arXiv:2601.17267v1 [econ.TH] 24 Jan 2026

信息设计与机制设计：一个综合框架*

Dirk Bergemann† Tibor Heumann‡ Stephen Morris§

2026年1月27日

摘要

我们为拟线性效用下的筛选环境中的信息设计与机制设计构建了一个综合框架。借助主序理论和分位数函数，我们证明，信息设计问题和机制设计问题都可以归结为在主序约束下最大化线性泛函。对于机制设计，设计者选择弱主序于外生库存的分配。对于信息设计，设计者选择被先验分布主序的信息结构。当设计者能够同时选择机制和信息结构时，联合优化问题便成为带有两个主序约束的双线性问题。我们证明，在这种情况下，价值池化及其对应的分配始终是最优的。我们的方法统一了拍卖理论和筛选领域的经典结果，将其拓展至信息设计情境，并为联合优化分配与信息所产生的福利效应提供了新的见解。

JEL CLASSIFICATION: D44 , D47, D82, D83.

KEYWORDS: 机制设计、筛选、非线性定价、信息设计、贝叶斯劝说、主序。

*我们感谢美国国家科学基金会资助项目 SES-2001208 和 SES-2049744、美国海军研究办公室多学科大学研究计划 N00014-24-1- 2742，以及智利国家研究与发展局国家科学与技术发展基金 1241302 的经费支持。我们感谢在首尔举行的计量经济学会世界大会上的听众，以及评论人 Anton Kolotilin。我们受益于与 Ben Brooks、Roberto Carrao、Ian Jewitt、Benny Moldovanu、Georg N¨oldeke、Philipp Strack、Daniel Quigley、Alexander Wolitzky 和 Qinyu Wu 的讨论。我们感谢 Marek Bojko 和 David Wambach 提供出色的研究协助。

†耶鲁大学，dirk.bergemann@yale.edu。
‡智利天主教大学经济研究所，tibor.heumann@uc.cl。§麻省理工学院，semorris@mit.edu

1 引言

我们从综合视角探讨机制设计与信息设计，并着重强调这两类问题之间深刻的对称性。我们运用主序的几何语言进行统一分析，揭示信息设计与机制设计在结构上的相似之处。

我们从 Mussa 和 Rosen（1978）的经典筛选问题入手：垄断者向估值各异的买方出售质量不同的商品。遵循 Loertscher 和 Muir（2022），我们假设卖方拥有外生的商品库存，而非以凸成本生产商品。我们不直接处理买方估值和商品质量的分布，而是始终使用它们的逆函数，也就是分位数函数。因此，我们用分位数价值函数 $V(t)$ 来描述该问题，它表示处于第 t 分位数的买方的价值 V；并用分位数分配函数 $Q(t)$ 来描述处于第 t 分位数的商品的质量 Q 。

本文的核心贡献在于揭示，定价和信息提供中的三个基本问题可被理解为同一数学结构的不同变体。我们给出一个包络公式，将卖方收入表示为分位数价值函数和分配函数的函数。这种双线性表示使我们能够分析三个不同的优化问题：

首先，我们刻画给定外生信息结构时的最优筛选机制。卖方选择一个受外生库存弱主序约束的分位数分配函数，以实现收入最大化。由此，卖方的目标函数转化为关于分配的线性泛函。这一方法沿袭了 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的研究，他们强调了主序约束在经济优化问题中的作用（另见 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2026）在本卷发表的综述文章）。求解过程涉及对适当定义的逐点收益函数进行凹化，并自然地在单调性约束生效的区间内进行合并（或“熨平”）。

其次，我们考察信息设计问题：给定一个外生且能有效分配商品的机制，选择最优信息结构。在这里，设计者在（严格）主序约束下最大化一个线性泛函——可行信息结构的集合由价值先验分布的所有均值保持收缩构成。值得注意的是，这个问题与机制设计问题如出一辙。其解同样涉及一个凹化过程，但这次应用于不同的函数，并受到不同的主序约束。

第三，我们考察设计者可以联合选择信息结构和机制的问题。此时，优化目标关于分位数值函数和分位数分配函数是双线性的，并受两个主序约束。我们证明，当这两个维度都由设计者联合选择时，信息合并始终是最优的。这里的信息合并指任何未向买方提供关于其价值的完全信息的信息结构；然而，粗粒度信息直接意味着，提供少数几种不同商品的机制是最优的。这包括任何确定性或随机信息结构，只要它向至少两个不同的价值发送相同的信号。该结果与分别求解的优化问题形成鲜明对比：在后者中，根据原始条件的不同，完全披露或完全分离都可能是最优的。

全文中，我们将筛选问题与经典的有限数量竞买人参与的单一物品拍卖情形联系起来。Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）指出，当只考虑对称竞买人分布和对称机制时，通过对Border定理（Border（1991））进行推广，最优拍卖问题等价于筛选问题。具体而言，在一场有 N 名竞买人的拍卖中，相关的分位数分配函数为$Q(t) = t^{N-1}$。我们的三项优化任务都可以自然地扩展到这种拍卖诠释。

在Bergemann、Heumann、Morris、Sorokin 和 Winter（2022）中，我们研究了拍卖情形下的信息设计问题，指出最优信息结构仅取决于竞买人数，并涉及上截尾。在Bergemann、Heumann 和 Morris（2026）中，我们分析了卖方可以同时选择机制和信息结构的筛选问题。该问题的拍卖版本早先由Bergemann 和 Pesendorfer（2007）分析；因此，拍卖问题的对称情形可以视为我们筛选框架的一个特例。

我们的方法不同于 Kamenica and Gentzkow（2011）的标准贝叶斯劝说框架。在该框架中，发送者的收益是接收者后验期望价值（状态）的函数。在贝叶斯劝说设定中，有一个关于任意信息结构所能生成的后验信念分布的著名刻画：这些分布正是价值分布的均值保持收缩。可行期望值分布集合的刻画在我们的信息设计问题中仍然成立；然而，这一刻画并无助益，因为我们的问题对期望值是线性的，但对相应的概率则是非线性的。为了使问题易于处理，我们在分位数空间中开展分析。因此，尽管目标函数与经典贝叶斯劝说框架中的相同，期望值分布却被替

换为分位数分布。重要的是，可行分位数分布集合由先验分位数价值函数的均值保持扩散构成。因此，从价值分布转向分位数分布时，我们将约束的方向反转。方法上，我们遵循 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）关于主序约束的研究，因此也采用相应的术语。有趣的是，这使我们的信息设计更接近 Myerson（1981）的熨平技术，该技术同样运用了分位数函数。Jewitt 和 Quigley（2023）的近期研究表明，我们的问题等价于采用 Yaari（1987）偏好的贝叶斯劝说问题——结果是线性的，而概率是非线性的。

虽然我们的主要关注点是收入最大化，但我们也考察了其他目标。我们表明，消费者剩余最大化问题与收入最大化之间存在一种自然的对偶关系，因此可以运用相同的几何技术。我们刻画了完整的福利前沿——即在所有可能的信息结构下，所有可行的收入与消费者剩余组合的集合。对于具有有效配置规则的拍卖情形，我们表明，该前沿可以通过上限和下限审查信息结构描绘出来；当总剩余最大化时，最优结构会在该点发生不连续切换。这些结果体现了 Bergemann 和 Morris（2013、2016）所描述的稳健预测方法：我们并不认为存在一位字面意义上的信息设计者，试图最大化收入与消费者剩余的加权和。相反，信息设计者是一个比喻性概念；通过考察所有可能权重下的信息设计，我们识别出在某种信息结构下均衡中可能实现的收入与消费者剩余组合。

我们还考察了拍卖问题中竞标者数量的比较静态分析。我们表明，在收入最大化的拍卖中，随着 N 增加，最优信息结构会将价值分布中越来越小的一部分进行合并。然而，一个显著的规律由此浮现：无论 N如何，价值在顶部被合并的竞标者预期数量都大致保持不变，约为两名。这表明，即使在大型拍卖中，最优信息设计也能在边际上维持约两名竞标者之间的竞争。

我们的框架还与上述文献之外的若干研究脉络相关。定价与信息的联合优化问题与近期有关数据市场和数字广告的研究相关，参见 Bergemann、Heumann、Morris、Sorokin 和 Winter（2022）、Bergemann 和 Bonatti（2024）、Bergemann、Bonatti 和 Wu（2025）。收入保证问题——即寻找在所有信息结构下都能表现良好的机制——与 Brooks 和 Du（2025b）综述的信息稳健机制设计文献相关。最后，我们对分位数

方法的使用与 Myerson（1981）和 Bulow 和 Klemperer（1996）在拍卖理论中提出的虚拟价值方法相关。

我们的分析仅关注带转移支付的机制设计。Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）运用主序技术，在一个线性—二次环境中建立了信息设计与授权（无转移支付的机制设计）之间的联系；Kolotilin 和 Zapechelnyuk（2025）则更一般地探讨了这两类问题之间的联系。Lou（2023）分析了授权与信息设计的联合设计。类似地，Ivanov（2010）在策略性沟通（廉价谈话）博弈的背景下，考察了信息设计与信息传递的联合选择。他表明，在 Crawford 和 Sobel（1982）的设定中，与授权方案相比，控制信息会增加发送者的收益。

本文其余部分安排如下。第2节介绍模型，并确立分位数函数、信息结构和机制的相关记号。第3节推导分位数空间中收入和消费者剩余的包络公式。第4、5、6节分别分析机制设计、信息设计，以及分配与信息的联合设计优化。第7节考察消费者剩余最大化和加权福利目标。第8节讨论稳健预测，刻画福利前沿，并分析竞标者数量的比较静态。

2 设定

2.1 筛选问题的分位数表示

一位卖方向质量各异的商品 $q \in \mathbb{R}_+$ 供货，买家构成一个质量为 1、由 $t \in [0,1]$ 编号的连续统。每位买家都有单位需求，并且对质量为 q 的商品具有支付意愿（或称价值） $v \in \mathbb{R}_+$。扣除支付 $p \in \mathbb{R}_+$ 后的效用为：

$$v \cdot q - p. \tag{1}$$

这一函数形式——沿用 Mussa 和 Rosen（1978）的设定——很重要，因为它确保买方只关心所获商品的期望质量。买方的估值$v \in [\underline{v}, \bar{v}]$ 按照 $F_v \in \Delta([\underline{v}, \bar{v}])$ 分布，其中 $0 \leq \underline{v} < \bar{v} \leq \infty$。此外，我们可以将 q 解释为质量，也可以解释为商品供应的数量或概率。–按照对 q 的第二种解释，我们可以将这个问题与在众多对称竞标者之间拍卖一件商品的问题联系起来

在众多对称竞标者中。

我们假设卖方拥有可供出售的商品外生库存。具体而言，卖方拥有总量为 1 的商品，其质量 $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ 按照以下分布：

$$F_q \in \Delta\left([\underline{q}, \bar{q}]\right), \tag{2}$$

其中 $0 \leq \underline{q} < \bar{q} \leq \infty$。因此，卖方可以提供一种固定且外生给定的质量分布 F_q。

不失一般性，我们可以假设库存总量为 1，因为可以通过补充质量为 $q = 0$ 的商品来增加较小的库存。例如，如果库存由总量为 1/2、质量为 $q = 1$ 的同质商品构成（因此只能服务 1/2 的买方），这对应于以下分布：

$$F_q(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{if } q \in [0, 1); \\ 1, & \text{if } q \geq 1. \end{cases}$$

因此，质量为 在 $q = 0$ 处的 1/2 总量体现了有 1/2 的买方无法得到服务这一事实。

我们将各分布的逆函数，即相应的分位数函数，记为：

$$V(t) \triangleq F_v^{-1}(t) \quad \text{and} \quad Q(t) \triangleq F_q^{-1}(t). \tag{3}$$

我们将 V 称为分位数价值函数，它刻画买方价值的外生分布。我们将 Q 称为分位数分配函数，它刻画卖方的外生库存。当某一分布的支撑集存在间隙时，我们约定 V， Q 是右连续的。

这是 Mussa 和 Rosen（1978）的经典筛选环境，唯一不同的是，与 Loertscher 和 Muir（2022）一样，我们假设售出商品的库存是外生的。这对我们的综述很方便。如果我们将库存内生化，即允许卖方以某种凸成本生产不同质量分布的商品，就可以还原 Mussa 和 Rosen（1978）的完整分析。

我们在分位数空间 $t \in [0, 1]$ 而非价值与品质空间v， $q \in \mathbb{R}_+$中进行分析。映射到分位数空间十分便利，在许多情境下都以隐式或显式的方式完成，参见 Myerson（1981）、Hartline（2017）、Bergemann、Heumann、Morris、Sorokin 和 Winter（2022）以及 Bulow 和 Klemperer（1996）。

