1}$ 得出。 □

5. 自然加权范数下的极端特征值与条件性。这种对称化也为“A_n 在哪个范数下具有良好条件性？”这一问题提供了一个自然的答案。关键在于，尽管 A_n 在欧几里得结构下不一定是对称的，但根据注 3，它关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ 是自伴的。在该加权希尔伯特空间中，谱演算与对称情形完全相同。

定义11（加权算子范数与条件数）。设 W 为对称正定矩阵。对于矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 记

$$\|M\|_{2,W} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Mx\|_W}{\|x\|_W}, \qquad \|x\|_W := \sqrt{\langle x, x\rangle_W},$$

并定义加权条件数

$$\mathrm{cond}_{2,W}(M) := \|M\|_{2,W} \left\|M^{-1}\right\|_{2,W},$$

当 M 可逆时。

由于 A_n 在 W-内积下是自伴的，因此其算子范数及其在该几何结构下的条件数由谱控制。因此，我们明确记录极端特征值。

命题 12（极端特征值）。设 λ_k 如定理*5*所述。则

$$\lambda_{\max} = b + 2s\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \qquad \lambda_{\min} = b - 2s\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

特别地，对称托普利茨矩阵 S 正定，当且仅当

$$b > 2s\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

证明。 定理5的特征值关于 k 严格递减，因为 $\cos(\theta_k)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上严格递减。因此，最大值在 $k=1$ 处取得，最小值在 $k=n$处取得，并且 $\cos(\theta_n) = -\cos(\theta_1)$ 给出该公式。 □

将命题 12 与引理 2 的加权自伴性相结合，可得到尖锐条件数公式。

推论13. （尖锐加权条件数。）假设 S 是正定的。则

$$\mathrm{cond}_{2,W}(A_n) = \mathrm{cond}_2(S) = \frac{b + 2s\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{b - 2s\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}.$$

证明。 由于 A_n 在 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_W$ 中是自伴的，并且具有实谱且可对角化，因此加权算子范数等于谱半径的绝对值，对于 A_n^{-1}同样如此。因此，在正定区域内，条件数 $\mathrm{cond}_{2,\ W}(A_n) = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}|$。通过相似变换， A_n 的谱与 S的谱重合，而命题 12 给出了显式比值。 □

特别是，如果 $x = b/(2s)$ 始终与 $\cos(\pi/(n+1))$ 保持一定距离，那么 $\mathrm{cond}_{2,W}(A_n)$ 就始终有界；当 b 从上方趋近临界值 $2s\cos(\pi/(n+1))$ 时，它会趋于无穷大。

6. 循环数模型与有限余弦乘积。 现在，我们将一般框架专门应用于其行列式为循环数的托普利茨模型。这通过提供仅凭行列式恒等式无法获得的额外信息，补充了余弦乘积分解，例如精确的加权条件数和显式的逆核。

定义 14（循环数）。对于 $d > 0$ 和 $m \geqslant 1$，在 d 进制下，长度为 m 的循环数为

$$R_m(d) := \sum_{j=0}^{m-1} d^j.$$

对于 $d \neq 1$，这等于 $(d^m - 1) / (d - 1)$，并采用连续延拓R_m（1）：$= m$。

接下来，我们引入其行列式给出这些循环数的托普利兹矩阵。

定义 15（重复数托普利兹矩阵）。对于 $d > 0$ 和 $n \geqslant 1$，定义

$$V_n(d) := A_n(d, d+1, 1).$$

等价地，V_n（d）的对角线元素为 $d+1$，上对角线元素为 1，下对角线元素为 d。

以下观察解释了这一术语，并将该模型与命题 6 联系起来。

引理 16（行列式等于重复数）。对每个 $d > 0$ 和 $n \geqslant 1$，

$$\det(V_n(d)) = R_{n+1}(d).$$

证明。令 $\Delta_n := \det(V_n(d))$。沿第一行展开可得递推关系$\Delta_n = (d+1)\Delta_{n-1} - d\Delta_{n-2}$，其中 $n \geqslant 2$，且 $\Delta_0 = 1$ 和 $\Delta_1 = d+1$。另一方面，$R_{n+1}(d)$ 满足相同的递推关系，因为

