arXiv:2601.17293v1 [math.RT] 24 Jan 2026

部分解与非交叉组合学

MINH-TÂM QUANG TRINH 和 NATHAN WILLIAMS

摘要。对于任意有限约化群，我们通过 Harish-Chandra 变换，计算其 Hecke代数中由部分 Springer 解消产生的中心元。在两类部分解消中，较大的一类是更有趣的情形。我们推导出相关 Hecke迹的公式，将 Wan–Wang 的工作推广到 A 型之外，并给出了映射到部分 Springer 解消的辫簇的 Deodhar 型分解。基于后者，我们构造了介于有理Catalan对象与停车对象之间的非交叉集，从而推广了我们与 Galashin–Lam 的工作。与此同时，我们建立了正辫闭包的 HOMFLYPT不变量任意a-次数的新公式，并据此为有理 Kirkman 数构造非交叉集。

1. 引言

1.1. 固定一个有限Coxeter系统 $(W,\ S)$ 以及一个 $J \subseteq S$ 生成子群$W_J \subseteq W$的子集。令 H_W 和 H_{W_J} 分别为对应于 W和 W_J的、定义在 $\mathbf{Z}[\boldsymbol{q}^{\pm 1}]$ 上的 Hecke代数。我们采用如下约定：Hecke算子 $T_s \in H_W$（其中 $s \in S$）满足关系 $T_s^2 = (\boldsymbol{q}-1)T_s + \boldsymbol{q}$。我们将 H_{W_J} 视为由满足 $s \in J$的元素 T_s 生成的 H_W的子代数。我们的出发点是，可以通过两种彼此独立的方式，从 J构造中心 $Z(H_W)$ 的元素。

首先，根据 L. K. Jones [Jon90], 存在一个单射线性映射

$$N_J^S : Z(H_{W_J}) \to Z(H_W)$$

由 Hoefsmit–Scott 提出，称为相对范数。为定义 N_J^S，回忆一下， W_J 在 W 中的每个右陪集都包含一个 Bruhat长度最小的唯一代表元。令W^J 为这些代表元组成的集合。那么

$$N_J^S(\alpha) = \sum_{v \in W^J} \boldsymbol{q}^{-\ell(v)} T_{v^{-1}} \alpha T_v \quad \text{for all } \alpha \in Z(H_{W_J}),$$

其中， T_v 和 $\ell(v)$分别表示 v 的 Hecke 算子和 Bruhat长度。

其次，当 W 为晶体学型时，我们可以将其解释为某个分裂有限约化群的魏尔群 G，其 Borel 子群为 B。于是，我们可以从几何角度将 H_W 和 H_{W_J}解释为定义在$(G/B)^2$上的函数的卷积代数。在这里，构造 $Z(H_W)$ 的元素的另一种方式，是通过一个从 G 上的函数到$(G/B)^2$, 上的函数的映射。按照 [Gin89]的做法，我们称之为 Harish-Chandra 变换。

本文的主要观察是，与 J相关联的两个部分 Springer 解消（定义见 1.1）在 G 上产生的函数，其 Harish-Chandra

变换是相对范数。相关但不同的观察曾出现在 [Gro92、Lus15、BT22], 中，正如我们在注 1.2中所讨论的。我们将其应用于：

(1) H_W上的迹，推广了 Lascoux [Las06] 和 Wan–Wang [WW15]的工作。(2) 部分辫子 *Steinberg* 簇的 Deodhar 型分解，推广了 Shende–Treumann–Zaslow [STZ17] 的工作，并与 Mellit 对特征簇的分解相似 [Mel25]。(3) (W, S) 的有理非交叉组合学，推广了我们此前与 Galashin–Lam 合作的工作 [GLTW24]。

我们的视角还导出了用于构造 HOMFLYPT 链不变量的双变量 Hecke 迹的新公式，这些公式简化了 [BT22]中的公式，并为有理柯克曼数带来了应用。

1.2. **Harish-Chandra 变换。** 设 $\mathbf{F}$ 是一个阶为 q的有限域。设$\bar{\mathbf{G}}$ 是定义在$\mathbf{F}$上的连通约化代数群，配备一个对应于 Frobenius 映射 $F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}$的 $\mathbf{F}$-结构。我们假设$\mathbf{G}$ [Car93, 28]的特征是一个好素数。

取一个由 F 稳定的极大环面，包含在一个由 F 稳定的 Borel 子群中：$\mathbf{T} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{G}$。令 $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$。现在取 W 为有限 Coxeter 群 $\mathbf{W}^F$。类似地，我们用G、B、等等表示由 $\mathbf{G}$、$\mathbf{B}$、等等的 F-不动点构成的群。

定义在 $(G/B)^2$ 上的 G 不变的 $\mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$ 值函数构成一个卷积代数H_B^G。如果 G 是分裂的，即 $W = \mathbf{W}$，那么 H_B^G 就是前文所述代数 H_W 在 $\mathbf{q} \to q$ 处的特化。具体而言， T_w 特化为定义在满足 $Bh^{-1}gB = BwB$ 的那些有序对 (hB, gB) 集合上的示性函数。在第 2 节中，我们回顾一般 G 情形下 H_B^G 的表示。

该*Harish-Chandra* 变换是映射 $hc_!$ 从定义在 G 上的类函数到定义在$(G/B)^2$ 上的不变函数，定义方式为先拉回，再沿图推前

$$G \xleftarrow{pr_2} G/B \times G \xrightarrow{act} G/B \times G/B,$$

其中，上文

$$act(hB, z) = (hB, zhB) \quad \text{and} \quad pr_2(hB, z) = z.$$

按照 §2.5 中的记号，$hc_! := act_! \, pr_2^*$.[1] 纯形式的论证表明，$hc_!$的取值属于 H_B^G [Gin89 的中心，§9]。事实证明，每个中心元都可以由此得到，差一个比例因子 [Lus15]。

1.3. **两个部分解消。** 在本引言的其余部分，为简便起见，我们假设 G是分裂的。我们取 S 为由$\mathbf{B}$产生的简单反射系。令$\mathbf{P}_J = \mathbf{B}W_J\mathbf{B}$为$\mathbf{G}$的一个抛物子群。令$\mathbf{U}_J$为其幺幂根基，令$\mathbf{V}_J$ 为$\mathbf{P}_J$中所有幺正元组成的簇。在点集层面，这两个

[1]严格来说，我们的 Harish-Chandra 变换与 [Gin89 中的变换互为 BT22] Verdier 对偶。

部分 *Springer* 解消 的类型 J 定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{Spr}_J^+ &= \{(u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{P}_J \mid u \in y\mathbf{V}_J y^{-1}\},\\ \mathbf{Spr}_J^- &= \{(u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{P}_J \mid u \in y\mathbf{U}_J y^{-1}\}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

若 $J = \emptyset$，则 $\mathbf{P}_J = \mathbf{B}$，从而得到 $\mathbf{U}_J = \mathbf{V}_J$ 以及 $\mathbf{Spr}_\emptyset^- = \mathbf{Spr}_\emptyset^+$。这就是原始 Springer 解消。一般而言，$+$ 情形是幺幂元簇 $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{G}$的奇点部分解消，而 $-$ 情形是 J对应的 Richardson 轨道闭包的解消。为方便起见，记 $\mathbf{E}_J^\pm := \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{Spr}_J^\pm$。

对于任意 G-等变映射 $\pi : E \to X$，我们将 $\pi_! 1_E$ 记为由 $\pi_! 1_E(x) = |\pi^{-1}(x)|$ 定义在 X上的函数。将 $hc_!$作用于函数 $pr_{1,!} 1_{Spr_J^\pm}$，其中 $Spr_J^\pm = (\mathbf{Spr}_J^\pm)^F$，可得到函数 $f_! 1_{E_J^\pm}$，其中 $E_J^\pm = (\mathbf{E}_J^\pm)^F$，并且

$$f(hB, u, yP_J) := act(hB, u) = (hB, uhB).$$

这些正是我们将在第3节中计算的元素。

令 $w_\circ$ 和 $w_{J\circ}$ 分别表示 W 和 W_J的最长元素。为方便起见，令 $\ell_S = \ell(w_\circ)$ 和 $\ell_J = \ell(w_{J\circ})$。回顾一下，$w_\circ$，$w_{J\circ}$ 是对合，并且 $T^2_{w_{J\circ}}$ 在 H_{W_J} [BMR98]中是中心元。我们主要结果的分裂情形如下：

定理 1.1。对于任意 $J \subseteq S$，我们有

$$f_! 1_{E_J^-} = q^{\ell_S - \ell_J} N_J^S(1)|_{q\to q} \quad and \quad f_! 1_{E_J^+} = q^{\ell_S - \ell_J} N_J^S(T^2_{w_{J\circ}})|_{q\to q}.$$

令 $W^{J,-} = W^J$ 为 W中W_J 的右陪集的最短长度代表元集合；类似地，令 $W^{J,+}$ 为最长长度代表元集合，使得乘以 $w_{J\circ}$ 会将 $W^{J,-}$ 与 $W^{J,+}$互换。于是，上述关于中心元的等式可以改写为：

$$\left.\begin{aligned} f_! 1_{E_J^-} &= q^{\ell_S - \ell_J} \Sigma_{J,-}|_{q\to q},\\ f_! 1_{E_J^+} &= q^{\ell_S} \Sigma_{J,+}|_{q\to q},\end{aligned}\right\} \quad \text{where } \Sigma_{J,\pm} = \sum_{v \in W^{J,\pm}} q^{-\ell(v)} T_{v^{-1}} T_v.$$

我们强调，$+$ 情形比 $-$ 情形更深刻。$-$ 情形仅用到关于 Bruhat 分解的标准结果。在假设 G 是分裂的情况下，我们可以将其细化为关于$\mathbf{E}_J^-$的代数几何陈述：见命题3.3。相比之下，$+$ 情形依赖于 Kawanaka 的一个困难定理 [Kaw75]。我们预计它只能细化为上同调层面的陈述。这个问题与 [Tri22]中讨论的 Kawanaka 工作的细化有关。

注记1.2。定理 $-$ 的情形1.1与文献中的若干结果相关，不过据我们所知，这两种情形下的陈述都是新的。

在 Grojnowski 的博士论文 [Gro92]，中，命题 2.1 的证明可用于恢复定理 1.1 的 $J = \emptyset$ 情形。另见 [Gro92] 中的 (3.3.1)。请注意，Grojnowski 研究的是 H_W 在函数单值化 Hecke 代数中的像，其中函数定义在 $Y_\emptyset := \mathrm{Y}_\emptyset^F$ 上；一般而言，$\mathrm{Y}_J := (\mathrm{G}/\mathrm{U}_J)^2/\mathrm{L}_J$，其中 L_J 是 P_J 的 Levi 因子，并从右侧作用。