2.2 信息结构

虽然 V 捕捉了买方群体中事后估值的分布，但买方可能并不完全了解自己的估值。

信息结构由映射 $I:[v,v]\to\Delta(S)$ 给出，其中$I(v)$表示信号空间 S 中的信号分布，具有潜在价值 v的买方会观察到这些信号。买方在信号实现值 s 条件下的期望价值记为：

$$w(s)\triangleq\mathbb{E}[v\mid s]. \tag{4}$$

重要的是，买方对其价值的期望是其偏好的充分统计量。这是贝叶斯劝说文献中广泛采用的一项假设（见 Kolotilin（2018年））。

通常，我们可以省略期望价值 $w(s)$对信号 s 的依赖，直接用 w 表示一般的期望价值。我们用 F_w 表示由某一信息结构所产生的期望估值分布，并用 $W(t)$表示相应的分位数期望价值函数：

$$W(t)\triangleq F_w^{-1}(t),$$

与之前一样，我们约定该函数是右连续的。我们将 W 称为分位数价值函数，因为 $W(t)$是总体中 t分位数买方的期望价值。

2.3 销售机制

销售机制由质量与支付菜单描述。卖方可以通过提供不同质量商品的彩票，来塑造所售商品期望质量的分布。如果向买方提供质量分布，或以彩票形式呈现的随机捆绑包 B，其

$$B\in\Delta\left([\underline{q},\overline{q}]\right),$$

那么，所提供的期望质量 x 为：

$$x\triangleq\int_{\underline{q}}^{\overline{q}}qdB(q).$$

如果 $\int dB(q) < 1$，那么收到物品的概率小于 1。当然，这等价于以概率 $1 - \int dB(q)$ 收到一个质量为零的商品。捆绑商品 B扣除支付 $p \in \mathbb{R}_+$ 后的期望效用为：

$$w \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} q dB(q) - p. \tag{5}$$

现在我们来描述可能的机制集合。

以 $t \in [0,1]$ 为索引的菜单由价格为 $p(t)$ 的捆绑商品 $B(\cdot \mid t)$ 组成：

$$M \triangleq \{(B(\cdot \mid t), p(t))\}_{t \in [0,1]}. \tag{6}$$

不失一般性，我们假设索引较高的 t 对应较高的期望质量，并将期望质量的分位数分布记为：

$$X(t) \triangleq \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} q dB(q \mid t).$$

不失一般性，我们假设它除了非递减之外还是右连续的。我们称菜单诱导出质量的分位数分布 $X(t)$；稍后我们会形式化说明这确实是一个分位数分布。菜单必须满足可行性约束。也就是说，卖方只能捆绑或弃置商品，不能生产更多商品。目前，我们暂不考虑这一约束，稍后再明确说明。

2.4 拍卖模型

我们还将讨论如何将我们的结果转化到对称拍卖的情境中。这里有一件待分配的物品。有 N 位竞标者，其估值根据共同分布 H 独立抽取。现在，具有价值分布 H 中分位数 t 的竞标者 n 拥有所有竞标者中最高价值的概率，简单来说就是 $Q(t) = t^{N-1}$，即 $N-1$ 位竞标者的分位数低于 t 的概率。请注意，这个表达式不取决于价值的共同分布 H。事实证明，当 Q 表示不同质量的外生库存时，最优对称拍卖解与筛选问题的解本质上相同。因此，拍卖模型的解将与相应筛选模型的解相同。

在全文中，我们将以对称幂分布的情形来说明我们的结果

估值和质量：

$$F_v(v) = v^{\frac{1}{4}}, \text{ and } F_q(q) = q^{\frac{1}{4}}. \tag{7}$$

相应的分位数函数为

$$V(t) = Q(t) = t^4.$$

在拍卖模型中，这对应于五位竞标者的情形，即 $N = 5$ 竞标一件物品。

3 收入与消费者剩余：分位数空间中的包络定理

我们首先分析任意信息结构和机制所产生的消费者剩余与利润。暂且不考虑菜单中的信号或彩票，而是将消费者剩余与利润表示为诱导出的分位数（期望）价值函数 $W(t)$ 和诱导出的分位数（期望）分配函数 $X(t)$。

期望价值为 $W(t)$ 的买方将在机制中选择分位数 t' 及其对应的商品 $X(t')$，以求解以下问题：

$$u(t) \triangleq \max_{t'} \{W(t)X(t') - p(t')\}.$$

根据启示原理，不失一般性，可以假设该机制是激励相容的，因此，对于价值为 $W(t)$ 的消费者而言，$t' = t$ 始终是最优选择。根据包络定理，我们发现 $u(t)$ 由分配 $X(t)$ 决定，如下所示：

$$du(t) = X(t)\, dW(t),$$

并且其积分形式为

$$u(t) = \int_0^t X(s)dW(s) + u(0).$$

按照惯例，最低类型的消费者剩余始终为零，因此我们有 $u(0) = 0$。我们

因此，期望消费者剩余为：

$$\mathbb{E}[u(t)] = \int_0^1 \left[\int_0^t X(s)dW(s)\right] dt = \int_0^1 (1-t)X(t)dW(t). \tag{8}$$

第一个等式是通过注意到分位数在 $[0,1]$ 中始终服从均匀分布得到的；第二个等式则通过分部积分得到。

t 分位数买方的支付等于该买方创造的总剩余减去其间接效用，因此可表示为：

$$p(t) = W(t)X(t) - \int_0^t X(s)dW(s). \tag{9}$$

因此，卖方的期望收益为：

$$\mathbb{E}[p(t)] = \int_0^1 \left(W(t)X(t) - \int_0^t X(s)dW(s)\right)dt = \int_0^1 (1-t)W(t)dX(t) + X(0)W(0). \tag{10}$$

和之前一样，第一个等式是通过注意到分位数在 $[0,1]$ 中始终服从均匀分布得到的；第二个等式则通过两次分部积分得到。

因此，我们将期望消费者剩余和期望收益分别记为：

$$U(W,X) \triangleq \mathbb{E}[u(t)], \tag{11}$$

$$R(W,X) \triangleq \mathbb{E}[p(t)]. \tag{12}$$

其中，这种记法现在强调，收入完全取决于分位数价值函数（信息结构）和分位数分配函数（机制）。

我们用分位数函数给出的描述有两个重要方面。第一，收入和消费者剩余关于分位数函数是双线性的。第二，收入和消费者剩余的表达式在（8）和（11）中呈现出显著的对称性。收入中的积分函数 $W(t)$是消费者剩余中的被积函数。反过来，消费者剩余中的积分函数$X(t)$是收入中的被积函数。此外，如果

$$X(0) = 0 \text{ or } W(0) = 0, \tag{13}$$

且该边界条件通常成立，因为最低类型的价值为零或获得零分配

分配，那么我们就具有完全的收益对称性，即

$$R\left(W,X\right)=U\left(X,W\right). \tag{14}$$

因此，当 $W\left(t\right)$为分位数价值函数、 $X(t)$为分配分位数函数时，收入与 $X(t)$为分位数价值函数且 $W\left(t\right)$为分配分位数函数时的消费者剩余相同。我们将在第7节讨论以最大化消费者剩余为目标的解时，特别回到对称性。第三，通过直接用分配分位数函数和分位数价值函数表示收入（或消费者剩余），分配规则的可行性便与信息结构的可行性脱钩。换言之，分配或信息政策的可行性彼此脱钩。我们将立即在分析最优机制时探讨这种脱钩的效用。

4 机制设计

我们首先在给定外生信息结构$W(t)$的情况下，确定收入最大化机制。上一节中，我们刻画了任意信息结构下的收入；但本节的主要解读是，买方知道自己的估值，因此 $W(t)=V(t)$。

我们首先刻画卖方通过所有机制能够生成的可行质量分布集合。我们证明，当且仅当所诱导的分位数分配函数 X 弱主序于外生库存 Q时，分配才是可行的。随后，卖方的收入可以表示为关于 X 的线性泛函，而最优机制则由逐点收益函数的凹化刻画；我们稍后会对该函数作出定义。接着，我们在拍卖的背景下解读这一结果，给出一个例子，并考察若干经典结果，这些结果说明了最优机制在何种情况下不会出现合并。本节最后将对我们提出的结果及相关文献作一般性讨论。

4.1 配置的可行性

沿着 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的思路（见命题4），分配规则——即从分位数映射到质量的映射——可行，当且仅当分位数配置规则 X 满足

$$\int_x^1 X(t)dt \leq \int_x^1 Q(t)dt, \forall x \in [0,1], \tag{15}$$

其中，我们不要求该不等式在 $x = 0$ 处变为等式。在这种情况下，我们称Q 弱主序于 X ，并记作 $X \prec_w Q$ （弱主序与递增凸序等价）。如上文所述，卖方能够合并不同质量的商品，这相当于选择分布 X ，使其为分布 Q 的均值保持收缩。然而，卖方可以选择不出售某些商品，这意味着将这些商品的质量设为0。从一阶随机占优的意义上看，这等价于允许质量分布向下平移。事实上，对于任意$\prec \quad \sim X \prec_w Q$，都存在一个质量分布 X ，使得 X 是$\prec Q$ 的均值保持收缩，并且 X 在一阶随机占优意义下占优于 X （参见 Shaked和Shanthikumar（2007），定理4.A.6）。因此，卖方问题的这一部分对应于先合并、再降低质量。

在此，我们强调采用分位数函数进行表述的一项独特优势。式（15）中的可行性约束——若以分位数函数表示——并不取决于信息结构。反之，若考虑一个将分配规则表示为价值函数的激励相容菜单，那么机制所分配商品的分布显然会取决于（期望）价值的分布。因此，可行性约束便与信息结构（以及底层的价值分布）耦合在一起。

拍卖中的可行性当卖方选择向 N 位竞标者出售一件不可分物品的最优销售机制时，分配规则是一个函数 $q_n(v_n, v_{-n})$，它根据所有竞标者的报告，确定代理人 n 获得该物品的概率。获胜概率为 $q_n(v_n) = \int q_n(v_n, v_{-n}) f(v_{-n}) dv_{-n}$. 因此，分位数配置为：

$$X(t) = q_n(V(t)).$$

在对称的 a 售时，非递减的分配规则可以实施，当且仅当

$$X(t) \prec_w t^{N-1},$$

这有时被称为 Border 条件（参见 Border（1991））。Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）详细阐述了这一论证，并将其扩展到一般排序拍卖。因此，当 $Q(t) = t^{N-1}$ 时，我们可以将机制设计问题理解为：在对称拍卖中寻找使收入最大化的分配。

4.2 收益最大化机制

现在我们将信息结构固定为完全披露——也就是说，我们施加 $W(t) = V(t)$——并求出最优机制。我们可以将寻找最优机制的问题表述为求解

$$\max_{X \prec_w Q} R(V, X).$$

这是 Loertscher 和 Muir（2022）研究的问题，他们刻画了面向连续统买方、针对离散质量分布的最优销售策略。

我们将函数 $r_W(t)$ 定义如下：

$$r_W(t) \triangleq W(t)(1-t),$$

并使用前面的表达式（10）将收入写成如下形式：

$$R(W, X) = X(0)r_W(0) + \int_0^1 r_W(t)dX(t). \tag{16}$$

我们将 r_W 称为逐点收益函数。如果卖方提出一口价要约，并且有 $(1-t)$ 的消费者接受，那么价格必定为 $p = W(t)$，因此期望收益为 $r_W(t)$。如果将分布解释为潜在买家的连续统，那么 $(1-t)$ 就是卖方的销售数量（需求），而 $V(t)$ 是反需求函数。因此，我们得到一个关于 $dX(t)$ 的线性优化问题，其中权重由逐点收益函数给出。

我们定义使收益函数最大化的分位数：

$$t_m \triangleq \arg\max_{t\in[0,1]} r_W(t),$$

我们假设其定义唯一。因此，面对需求为 $V(t)$ 的垄断者会向比例为 $(1-t_m)$ 的买方提供服务。

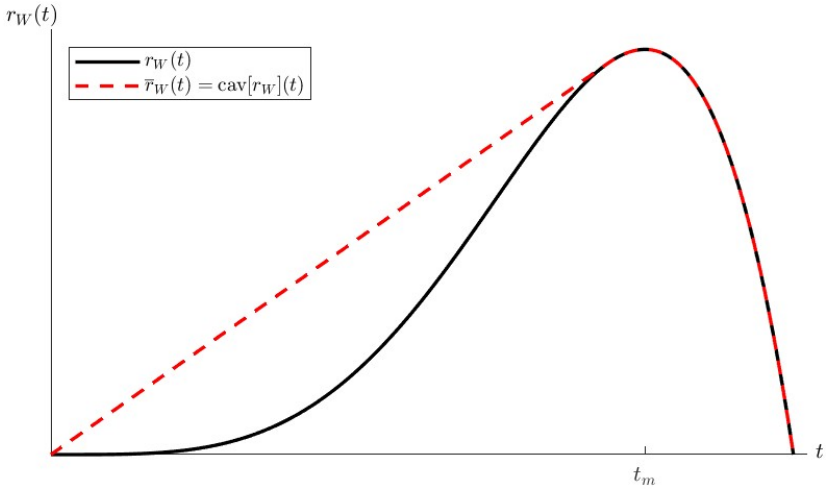

图1：当 $W(t) = t^4$ 时，收益函数 $r_W(t)$ 及其凹化 $\bar{r}_W(t)$。

我们用 $\bar{r}_W$ 表示 r_W 的凹化；函数 $\bar{r}_W$ 的凹化是逐点大于 r_W 的最小凹函数，如图1所示。

为描述最优机制，引入描述凹化所需的符号很有帮助。存在一个分位数集合（及其对应的开区间）$\{(\underline{t}_i, \bar{t}_i)\}_{i\in I}$，由 $i \in I$ 索引，其中 $\underline{t}_i$，$\bar{t}_i \in [0,1]$ 且

$$\underline{t}_i < \bar{t}_i \le \underline{t}_{i+1}, \tag{17}$$

使得：

$$\bar{r}_W(t) \begin{cases} = r_W(t), & \text{if } t \notin \bigcup_{i\in I} (\underline{t}_i, \bar{t}_i); \\ > r_W(t), & \text{if } t \in (\underline{t}_i, \bar{t}_i). \end{cases}$$