$$R_{n+1}(d) = (d+1) R_n(d) - dR_{n-1}(d)$$

通过比较 $\sum_{j=0}^{n} d^j$ Δ_n = 中的系数即可得出。由于初始值相同，对所有 都有 ( )。 R_{n+1} d n □

为具体说明谱描述，注意对于 $V_n(d)$，有 $a = d, c = 1$，因此 $s = q = \sqrt{d}$。特别地，对称化矩阵为 $S_n^{-}\left(d+1, \sqrt{d}\right)$。由于 $d+1 \geqslant 2\sqrt{d}$（仅在 $d = 1$ 处取等号），当 $d = 1$ 时，这族矩阵位于边界$x = 1$；当 $d \neq 1$ 时，则处于一致正定区域 $x > 1$。

定理17（重复数余弦乘积）。对每个 $d > 0$ 和 $n \geqslant 1$，

$$R_{n+1}(d) = \prod_{k=1}^{n} \left(d + 1 + 2\sqrt{d} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right). \tag{8}$$

证明。将定理5应用于 $A_n(d,\ d+1,\ 1)$，可知 $V_n(d)$的特征值恰好是等式（8）右侧乘积中的各个因子。它们的乘积等于 $\det(V_n(d))$。由引理16即可得证。 □

乘积表示立即给出定量推论。我们列出其中两个典型例子，展示了对称化框架如何“免费”地产生结果。

推论18（循环数矩阵的尖锐加权条件数）。设 $d > 0,\ n \geqslant 1$，并令 $W = \operatorname{diag}\left(d^{-(j-1)}\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$。则

$$\operatorname{cond}_{2,W}(V_n(d)) = \frac{d + 1 + 2\sqrt{d}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{d + 1 - 2\sqrt{d}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}.$$

证明。 这是推论 13，其中 $a = d$、 $b = d + 1$ 和 $c = 1$。所显示的 W 等于 D^{-2}，其中 $D = \mathrm{diag}\left(d^{(j-1)/2}\right)$。 □

最后，我们用循环数来表示逆核，从而避免使用切比雪夫记号。

推论19（用循环数表示逆矩阵元）。令 $d > 0$， $n \geqslant 1$，且$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$。则

$$\left(V_n\left(d\right)^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\sqrt{d}}\, d^{(i-j)/2}\, \frac{R_i\left(d\right) R_{n+1-j}\left(d\right)}{R_{n+1}\left(d\right)}.$$

证明。 将 $a = d$、 $b = d + 1$、 $c = 1$、 $s = \sqrt{d}$ 和 $q = \sqrt{d}$ 代入定理 7。只需注意到切比雪夫恒等式

$$U_m\left(\frac{d+1}{2\sqrt{d}}\right) = d^{-m/2} R_{m+1}\left(d\right),$$

该恒等式可由 U_m 和 R_{m+1} 的递推关系，以及它们在 $m = 0$ 和 $m = 1$ 处相同的初始值推出。 □

因式分解（8）表明， $R_{n+1}(d)$ 是一个正定托普利兹算子的行列式。由此可直接引入数值线性代数中的工具。例如，推论18给出了精确的加权条件数，而推论 10 得出了逆核的指数衰减；这意味着在局部化强迫项作用下， $V_n\left(d\right) x = f$ 的解会迅速局部化。

对角对称化在有限秩扰动下保持稳定，因此也可以结合Sherman–Morrison–Woodbury型恒等式，处理四个角均经过修改的三对角托普利兹矩阵。关于这种扰动角情形下特征值和逆矩阵的显式公式，参见 Yueh–Cheng [3]。

参考文献

[1] C. M. da Fonseca 和 J. Petronilho，《某些三对角矩阵的显式逆矩阵》，*Linear Algebra Appl.* **325** (2001), 7–21. [2] R. A. Usmani，《三对角雅可比矩阵的求逆》，*Linear Algebra Appl.* **212/213**(1994), 413–414.[3] W.-C. Yueh 和 S. S. Cheng，《具有四个扰动角的三对角托普利兹矩阵的显式特征值和逆矩阵》，*ANZIAM J.* **49** (2008), 361–387.