在 [Lus15], Lusztig 研究了可构造混合复形在$(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$上的导出范畴的一个自函子。它在适当的子范畴上将$hc_!ch_!$范畴化，其中$ch_!:=pr_{2,!}act^*$是 §2.5中的记号。Lusztig 的命题 2.6 表明，他的函子将任意一个 K 映入由如下形式的对象生成的三角范畴

$$\bigoplus_{\ell(v)=k} K_{v^{-1}} * K * K_v \otimes \mathfrak{L}[\![k]\!],$$

其中， K_w 和 $\mathfrak{L}[\![k]\!]$ 分别范畴化了 1_w 和 $|T|q^{-k}$。

在 [BT22，§6], Bezrukavnikov–Tolmachov 研究了一个范畴化 $hc_!\chi_{P_J}^G$的函子，其中 $\chi_{P_J}^G$ 将 G上的 -不变函数 $Y_J:=\mathbf{Y}_J^F$ 映射为 G上的类函数。当$J=\emptyset$时，他们的设定特化为 Lusztig 设定的单值化版本。从这个意义上说，他们的引理 6.2.6 将 [Lus15，命题 26] 推广到任意 J。其证明与我们对定理1.1 的1.1情形的证明相似，但与 $+$情形的证明不同。

1.4. 迹。代数上的迹是一个在交换子上取零值的线性映射。我们用 $R(H_W)$ 表示 H_W 上取值于$\mathbf{Q}(q)$ 的迹所构成的向量空间。定理1.1 的第一个应用是识别由 $\Sigma_{J,\pm}$ 得到的 $R(H_W)$ 中的某些元素。

令 $e\in W$ 为单位元。令 $\tau: H_W\to\mathbf{Z}[q^{\pm1}]$ 为由 $\tau(T_e)=1$和 $\tau(T_w)=0$ 给出的迹，对所有 $w\neq e$均成立。那么，任意中心元 $\zeta\in Z(H_W)$ 都会导出一个迹 $\tau[\zeta]:H_W\to\mathbf{Z}[q^{\pm1}]\subseteq\mathbf{Q}(q)$：即，

$$\tau[\zeta](\beta)=\tau(\beta\zeta).$$

当 W 是一个对称群时，这些迹最容易理解。

令 S_n为作用在 n 个字母上的对称群，并令 Λ_n 为变量 $X:=(x_1,\ldots,x_n)$ 中次数为 n 的 Q(q) 上的对称函数向量空间。则 $R(H_{S_n})$ 与 Λ_n同构，因为这两个向量空间的基都由 n的整数分拆标记。令 $\mathrm{F}_q: R(H_{S_n})\xrightarrow{\sim}\Lambda_n$ 为 q 变形的弗罗贝尼乌斯特征同构，它将由分拆 $\lambda\vdash n$ 标记的不可约特征 χ_q^λ 映射到舒尔函数 $s_\lambda[X]$。

对于 $W=S_n$，我们取 $S=\{s_1,\ldots,s_{n-1}\}$，其中 $s_i=(i,i+1)$。这一选择建立了子集 $J\subseteq S$ 与 n的整数组合 ν 之间的双射。分别用 $e_\nu[X]$和 $h_\nu[X]$ 表示以 ν 为指标、定义在 Λ_n 中的初等对称函数和完全齐次对称函数。Wan–Wang [WW 15], 重新表述 Lascoux [Las06],的工作，证明若 J 对应于 ν，则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_q(\tau[\Sigma_{J,-}])&=(q-1)^n e_\nu\left[\frac{X}{q-1}\right],\\ \mathcal{F}_q(\tau[\Sigma_{J,+}])&=(q-1)^n h_\nu\left[\frac{X}{q-1}\right].\end{aligned}\tag{1.2}$$

利用这些恒等式，他们证明相对范数映射 N_J^S来自 §1.1 ，在中心的直和 $Z(\mathbf{Q}(q)\otimes H_{S_n})$上赋予了环结构，该环同构于 $\mathbf{Q}(q)$上的对称函数环。尽管关于中心的这一结果仅适用于群 S_n，我们将证明，恒等式（1.2）可以由迹的统一公式推出 $\tau[\Sigma_{J,\pm}]$，而这些公式适用于任意魏尔群 W。

回顾一下，Springer 在其对幺幂元簇的解析的纤维的 étale 上同调上构造了一个 W-作用，如今这些纤维被称为 *Springer 纤维*。在 [Tri21],中，第一作者利用这一作用在 H_W 取值于$\mathbf{Q}(q)$上的线性迹上构造了一个迹 W，或等价地，一个 双迹

$$\tau_G : \mathbf{Q}W \otimes H_W \to \mathbf{Q}(q),$$

它细化了 H_W Gomi 研究的 Markov 迹 [Gom06]以及 Webster– Williamson [WW11] 所研究的 Markov 迹。这些迹又受到 Ocneanu 用来构造 HOMFLYPT 链环多项式的那些迹的启发 [Jon87]。

本文中，我们对 τ_G 使用如下归一化公式

$$\tau_G(z \otimes T_w)|_{q\to q} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{u\in G \\ \text{unipotent}}} |O(w)_u| \chi_u(z) \quad \text{for all } z, w \in W,$$

其中 χ_u 是 u 的总 Springer 特征标，已在 §4.3 中回顾； $O(w)_u$ 是满足 $h^{-1}gB = BwB$ 和 $gB = uhB$ 的所有有序对 (hB, gB) 的集合。令 e_J、$_$ 分别表示 $\mathbf{Q}W_J$ 中的反对称化子和对称化子，相关内容已在 §4.4 中回顾。结合定理 1.1 与 Borho–MacPherson 的工作 [BM83], ，我们证明：

定理 1.3。 对于任意 $J \subseteq S$，我们有

$$\tau[\Sigma_{J,\pm}] = (q-1)^{\mathrm{rk}(G)}\, \tau_G(e_{J,\pm} \otimes (-))$$

作为 H_W 上的迹，其中 $\mathrm{rk}(G)$ 是极大环面 $\mathbf{T}$ 的秩。

由 [Tri21], 可得关于 τ_G 的一个纯代数公式，其中涉及 奇异傅里叶变换：这是 Lusztig 引入的一种配对，用于联系集合 $\mathrm{Irr}(W)$ （ W 的不可约特征）与 G的（幺）不可约特征集合。令

$$\{-,-\} : \mathrm{Irr}(W) \times \mathrm{Irr}(W) \to \mathbf{Q}$$

将其“截断”为 $\mathrm{Irr}(W)$，并且对所有 $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$，令 $\chi_q \in R(H_W)$ 为 χ的 Tits 变形。我们推出如下公式。对于 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$，其中 $\{-,-\}$是 Kronecker δ，它恢复了（1.2），正如我们在命题 4.4中所示。

推论 1.4。 对于任意 $J \subseteq S$，有

$$\tau[\Sigma_{J,\pm}] = (q-1)^{\mathrm{rk}(G)} \sum_{\chi,\psi\in\mathrm{Irr}(W)} \frac{\{\chi,\psi\}\psi(e_{J,\pm})}{\det(q - e_{J,\pm} \mid \mathsf{V}_G)}\, \chi_q,$$

其中 V_G 是由 $\mathbf{T}$ 的余特征产生的 W 的反射表示。

1.5。 **Deodhar 分解**。 我们对定理 1.1 的第二个应用，是通过 Deodhar 型分解，为新型辫簇提供点计数公式。在下文中， $h\mathbf{B} \xrightarrow{w} g\mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{B}h^{-1}g\mathbf{B} = \mathbf{B}w\mathbf{B}$。

设 $\vec{s} = (s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(\ell)})$ 是 S中的一个词。回顾一下， [Deo85], Deodhar 展示了如何将某个 理查森簇 对应于 $\vec{s}$ 分解为如下形式的子簇

一个$^{\mathbf{d}} \times \mathbf{G}_m^{\mathbf{e}}$，现在称为 *Deodhar* 胞腔。和 [GLTW24],[2] 一样，我们将采用依赖于元素 $v \in W$的定义：

$$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s}) = \{\vec{g}\mathbf{B} = (g_i\mathbf{B})_i \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^\ell \mid vw_\circ\mathbf{B} \xrightarrow{s^{(1)}} g_1\mathbf{B} \xrightarrow{s^{(2)}} \cdots \xrightarrow{s^{(\ell)}} g_\ell\mathbf{B} \xleftarrow{vw_\circ} \mathbf{B}\}.$$

为描述胞腔分解，回顾一下，子词是 $\vec{s}$ 一个序列 $\vec{\omega}$ ，长度与 ℓ 相同，且 $\omega^{(i)} \in \{e, s^{(i)}\}$ 对所有 i均成立。令$\omega_{(i)} := \omega^{(1)} \cdots \omega^{(i)}$。对于任意$v \in W$，一个 v-特征子词，属于 $\vec{s}$ 的子词 $\vec{\omega}$，满足

$$v\omega_{(i)} \leq v\omega_{(i-1)}s^{(i)} \quad \text{for all } i.$$

令 $\mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$ 表示满足 $\omega_{(\ell)} = e$ 的 v-特征子词 $\vec{\omega}$ 的集合。那么，$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})$ 的 Deodhar 胞腔由 $\mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$ 编号。给定元素 $\vec{\omega}$ 对应的胞腔同构于 $\mathbf{A}^{\mathsf{d}_{\vec{\omega}}} \times \mathbf{G}_m^{\mathsf{e}_{\vec{\omega}}}$，其中 $\mathsf{d}_{\vec{\omega}}$、$\mathsf{e}_{\vec{\omega}} \subseteq \{1、2、\ldots\ldots、\ell\}$ 是某些互不相交的子集，因此可以计数 $R^{(v)}(\vec{s}) := \mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})^F$:

$$|R^{(v)}(\vec{s})| = \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}. \tag{1.3}$$

我们在第 5 节中进一步详述。

利用定理 1.1，我们将集合 $R^{(v)}(\vec{s})$ 在 $v \in W^J$, $\mp$时的不交并与集合 $Z_J^{\pm}(\vec{s}) := \mathbf{Z}_J^{\pm}(\vec{s})^F$ 相关联，其中后者是某个 部分辫子 *Steinberg* 簇

$$\mathbf{Z}_J^{\pm}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^\ell \times \mathbf{Spr}_J^{\pm} \mid u^{-1}g_\ell\mathbf{B} \xrightarrow{s^{(1)}} g_1\mathbf{B} \xrightarrow{s^{(2)}} \cdots \xrightarrow{s^{(\ell)}} g_\ell\mathbf{B}\}.$$