因此，分位数 $(\underline{t}_i, \bar{t}_i)_{i\in I}$ 确定了 r_W 位于其凹化曲线下方的位置。因此，我们可以描述最优机制。

定理1（通过凹化实现的最优机制）

最优机制如下：

$$X(t)=\begin{cases}0, & if\ t<t_m;\\ Q(t), & if\ t\geq t_m\ \ and\ t\notin\bigcup\limits_{i\in I}(\underline{t}_i,\bar{t}_i);\\ \frac{\int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i}Q(t)dt}{\bar{t}_i-\underline{t}_i}, & if\ t\geq t_m\ \ and\ t\in(\underline{t}_i,\bar{t}_i).\end{cases}$$

最优机制产生的收入为：

$$\max_{X\prec_w Q}R(W,X)=\overline{r}_W(t_m)Q(t_m)+\int_{t_m}^{1}\overline{r}_W(t)dQ(t). \tag{18}$$

也就是说，该机制会排除分位数为 $t<t_m$ 的买方（使用保留价 $p=V(t_m)$），并将所有满足 $t>t_m$ 且 $r_W(t)<r_W(t)$ 的分位数（及估值）合并。相比之下，所有位于合并区间之外的分位数$t>t_m$均按有效配置进行分配： $X(t)=Q(t)$。我们在附录中给出该结果的证明，其中使用了主序（稍后会解释，文献中也曾出现类似结果，并采用了多种不同的方法）。如果$r_W(t)$在任意一点严格凹

–

$$t\notin\bigcup_{i\in I}(\underline{t}_i,\bar{t}_i),$$

那么我们给出的机制就是唯一的最优机制；此外，这一条件“通常”成立（我们加上引号是为了强调，我们并未对这一说法进行形式化）。

该定理刻画了卖方获得的收入，以及实现该收入的最优机制。我们首先注意到，最优收入通过对表达式（16）进行三处替换得到。我们可以将 r_W 替换为其凹化形式（根据构造，该形式总是不低于原函数），将 $X(t)$ 替换为外生库存 $Q(t)$，并将积分及初始条件在 t_m 处而非零点进行计算。最优机制排除低于收入最大化分位数 t_m 的买方，将满足 $r_W(t)<r_W\,t$ 的所有分位数的分配汇集起来，而分位数为 t 且满足 $r_W(t)=r_W\,t$ 的买方则获得相应的有效配置。

–

–

4.3 单单位拍卖

当我们将模型解释为一场拍卖时，具体的函数形式 $Q(t) = t^{N-1}$ 并不影响需要汇集的商品分位数。如定理1所述，这仅取决于价值分布。一旦利用价值分布确定了需要汇集的正确分位数分布，最优拍卖就可以实施为一种直接机制：价值处于分位数 t 的买方以概率 $X(t)$ 获得商品。在拍卖中，通常还会关注间接实施方式（例如第一价格或第二价格拍卖），但由于这超出了本综述的范围，我们不作进一步讨论。

4.4 示例：非线性定价与单单位拍卖

我们用贯穿全文的例子来说明这一结果。若 $W(t) = V(t) = t^4$，则 r_W 如图1所示。我们可以看到，在一段分位数区间 $t \in [0, 3/4]$ 内，$r_W(t) < r_W(t)$。然而，收入最大化的分位数为 $t_m = 4/5$，因此所有本来会被汇集的估值无论如何都会被排除，因为它们低于收入最大化分位数 t_m。唯一的卖方最优分配为：

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < \frac{4}{5}; \\ Q(t), & \text{if } t \geq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

因此，卖方会舍弃比例为 $4/5$ 的商品，并将剩余商品按序匹配。在拍卖中，可以通过保留价等于 $V(t_m)$ 的第二价格拍卖来实现这种分配。图2展示了由此产生的分配。

4.5 正则分布

Myerson（1981）提出了一个足以保证不合并的正则性假设，即价值 v对应的虚拟价值单调递增：

$$v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}.$$

因此，我们关注用分位数价值函数表示的虚拟价值 $\phi(t)$ 何时满足

$$\phi(t) \triangleq W(t) - W'(t)(1 - t) \tag{19}$$

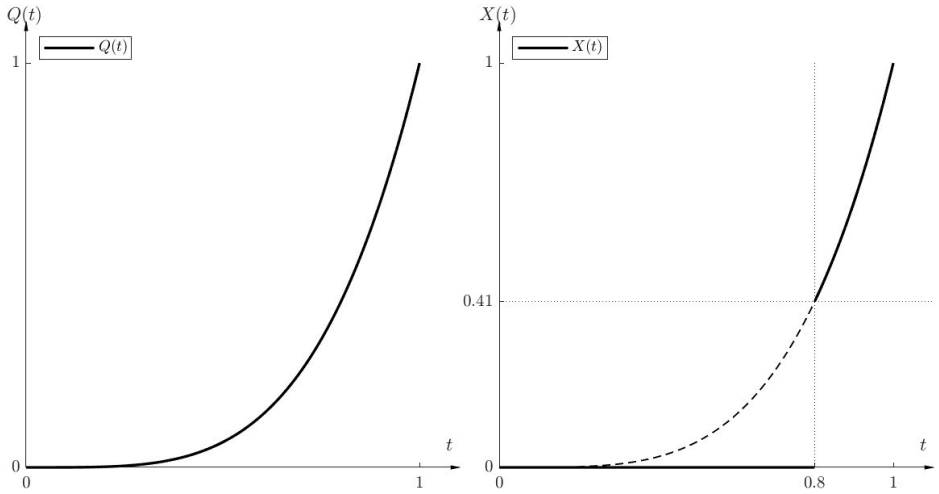

图2：最优拍卖中的分配：可行分配 $Q(t)$ 和最优分配$X(t)$，其中 $Q \succ_w X$。

关于 t 递增。这等价于要求收益函数 $W(t)(1-t)$ 关于 t 为凹函数。

推论1（单调虚拟价值）

若虚拟价值 $\phi(t)$ 随 t递增，则对于所有分位数，最优分配均有效$t \geq t_m$——也就是说，$X(t) = Q(t)$——而分位数 $t < t_m$则被排除——也就是说，$X(t) = 0$。

该命题给出了充分条件，使得最优销售机制由舍弃一部分商品、并按序匹配剩余商品构成。这正是传统上用于确保最优拍卖可通过带保留价的第二价格拍卖实现的经典条件。我们的主要例子不满足该命题中的条件，因为虚拟效用先递减后递增。但最优拍卖仍然是带保留价的第二价格拍卖。如上所述，这是因为分配本会被汇集的区间对应于无论如何都会被排除的买方，因为其虚拟效用确实为负。

4.6 机制设计中的熨平与可行性

我们的分析最直接地结合了近期的两篇论文。具有连续统买家和外生商品库存的模型，本质上等同于 Loertscher 和 Muir（2022）的模型，唯一的区别是我们考虑了连续统种不同的质量。然而，为了分析

这个问题，我们仿照 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021），将可行性约束表示为主序约束，并使用他们对主序约束下线性泛函最大化问题的刻画。我们还仿照 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021），将 Loertscher 和 Muir（2022）中具有连续统买家的模型映射为最优对称拍卖（Myerson（1981））。

在各种情境下，都曾出现过这样的一般问题：在单调性约束下最大化一个函数。早在 Mussa 和 Rosen（1978年）就分析了垄断者实施二级价格歧视的问题，并在单调性约束生效时给出了一个解。在他们的模型中，质量供给需要付出成本，因此对应的是内生库存，而这并非本综述讨论的内容。Myerson（1981年）的开创性研究也在单调性约束生效时，为这一最大化问题提供了解法，但其背景是拍卖。如前所述，当我们将注意力限制在对称拍卖时，可以将其映射到具有外生库存的模型；关于熨平的更一般分析，参见 Toikka（2011年）以及 Noeldeke 和 Samuelson（2007年）。

我们在此提供的几何分析方法，其实早已出现在 Myerson（1981年）的研究中；不过，对凹化（凸化）方法的阐释则是后来才出现的。虚拟价值与垄断者边际收益之间的联系见 Bulow 和 Klemperer（1996）；熨平程序与收益函数凹化之间的联系见 Loertscher 和 Muir（2022）。此外，Loertscher 和 Muir（2022）的早期版本指出，同样的凹化方法也可用于在成本内生时求出最优机制。因此，当质量分布是内生的时，也可以采用类似的几何技术（尽管商品库存不存在相关的可行性约束）。

我们所提供的描述并非旨在面面俱到，而只是选取部分文献，以展示在最优机制设计的背景下，对我们所研究问题出现的不同变体和诠释。[1] 我们聚焦于外生库存，这使我们能够将几种不同的诠释汇集起来，并运用主序的语言来描述质量的可行分布和最优分布。最重要的是，我们表明，这一框架能够让我们将分析与看似无关的信息设计文献紧密联系起来，接下来我们将对其进行分析。

[1]类似的熨平技术也见于 Dworczak、Kominers 和 Akbarpour（2021年）、Akbarpour、Dworczak 和 Kominers（2024年）、Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky（2025年）以及 Kolotilin 和 Wolitzky（2025年）等人的研究。

5 信息设计

现在我们转向信息设计问题：固定机制，并针对信息结构进行优化。与上一节类似，我们的结果适用于任意质量分布 X，但在机制有效时，对这些结果的诠释最为自然。也就是说，当 $X(t) = Q(t)$ 时。

我们首先根据 Blackwell定理，确定某种信息结构能够诱导出的期望价值分布。卖方的问题再次转化为针对分位数价值函数 W 的线性优化。我们证明，最优信息结构可通过对一个适当构造的函数进行凹化得到。随后，我们考察一大类质量分布，其中质量库存呈现单调风险率。在这种情况下，分析得出一个简单的二分结论：质量分布的递减风险率意味着完全披露信息，而递增风险率则意味着在单一区间内完全合并，即不披露信息。下一小节将这些结果与有效拍卖联系起来，表明最优信息结构仅取决于竞标者人数，并通过一个例子加以说明。在拍卖背景下，相应的质量分布不呈现单调风险率，因此部分披露是最优的。最后一小节将该问题解释为一种非线性贝叶斯劝说，与 Myerson的熨平论证以及具有 Yaari（1987）型偏好的劝说问题密切相关。

5.1 信息结构的可行性

买方信息结构由估值的分布 F_v概括。根据 Blackwell（1951）的定理5，当且仅当 F_w 是 F_v的均值保持收缩时，存在一种信息结构诱导出期望值的分布 F_w，即：

$$\int_{v}^{\overline{v}} F_v(x)dx \leq \int_{v}^{\overline{v}} F_w(x)dx, \forall v \in [\underline{v}, \overline{v}], \tag{20}$$

当且仅当 $v = \underline{v}$ 时取等号。如果 F_w 是 F_v 的均值保持收缩（或者 F_w 占优于 F_v），我们记作 $F_v \prec F_w$。根据 Shaked和Shanthikumar（2007）第 3.A 节， F_w 占优于 F_v 当且仅当事前分位数价值函数 $V(t)$ 占优于分位数（期望）价值

函数 $W(t)$:

$$W \prec V.$$

因此，我们得到了关于分位数函数的直接约束。

5.2 收入最大化信息结构

现在，我们考虑在机制实现有效结果的前提下，寻找使收入最大化的信息结构这一问题。我们可以将此问题表述如下:

$$\max_{W \prec V} R(W, Q). \tag{21}$$

这里，我们计算收入 X 在 $X = Q$ 处的第二个自变量，因为我们考虑的是有效机制。

为了描述收入最大化信息结构，我们定义:

$$e_X(t) \triangleq \begin{cases} \int_t^1 (1-s)dX(s), & \text{if } t > 0; \\ \int_t^1 (1-s)dX(s) + X(0), & \text{if } t = 0. \end{cases} \tag{22}$$

这里，该定义在 $t = 0$ 处不连续，以反映从向所有买方提供的最低质量中提取的租金。暂且省略 $t = 0$ 处的不连续性，以便进行解释。分部积分可得，对所有 $t > 0$:

$$e_X(t) = \int_t^1 (X(s) - X(t))\, ds.$$

这是 t 处库存中超额质量的度量。具体而言，它是可以提供给高于 $t.$ 的分位数的额外质量总量

这与一种众所周知的随机序有关：超额财富序（参见^ ^Shaked和Shanthikumar（2007）中的第3.C节）。假设我们有两个库存 X， X，那么当且仅当对于所有 t， X 在超额财富序下大于 X ，即 $e_X(t) \leq e_{\widehat{X}}(t)$。超额财富序是变异性的度量。确切地说，它是一种随机序，决定了对于每一种期望值分布，一种库存何时会带来更多的信息租金。借助超额质量的概念，我们

可以将收入（12）改写如下：

$$R(W,X) = e_X(0)W(0) + \int_0^1 e_X(t)dW(t). \tag{23}$$

这里我们得到了与式（16）相同的表达式，但将收益函数 $r_W(t)$ 替换为超额质量函数 $e_X(t)$，并且相较于分配分位数 $X(t)$，我们改为对价值分位数函数$W(t)$进行最大化。因此，在求解最优信息设计时，我们将积分函数从 $dX(t)$ 调换为 $dW(t)$，同时将被积函数从 $r_W(t)$ 调换为 $e_X(t)$（如式（23）所示，相对于机制设计中较早的问题（16）而言）。

我们可以这样理解新的表达式（23）：卖方以基准价格$W(0)$出售所有商品，由此产生基准收益 $W(0)e_X(0)$，然后再收取附加费。附加费的构成是：对于所有质量高于 $Q(t)$ 的商品，每单位质量额外加价 $dW(t)$。因此，价格增量 $dW(t)$ 带来的收入为 $e_X(t)$，即相对于 $Q(t)$ 的总超额质量。因此，最大化问题的线性权重现在是超额质量 $e_X(t)$。

此外，最大化问题（21）还受到强主序约束。在图3中，我们绘制了典型示例中的 $e_X(t)$，其中 $X(t) = t^4$。尽管 $W(t)$ 和 $X(t)$ 的分位数分布是对称的，但积分中的线性系数 $r_W(t)$ 和 $e_X(t)$ 分别并不相同。

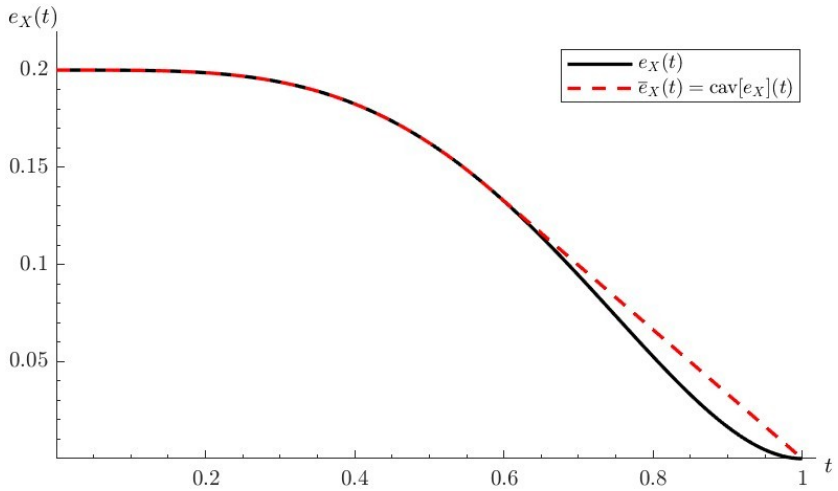

图3：当 $X(t) = t^4$ 时，超额函数 e_X 及其凹化 $\bar{e}_X$。

为了获得直觉　　关于我们为何在（22）的定义中出现不连续性，假设

卖方提供同质质量，即， $X(t) = 1$。于是，对于所有分位数$t \in (0, 1)$，我们都有 $dX(t) = 0$，因此在该区间内也有 $e_X(0) = 0$。然而，在这种情况下，所获得的收入恰好等于质量 $X(0)$乘以最低价值 $W(0)$。因此，不连续性使我们能够正确地计入这一事实：最优机制从所有买方那里提取 $X(0)W(0)$，随后卖方从每个质量增量 $dX(t)$中提取额外收入。

因此，我们可以如下描述最优信息结构。我们用 $e_X(t)$ 表示 e_X 的凹化（逐点大于该函数本身的最小凹函数）。为了描述最优机制，引入描述凹化所需的记号会很有帮助。与之前描述机制设计问题时一样（见（17）），存在一列分位数 $\left\{\underline{t}_i, \bar{t}_i\right\}_{i\in I}$，其中 $\underline{t}_i$， $\bar{t}_i \in [0,1]$ 且

$$\underline{t}_i < \bar{t}_i \leq \underline{t}_{i+1},$$

使得：

$$\overline{e}_X(t) \begin{cases} = e_X(t), & \text{if } t \notin \bigcup_{i\in I} (\underline{t}_i, \bar{t}_i); \\ > e_X(t), & \text{if } t \in (\underline{t}_i, \bar{t}_i). \end{cases} \tag{24}$$

因此，分位数 $(\underline{t}_i, \bar{t}_i)_{i\in I}$ 界定了 e_X 低于其凹化的范围。因此，我们可以描述最优信息结构。

定理2（通过凹化实现的最优信息结构）

最优信息结构所产生的收入为：

$$\max_{W \prec V} R(W, X) = \overline{e}_X(0)V(0) + \int_0^1 \overline{e}_X(t)dV(t). \tag{25}$$

最优信息结构如下：

$$W(t) = \begin{cases} V(t), & \text{if } t \notin \bigcup_{i\in I} (\underline{t}_i, \bar{t}_i); \\ \frac{\int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} V(s)ds}{\bar{t}_i - \underline{t}_i}, & \text{if } t \in (\underline{t}_i, \bar{t}_i). \end{cases}$$

也就是说，当 $e_X(t) < e_X(t)$时，最优信息结构会将各价值合并。该定理刻画了卖方获得的收入，以及实现这一收入的最优信息结构。我们首先指出，最优收入由表达式（23）得到，但我们用其凹化结果替换了 e_X （根据定义，该结果始终不低于原值），并且

我们用外生价值分布$V(t)$替换了期望价值分布 $W(t)$。对于满足 $e_X(t) < e_X(t)$的所有分位数，最优信息结构会将其价值合并；而对于满足 $e_X(t) = e_X(t)$的所有分位数，则会让其获知自身价值。我们在附录中给出该结果的证明；与定理1一样，我们运用了主序理论的结果和思想。

此外，与之前一样，如果 $e_X(t)$ 在任意

$$t \notin \bigcup_{i \in I} (\underline{t}_i, \bar{t}_i),$$

那么我们给出的机制就是唯一的最优信息结构；此外，这一条件“通常”成立（我们加上引号是为了强调，我们并未对这一点进行形式化）。

5.3 单调风险率下的库存

现在我们考虑机制有效时如何求出收入最大化信息结构。为此，我们将 $X(t)$ 替换为 $= Q(t)$，并求出关于 $Q(t)$ 的解。为简单起见，我们假设 $Q(0) = 0$。

我们可以通过考察 e_Q 的曲率来推断方程（25）的解。如果 e_Q 是凹函数，那么解就是完全披露。如果 e_Q 是凸函数，那么解就是不披露。如果 e_Q 是线性函数，那么任何信息结构都是一个解。进而，我们可以给出 e_Q 为凸函数或凹函数的条件。

如果 $Q'(t)(1-t)$ 递减，那么最优信息结构是不披露。如果$Q'(t)(1-t)$ 递增，那么最优信息结构是完全披露估值。我们可以用风险率来表示关于 $Q'(t)(1-t)$ 的单调性条件：

$$Q'(s)(1-s) = \frac{1 - F_q(q)}{F_q'(q)}.$$

因此，这对应于质量分布的逆风险率。

命题1（最优披露）
如果质量分布的风险率递增，那么最优信息结构是不披露。如果质量分布的风险率递减，那么最优信息结构是完全披露。

因此，最优信息结构在很大程度上取决于质量分布的风险率。原因在于，分配是有效的 $X(t) = Q(t)$，因此收入由

相近价值之间的竞争决定。例如，如果质量都相同，即 $Q(t) = 1$，那么收入就只是最低价值，因此完全合并是最优的。另一方面，如果质量分布是帕累托分布，即 $Q(t) = (1-t)^{-\alpha}$ 且 $\alpha > 1$，那么有效分配商品所带来的剩余收益超过了由此产生的信息租金。

5.4 单单位拍卖

正如我们前面指出的，当 $Q(t) = t^{N-1}$ 时，该模型可以解释为有 N 个竞标者的拍卖。此外，由于分配是有效的，在拍卖情境下，可以通过不设保留价的第二价格拍卖来实现这种分配。因此，我们得以重现 Bergemann、Heumann、Morris、Sorokin 和 Winter（2022）的分析。我们还将从定理2继承这样一个特性：最优信息结构仅取决于分位数，而非价值分布。与最优机制的情形不同，在此情形下，分位数 Q 决定了需要汇集的分位数。因此，在拍卖环境的解释下，收入最大化信息结构将仅取决于竞标者的数量。最优信息结构不会属于命题1中讨论的任何一种情形，因为与 $Q(t) = t^{N-1}$ 相关的风险率并非单调。我们将在下一节通过主要示例对此加以说明。

5.5 示例：第二价格拍卖中的信息设计

现在，我们通过由分位数分配函数 $Q(t) = t^4$ 给出的外生库存情形，来说明最优信息结构的结果。我们采用 Bergemann、Heumann、Morris、Sorokin 和 Winter（2022）中的拍卖解释来呈现结果，但读者应牢记，这些结果同样适用于外生库存的筛选问题。

我们刻画最优信息政策的结构。为此，我们首先在图3中绘制 e_Q。可以看到，它在低分位数处是凹的，在高分位数处是凸的。由此可知，正如图3中的凹化所示，最优信息结构由高价值合并以及向低价值提供完全披露构成。因此，在我们的主要

示例中，最优信息结构为：

$$W(t) = \begin{cases} V(t), & \text{if } t < t^*; \\ \frac{\int_{t^*}^1 V(s)ds}{1-t^*}, & \text{if } t \geq t^*; \end{cases} \tag{26}$$

其中，最优阈值 $t^* \approx 0.6$ 是以下方程的解：

$$e'_X(t^*)(1-t^*) = e_X(1) - e_X(t^*).$$

因此，该阈值正是决定 e_X凹化的阈值。

直观而言，最优结构会揭示所有估值低于某一固定阈值的竞标者的确切价值，该阈值由分位数 t^*决定。对于高于此阈值的估值，机制只会揭示价值高于临界值这一信息，从而将这些类型合并到一个共同的后验均值上。这相当于对价值分布进行“上端审查”。

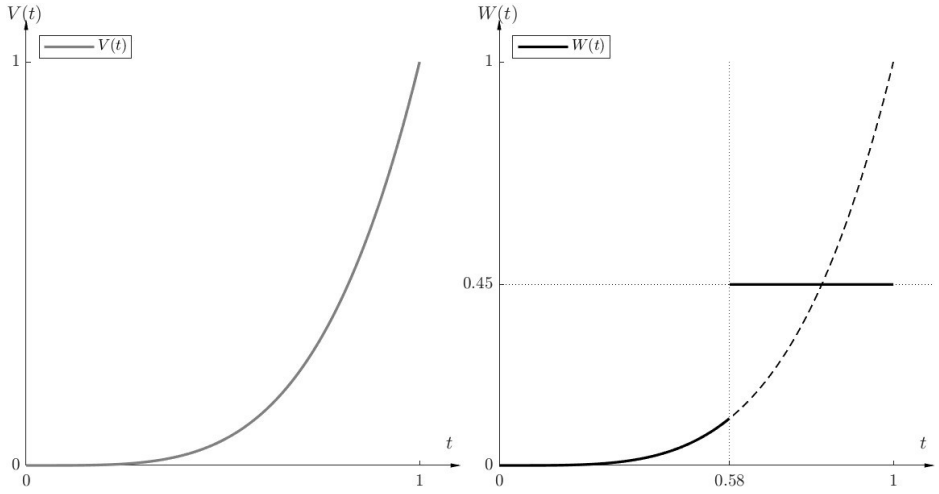

图4：当 V（t）且 W（t）时的最优信息设计，其中 V（t）$\succ W$（t）。

这种信息结构的作用，是以牺牲效率为代价，维持分布上尾的竞争。具体而言，所有高于阈值 $F^{-1}(q^*)$ 的估值都被捆绑在一个质量点上。通过这样做，卖方压低了中标竞标者的信息租金，从而提高了期望收益。