我们得到点计数的恒等式。

定理 1.5。 对于任意单词 $\vec{s}$，我们有

$$\frac{|Z_J^-(\vec{s})|}{|G|} = \frac{1}{q^{\ell_J}(q-1)^{\mathrm{rk}(G)}} \sum_{v \in W^{J,+}} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|},$$

$$\frac{|Z_J^+(\vec{s})|}{|G|} = \frac{1}{(q-1)^{\mathrm{rk}(G)}} \sum_{v \in W^{J,-}} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}.$$

（注意每个恒等式左右两边的符号相反。）

注意，$\mathsf{Z}_\emptyset^+(\vec{s})$ 和 $\mathsf{Z}_\emptyset^-(\vec{s})$ 重合：它们与 [Tri21] 中引入的辫子 Steinberg 簇相同。另一方面，$\mathsf{Z}_S^+(\vec{s})$ 和 $\mathsf{Z}_S^-(\vec{s})$ 分别是 [Tri21] 中记作 $\mathsf{U}(\vec{s})$ 和 $\mathsf{X}(\vec{s})$ 的簇。

对于一般的 G 和 J，我们给出了 $\mathbf{Z}_J^-(\vec{s})$ 的一个分解，将其分解为若经结构群变更便与 Deodhar 胞腔等价的子簇：见推论 5.9。对于 $G = \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$，簇 $\mathcal{X}(\vec{s})$ 此前由 Shende–Treumann–Zaslow 研究过 [STZ17], ，他们利用接触几何构造了他们称为 $\mathcal{X}(\vec{s})$的直纹分解。近期工作 [ACSH+25] 基本上表明，他们的直纹分解经结构群变更后成为 Deodhar 分解，因此与我们自己的分解相一致：见注记 5.10。

[2]请注意，我们对 [GLTW24中的（1.7）]处的笔误作了隐式修正。

我们在定理1.5 的证明中将部分斯坦伯格簇分解为理查森簇，这也类似于 Mellit 关于具有半单单值条件的特征簇的工作中出现的一种分解 [Mel25], ，正如我们在注记 5.11中讨论的那样。

1.6. **组合学。** 我们通过定理 1.1和定理 1.3的第三个应用，是在 (W,S) 的卡塔兰组合学中构造我们感兴趣的非交叉集。在本引言的其余部分， W 是具有考克斯特数 h 和秩r 的不可约$=|S|$。

设 d_1，……， d_r是 W在其（不可约）反射表示上的基本次数。对于每个 i，令 $e_i = d_i - 1$。对于与 h互素的任意正整数 p，有理卡塔兰数 （W， p）为

$$\mathrm{Cat}_{W,p} := \prod_i \frac{p+e_i}{d_i},$$

而 有理停车数 （W， p）为 p^r。这些数枚举了各不相同的组合对象族，可分为两类。 非嵌套 族由根论数据构造而成，推广了非嵌套划分，即 停车函数族。在 [GLTW24], 中，我们首次为任意有限 Coxeter 群 W 和 $p>0$ 与 h互素的 $p=h+1$构造了有理非交叉卡塔兰族，即 停车族，并恢复了此前针对 $p=h+1$的构造。这些非交叉对象不同于非嵌套对象，因为它们取决于对 S所选定的排序，或 考克斯特词：这是一种考克斯特理论数据，而非根论数据。

对于 S 中的任意词 $\vec{s}$，令 $\mathrm{M}^{(v)}(\vec{s}) \subseteq \mathrm{D}^{(v)}(\vec{s})$ 表示满足$|\mathrm{e}_{\vec{\omega}}| = r$的元素 $\vec{\omega}$ 的子集，其中最小可能值为 [GLTW24，推论 4.9]。令 $\vec{c}$ 为 (W,S) 的考克斯特词，并令 $\vec{c}^{\,p}$ 为其 p 重连接。 [GLTW24] 的主要结果是以下恒等式：

$$\mathrm{Cat}_{W,p} = |\mathcal{M}^{(e)}(\vec{c}^{\,p})| \quad \text{and} \quad p^r = \sum_{v\in W} |\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{\,p})|,$$

这些结果通过涉及 $\boldsymbol{q}$ 变形恒等式得以证明，其中包含 $\mathcal{D}^{(v)}(\vec{c}^{\,p})$，并令 $\boldsymbol{q} \to 1$。

在第 6 节中，我们证明了一个在上述两个恒等式之间进行插值的恒等式。令d_1^J、…、$d_{|J|}^J$为 W_J 的基本次数。令 e_1^J、…、$e_{|J|}^J$为 W_J-作用在 W 的反射表示上的指数。我们将 有理抛物停车数 定义为 $(W$、 p、 $J)$：

$$\mathrm{Park}^{J,\pm}_{W,p} = \prod_i \frac{p \pm e_i^J}{d_i^J}.$$

那么 $\mathrm{Park}^{S,+}_{W,p} = \mathrm{Cat}_{W,p}$ 和 $\mathrm{Park}^{\emptyset,+}_{W,p} = \mathrm{Park}^{\emptyset,-}_{W,p} = p^r$。我们通过 [Tri21], 的一个结果将这些数与τ_G 联系起来。该结果将某个 $T_{\vec{c}} \in H_W$的 $\tau_G((-) \otimes T^p_{\vec{c}})$描述为关于 (W,p) 的有理停车空间的分次特征，其意义见 [ARR15]和 [ALW16]。最终，我们得到：

推论 1.6。 对于任意考克斯特词 $\vec{c}$、与 h互素的整数 $p > 0$ 以及子集$J \subseteq S$，我们有

$$\mathrm{Park}_{W,p}^{J,\pm} = \sum_{v \in W^{J,\mp}} |\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{\,p})|.$$

（注意符号翻转。）也就是说，$\coprod_{v \in W^{J,\pm}} M^{(v)}(\vec{c}^{\,p})$ 是一个 $\vec{c}$-非交叉集，其数量由 (W, p, J) 的 $\mp$-有理抛物停放数枚举。

1.7. **Markov 迹与柯克曼数**。 在第7节中，我们证明了关于类型 A 中的 Markov 迹和有理柯克曼数的结果，它们分别与定理1.3 和推论 1.6平行。在附录 A中，我们解释了如何将用于柯克曼数的非交叉对象与结合子多面体的经典组合学联系起来。

首先，对于任意 $v \in W$，回顾左上升集 $\mathsf{Asc}(v) = \{s \in S \mid \ell(sv) > \ell(v)\}$ 以及下降集 $\mathsf{Des}(v) = \{s \in S \mid \ell(sv) < \ell(v)\}$。注意，$W^{J,-}$（分别 $W^{J,+}$）由满足 $\mathsf{Asc}(v) \supseteq J$（分别满足 $\mathsf{Des}(v) \supseteq J$）的那些 v组成。因此，$N_J^S(1)$ 和 $\boldsymbol{q}^{-\ell_J} N_J^S(T^2_{w_{J,\circ}})$ 分解为对所有超集 $I \supseteq J$ 中元素求和，

$$\zeta_I^- := \sum_{\mathsf{Asc}(v)=I} \boldsymbol{q}^{-\ell(v)} T_{v^{-1}} T_v \quad \text{and} \quad \zeta_I^+ := \sum_{\mathsf{Des}(v)=I} \boldsymbol{q}^{-\ell(v)} T_{v^{-1}} T_v.$$

注意，$\zeta_S^- = \zeta_\emptyset^+ = 1$和 $\zeta_\emptyset^- = \zeta_S^+ = \boldsymbol{q}^{-\ell_S} T^2_{w_\circ}$。通过容斥原理，元素$\zeta_I^\pm$在 H_W中仍然是中心的。

问题 1.7。 对于一般的 W 和 I，是否存在对 H_W 上形如 $\tau[\zeta_I^\pm]$的迹更熟悉的描述?

现在取 $W = S_n$和 $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$。 H_{S_n} 上的 HOMFLYPT 马尔可夫迹可以写成一个取值于 $\mathbf{Q}(\boldsymbol{q}^{1/2})[a^{\pm 1}]$的迹 μ_n。对于 $0 \le k \le n-1$，令$\mu_n^{(k)}$: $H_W \to \mathbf{Q}(\boldsymbol{q}^{1/2})$为 μ_n中 a 的第 k高次幂的系数，并令

$$I_k = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1-k}\}.$$

以下结果简化了一个关于 $\mu_n^{(k)}$的公式，该公式由 Bezrukavnikov–Tolmachov 给出，其中用到了 Jucys–Murphy 编织的对称多项式 [BT22，推论 6.1。2]。若能像 [TZ25] 推广了 同上引文一样，将其推广到其他类型，将会很有趣：见 §7.6。

定理 1.8. 对于任意整数 k，我们有

$$\tau[\zeta_{I_k}^+] = (\boldsymbol{q}-1)^{n-1} \mu_n^{(k)} \tag{1.4}$$

作为 H_{S_n} 上的迹。

令 $e_{\wedge^k} \in \mathbf{Q}W$为钩分拆 $(n-k, 1, \ldots, 1) \vdash n$对应的杨对称化子 k，它标记了反射表示的第 S_n 次外幂。将（1.4）与 [Tri21] 中将马尔可夫迹与 τ_G联系起来的结果相结合，我们推得定理1.3的这一类似结论：

推论 1.9. 对于 G 型的分裂半单情形，以及任意整数 k，有

$$\tau[\zeta_{I_k}^{+}] = (\boldsymbol{q}-1)^{n-1}\,\tau_G(e_{\wedge^k}\otimes(-))$$

作为 H_{S_n} 上的迹。

对于一般的 W 和 $0 \le k \le r$，我们使用前面提到的 (W,p) 的有理停车空间来定义数 $\mathrm{Kirk}_{W,p}^{(k)}$，它们统一了 A ARW [中的类型 13] 有理柯克曼数与 [ARR15] 中 Coxeter 群的柯克曼数。对于$W = S_n$，前面的结果推出了推论 1.6 的这一类比：

推论 1.10。 取 $W = S_n$和 $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$。那么对于任意考克斯特词$\vec{c}$、任意与 n 互素的整数 $p > 0$ 以及整数 k，有

$$\mathrm{Kirk}_{S_n,p}^{(k)} = \sum_{\mathsf{Asc}(v)=I_k} |\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{\,p})|.$$