5.6 非线性贝叶斯说服

在 Kamenica and Gentzkow（2011年）提出的经典贝叶斯说服问题中，发送者选择一种信息结构——即后验信念的分布——以最大化其对接收者在获知后验信念后所采取行动所带来的间接效用的期望。由于发送者是期望效用最大化者，其目标函数关于发送者的间接效用是线性的。已有多篇论文研究了接收者只关心状态期望值的情形，例如 Kolotilin（2018年）和 Dworczak and Martini（2019年）。在这种情形下，发送者唯一关心的是信息结构能够诱导出的状态期望值分布。这类分布构成了对期望值事前分布的均值保持收缩集合。用主序的语言来说，这就是所有主序于价值事前分布的分布所构成的集合。Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021年）在定理2中统一并推广了这些结果，并刻画了分布的均值保持收缩集合的极点。

本节研究的信息设计问题不属于这一类。我们在分位数空间中分析该问题，使用估值分布的逆函数。我们观察到，卖方的收入关于分位数价值函数是线性的，而卖方是在一组被事前分位数价值函数主导的分位数价值函数中进行选择。因此，我们借助 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的定理1，该定理刻画了分布的均值保持扩散的极点。值得注意的是，Myerson（1981）已经使用分位数价值函数刻画了最优拍卖，这也是本节的信息设计基本遵循 Myerson（1981）的原因。

本节的信息设计等价于一个非线性贝叶斯说服问题，也就是说，发送者的偏好并非期望效用。Yaari（1987）研究了风险选择的对偶理论，其中决策者的偏好对彩票支付呈线性，而对概率呈非线性。我们的问题等价于一个具有 Yaari 偏好的贝叶斯说服问题。[2] Jewitt and Quigley（2023）分析了这一问题，并指出它与许多应用相关（这些应用中的决策者均为期望效用最大化者）。Gershkov、Moldovanu、Strack 和 Zhang（2021）研究了一种具有内生价值的拍卖模型，该模型导出一个约化形式模型，其中代理人具有带有 Yaari 偏好的非期望效用。Gershkov、Moldovanu、Strack 和 Zhang（2022）研究了包含 Yaari 对偶偏好的非期望效用模型中的最优拍卖。

[2]我们感谢 Roberto Corrao 指出了这一点。

Kolotilin 和 Wolitzky（2025）表明，当选区操纵者的目标是最大化预期席位数时，国会选区不公正划分问题对应于一个线性贝叶斯劝说问题。他们论文的早期版本（Kolotilin 和 Wolitzky（2020））表明，在一种特殊情形下，如果选区操纵者关心席位数的某个非线性函数，那么只要总体冲击服从均匀分布，就可以求解该问题。他们通过调整 Myerson 的熨平结果求解了该问题，而这一结果也适用于我们的框架。

此外，还有一些相关论文假设状态是一个实数，且信息仅限于以划分的形式呈现，因此信号是状态的单调确定性函数：Rayo（2013年）以及 Onuchic 和 Ray（2023年）。

6 结　　合机制设计与信息设计

现在，我们允许卖方同时选择分配和信息结构，以此结合机制设计与信息设计。

我们首先定义这一问题并讨论其解释。接着，我们证明，最优机制可以表示为单调分割结构：在这些区间内，类型要么完全分离，要么汇集，且期望价值的分布与质量的分布具有共同支撑集。主要结果表明，汇集始终是最优的：只要信息和分配得到联合优化，分位数空间中的每个区间都涉及汇集。随后，我们重新审视拍卖的解释，并给出主要参数化设定下的解。最后，我们指出，核心结论——即汇集是最优的——具有稳健性，并提供其他论证方式。

6.1 信息与分配的联合最大化

假设卖方可以同时选择分配和信息结构，以最大化收入。联合优化问题可以简洁地表述为求解：

$$\max_{\substack{W \prec V \\ X \prec_w Q}} R(W, X). \tag{27}$$

因此，我们得到一个关于两个分位数函数的最大化问题，并受两个主序约束限制。现在，我们将联合机制 称为信息结构 W 和分配

X:

$$M \triangleq (W, X).$$

这里的术语用法略有不严谨，因为在前文中，机制仅指分配及其对应的转移支付。不过，由于卖方现在也可以控制信息披露，我们扩展了机制的概念，使其涵盖问题的这两个维度。

在继续之前，简要讨论机制的实施方式会有所帮助。理解机制的一种方式是：卖方先设计信息结构，然后在该信息结构固定后，设计最优机制。按照这种理解，假设机制是直接机制并不失一般性。另一种理解是：卖方先选择一个价格菜单 $T : q \to \mathbb{R}_+$，规定每种商品的售价，然后在给定该菜单的情况下，向买方提供一些有关其自身价值的信息。按照这种理解，将信息视为关于买方应购买哪种质量的推荐并不失一般性。此外，这也为不同的解释提供了空间，说明为什么卖方可能能够设计信息，却无法进行明确歧视。本综述将仅考察约化形式描述（27）；关于其解释与实施方式的更详细讨论，见 Bergemann、Heumann 和 Morris（2026）。

我们的主要分析分两步进行。首先，我们利用迄今为止的分析，给出最优机制的一般性质。随后，我们阐述解的主要定性特征：总是存在合并。接着，我们在拍卖的背景下解释这一结果，并给出一个示例。最后，我们说明，在什么意义上，本问题中出现的合并，比仅对价值分布或分配（而非两者同时）进行最大化时出现的合并更为普遍且持久。本节所给出的结果可见于 Bergemann、Heumann 和 Morris（2026）的已发表版本。本文的阐述则更多遵循 Bergemann、Heumann 和 Morris（2024b）较早的工作论文版本。[3]

[3]已发表版本允许采用一般类别的生产函数，因此质量分布可以是内生的。在较早的工作论文中，我们关注的是卖方拥有外生库存的情形。

6.2 最优机制的结构

现在我们来刻画最优机制。该机制规定了期望价值的分布 W，作为信息选择；并规定了（期望）质量的分布 X，作为可用质量的选择。双线性结构使我们能够运用命题1-2，得出期望价值和质量的分位数函数具有单调分区结构。此外，经过简单论证，我们可以证明这两个分位数函数必须具有相同的支撑集。通过同时运用揭示原理和征税原理，可以得到这一共同支撑集。换言之，将关注范围限定于这样的机制并不失一般性：买方可获得的期望价值数量与所提供的质量数量之间存在一一对应关系。

现在，我们引入一些术语，用来描述价值分布和质量分布的关键性质。若分位数函数 W满足以下条件，则称其为 单调分区： $[0,1]$ 被划分为可数个区间$[t_i, t_i)_{i\in I}$ ，并记 I 为这些区间的标签，则有

$$W(t) \triangleq \begin{cases} V(t), & \text{if } t \notin \bigcup_{i\in I} [\underline{t}_i, \bar{t}_i) \ ; \\ \frac{\int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} V(s)ds}{\bar{t}_i - \underline{t}_i}, & \text{if } t \in [\underline{t}_i, \bar{t}_i) \text{ for some } i \in I. \end{cases} \tag{28}$$

且每个区间要么是合并的，即买方只知道自己的价值对应于区间 $\left(t_i,\ t_i\right)$ 内的某个分位数；要么是完全披露，也就是说，价值对应的分位数不在任何区间 $[t_i, t_i]$ 内的所有买方都知道自己的价值。期望值可以用分位数函数明确表示如下：

$$w_i = \frac{\int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} V(t)\, dt}{\bar{t}_i - \underline{t}_i}.$$

若期望价值分布 W 的所有分位数都被合并，即：则称其为 单调合并

$$\bigcup_{i\in I} [\underline{t}_i, \bar{t}_i) = [0,1].$$

我们也可以类似地定义质量的单调分区分布和单调合并分布 X。不过，质量分布 X 只需被 Q弱支配。若存在一个单调分区分布 X 以及一个

示性函数 $\mathbb{I}_{t\geq t_m}$，使得:

$$X(t) = \widehat{X}(t) \cdot \mathbb{I}_{\ t\geq t_m}(t),$$

其中，$\mathbb{I}_{t\geq t_m}(t)$ 是示性函数:

$$\mathbb{I}_{t\geq t_m}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq t_m; \\ 0 & \text{if } t < t_m. \end{cases} \tag{29}$$

换言之，弱单调分割分布的生成方式是：首先，将分位数低于 t_m 的所有质量对应的质量值降为零，然后生成一个单调分割分布（其中一些较低的质量值已降为 0）。弱单调汇聚分布的定义方式类似，只是所有区间都进行合并。

为简化表述，下文省略限定词“弱”。因此，当我们称质量分布 X 是单调分割（或单调汇聚）分布 X 时，始终指弱意义下的分布。

Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的命题1表明，集合 $\{W:\ W \prec V\}$ 是一个紧凸集；他们的定理1则表明，该集合的极点由式（28）给出。对于 X，同样的分析也适用，唯一的区别是，集合 $\{X : X \prec_w Q\}$ 的极点集合为弱分割结构（见 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的推论2）。目标函数（27）关于 $(W,\ X)$ 是双线性的。因此，根据 Bauer 最大值原理（Bauer（1958）），最大化问题在 $\{W:\ W \prec V\}$ 的某个极点处达到最大值。

我们称 W 和 X 具有共同支撑集，如果生成单调分割分布的分位数划分 相同。我们得到以下结果。

命题2（单调分割分布）

存在联合优化问题(27) 的一个解$(W^*、\ X^*)$，其具有带共同支撑集的单调分区结构。

因此，该问题的双线性结构保证存在一个解，使得期望值和质量的分位数分布分别是其对应可行集的极点。共同支撑集结果的直觉是：如果提供信息不会导致不同的选择，那么提供信息（弱）次优——这意味着 W^* 与其具有相同的支撑集

即 X^*——而向具有相同期望价值的买方提供多个选项也是（弱）次优的——这意味着 X^* 与 W^* 具有相同的支撑集。换言之，该结果是通过将揭示原理和征税原理同时应用于该问题的解而得到的。

6.3 池化的最优性

接下来我们将证明,事实上，在最优机制中，每个区间都是合并区间 .

定理3（合并的最优性）
联合优化(W^*, X^*) (27) 的每个解都只包含合并区间。

我们给出证明的主要论证。考虑这样一种机制：在某个区间 $[t_1, t_2]$ 内，完全披露且完全分离（即，对所有$t \in [t_1, t_2]$， $W(t) = V(t)$，且 $X(t) = Q(t)$）。假设卖方将区间 $[t_1, t_2]$ 内所有估值对应的分配合并，使这些估值都获得该区间内的平均质量。利润会因此减少多少？我们先从以下虚拟价值开始论证：

$$\phi(t) \triangleq V(t) - V'(t)(1-t). \tag{30}$$

所产生的利润等于虚拟价值与质量乘积的期望：

$$\Pi \triangleq \int_0^1 Q(t)\phi(t)dt.$$

我们将区间 $[t_1, t_2]$ 内虚拟价值和质量的（条件）均值与方差记为：

$$\mu_\phi \triangleq \frac{\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)dt}{t_2 - t_1}; \qquad \mu_q \triangleq \frac{\int_{t_1}^{t_2} Q(t)dt}{t_2 - t_1}; \tag{31}$$

$$\sigma_\phi^2 \triangleq \frac{\int_{t_1}^{t_2} (\phi(t) - \mu_\phi)^2 dt}{t_2 - t_1}; \qquad \sigma_q^2 \triangleq \frac{\int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - \mu_q)^2 dt}{t_2 - t_1}. \tag{32}$$

由于我们只计算区间 $[t_1, t_2]$ 内的条件均值和方差，因此可以放心地省略 μ 和 σ 表达式中指代区间 $[t_1, t_2]$ 的下标。证明的第一步表明，区间 $[t_1, t_2]$ 内质量汇聚造成的收入损失有以下上界：

如下：

$$\sigma_\phi \sigma_q (t_2 - t_1).$$

因此，当区间很小时，合并质量会造成三阶利润损失（因为区间很小时，各相乘项都很小）。

如果除了合并质量之外，我们还合并该区间内的估值，就可以减少买方信息租金。当只合并质量而不合并估值时，相对于刚好低于合并区间的估值，获得合并质量的估值所对应的质量增量是质量差异 $\mu_q - Q(t_1)$，其价格为 t_1。合并估值后，质量增量的价格根据处于该区间内这一条件下的期望价值计算：

$$\mu_v \triangleq \mathbb{E}[V(t) \mid t \in [t_1, t_2]].$$

因此，对于高于 t_1 的每个分位数值，合并估值都会使支付增加：

$$(\mu_v - V(t_1))(\mu_q - Q(t_1))(1 - t_1).$$

当区间很小时，前两个相乘项都很小。然而，对于所有高于 t_1 的估值，支付都会略有增加，而这部分估值的质量不可忽略（即，$(1 - t_1)$ 并不小）。换言之，对于所有高于 t_1 的估值，合并估值都会提高质量改进（$\mu_q - X(t_1)$）的价格。因此，合并估值会带来二阶收益，并且始终超过三阶扭曲。

6.4 示例：非线性定价与产品设计

在图5中，我们通过一个示例说明最优机制。与此前对最优分配或最优信息结构的分析形成鲜明对比的是，正如定理3所确立的，最优联合机制现在在各处都会导致汇集区间。在当前示例中，这意味着只提供两种质量，并且所有估值都会被分配到两个价值池中的一个。我们可以看到，W^* 和 X^* 的跳跃发生在相同的分位数处，正如命题2所确立的。

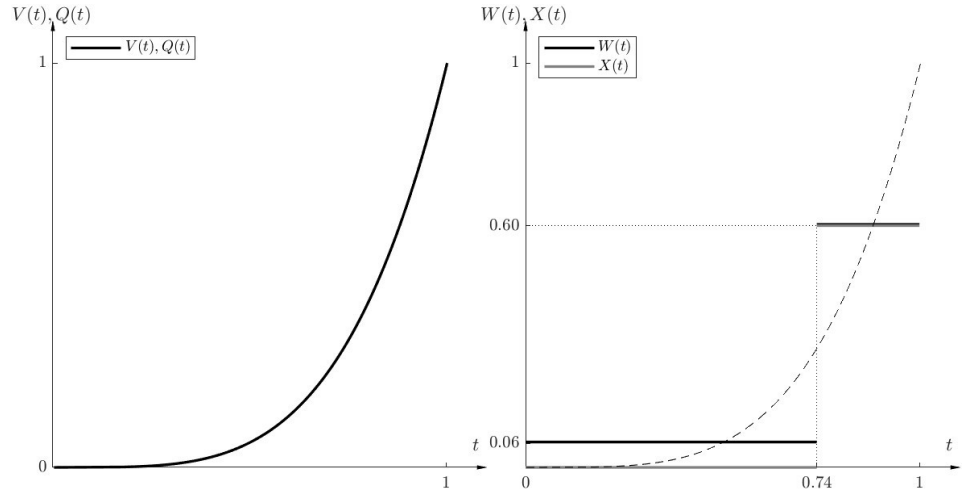

图5：左侧展示给定的价值分布 $V(t) = t^4$ 和质量分布 $Q(t) = t^4$。右侧展示相应的最优分布 $W(t)$ 和 $X(t)$，它们是单调分割分布。

6.5 拍卖

我们可以将该模型理解为这样一种卖方：同时设计信息结构和最优对称拍卖。Bergemann 和 Pesendorfer（2007年）以更一般的形式研究了这一问题，他们并不局限于对称拍卖。事实上，他们证明了非对称信息结构和拍卖是最优的。在对称结果的限制下，我们进一步发现，当有五名竞标者时，竞标者将分为两类，即具有低估值和高估值（期望值）的竞标者。

6.6 合并的稳健性

我们在本节最后指出，在双线性环境中，通过最大化所得到的合并，比本文所呈现的结果更具稳健性。为便于阐述，我们分析了卖方拥有外生库存的情形；但在我们工作的已发表版本中，我们允许库存为内生的（例如，Mussa 和 Rosen（1978）中的情形）。单调分区信息结构这一结果基于线性效用 v，但我们的主要结果在非线性效用环境下仍有一些版本成立（参见工作论文版本 Bergemann、Heumann 和 Morris（2024b）中的定理5）。在已发表版本 Bergemann、Heumann 和 Morris（2026）中，我们证明，即使价值是离散的，只要分布的熵不低于 log(8)，某种合并仍是最优的（这是取值为8的均匀分布的熵

）。因此，即便在信息已经较为粗糙的环境中，也会出现合并。总体而言，我们发现，支持合并的结果在性质上与第4—5节所呈现的结果截然不同；在后者中，卖方只控制了设计问题的一个维度。

7 消费者剩余

到目前为止，我们的分析重点在于考察控制分配和/或信息如何提高卖方收入。现在，我们将考察如何利用这些选择来提升消费者福利。事实上，我们将证明，正如第 3 节末尾等式（14）所示，表示消费者剩余的目标函数，只需简单交换分位数函数，就会与第 4 至第 5 节研究的目标函数相同。此外，相较于收入最大化相关章节所研究的主序约束，这里的主序约束只需稍作调整。我们通过将弱主序调整为严格主序（反之亦然），来强调这些约束在优化问题中的作用。本节最后，我们将分析信息和机制均由人选择、但目标未必是收入最大化的情形。我们认为，这一问题会变得更加微妙，衍生出各种可作不同解读的问题，同时仍保留原问题的大部分结构。

7.1 消费者剩余

我们首先强调买方与卖方之间的对称性。只要满足前面条件（13）中给出的边界条件 $W(0) = 0$ or $X(0) = 0$，且分布是绝对连续的，就有：

$$R(W, X) = U(X, W). \tag{33}$$

也就是说，对于给定的一对分布 (W, X)，卖方获得的收入与交换这两个分布的角色后买方本可获得的消费者剩余相同。因此，除了需要交换分位数函数 W 和 X 的交换对称性之外，两者的目标函数完全相同。本节中，为简化表述，我们假设边界条件 $W(0) = 0$or $X(0) = 0$, 成立。

现在，我们简要解释目标函数中的对称性。

消费者剩余最大化问题可以表示为线性优化，我们只需调整权重即可。表1总结了控制不同工具时可能采用的不同目标。

		目标函数	
		R	CS
工具	分配	$(r_W, \prec_w)$	$(e_W, \prec_w)$
	信息	$(e_X, \prec)$	$(r_X, \prec)$

表 1：收入与消费者剩余工具的交换对称性 s

上表总结了设计优化问题与其对应表示之间的关系，包括线性权重和主序约束类型。

尽管收入和消费者剩余的表达式在分配与信息的作用上具有对称性，但在控制分配或信息时，问题的两个方面会以微妙的方式改变这种对称性。首先，到目前为止，我们关注的是收入最大化，这打破了分配与信息之间的对称性。在双边匹配的解释下，控制分配等同于合并卖方，而卖方是市场中被最大化的一方；控制信息则等同于合并买方，而买方是市场中未被最大化的一方。另一个改变这种对称性的方面是，控制分配时，我们考虑的是弱主序约束，而非强主序约束。约束上的这一差异很小，只会导致舍弃某些商品，或等价地，排除某些消费者。

7.2 对称性与双边匹配

我们将该模型解释为由卖方（垄断者）向买方提供多种商品。随后，转移支付由分配以及机制必须满足激励相容这一要求共同决定。不过，我们也可以将该模型解释为由一系列连续统的不同卖方组成，每个卖方以 $t \in [0,1]$ 为索引，各自提供一种质量为 $Q(t)$ 的商品。这样，我们就得到一个双边匹配市场，并考察竞争均衡中形成的价格。在这种情况下，我们会得到相同的公式（关于完全信息和拟线性效用条件下匹配市场中的详细联系，参见 Chiappori、McCann 和 Nesheim（2010年）或 Galichon（2016年））。

只有当 $W(0) = 0$ 或 $X(0) = 0$ 时，我们才会得到完全对称性。原因在于，我们假设价值最低的买方获得零剩余。当 $W(0) = 0$ 或 $X(0) = 0$ 时，参与约束意味着这一条件成立。然而，如果 $W(0)\ X(0) > 0$，那么价值最低的买方之所以获得零剩余，只是因为我们假设卖方拥有全部议价能力。因此，当 $W(0)\ X(0) > 0$ 时，双边匹配市场中的转移支付由分配和议价能力决定，后者决定剩余最低的卖方和买方各自获得多少剩余。当分配或信息结构存在不连续性时，议价能力也会变得重要；随着分析的展开，这一点将愈发清楚。我们不再进一步探讨这一解释，而是利用对称性来研究消费者最优配置和机制。

7.3 消费者最优设计

现在我们求取消费者最优机制和消费者最优信息结构。

消费者最优配置 我们首先考虑消费者最优机制，其中选择变量为分位数分配函数 X：

$$\max_{X \prec_w Q} U(W, X), \tag{34}$$

其中，如前所述，我们假设 $W(0) = 0$. 利用（33）中的对称性论证，我们可以得到，从解析角度看，这与以下问题相同

$$\max_{X \prec Q} R(X, W),$$

第5节所研究的问题，唯一的区别在于，消费者剩余最大化问题中的主序约束是弱约束，而在此前的收入最大化问题中，我们有一个与贝叶斯一致性相关的严格主序不等式。然而，很容易验证，在最优解中，主序约束将会是绑定的。形式上，这可以通过注意到 $e_X(t)$ 是非递增的来证明。直观地说，对买方而言，舍弃商品从来都不是最优选择。因此，该解确实将与第5节中的解相同。

虽然从分析上看，我们得到的问题与寻找收入最大化的信息相同，但现在我们对它有了不同的解释。在这种情况下，我们重新得到这样一个问题：在双边匹配市场中，寻找能够使买方剩余最大化的质量汇聚。这个问题可以

被解读为：一位规划者希望向消费者提供商品以使其剩余最大化，但只能使用一种有成本的筛选工具来筛选买方，例如浪费性筛选（Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）或 Condorelli（2012））。Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）给出了一般解（结果见命题4，关于竞赛设计的更广泛讨论见其中的讨论）。事实上，在第5.3节的命题1中，我们得到了与 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）相同的解（见命题4.3）。他们证明，消费者最优配置取决于估值分布的风险率。

消费者最优信息结构 现在我们考察消费者最优信息结构，其中选择变量是分位数价值函数 W：

$$\max_{W \prec V} U(W, X), \tag{35}$$

其中，如前所述，我们假设 $X(0) = 0.$。根据式（33）中的对称性论证，我们可以得到，从解析上看，这与最大化收入的机制设计问题相同

$$\max_{W \prec_w V} R(X, W)$$

该问题在第4节中有所研究，唯一的区别是，此处的主序约束是严格的，而前文采用的是弱不等式。在这种情况下，这一区别可能导致不同的预测。当然，如果坚持要求在给定信息结构下实现有效配置，那么无论如何都可以将弱主序约束改为严格主序约束。

具体而言，我们考虑最具代表性的例子：单一商品的第二价格拍卖。此时，唯一的竞标者最优对称信息结构为：

$$W(t) = \begin{cases} \frac{\int_0^{t^*} V(s)ds}{t^*}, & \text{if } t < t^*; \\ V(t), & \text{if } t \geq t^*; \end{cases}$$

其中，临界值 $t^* = \frac{3}{4} \in [0, 1)$ 独立于分布 F_v。在此，我们得到了与第4.4节相同的凹化判定阈值。这并非巧合，因为实际上在这两种情况下，我们凹化的都是完全相同的函数（这里，$Q = V$ so $r_Q = r_V$这一点很有用）。然而，我们得到的解与第4.4节不同，因为弱主序约束和强主序约束会影响各自情形下解的性质。在对信息结构进行优化时，无法舍弃买方，而所得解会将低估值汇集起来。

在对分配进行优化时，可以舍弃商品，因此，在分析卖方最优分配时，消费者最优信息结构中被汇集的那些分位数会被舍弃。因此，在这种情况下，我们会得到一些价值池化；而在第4.4节中，我们得到的是一些质量被舍弃了，否则这些质量本来会被汇集。

8 稳健预测与其他比较静态分析

本节讨论稳健预测和比较静态分析，并将前文结果解读为刻画所有可能信息结构下可行福利结果的集合。本节推导有效拍卖中的福利前沿，表明最优信息结构会在上限审查和下截尾之间交替，具体取决于收入与消费者剩余的权重。最后，本节考察竞标者人数变化所带来的比较静态结果，指出最优池化阈值会随着 N 单调上升，而有效参与竞争的竞标者人数则始终大致保持在两个左右，即使 N 变得很大。

8.1 稳健预测

到目前为止，我们考察了具有各种不同目标的机制设计和信息设计问题。机制设计问题通常有一种非常自然的字面解释，但信息设计问题往往没有直接明了的解释。我们可以设想一些信息设计具有字面解释的情形：或许有一个平台向卖方提供信息，以最大化其平台上消费者的剩余（参见 Bergemann 、 Brooks 和 Morris （ 2015 年）等）。

然而，我们对信息设计产生兴趣，源于对信息设计问题的一种不同且完全比喻性的解读。第一代信息经济学对信息作出了高度参数化的假设。这些假设在实证研究中转化为极端的结构性假设，而这些假设很难检验。但我们提出了这样一个问题：在一个固定的博弈中，可能出现哪些结果？参见 Bergemann 和 Morris（2013年）、Bergemann 和 Morris（2016年）、Bergemann 和 Morris（2019年）。应用方面，参见 Bergemann、Brooks 和 Morris（2015年）、Bergemann、Heumann 和 Morris（2015年）、Bergemann、Brooks 和 Morris（2017年）、Bergemann、Brooks 和 Morris（2025年）。关于一些别具特色的应用，参见 Bergemann、Brooks 和 Morris（2021年）以及 Bergemann、Heumann 和 Morris（2020年）。