也就是说，$\coprod_{\mathsf{Asc}(v)=I_k}\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{\,p})$ 是一个由 k-非交叉集合，其计数由 阶 有理柯克曼数 给出，该数对应于 (S_n,p)。

在附录 A 中，我们将 $\coprod_{\mathsf{Asc}(v)=I_k}\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{\,n+1})$ 与 $(S_n, n+1)$ 对应的第 k 个柯克曼数的经典非交叉集合联系起来：相应结合多面体中的 k-面集合。

1.8. **致谢**。 感谢 Pavel Galashin、Thomas Lam 和 Ian Lê 提供的有益讨论。在我们工作的部分期间，MT 获得了 NSF 数学科学研究奖学金（奖项 DMS-2002238）的支持，NW 获得了 NSF 标准资助（奖项 DMS-2246877）的支持。

2. 几何 Hecke 代数

2.1. 本节中，我们回顾卷积代数 H_B^G的一般定义，而不假设 G 是分裂的，沿用 [Car95，§3。3]最后，我们解释如何将 N_J^S 推广到这一一般情形。在此过程中，我们回顾 Bruhat 分解以及有关 Borel 子群的相关事实。我们的几何设置本质上采用 Kawanaka 在 [Kaw75]中的设置。另见 [Car93、Car95]。

我们沿用 $\mathbf{F}$、 q、$\mathbf{G}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{T}$、$\mathbf{W}$ 在 §1.2中的记号。因此，$\mathbf{F}$的特征对于 $\mathbf{G}$ 而言是一个好素数，其含义见 [Car93, 28]。令 $S_{\mathbf{B}}$ 为 $\mathbf{W}$ 的简单反射系，该简单反射系由 $\mathbf{B}$产生。令 $\ell_{\mathbf{B}}$ 为 $\mathbf{W}$ 上的 Bruhat 长度函数，该函数由 $S_{\mathbf{B}}$定义。

2.2. **Bruhat 分解**。 注意，对于任意$w \in \mathbf{W}$， $w\mathbf{B}$ 和$\mathbf{B}w$ 都是定义良好的。Bruhat 分解指出，当我们遍历所有 w时，双陪集$\mathbf{B}w\mathbf{B}$两两不相交，并构成$\mathbf{G}$的一个划分。

令$\mathbf{U}$为$\mathbf{B}$的幺幂根基，因此$\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$。令$\mathbf{U}_-$为对置 Borel 子群$\mathbf{B}_-$的幺幂根基。注意， $w\mathbf{U}w^{-1}$ 和 $w\mathbf{U}_-w^{-1}$ 对所有 $w \in \mathbf{W}$都有定义。

$$\mathbf{U}_w = \mathbf{U} \cap w\mathbf{U}w^{-1},$$
$$\mathbf{U}_w^- = \mathbf{U} \cap w\mathbf{U}_-w^{-1}.$$

那么$\mathbf{U}_w, \mathbf{U}_w^-$ 在U上均在T 的共轭作用下保持不变。以下结果证明于 [Car93, §2。5]:

引理 2.1。对于所有 $w \in \mathbf{W}$:

(1) 如果 $\ell_{\mathbf{B}}(wv) = \ell_{\mathbf{B}}(w) + \ell_{\mathbf{B}}(v)$，那么 $U_{wv}^- = U_w^- U_v^-$，且 $U_w^- \cap U_v^- = \{1\}$。*(2)* $U = U_w U_w^- = U_w^- U_w$，且 $U_w \cap U_w^- = \{1\}$。*(3)* $BwB = U_w^- wB$，且映射 $U_w^- \to U_w^- wB/B$ 是一个同构。*(4)* 作为代数簇（但不是群），U_w^- 是被 w反转的根子群的乘积，因此是一个维数为 $\ell_{\mathbf{B}}(w)$ 的仿射空间。

2.3. **Bott–Samelson簇**。 $\mathbf{B}$在$\mathbf{G}$ 中的双陪集与$\mathbf{G}$在$(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$上的对角$\mathbf{G}$-轨道构成双射。与引言中一样，我们用 $h\mathbf{B} \xrightarrow{w} g\mathbf{B}$表示$\mathbf{B}h^{-1}g\mathbf{B} = \mathbf{B}w\mathbf{B}$。这样的点对（$h\mathbf{B}$ $g\mathbf{B}$）构成$(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$ 中与 w对应的$\mathbf{G}$-轨道的点集，我们将其记为$\mathbf{O}(w)$。在点上，

$$\mathbf{O}(w) = \{(h\mathbf{B}, hw\mathbf{B})\}.$$

更一般地，对于 W 中任意元素序列 $\vec{w} = (w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(k)})$，令$\mathbf{O}(\vec{w})$ 表示 $(\mathbf{G}/\mathbf{B})^{1+k}$ 的子簇，其点集由下式定义

$$\mathbf{O}(\vec{w}) = \{\vec{g}\mathbf{B} = (g_0\mathbf{B}, g_1\mathbf{B}, \ldots, g_k\mathbf{B}) \mid g_0\mathbf{B} \xrightarrow{w^{(1)}} g_1\mathbf{B} \xrightarrow{w^{(2)}} \cdots \xrightarrow{w^{(k)}} g_m\mathbf{B}\}.$$

$\mathrm{O}(\vec{w})$ 的 Zariski 闭包称为 *Bott–Samelson* 簇，对应于 $\vec{w}$。因此，$\mathbf{O}(\vec{w})$ 也可称为 *开 Bott–Samelson* 簇。

对于任意子集 $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$，我们记$pr_I \colon \mathbf{O}(\vec{w}) \to (\mathbf{G}/\mathbf{B})^I$，表示将$pr_I(\vec{g}\mathbf{B}) = (g_i\mathbf{B})_{i \in I}$ 发送到的映射。将 $\vec{w}$（分别 I）明确写出时，为方便起见，我们会省略圆括号（分别方括号）。

引理 2.1 表明，若 $\ell_{\mathbf{B}}(wv) = \ell_{\mathbf{B}}(w) + \ell_{\mathbf{B}}(v)$，则 $\mathrm{pr}^{0,2}$ 诱导出 $\mathrm{O}(w, v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(wv)$ 之间的显式同构。通过归纳，任意形如 $\mathrm{O}(\vec{w})$ 的簇都与某个形如 $\mathrm{O}(\vec{s})$ 的簇显式同构，其中 $\vec{s}$ 是 $S_{\mathbf{B}}$ 中的一个词。

2.4. **Frobenius 映射**。对于配备弗罗贝尼乌斯映射的 $\mathbf{F}$ 上的代数簇，我们用斜体表示相应的弗罗贝尼乌斯不动点集。

如 §1.2 中一样，我们固定一个弗罗贝尼乌斯映射 $F \colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$，它源自一个 $\mathbf{F}$-形式，并满足$\mathbf{B}$和 $\mathbf{T}$ 均为 F-稳定的。于是 $\mathbf{W}$和 $S_{\mathbf{B}}$也都是 F-稳定的。群 $W := \mathbf{W}^F$再次成为一个 Coxeter群，可将其识别为 $N_G(T)/T$。

注 2.2。 当 $\mathbf{G}$ 为几乎单群时， G 和 W 的选项列于 [Car95, §1.5–1。6]。值得注意的是， W 除非它含有类型为 ${}^2F_4$ 的因子，否则是晶体学型的。

W存在一个简单反射系，记作 S，其指标由 $S_{\mathbf{B}}$ 上的 F-轨道给出：每个元素 $s \in S$ 都是相应 F-轨道中所有元素的乘积；这些元素两两可交换，并且无论以何种顺序排列，都会构成 $S_{\mathbf{B}}$ 中的一个约化字。令 ℓ 为 W 上由 S 定义的 Bruhat 长度函数。

根据 Lang 定理 [Car93, 32]， $g\mathbf{B}$ 是 F-稳定的，当且仅当 $g \in G$，在此情况下，$gB = (g\mathbf{B})^F$。类似地，$\mathbf{B}w\mathbf{B}$ 是 F-稳定的，当且仅当 $w \in W$，并且在这种情况下

，$BwB = (\mathbf{B}w\mathbf{B})^F$。因此，$BwB$ 的双陪集 $w \in W$ 构成 G的一个划分，而 G在（G/B）^{2} 上的轨道为集合 $O(w)$，其中 $w \in W$。正如 [Car93], 所述，引理 2.1 的第 (1)–(3) 部分有相应的结论，只需将 W 替换为 W。另见 [Kaw75，第 1] 节。

引理 2.3。对于所有 $w \in W$:

(1) 若 $\ell(wv) = \ell(w) + \ell(v)$，则 $U^-_{wv} = U^-_w U^-_v$，且 $U^-_w \cap U^-_v = \{1\}$。
(2) $U = U_w U^-_w = U^-_w U_w$，且 $U_w \cap U^-_w = \{1\}$。(3) $BwB = U^-_w wB$，
并且映射 $U^-_w \to U^-_w wB/B$是一个双射。

需要注意的一点是 U_w和 U^-_w的大小，因为它们涉及 $\ell_{\mathbf{B}}(w)$，而不是 $\ell(w)$ [Car93, 74]:

引理 2.4。对于所有 $w \in W$，我们有 $|U^-_w| = q^{\dim(\mathbf{U}^-_w)} = q^{\ell_{\mathbf{B}}(w)}$。

例 2.5。取 $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$，因此绝对魏尔群为 $\mathbf{W} = S_n$。取$F(g) = (g^\tau)^{-q} = (g^{-q})^\tau$，其中 $(-)^\tau$是由 $g^\tau = Jg^tJ$给出的“反转置”，其中 J 是沿反对角线元素为 1、其余位置元素为 0 的矩阵。于是$G = \mathbf{GU}_n(q)$。

取 $n = 3$，使得 $\mathbf{W}$ 由简单反射 s_1 和 s_2生成，它们被弗罗贝尼乌斯互换。于是相对魏尔群为 $W = \mathbf{W}^F = \{e, w_\circ\}$，其中$w_\circ = s_1 s_2 s_1$。相对简单反射集为 $S = \{w_\circ\}$。注意这两个长度函数之间的差异:

$$\ell(w_\circ) = 1 \quad \text{but} \quad \ell_{\mathbf{B}}(w_\circ) = 3.$$

根据引理 2.4，幺幂根基的大小由后一个函数给出：$|U^-_{w_\circ}| = q^{\ell_{\mathbf{B}}(w_\circ)} = q^3$。