8.2 高效拍卖中的稳健预测

我们首先考虑第5.4节研究的环境，但现在考虑收入与消费者剩余的所有可能线性组合（权重可能为负）。因此，我们求解：

$$\max_{W \prec V} \{ \ m\left((1-|\lambda|)R(W,Q)+\lambda U(W,Q)\right)\} \tag{36}$$

对所有 $\lambda \in [-1,1]$，$m \in \{-1,1\}$ 和 $Q(t) = t^{N-1}$. 我们注意到 $Q(0) = 0$，因此无需担心式 (22) 中的不连续性。如果 $\lambda \in [0,1]$，$m = 1$ 那么目标函数对消费者剩余和收入都赋予正权重；如果 $\lambda \in [0,1]$，$m = -1$ 那么目标函数对消费者剩余和收入都赋予负权重；如果 $\lambda \in [-1,0]$，$m = 1$ 那么目标函数对收入赋予正权重，但对消费者剩余赋予负权重；如果 $\lambda \in [-1,0]$，$m = -1$ 那么目标函数对消费者剩余赋予正权重，但对收入赋予负权重。

利用此前在式 (33) 中观察到的对称性，我们有：

$$U(W,Q) = R(Q,W).$$

因此，我们可以将社会福利函数写成如下形式：

$$m\left((1-|\lambda|)R(W,Q)+\lambda U(W,Q)\right) = m((1-|\lambda|)e_Q(0)+\lambda r_Q(0))W(0)+\int_0^1 m((1-|\lambda|)e_Q(t)+\lambda r_Q(t))dW(t).$$

为使符号表示更简洁，我们将加权社会福利（或简称剩余）函数定义如下：

$$S_{\lambda,m,Q}(t) = m((1-|\lambda|)e_Q(t)+\lambda r_Q(t))$$

分析方法与第5节相同，只需将式 (23) 中的超额质量函数 $e_Q(t)$ 替换为剩余函数 $S_{\lambda,\ m,\ Q}(t)$。结果表明，$S_{\lambda,\ m,\ Q}(t)$ 在 $[0,1]$ 中至多有一个拐点。

有两类最优信息结构能够描绘福利集合的整个边界：**上端审查**和**下端审查**。在对 $S_{\lambda,\ m,\ Q}(t)$ 进行凹化时，我们总会找到一个完全披露区间和一个合并区间，因此形成二元单调划分。合并区间可以位于分布的顶部（如第5.5节中最大化收入时），也可以位于底部（如第7.3节中最大化消费者剩余时）。如果存在一个阈值分位数 t_c，我们就称该最优信息结构为上端审查

使得:

$$W(t)=\begin{cases}V(t), & \text{if } t\le t_c;\\ \frac{\int_{t_c}^1 V(t)}{1-t_c}, & \text{if } t\ge t_c.\end{cases}$$

也就是说， $t<t_c$ 分位数的主体了解到自身的估值，而高于 t_c 的分位数主体只了解到其估值高于 $V(t_c)$ 。 我们在第5.4节得到的解是上端审查。如果存在 t_c 使得：我们称最优信息结构为下端审查:

$$W(t)=\begin{cases}\frac{\int_0^{t_c} V(t)}{t_c}, & \text{if } t\le t_c;\\ V(t), & \text{if } t\ge t_c.\end{cases}$$

也就是说， $t>t_c$ 分位数的主体了解到自身的估值，而低于 t_c 的分位数主体只了解到其估值低于 $V(t_c)$ 。 完全披露和不披露分别是上端审查和下端审查的特例

定理4（加权社会福利的最优信息结构）
最优信息结构产生的福利为:

$$\max_{W\prec V} S_{\lambda,m,Q}=\overline{S}_{\lambda,m,Q}(0)V(0)+\int_0^1 \overline{S}_{\lambda,m,Q}(t)dV(t). \tag{37}$$

如果 $m=1$ 且 $\lambda\in[-1,1/2]$，则最优信息结构为上端审查；否则，最优信息结构为下端审查。

现在，我们展示图6中可行福利对的边界，其中不同颜色代表不同的解。该图还展示了何时完全披露最优，以及何时不披露最优。当 $m=1$ 和 $\lambda=1/2$ 时，目标函数是最大化总剩余，因此完全披露最优；当 $m=-1$ 和 $\lambda=1/2$ 时，目标函数是最小化总剩余，因此不披露最优。我们可以看到，边界在这些点处不可微，这意味着对于接近$\lambda=1/2$.的其他价值，完全披露和不披露也同样最优。

8.3 目标不一致下的资源配置与信息设计

迄今为止，我们要么在固定分配的同时对信息进行最大化，要么在固定信息的同时对分配进行最大化。唯一的例外是第6节，我们在那里分析了分配和

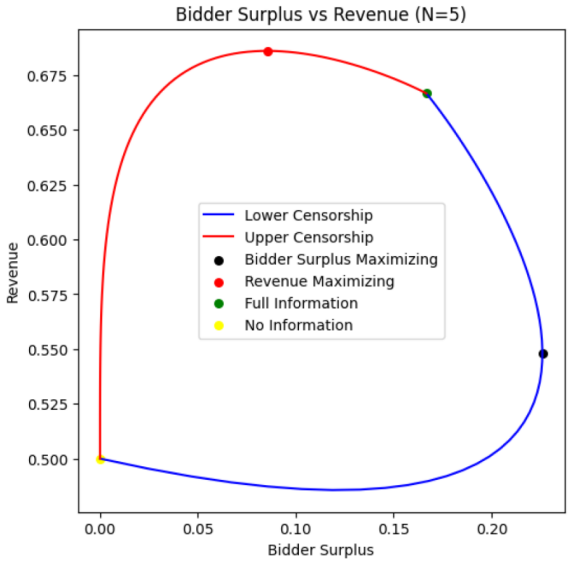

图6：收　　入与消费者剩余前沿在所有社会福利权重下的表现 λ，m。

信息以共同目标为准进行选择的情形。根据式（33）中的交换对称性论证，很容易验证，如果两者都以最大化消费者剩余为目标进行选择，同样的解也成立。然而，我们可能会关注这样一种情形：分配和信息都由博弈内生决定，但由目标不同的代理人分别选择。一类重要情形是对抗性或稳健情境：卖方选择机制，而对抗性自然选择信息结构。我们在工作论文 Bergemann、Heumann 和 Morris（2022）、（2024）中研究了这一问题。其解与迄今为止的分析有显著不同。尤其是，我们将无法使用 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）关于极点的结果；我们已在第6.2节介绍过这些结果。现在，我们简要讨论这一研究方向，以说明其中一些新颖的解释及相关结果。

首先，考虑这样一种情形：选择信息结构以最大化消费者剩余；随后，卖方在了解信息结构后，选择分配以最大化收入。这一设定有一种直观的字面解释：第三方平台可以修改关于消费者的信息，而卖方则可以针对其面临的需求做出最优回应。该问题可以写成：

$$\max_{\substack{W \prec V \\ X \prec_w Q}} U(W, X), \tag{38}$$

约束条件为

$$X \in \arg\max_{X \prec_w Q} R(W, X).$$

如果 $Q(t) = t^{N-1}$，那么当卖方使用收益最大化机制（了解信息结构）时，该问题可以解释为寻找消费者最优信息结构。如果对所有 $t \in [0,1]$， $Q(t) = 1$，那么我们就得到 Roesler 和 Szentes（2017）研究的问题。

现在，我们也可以考虑收入最小化信息结构。该问题可以写成如下形式：

$$\min_{\substack{W \prec V \\ X \prec_w Q}} R(W, X) \text{ subject to } X \in \arg\max_{X \prec_w Q} R(W, X). \tag{39}$$

目前尚不清楚是否存在字面意义上的解释，但可以将这一问题理解为：无论信息结构如何，卖方能够获得的收入范围。

此外，可以预期能够找到式（39）的鞍点；这样一来，该机制便具有在所有信息结构下提供最优收入保证的性质。这一方法的早期例子见 Bergemann、Brooks 和 Morris（2016年）以及 Bergemann 、 Brooks 和 Morris （ 2019 年）；最近，Brooks 和 Du （ 2021 年）、Brooks 和 Du（2024年）以及 Brooks 和 Du（2025a）发展了更为一般的方法，进一步的相关论文则在本书的一章中进行了综述，即 Brooks 和 Du（2025b）。与这些文献一致，我们证明鞍点存在，并给出相应的最优收入保证机制。不同于早期文献，我们能够利用主序的更基本直觉来构造鞍点，从而将主序工具引入最优稳健机制的求解。

8.4 拍卖中竞标者数量的影响

现在，我们分析拍卖中的最优信息结构如何随竞标者人数变化。也就是说，我们重新考察第5.5节中的分析，但关注解如何随N变化。该分析的一个显著特点是，最优信息结构完全可以用竞标者人数来刻画。与外生库存的一般情形不同，在这里，外生库存分布的形式格外简单，可由一个参数概括，因此我们能够推导出具有明确经济含义的结果。相比之下，一般而言，无论是在信息设计问题还是机制设计问题中，最优熨平程序都复杂地依赖于估值或质量的分布。这使得我们更难以

定性描述相关分布。

最优信息结构是上端审查，如式（26）所示。决定最优信息结构的分位数阈值 $t^*(N)$ 在竞标者为两人时等于零，随 N 单调递增，并在竞标者人数趋于无穷时收敛于一。对于 $N \geq 3$，它由下列方程的解隐式定义：

$$e_Q'(t)(1-t) \;=\; e_Q(1) - e_Q(t),$$

这是一个关于 q 的 N 次多项式。下面列出了若干 N 取值对应的数值解：

N	2	3	4	5	10	100
$t^*(N)$	0	0.25	0.46	0.58	0.81	0.98

可以验证，价值在顶部汇集的竞标者预期人数在不同 N 下大致保持不变。价值处于分布顶部的竞标者预期人数为：

$$N(1 - t^*(N)).$$

进而可以证明：

$$N(1 - t^*(N)) \in (1.79, 2.25) \approx 2 \quad \text{for all } N.$$

因此，最优信息政策始终在分布顶部维持约两名竞标者之间的竞争。

9 结论

本文提出了一个统一框架，运用主序和分位数函数的语言来分析机制设计与信息设计。通过在分位数空间中进行研究，我们表明，这两个问题都可归结为在主序约束下最大化线性泛函——其中，机制设计涉及弱主序（允许丢弃商品），而信息设计涉及严格主序（要求告知所有类型）。

我们的分析得出了几个关键见解。首先，机制设计问题与信息设计问题之间存在深刻的对称性。二者都涉及对适当定义的函数进行凹化，并且都会在最优解中导致合并或熨平。然而，

主序约束的性质有所不同，从而带来了截然不同的经济解释：机制设计通过保留价格排除低类型，而信息设计则合并其信息。

其次，当设计者能够同时优化信息与分配时，合并便无处不在。与分别求解的优化问题不同——在适当条件下，完全分离或完全披露可能是最优的——联合优化总会涉及某种合并。这反映了目标函数的双线性结构，以及两个主序约束之间的相互作用。直观而言，即使只是少量信息合并，也能带来从边际内类型中提取剩余的二阶收益，同时仅造成三阶的配置扭曲。

第三，我们的框架为稳健预测和福利分析提供了一种自然的方法。通过刻画所有可能信息结构下可行结果的集合，我们能够识别出不受信息假设影响的预测。在拍卖情境中，我们证明，福利前沿可以完全由上限和下限审查策略刻画；当总剩余最大化时，完全披露是最优的。

第四，拍卖中的比较静态分析揭示了一种显著的规律：随着竞标者数量增加，最优信息结构合并的价值分布比例逐渐降低，但仍使顶端约有两名竞标者保持竞争。这表明，决定最优披露的相关力量是边际竞争，而非总体竞争。

我们的分析可以从多个方向加以拓展。首先，尽管我们聚焦于外生库存，但该框架自然也适用于具有凸成本的内生生产决策，这与 Mussa 和 Rosen（1978年）的原始模型一致。其次，虽然为便于分析我们强调了对称情形，但这些方法也可拓展至非对称环境，正如 Bergemann 和 Pesendorfer（2007年）在拍卖研究中所展示的那样。第三，我们关于消费者剩余最大化和加权福利目标的方法，为平台设计和监管研究开辟了新的联系；在这些领域，设计者可能无法完全掌控信息和分配规则。

更广泛地说，我们的框架推动了新兴的第二代信息经济学的发展。第一代始于 Akerlof（1970年）、Spence（1973年）以及 Rothschild 和 Stiglitz（1976年），采用了高度参数化的信息模型。因此，纳入私人信息的实证研究依赖于强有力的结构性假设。数据密集型工具的发展和数字经济的兴起，既提升了信息设计在实践中的重要性，也使完全参数化的方法越来越难以成立。近年来，理论研究日益从简单的参数模型转向允许采用一般信息结构的模型，涵盖有成本的信息获取模型（Sims（2003年））