2.5. 函数上的运算。对于任意带有有限群 G作用的有限集 X，我们用$\mathcal{C}_G(X)$表示定义在 X上、取值于$\mathbf{Z}$且为 G-不变的函数所构成的自由模。对于任意 G-稳定子集 $Y \subseteq X$，我们用 $1_Y \in \mathcal{C}_G(X)$表示 Y上的示性函数。

对于一个 G-等变映射 $f: Y \to X$，沿着 f 的函数拉回是线性映射 $f^*: \mathsf{C}_G(X) \to \mathsf{C}_G(Y)$，其定义为 $f^*(\varphi)(y) = \varphi(f(y))$。沿着 f 的函数推前，或积分，是线性映射 $f_! : \mathsf{C}_G(Y) \to \mathsf{C}_G(X)$，其定义为

$$f_!(\psi)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \psi(y).$$

当 f 可以根据上下文理解时，我们会在记号中省略 $f_!$。

令 $*$ 表示$\mathcal{C}_G(X \times X)$ 上的卷积乘积，它由三个投影映射$pr_{i,j}: X^3 \to X^2$ 定义如下:

$$\varphi_1 * \varphi_2 = pr_{1,3,!}(pr^*_{1,2}(\varphi_1) \cdot pr^*_{2,3}(\varphi_2)),$$

其中$\cdot$ 表示逐点乘法。具体而言，

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(y, x) = \sum_{z \in X} \varphi_1(y, z)\varphi_2(z, x).$$

对角线$\{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X^2$的示性函数是此运算的单位元。若 X 配备了一个 G-作用，且 G 在 X^2 上以对角方式作用，那么 $*$ 限制后便成为$\mathcal{C}_G(X \times X)$上的一个运算，其单位元不变。

岩堀证明，在卷积下由 $\mathcal{C}_G(G/B \times G/B)$ 构成的环由元素 $1_w := 1_{O(w)}$ for $w \in W$ 自由生成，并满足以下关系，其中 $w \in W$ 和 $s \in S$ 任意：

$$1_s * 1_w = \begin{cases} 1_{sw} & \ell(sw) > \ell(w), \\ |U_s^-| \, 1_{sw} + (|U_s^-| - 1) \, 1_w & \ell(sw) < \ell(w). \end{cases}$$

参见 [Car95，§3。3] 或 [Kaw75，定理 2。6]。我们定义 H_B^G为 $\mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$-代数

$$H_B^G = \mathcal{C}_G(G/B \times G/B)[\tfrac{1}{q}].$$

若 G 是分裂的，即 $W = \mathbf{W}$，则 $\ell_{\mathbf{B}}(s) = \ell(s) = 1$，且对所有 $s \in S$，$|U_s^-| = q$ 都成立。这正是引言所重点讨论的情形。此处，W 是晶体学型的，而H_B^G 是 $\mathbf{Z}[q^{\pm 1}]$-代数 H_W 的一个特化；该代数由元素 T_w for$w \in W$ 自由生成，并满足以下关系，其中 $w \in W$ 和 $s \in S$ 任意：

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \ell(sw) = \ell(w) + 1, \\ \boldsymbol{q} T_{sw} + (\boldsymbol{q} - 1) T_w & \ell(sw) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

2.6. 抛物子群。 固定一个由 F 稳定的子集 $J_{\mathbf{B}} \subseteq S_{\mathbf{B}}$，其对应于子集 $J \subseteq S$。令 $\mathbf{W}_J \subseteq \mathbf{W}$（分别为 $W_J \subseteq W$）为由 $J_{\mathbf{B}}$（分别为 J）生成的子群。则 $\mathbf{W}_J$是由 F 稳定的，并且 $W_J = \mathbf{W}_J^F$。

令 $\mathbf{P}_J = \mathbf{B}\mathbf{W}_J\mathbf{B} \subseteq \mathbf{G}$。我们可以写成 $\mathbf{P}_J = \mathbf{L}_J \ltimes \mathbf{U}_J$，其中 $\mathbf{L}_J$ 是约化的，其魏尔群为 $\mathbf{W}_J$，而 $\mathbf{U}_J$是 $\mathbf{P}_J$的幺幂根基。这些子群均由 F 稳定，并且在 F不动点上，有 $P_J = L_J \ltimes U_J$。

根据构造，$\mathbf{B}_J = \mathbf{L}_J \cap \mathbf{B}$ 是 $\mathbf{L}_J$的博雷尔子群。包含关系 $L_J \subseteq P_J$下降为一个 L_J-等变双射 $L_J/B_J \simeq P_J/B$，进而得到代数同构

$$\mathcal{C}_{L_J}(L_J/B_J \times L_J/B_J) \simeq \mathcal{C}_{L_J}(P_J/B \times P_J/B).$$

一旦我们加入 $\frac{1}{q}$，左侧就变为 $H_{B_J}^{L_J}$，右侧则变为由满足 $w \in W_J$ 的元素 1_w 生成的 H_B^G 的子代数。今后，我们将这两个 $\mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$-代数视为彼此相同。

如引言中所述，令 $W^{J,-} \subseteq W$ 为 W_J的最短长度右陪集代表元集合。根据引理 2.1（4）和引理2.4，下面定义的分裂情形恢复了相对范数映射在第 §$\boldsymbol{q} \to q$ 特化下的情形，见 §1.1。

定义 2.6。 相对范数映射 N_J^S：$H_{B_J}^{L_J} \to H_B^G$ 定义为

$$N_J^S(\alpha) = \sum_{v \in W^{J,-}} \frac{1}{|U_v^-|} \, 1_{v^{-1}} * \alpha * 1_v.$$

我们已隐含地使用引理 2.4 来确保 $|U_v^-|$ 是 q的幂。

例 2.7。 我们继续讨论例 2.5，其中 $\mathbf{G}$ $=\mathbf{GL}_3$ 和 $G=\mathrm{GU}_3(q)$。Hecke代数 H_B^G 由以下关系定义

$$1_{w_\circ} * 1_{w_\circ} = q^3 1_e + (q^3-1)1_{w_\circ}.$$

现在我们手动计算 $N_\emptyset^S(1)$ 。注意$\mathbf{P}_\emptyset = \mathbf{B}$ 以及$\mathbf{L}_\emptyset = \mathbf{T}$，由此$W^{\emptyset,-} = W$。利用 $|U_{w_\circ}^-| = q^3$例2.5中的计算以及上述 Hecke 关系，可得

$$\begin{aligned} N_\emptyset^S(1) &= \sum_{v\in\{e,w_\circ\}} \frac{1}{|U_v^-|}\, 1_{v^{-1}} * 1_v \\ &= 1_e + q^{-3}\, 1_{w_\circ}^2 \\ &= 2\, 1_e + (1-q^{-3})1_{w_\circ}. \end{aligned}$$

展望第3节，可通过验证(3.2)，即检查最后一个表达式与 $f_!1_{E_\emptyset^-}$ 相符，来确认这一点。注意 $E_\emptyset^- = E_\emptyset^+$ ，因为$\mathbf{Spr}_\emptyset^- = \mathbf{Spr}_\emptyset^+$ 。

2.7. 关于幺幂子群的一个引理。令 $w_\circ$ 和 $w_{J\circ}$ 分别表示相对于 S而言， W 和 W_J 的最长元素。于是 $U = U_{w_\circ}$ 和 $U_J = U_{w_{J\circ}}$。下面的事实将很有用：

引理 2.8。对于任意 $J\subseteq S$ 和 $v\in W^{J,-}$，我们有

$$\begin{aligned} U_J \cap U_v &= U_{w_{J\circ}v}, \\ U_J \cap U_v^- &= U_v^-. \end{aligned}$$

特别地， $U_J = U_{w_{J\circ}v}U_v^- = U_v^- U_{w_{J\circ}v}$和 $U_{w_{J\circ}v}\cap U_v^- = \{1\}$。在分裂情形下，相应的恒等式成立，只需将 U_J、 U_v、等等分别替换为$\mathbf{U}_J$、$\mathbf{U}_v$、等等。

证明。为证明 $U_J\cap U_v = U_{w_{J\circ}v}$：一般而言，若 w， $v\in W$满足 $\ell(wv) = \ell(w)+\ell(v)$，则 $U_{wv}^- = U_w^- U_v^-$且 $U_w^-\cap U_v^- = \{1\}$由引理2.3（1）可得，这意味着 $U_{wv} = U_w\cap U_v$ 由引理2.3（2）可得。

为证明 $U_J\cap U_v^- = U_v^-$，即 $U_v^-\subseteq U_J$：一般而言，若 $w\in W_J$和 $v\in W^{J,-}$，则根子群的 F-轨道中，被 wv 反转的$\mathbf{U}_J$ 的根子群，恰好是被 w反转的那些。取 $w=e$ 即可得证。

在分裂情形下， $\ell_{\mathbf{B}} = \ell$，因此， v 在$\mathbf{W}_J v$中使 $\ell_{\mathbf{B}}$ 最小化。所以，我们可以用簇代替集合，重复上述所有论证。□

3. 部分 Springer 解消

3.1. 回顾部分 Springer 解消 $\mathbf{Spr}_J^{\pm}\subseteq \mathbf{G}\times\mathbf{G}/\mathbf{P}_J$ 以及簇$\mathbf{E}_J^{\pm} = \mathbf{G}/\mathbf{B}\times\mathbf{Spr}_J^{\pm}$，见§1.2。后者在左侧 $\mathbf{G}$-作用下保持不变，该作用定义在$\mathbf{G}/\mathbf{B}\times\mathbf{G}\times\mathbf{G}/\mathbf{P}_J$ 上，定义为

$$g\cdot(h\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) = (ghb, gug^{-1}, gy\mathbf{P}_J). \tag{3.1}$$

令 $f\colon \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{P}_J \to (\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$ 为由下式定义的$\mathbf{G}$-等变映射

$$f(h\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) = (h\mathbf{B}, uh\mathbf{B}).$$

在 F-不动点上，它限制为 G-等变映射 $f: E_J^{\pm} \to (G/B)^2$。这些映射还原了 § f 1.2 中的映射 。本节的目标是证明以下恒等式

$$\begin{aligned} f_! 1_{E_J^-} &= |U_J|\, N_J^S(1), \\ f_! 1_{E_J^+} &= |U_J|\, N_J^S(1^2_{w_{J\circ}}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 N_J^S 现在由定义 2.6 给出。它们在分裂情形下还原了定理 1.1 。

3.2. **化归到分层**。 注意到 $\mathbf{E}_J^{\pm}$ 是$\mathbf{G}$-稳定子簇$\mathbf{E}_{J,v}^{\pm}$的并，其中$\mathbf{W}_J v \in \mathbf{W}_J \backslash \mathbf{W}$，在点上，

$$\mathbf{E}_{J,v}^{\pm} = \{(h\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{Spr}_J^{\pm} \mid \mathbf{P}_J y^{-1} h\mathbf{B} = \mathbf{P}_J v\mathbf{B}\}.$$

由 §2.4 可知，$\mathrm{P}_J v\mathrm{B}$ 是 F-稳定的当且仅当 $v \in W$，且在此情形下，$P_J vB = (\mathrm{P}_J v\mathrm{B})^F$。因此， $E_J^{\pm}$是其 G-稳定子集 $E_{J,v}^{\pm}$ 的并，其中 v 遍历 W_J 的一组完备右陪集代表元；例如， W^J,–。由引理 2.8 可知 $U_J \simeq U_{w_{J\circ} v} \times U_v^-$，因此我们将 (3.2) 化归为：

定理 3.1。 若 $v \in W^J$, –，则：

$$f_! 1_{E_{J,v}^-} = |U_{w_{J\circ} v}|\, 1_{v^{-1}} * 1_v. \tag{1}$$

$$f_! 1_{E_{J,v}^+} = |U_{w_{J\circ} v}|\, 1_{v^{-1}} * 1^2_{w_{J\circ}} * 1_v. \tag{2}$$

3.3. **约化到 Borel 子群**。 令 $\check{\mathbf{E}}_{J,v}^{\pm} \subseteq \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{B}$ 为由点上的下式定义的子簇

$$\check{\mathbf{E}}_{J,v}^{\pm} = \{(h\mathbf{B}, u, y\mathbf{B}) \mid (u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{Spr}_J^{\pm} \text{ and } y\mathbf{B} \xrightarrow{v} h\mathbf{B}\}.$$

遗忘映射 $\mathbf{G}/\mathbf{B} \to \mathbf{G}/\mathbf{P}_J$ 诱导出映射 $\check{\mathbf{E}}_{J,v}^{\pm} \to \mathbf{E}_{J,v}^{\pm}$。

引理 3.2。 若 $v \in W^J$, –，则 $\check{E}_{J,v}^{\pm} \to E_{J,v}^{\pm}$ 是一个双射。在分裂情形下，这个双射来自同构 $\check{\mathbf{E}}_{J,v}^{\pm} \to \mathbf{E}_{J,v}^{\pm}$。

证明。第一个断言只是这样一个事实：如果 v 在 $W_J v$ 中使 ℓ 取最小值，那么从 U_v^- 到舒伯特胞腔 BvB/B 和 BvP_J/P_J 存在相容的双射。

对于第二个断言：与引理 2.8 的证明中一样， v 在 $\ell_{\mathbf{B}}$ 中使 $\mathbf{W}_J v$ 取最小值。因此，我们可以重复上面的论证，但用簇 $\mathbf{U}_v^-$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{P}_J$ 替代集合 U_v^-、 B、 P_J，并用同构替代双射。□

簇 $\check{\mathbf{E}}_J^{\pm}$在 $\mathbf{G}$ 对 $\mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{B}$ 的作用下保持不变，与 (3.1) 类似。令 $\check{f}: \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \to (\mathbf{G}/\mathbf{B})^3$ 为由下式定义的等变映射：

$$\check{f}(h\mathbf{B}, u, y\mathbf{B}) = (h\mathbf{B}, y\mathbf{B}, uh\mathbf{B}).$$

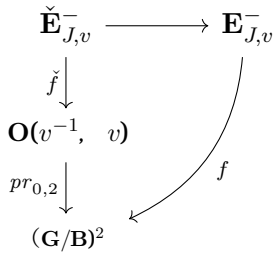
$\check{}$定理3.1 两部分的证明将以不同方式使用 f 。

3.4. **（1）的证明**。采用第2节的记号，

$$pr_{0,2,!}1_{O(v^{-1},v)} = 1_{v^{-1}} * 1_v.$$

这表明，可以将$\mathbf{E}^-_{J,\ v}$与$\mathbf{O}(v^{-1},\ v)$上的一个丛进行比较。事实证明，$\check{}\mathbf{E}^-_{J,\ v}$正是我们所要寻找的丛。

注意，如果（$h\mathbf{B}\ u,\ y\mathbf{B}$）是$\check{}\mathbf{E}^-_{J,\ v}$中的一个点，那么$\mathbf{B}y^{-1}uh\mathbf{B} = \mathbf{B}y^{-1}h\mathbf{B} = \mathbf{B}v\mathbf{B}$。因此，$\check{}\ f$限制为从$\check{}\mathbf{E}^-_{J,\ v}$到$\mathbf{O}(v^{-1},\ v)$的映射，从而得到一个等变交换图：



根据引理 3.2 以及该图，我们将定理 3.1 的情形（1）归结为：

命题 3.3。若 $v \in W^{J,\ -}$，则

$$\check{f}_!1_{\check{E}^-_{J,v}} = |U_{w_{J_\circ}v}|\, 1_{O(v^{-1},v)}$$

在 $C_G(O(v^{-1},v))$ 中。在分裂情形下，这个单位元来自于 $\check{}\ f : \check{}\mathbf{E}^-_{J,v} \to \mathbf{O}(v^{-1},v)$ 是一个光滑纤维丛，它在$\mathbf{O}(v^{-1},v)$ 中满足 $(g_0\mathbf{B}\ g_1\mathbf{B}) = (v\mathbf{B},\mathbf{B})$ 的子簇上限制为一个 $\mathbf{U}_{w_{J_\circ}v}$-挠子。

证明。 对于第一个断言：回忆一下， G 对点对 $(g_0B, g_1B) \in O(v^{-1})$ 的作用是 $\check{}\ \check{}$ 传递的。因此，利用 f 的等变性和齐性，只需在 $O(v^{-1},v)$ 的一个子集上计算 f，其中这些坐标固定不变。

取 $(g_0B, g_1B) = (vB, B)$。在这一对上，$\check{}\ E^-_J$ 的纤维由满足 $u \in U_J$ 的 (vB, u, B) 组成， $O(v^{-1},v)$ 的纤维由满足 $gB \in BvB/B$ 的 (vB, B, gB) 组成，而 $\check{}f$ 由 $u \mapsto uvB$ 给出。因此，在引理 2.8 的 $\check{}\ U_J \simeq U_{w_{J_\circ}v} \times U^-_v$ 和引理 2.3(3) 的 $BvB/B \simeq U^-_v$ 这两个双射下， f 对应于投影$U_{w_{J_\circ}v} \times U^-_v \to U^-_v$。这就证明了该断言。

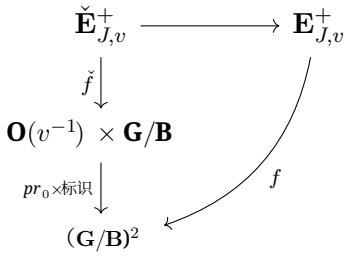
关于第二个断言：如引理 2.8的证明中所述，我们注意到 v 在$\ell_{\mathbf{B}}$ 中使 $\mathbf{W}_J v$达到最小值。因此，我们可以将上面的论证重复一遍，只需用簇 $\mathbf{G}$、$\mathbf{O}(v)$、等替代集合 G、 $O(v)$、等，并用引理 2.1替代引理 2.3。 □

3.5. **（2）的证明**。 采用第 2 节，尤其是第 §2.7 节中的记号，

$$pr_{0,4,!}1_{O(v^{-1},w_{J_\circ},w_{J_\circ},v)} = 1_{v^{-1}} * 1^2_{w_{J_\circ}} * 1_v.$$

这提示我们将 $\mathbf{E}^+_{J,v}$ 与 $\mathbf{O}(v^{-1}, w_{J_\circ}, w_{J_\circ}, v)$ 上的一个丛进行比较。但与情形 (1) 不同，显然不存在从 $\check{}\mathbf{E}^+_{J,v}$ 到后一个簇的映射。

我们确实知道，$\check{}f$限制后给出了一个从$\check{}\mathbf{E}^+_{J,v}$到$\mathbf{O}(v^{-1})\times\mathbf{G}/\mathbf{B}$的映射，从而得到一个等变交换图：



同时，我们有一个映射

$$\mathbf{O}(v^{-1},w_{J\circ},w_{J\circ},v)\xrightarrow{pr_{0,1,4}}\mathbf{O}(v^{-1})\times\mathbf{G}/\mathbf{B}.$$

因此，根据引理 3.2 以及上述讨论，我们将定理3.1 的情形 (2) 化简为：

命题 3.4。若 $v\in W^J{}_{,-}$，则

$$\check{f}_!1_{E^+_{J,v}}=|U_{w_{J\circ}v}|\,pr_{0,1,4,!}1_{O(v^{-1},w_{J\circ},w_{J\circ},v)}$$

在$\mathcal{C}_G(O(v^{-1})\times G/B)$.

证明。由于 $O(w)$ 分拆 $(G/B)^2$, ，只需固定 $w\in W$ 并限制到

$$O(v^{-1})\times_w G/B=\{(hB,yB,gB)\in O(v^{-1})\times G/B\mid Bh^{-1}gB=BwB\},$$

$O(w)$ 在 $pr_0\times\mathrm{id}$ 下的原像。回想一下，$O(w)$ 上的 G-作用是传递的。因此，由等变性和齐性可知，$\check{}E^+_{J,v}$ 与 $O(v^{-1},w_{J\circ},w_{J\circ},v)$ 的纤维在 $O(v^{-1})\times_w G/B$ 上大小恒定。因此，只需在 $O(v^{-1})\times_w G/B$ 的一个子簇上比较它们，其中坐标 (hB,gB) 固定。此外，为此只需固定 hB 并对 $gB\in hBwB/B$ 取平均。

取 $hB=B$。接下来必须比较以下对象的原像

$$\{(B,yB,gB)\in O(v^{-1})\times_w G/B\}\tag{3.3}$$

在$\check{}E^+_J$和 $O(v^{-1},\ w_{J\circ},\ w_{J\circ},\ v)$中。由于 $v\in W^J{}_{,}-$，我们可以用集合 $O(v^{-1},\ w_{J\circ},\ w_{J\circ}v)$ 和映射 $pr_{0,1,3}$，替换后一个集合和映射 $pr_{0,\ 1,\ 4}$。