以及贝叶斯劝说和信息设计模型（Kamenica和Gentzkow（2011年）；Bergemann 和 Morris（2019年））。

我们的贡献在于证明，这种一般性并不必然以牺牲可处理性为代价。通过在分位数空间中开展分析并利用主序的几何性质，我们能够刻画最优机制和信息结构，推导稳健预测，并计算福利前沿——所有这些都无需对底层分布作出限制性的参数假设。关键在于认识到，主序为刻画机制设计和信息设计问题中的可行性约束提供了恰当的数学结构。

我们所发展的技术——凹化、熨平以及对极点的刻画——在拍卖理论和最优税收中都有经典渊源。新颖之处在于认识到，经过适当调整后，这些工具同样适用于信息设计问题。此外，当机制设计与信息设计相结合时，双线性结构会导出性质上不同的结论：即使基本要素在分别考察这两个问题时都不会暗示合并是最优的，合并仍会成为最优选择。

随着市场日益由数据驱动，且平台获得了更强的定价与信息提供控制能力，理解这些工具的联合优化变得愈发重要。我们的框架为分析这些问题，以及推导不依赖于具体信息假设的稳健福利含义，提供了基础。联合优化系统性地导致合并，而且这一结果在不同设定下都具有稳健性；这表明，当设计者能够控制多种工具时，对过度信息操纵的担忧或许是有依据的。

10 附录

定理1的证明。我们希望最大化：

$$\max_{X \prec_w Q} \left\{ X(0) r_W(0) + \int_0^1 r_W(t) dX(t) \right\}. \tag{40}$$

由于这里得到的是弱主序而非强主序，我们无法应用 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）中的命题2。不过，稍作调整后，我们可以利用他们的

结果来确定最优解。我们首先定义：

$$Q_\theta(t) = Q(t) \cdot \mathbb{1}\{t \geq \theta\}.$$

也就是说，$\{Q_\theta\}_{\theta\in[0,1]}$ 是这样一组函数：在大于 θ 的分位数处，函数值等于 $Q(t)$；其他情况下为零。由于（40）是在凸域上进行的线性最大化，其最优值可在该域的某个极点处取得。根据 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的推论2，以下集合的极点集：

$$\{X : X \prec_w Q\},$$

是以下形式集合的所有极点的并集：

$$\{X : X \prec Q_\theta\},$$

其中某个 $\theta \in [0,1]$满足条件。也就是说，我们将弱主序改为强主序，将 Q改为 Q_θ，然后对所有 θ. 取并集。因此，我们有：

$$\max_{X\prec_w Q} X(0)r_W(0) + \int_0^1 r_W(t)dX(t) = \max_{\theta\in[0,1]} \left\{ \max_{X\prec Q_\theta} X(0)r_W(0) + \int_0^1 r_W(t)dX(t) \right\}.$$

现在，我们可以将 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）的命题2应用于最内层的最大化问题。由此得到：

$$\begin{aligned}\max_{X\prec Q_\theta} X(0)r_W(0) + \int_0^1 r_W(t)dX(t) =& Q_\theta(0)\overline{r}_W(0) + \int_0^1 \overline{r}_W(t)dQ_\theta(t) \\ =& Q(\theta)\overline{r}_W(\theta) + \int_\theta^1 \overline{r}_W(t)dQ(t). \end{aligned} \tag{41}$$

第一个等号对应于 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）中的不等式（16）（该文在同一证明中表明此不等式取等号）；第二个等号只是将积分显式写出。根据构造，r_W 是凹函数，因此（41）在 $\theta = t_m$处取得最大值：

$$t_m \in \arg\max_{\theta\in[0,1]} Q(\theta)r_W(\theta) + \int_\theta^1 \overline{r}_W(t)dQ(t).$$

其中我们还用到了 $r_W(t_m) = \overline{r}_W(t_m)$。 ■

定理2的证明。我们旨在最大化：

$$\max_{W \prec V} \left\{ e_X(0)W(0) + \int_0^1 e_X(t)dW(t) \right\}.$$

现在，我们无法直接应用 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）中的命题2，因为$e_X(t)$ 在 $t = 0.$ 处不连续。不过，我们有：

$$\lim_{t \downarrow 0} e_X(t) < e_X(0).$$

因此， $e_X(t)$ 是上半连续的；故 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）中的证明可以用同样的方式进行。具体而言，我们有：

$$\lim_{t \downarrow 0} e_X(t) < e_X(0).$$

因此，存在 $t_1 > 0$，使得对于所有 $\neg t \in [0, t_1]$， $e_X(t) > e_X(t)$。因此，我们可以考虑连续函数的极限，从而应用 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021）中的命题2。特别地，存在一个函数族 $\{e_\ell(t)\}_{\ell \in [0,1]}$，它们连续可微，且满足

$$e_\ell(t) \begin{cases} \in [e_X(t), \overline{e}_X(t)], & \text{for all } t \in [0, t_1]; \\ = e_X(t), & \text{for all } t \in [t_1, 1]; \end{cases}$$

使得当 $\ell \to 1$ 时，这些函数收敛到 e_X：

$$\lim_{l \to 1} e_\ell(t) = e_X(t).$$

根据构造，对于所有 $\ell \in [0, 1]$ ，我们有：

$$\overline{e}_\ell(t) = \overline{e}_X(t).$$

由于该解仅由凹化的支撑集决定，因此对于所有 $\ell \in [0, 1]$ ，最优解都相同，且与定理2中的解相同。因此，这也是 e_X的解。 ■

参考文献

Akbarpour, M., P. Dworczak, and S. D. Kominers(2024年): “再分配型分配机制”, 《政治经济学杂志》, 132, 1831–1875。

Akerlof, G. (1970年): “柠檬市场: 定性不确定性与市场机制”, 经济学季刊, 84, 488–500。

Bauer, H. (1958): “函数的极小点与极值点”, 数学档案, 9, 389–393。

Bergemann, D., and A. Bonatti (2024年): “数据、竞争与数字平台”, 《美国经济评论》, 114, 2253–2295。

Bergemann, D., A. Bonatti, and N. Wu (2025年): “数字广告拍卖如何影响产品价格? ”, 《经济研究评论》, 92, 2330–2358。

Bergemann, D., B. Brooks, and S. Morris(2015年):“价格歧视的局限”, 《美国经济评论》, 105, 921–957。

——(2016年): 《信息稳健的拍卖设计》, 讨论论文, 考尔斯基金会讨论论文2065。(2017年): 《具有一般信息结构的第一价格拍卖: 对竞价和收入的影响》, 《计量经济学》, 85, 107–143。(2019年): 《收入保证等价》, 《美国经济评论》, 109, 1911–1929。(2021年): 《搜索、信息与价格》, 《政治经济学杂志》, 129, 2275–2319。(2025年): 《竞争性价格歧视下消费者剩余与总剩余的一致性》, 《美国经济学杂志: 微观经济学》, 17, 234–259。

Bergemann, D., T. Heumann, and S. Morris(2015年): 《信息与波动性》, 《经济理论杂志》, 158, 427–465。(2020年): 《信息、市场势力与价格波动性》, *RAND*经济学杂志, 52, 125–150。

——(2022年)：《非线性定价的利润保证》，讨论论文。(2024a)：《拍卖中的竞标者最优信息结构》，讨论论文 CFDP 2375R1，考尔斯经济学研究基金会。(2024b)：《说服与筛选》，讨论论文 2338 R2，考尔斯经济学研究基金会，耶鲁大学。(2026年)：《说服与筛选》，《政治经济学杂志》，134。Bergemann, D., T. Heumann, S. Morris, C. Sorokin, and E. Winter (2022年)：《经典拍卖中的最优信息披露》，《美国经济评论：洞见》，4，371–388。Bergemann, D., and S. Morris (2013年)：《不完全信息博弈中的稳健预测》，《计量经济学》，81，1251–1308。(2016年)：《博弈中的贝叶斯相关均衡与信息结构比较》，《理论经济学》，11，487–522。

———

———(2019年)："信息设计：统一视角"，《经济文献杂志》，57，44–95。

Bergemann, D., and M. Pesendorfer (2007年)："最优拍卖中的信息结构"，《经济理论杂志》，137，580–609。

Blackwell, D.(1951)："实验的比较"，载于第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，第93–102页。加利福尼亚大学出版社，伯克利。

Border, K.(1991)：《约化形式拍卖的实施：几何方法》，《计量经济学》，59，1175–1187。Brooks, B., and S. Du (2021)：《共同价值下的最优拍卖设计：一种信息稳健方法》，《计量经济学》，89，1313–1360。(2024)：《共同价值下的最优拍卖设计：一种信息稳健方法》，《计量经济学》，92(5)，1391–1438。

———

——(2025a)：《对偶约化与信息稳健机制设计的一阶方法》，讨论论文，芝加哥大学和加州大学圣迭戈分校。(2025b)：《机制设计中的信息稳健性：支持（和反对）最坏情况》，讨论论文，芝加哥大学和加州大学。Bulow, J., and P. Klemperer(1996)：《拍卖与谈判》，《美国经济评论》，86，180–194。Chiappori, P.-A., R. J. McCann, and L. P. Nesheim(2010年)：《享乐价格均衡、稳定匹配与最优传输：等价性、拓扑与唯一性》，《经济理论》，42(2)，317–354。Condorelli, D.(2012)：《金钱买不到什么：有成本信号下的有效机制设计》，《博弈与经济行为》，75，613–624。Crawford, V. P., and J. Sobel (1982)：《策略性信息传递》，《计量经济学》，第1431–1451页。Dworczak, P., S. Kominers, and M. Akbarpour (2021年)：《通过市场进行再分配》，《计量经济学》，89，1665–1698。Dworczak, P., and G. Martini(2019年)：《最优说服的简单经济学》，《政治经济学杂志》，127，1993–2048。Galichon, A.(2016年)：《经济学中的最优传输方法》。普林斯顿大学出版社。Gershkov, A., B. Moldovanu, P. Strack, and M. Zhang(2021年)：《内生估值拍卖理论》，《政治经济学杂志》，129(4)，1011–1051。(2022年)：《最优拍卖：非期望效用与常数风险厌恶》，《经济研究评论》，89，2630–2662。Hartline, J.(2017年)：《机制设计与近似》。Ivanov, M. (2010年)：《信息控制与组织设计》，《经济理论杂志》，145(2)，721–751。

and D. Quigley （2023年）：“共轭劝说”，讨论论文，牛津大学。Kamenica, E., and M. Gentzkow （2011年）：“贝叶斯劝说”，《美国经济评论》，101，2590–2615。Kleiner, A., B. Moldovanu, and P. Strack （2021年）：“极点与主序：经济学应用”，《计量经济学》，89，1557–1593。（2026年）：“极点与主序”，。Kolotilin, A.（2018年）：“最优信息披露：线性规划方法”，《理论经济学》，13，607–635。Kolotilin, A., R. Corrao, and A. Wolitzky （2025年）：“劝说与匹配：最优生产性运输”，《政治经济学杂志》，133(4)，1334–1381。Kolotilin, A., and A. Wolitzky （2020年）：“党派选区划分操纵的经济学”，。（2025年）：“党派选区划分操纵的经济学”，《计量经济学》，即将出版。Kolotilin, A., and A. Zapechelnyuk （2025年）：“劝说与授权相遇”，《计量经济学》，93，195–228。Loertscher, S., and E. Muir （2022年）：“垄断定价、最优随机化与转售”，《政治经济学杂志》，130，566–635。Lou, Y. （2023年）：“最优授权：通过信息设计进行粗化”，讨论论文，东京大学。Mussa, M., and S. Rosen （1978年）：“垄断与产品质量”，《经济理论杂志》，18，301–317。Myerson, R.（1981年）：“最优拍卖设计”，《运筹学数学》，6，58–73。Noeldeke, G., and L. Samuelson （2007年）：“无最优控制的最优聚集”，《经济理论杂志》，134，405–420。Onuchic, P., and D. Ray （2023年）：“通过类别传递价值”，《理论经济学》，18，1407–1439。

Rayo, L.（2013年）："垄断性信号提供"，*B.E.* 理论经济学杂志，13，27–58。Roesler, A., and B. Szentes（2017年）："买方最优学习与垄断定价"，《美国经济评论》，107，2072–2080。Rothschild, M., and J. Stiglitz（1976年）："竞争性保险市场中的均衡"，经济学季刊，90，629–649。Shaked, M., and J. Shanthikumar（2007年）："随机序"。施普林格出版社。Sims, C.（2003年）："理性疏忽的影响"，货币经济学杂志，50，665–690。Spence, A.（1973年）："劳动力市场信号传递"，经济学季刊，87，355–374。Toikka, J.（2011年）："无控制的熨平"，《经济理论杂志》，146，2510–2526。Yaari, M. E.（1987年）："风险选择的对偶理论"，《计量经济学》，第95–115页。