(3.3) 在 $\check{}E^+_J$ 中的原像由满足 $(B,\ u,\ yB)$ 的 $u\in yV_Jy^{-1}$ 和$u\in BwB$组成。因此其大小为

$$|yV_Jy^{-1}\cap BwB|.\tag{3.4}$$

(3.3) 在 $O(v^{-1},\ w_{J\circ},\ w_{J\circ}v)$ 的原像由满足$(B,\ yB,\ zB,\ gB)$ 的

$$yB\xleftarrow{w_{J\circ}}zB\xrightarrow{w_{J\circ}v}gB$$

和 $gB\in BwB/B$。注意到 $yB\in Bv^{-1}B/B$，因此在 B 左乘下的齐性使我们可以通过对所有.....取平均，来计算给定 yB 的原像

所有 $yB \in Bv^{-1}B/B$的原像。由于 $v \in W^{J,-}$，引理 2.3(1) 表明，这些原像的并由满足以下条件的 $(zB,\ gB)$ 参数化

$$B \xleftarrow{w_{J_\circ}v} zB \xrightarrow{w_{J_\circ}v} gB \tag{3.5}$$

以及 $gB \in BwB/B$。它还表明，存在一个双射，将 $U^{-}{}_{(w_{J_\circ}v)^{-1}} \times U^{-}_{w_{J_\circ}v}$映射到满足条件的有序对集合 $(zB,\ gB)$，即满足（3.5）的有序对，该映射定义为

$$(u, u') \mapsto (u(w_{J_\circ}v)^{-1}B, u(w_{J_\circ}v)^{-1}u'w_{J_\circ}vB).$$

因此，满足条件（$(zB,\ gB)$，满足（3.5）且 $gB \in BwB/B$ 的集合由以下参数化

$$(U^{-}_{(w_{J_\circ}v)^{-1}}(w_{J_\circ}v)^{-1}U^{-}_{w_{J_\circ}v}w_{J_\circ}v) \cap BwB.$$

由于 $U^{-}{}_{(w_{J_\circ}v)_{-1}} \subseteq B$，因此这个集合可以与以下集合等同

$$U^{-}_{(w_{J_\circ}v)^{-1}} \times ((w_{J_\circ}v)^{-1}U^{-}_{w_{J_\circ}v}w_{J_\circ}v \cap BwB).$$

根据引理 2.3(3)，我们有 $|U^{-}_{v^{-1}}|$ 种选择 $yB \in Bv^{-1}B/B$，并且由于$v \in W^{J,-}$，我们还有$|U^{-}{}_{(w_{J_\circ}v)^{-1}}| = |U^{-}_{w_{J_\circ}}||U^{-}_{v^{-1}}|$。综上，我们得出，（3.3）在 $O(v^{-1},\ w_{J_\circ},\ w_{J_\circ}v)$ 中的原像大小为

$$|U^{-}_{w_{J_\circ}}||(w_{J_\circ}v)^{-1}U^{-}_{w_{J_\circ}v}w_{J_\circ}v \cap BwB|. \tag{3.6}$$

最后，我们比较 (3.4) 和 (3.6)。 [Kaw75]的定理 4.1 指出

$$|yV_Jy^{-1} \cap BwB| = |U_{v^{-1}}||(w_{J_\circ}v)^{-1}U^{-}_{w_{J_\circ}v}w_{J_\circ}v \cap BwB|.$$

再次利用$|U^{-}{}_{(w_{J_\circ}v)^{-1}}| = |U^{-}_{w_{J_\circ}}||U^{-}_{v^{-1}}|$，我们看到$|U_{v^{-1}}| = |U_{(w_{J_\circ}v)^{-1}}||U^{-}_{w_{J_\circ}}| = |U_{w_{J_\circ}v}||U^{-}_{w_{J_\circ}}|$，从而得到所需的单位元。□

注记3.5。簇 $\mathbf{O}(v^{-1}) \times \mathbf{G}/\mathbf{B}$ 的不对称性似乎有些缺陷。为了使几何结构更加对称，可以尝试将图替换为

$$\mathbf{E}^{+}_{J} \xrightarrow{\check{f}} \mathbf{O}(v^{-1}) \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \xleftarrow{pr_{0,1,4}} \mathbf{O}(v^{-1}, w_{J_\circ}, w_{J_\circ}, v)$$

图

$$\mathbf{E}^{+}_{J} \xrightarrow{\check{f}'} \mathbf{O}(v^{-1}) \times \mathbf{O}(v) \xleftarrow{pr_{0,1,3,4}} \mathbf{O}(v^{-1}, w_{J_\circ}, w_{J_\circ}, v)$$

其中 $\check{f}'(h\mathbf{B},\ u,\ x\mathbf{B}) = (h\mathbf{B},\ x\mathbf{B},\ ux\mathbf{B},\ uh\mathbf{B})$。于是我们希望

$$\check{f}'_!1_{E^{+}_{J,v}} = |U_J|\, pr_{0,1,3,4,!}1_{O(v^{-1},w_{J_\circ},w_{J_\circ},v)}$$

在 $\mathcal{C}_G(O(v^{-1}) \times O(v))$ 中。然而，Kawanaka 的工作似乎并未证明这个更强的单位元。

4. Hecke代数上的迹

4.1. 本节的目标是证明定理 1.3 对于一般的 G 的一个版本，并推导出推论 1.4，适用于分裂的 G。我们沿用第2节的一般设定。

4.2. 相对范数给出的迹。如§1.4所述，令 $\tau\colon H_B^G \to \mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$ 为由 $\tau(1_e) = 1$ 和 $\tau(1_w) = 0$ 给出的迹，对所有 $w \neq e$ 均成立；对于任意中心元 $\zeta \in Z(H_B^G)$，令 $\tau[\zeta]\colon H_B^G \to \mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$ 为由 $\tau[\zeta](\beta) = \tau(\beta * \zeta)$给出的迹。

引理 4.1。对于所有 $J \subseteq S$、$w \in W$ 和 $\alpha \in Z(H_{B_J}^{L_J})$，有

$$\frac{1}{|B|}\tau[N_J^S(\alpha)](1_w) = \frac{1}{|G|}\sum_{(hB,gB)\in O(w)} N_J^S(\iota(\alpha))(hB, gB),$$

其中，ι 是由 $\iota(1_w) = 1_{w^{-1}}$ 给出的 $H_{B_J}^{L_J}$ 的加法反自同构。

证明。对于任意 $\beta \in H_B^G$ 和 $xB \in G/B$，有 $\tau(\beta) = \beta(xB, xB)$。此外，$|G/B| = |G|/|B|$。因此，对于任意 $\zeta \in Z(H_B^G)$，有

$$\frac{|G|}{|B|}\tau[\zeta](\beta) = \sum_{xB\in G/B} (\beta * \zeta)(xB, xB).$$

接下来，对于任意 w、v、$z \in W$，注意到存在一个双射

$$\begin{aligned}&\{(x_0B, x_1B, x_2B, x_3B, x_4B) \in O(w, v^{-1}, z, v) \mid x_0B = x_4B\}\\ &\quad\xrightarrow{\sim} \{(g_0B, g_1B, g_2B, g_3B) \in O(v^{-1}, z^{-1}, v) \mid g_0B \xrightarrow{w} g_3B\}\end{aligned}$$

给出为 $(g_0B, g_1B, g_2B, g_3B) = (x_4B, x_3B, x_2B, x_1B)$。这表明单位元

$$\sum_{gB\in G/B} (1_w * 1_{v^{-1}} * 1_z * 1_v)(gB, gB) = \sum_{(hB,gB)\in O(w)} (1_{v^{-1}} * 1_{z^{-1}} * 1_v)(hB, gB).$$

将 α 在 $H_{B_J}^{L_J}$ 的基 $(1_z)_{z\in W_J}$ 中展开，并对所有 $v \in W^{J,-}$ 求和，我们推得

$$\sum_{xB\in G/B} (\beta * N_J^S(\alpha))(xB, xB) = \sum_{(hB,gB)\in O(w)} N_J^S(\iota(\alpha))(hB, gB),$$

从而完成证明。 □

4.3. **Springer 纤维**。本小节的参考文献是 [Sho88]。

为了处理 étale 上同调，我们固定一个在 $\mathbf{F}$ 中可逆的素数 ℓ。记号 $\mathbf{H}^*(-, \mathbf{Q}_\ell)$ 始终表示以常值 $\mathbf{Q}_\ell$-层为系数的 étale 上同调。以下，令 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_S$ 并且

$$\mathbf{Spr} = \mathbf{Spr}_\emptyset^+ = \mathbf{Spr}_\emptyset^- \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{G/B}.$$

所谓 *Springer 解消*，我们指的是 $\mathbf{Spr}$，或从 $\mathbf{Spr}$ 到 $\mathbf{V}$ 的投影映射 $u \in \mathbf{V}$。对于任意 *Springer 纤维* 上的 u，指的是该映射在 u 上的（约化）纤维，将其视为$\mathbf{Spr}_u$的$\mathbf{G/B}$的子簇。在点上，

$$\mathbf{Spr}_u = \{y\mathbf{B} \in \mathbf{G/B} \mid u \in y\mathbf{U}y^{-1}\}.$$

Springer 证明了这是一个没有奇次上同调的射影簇。对于$u \in V := \mathbf{V}^F$，他通过一种傅里叶

变换构造了 {v6} 在 H{v7}(<style id='8'>Spr</style>{v10}) 上的作用。后来，其他作者独立地给出了构造，并将其推广到复数等其他基域。

本文使用通过偏层理论构造的 $\mathrm{H}^*(\mathbf{Spr}_u)$ 上的 W-作用，该作用与 Springer 最初定义的作用相差一个符号扭曲。令 $\chi_u : \mathbf{Q}W \to \mathbf{Q}_\ell$ 为如下定义的迹：

$$\chi_u(w) = \mathrm{tr}(Fw \mid \mathrm{H}^*(\mathbf{Spr}_u)).$$

对于我们所选的作用，W 的符号特征仅出现在 χ_1 中。

如 [Sho88, §15], 所述，现已知道 χ_u 是将 $\boldsymbol{q} \to q$ 处一个取值于 $\mathbf{Z}[\boldsymbol{q}]$ 的迹在 $\mathbf{Z}W$ 上特化所得。特别地，$\chi_u(w)$ $\mathbf{Z}$ 对所有 $w \in W$均成立。

4.4. **部分 Springer 纤维。** 对于所有 $J \subseteq S$，对称化子 和 反对称化子在 $\mathbf{Q}W_J$ 中分别定义为

$$e_{J,+} = \frac{1}{|W_J|} \sum_{w \in W_J} w \quad \text{and} \quad e_{J,-} = \frac{1}{|W_J|} \sum_{w \in W_J} (-1)^{\ell(w)} w.$$

这些是 $\mathbf{Q}W_J$ 中的中心元，使得 $\mathbf{Q}W_J e_{J,+}$ 和 $\mathbf{Q}W_J e_{J,-}$ 分别给出 W_J 的平凡表示和符号表示。

Borho–MacPherson 将 $e_{J,-}$ 和$e_{J,+}$ 与部分 *Springer* 纤维联系起来

$$\mathbf{Spr}^-_{J,u} = \{y\mathbf{P}_J \in \mathbf{G}/\mathbf{P}_J \mid u \in y\mathbf{U}_J y^{-1}\},$$
$$\mathbf{Spr}^+_{J,u} = \{y\mathbf{P}_J \in \mathbf{G}/\mathbf{P}_J \mid u \in y\mathbf{V}_J y^{-1}\}.$$

根据 §2.4，F-不动点 $Spr^-_{J,u}$，以及分别的$Spr^+_{J,u}$，就是满足 $yP_J \in G/P_J$的那些 $u \in yU_J y^{-1}$，分别满足 $u \in yV_J y^{-1}$。对于我们所选的 Springer 作用，[BM83] 的主要结果表明，对所有 $J \subseteq S$ 和 $u \in V$，都有

$$\frac{1}{|U^-_{w_{J\circ}}|}\chi_u(e_{J,-}) = |Spr^-_{J,u}|, \qquad \chi_u(e_{J,+}) = |Spr^+_{J,u}|. \tag{4.1}$$

更准确地说，这些结果是将 Borho–MacPherson 在 $\mathbf{C}$ 上的解析拓扑中的层的论证，转移到$\bar{\mathbf{F}}$上的 étale 拓扑中的层，并追踪由$\mathbf{F}$-结构产生的 Tate 扭曲所得。因子 $|U^-_{w_{J\circ}}| = q^{\dim(\mathbf{L}_J/\mathbf{B}_J)}$在 $-$情形中，来自阶数为$2\dim(\mathbf{L}_J/\mathbf{B}_J)$的 Tate 扭曲，该扭曲伴随着 [BM83第 3 节中情形 (b) 的上同调移位4]。

4.5. **双迹。** 如 §1.4中所述，令 $O(w)_u$ 为 $O(w)$ 中由 (hB, uhB)形式的元素组成的子集。令 $\tau_G : \mathbf{Q}W \otimes H_B^G \to \mathbf{Q}$ 定义如下：

$$\tau_G(z \otimes 1_w) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in V} |O(w)_u| \chi_u(z).$$

Tri 的框架 [Tri21] 表明这确实是一个双迹，即 $\tau_G(z \otimes (-))$和 $\tau_G((-) \otimes 1_w)$ 对于所有 z，$w \in W$。在分裂情形下，它还原为引言中记作 $\boldsymbol{q} \to q$ 的迹的特化 τ_G 。

引理 4.2。 对于所有 $J \subseteq S$ 和 $w \in W$，我们有

$$\frac{1}{|U^-_{w_{J\circ}}|}\tau_G(e_{J,-} \otimes 1_w) = \frac{1}{|G|}\sum_{(hB,gB)\in O(w)} f_!1_{E_J^-}(hB, gB),$$
$$\tau_G(e_{J,+} \otimes 1_w) = \frac{1}{|G|}\sum_{(hB,gB)\in O(w)} f_!1_{E_J^+}(hB, gB),$$

其中 $E_J^{\pm}$ 和 f 的定义与第 3 节中相同。

证明。 将 (4.1) 应用于 τ_G 的公式。然后注意到

$$\coprod_{u\in V} O(w)_u \times Spr^{\pm}_{J,u} = \{(hB, u, yP_J) \in E_J^{\pm} \mid (hB, uhB) \in O(w)\}$$
$$= \coprod_{(hB,gB)\in O(w)} f^{-1}(hB, gB). \qquad \square$$

以下结果的分裂情形是定理 $\boldsymbol{q} \to q$ 特化到定理 1.3 的结果。由于它归结为一族关于 q 的 Laurent 多项式，这些恒等式对无穷多个 q 成立，因此我们可以将其从 q 提升到 $\boldsymbol{q}$。

定理 4.3。 对于任意 $J \subseteq S$，我们有

$$\tau[N_J^S(1)] = |T|\,\tau_G(e_{J,-} \otimes (-)),$$
$$\tau[N_J^S(1^2_{w_{J\circ}})] = |B_J|\,\tau_G(e_{J,+} \otimes (-))$$

作为 H_W 上的迹。

证明。 将引理 4.1–4.2 与（3.2）结合，注意到 1和 $1^2_{w_{J\circ}}$ 在 ι作用下保持不变。由此得到

$$\frac{1}{|B|}\tau[N_J^S(1)] = \frac{1}{|U_J||U^-_{w_{J\circ}}|}\tau_G(e_{J,-} \otimes (-)) = \frac{1}{|U|}\tau_G(e_{J,-} \otimes (-)),$$
$$\frac{1}{|B|}\tau[N_J^S(1^2_{w_{J\circ}})] = \frac{1}{|U_J|}\tau_G(e_{J,+} \otimes (-)).$$

接着回想一下 $B = T \ltimes U = B_J \ltimes U_{J\circ}$ $\square$

4.6. **重数公式**。 本小节中，我们始终假设 G 是分裂的。 如§1.4所示，我们记：

- V_G 表示 W 在余特征格的 $\mathbf{Q}$-线性张成空间上的表示，其中余特征格属于$\mathbf{T}$。
- $\mathrm{Irr}(W)$ 表示 W 的不可约特征标集合。
- $\{-,\ -\}$ 表示将 Lusztig 的奇异傅里叶变换截断为 $\mathbf{Q}$-值配对，定义在 $\mathrm{Irr}(W)$ 上。在 [Lus84], 的记号中，我们的配对是 Lusztig 配对 $\{-,\ -\}$ 沿其嵌入（4.21.3）的拉回。

我们强调，配对 $\{-,\ -\}$ 仍相当神秘。值得注意的是， [Lus84] 中的定义涉及一些逐案构造。对 $\{-,\ -\}$ 最统一的定义涉及代数几何。

根据 [Lus81], , Q(q$^{1/2}$) 是 H_W 的分裂域。因此，根据 Tits 变形 [GP00，第 7]，章，每个特征标 $\chi : W \to$ Q 都定义了一个迹 $\chi_{\boldsymbol{q}} : H_W \to$ Q(q$^{1/2}$)。由 $\chi \in$ Irr(W) 中的元素构成的迹集合 $\chi_{\boldsymbol{q}}$ 是 Q(q$^{1/2}$) $\otimes R(H_W)$ 作为向量空间的一组基。

中的特征标公式 [Tri21] 可转化为 $\tau_G(z \otimes (-))$ 在此基下的展开，对任意 $z \in \mathbf{Q}W$均成立：

$$\tau_G(z \otimes (-)) = \sum_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(W)} \frac{\{\chi,\psi\}\psi(z)}{\det(\boldsymbol{q} - z \mid \mathsf{V}_G)}\, \chi_{\boldsymbol{q}}. \tag{4.2}$$

将此结果与定理1.3结合，即得推论1.4。

4.7. 复原 Lascoux–Wan–Wang。在本小节中，取 G =GL$_n$，并令 F 为标准弗罗贝尼乌斯映射，它将每个矩阵坐标提升至其 q 次方。于是 $G =$ GL$_n$(F) 且 $W =$ W $= S_n$。对每个整数分拆 $\lambda \vdash n$，令$\chi^\lambda \in$Irr(S_n) 为相应的不可约特征标。迹 $\chi^\lambda_{\boldsymbol{q}}$ 的取值实际上属于 Q(q)，而不仅仅属于 Q(q$^{1/2}$)，因此 §1.4 中的映射 F$_{\boldsymbol{q}}$ 定义良好。

与同上一样，我们取 $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$，其中 $s_i \in S_n$ 是交换 i 和 $i+1$的对换。我们将使用整数合成 n与子集 S之间的双射，该双射将 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots) \vdash n$ 对应于

$$J = S \setminus \{s_{\nu_1}, s_{\nu_1+\nu_2}, \dots\}$$

对于这个 J，我们发现 $W_J \subseteq W$是杨子群 $S_\nu \simeq S_{\nu_1} \times S_{\nu_2} \times \dots$

对于 $G =$ GL$_n$($\mathbf{F}$)，配对$\{-,\ -\}$ 在 §4.6 中由下式给出：$\{\chi,\ \chi\} = 1$ 以及$\{\chi,\ \psi\} = 0$只要 $\chi \neq \psi$。因此，为证明推论1.4 恢复了 Wan–Wang 的公式（1.2），还需证明：

命题 4.4。 如果子集 J 对应于整数合成 ν，则

$$\frac{\chi^\lambda(e_{J,-})}{\det(\boldsymbol{q} - e_{J,-} \mid \mathsf{V}_G)} = \left\langle s_\lambda[X], e_\nu\left[\frac{X}{\boldsymbol{q}-1}\right]\right\rangle,$$
$$\frac{\chi^\lambda(e_{J,+})}{\det(\boldsymbol{q} - e_{J,+} \mid \mathsf{V}_G)} = \left\langle s_\lambda[X], h_\nu\left[\frac{X}{\boldsymbol{q}-1}\right]\right\rangle$$

对于任意 $\lambda \vdash n$，其中 $\langle -, - \rangle$ 是 Λ_n 上的霍尔配对，在该配对下舒尔函数$s_\lambda[X]$ 构成标准正交系。

作为准备，令 $R(S_n)$ 为由$\mathbf{Q}(\boldsymbol{q})$值迹构成的向量空间，其定义在$\mathbf{Q}S_n$上。令$\mathcal{F} : R(S_n) \xrightarrow{\sim} \Lambda_n$ 为将 χ^λ 映射到 $s_\lambda[X]$的(未变形的)弗罗贝尼乌斯特征同构，并将 $R(S_n)$上的重数配对映射为霍尔配对。

证明。 回想一下，$\mathcal{F}$ 将 $\chi^\lambda/\det(\boldsymbol{q} - (-) \mid \mathsf{V}_G)$ 送到经复合变换的 Schur 函数 $s_\lambda[\frac{X}{\boldsymbol{q}-1}]$。与此同时，由于 $W_J = S_\lambda$，它将由 $W = S_n$ 的平凡特征标（分别为符号特征标）诱导得到的特征标送到对称函数 $h_\nu[X]$（分别为 $e_\nu[X]$）。因此，根据弗罗贝尼乌斯互反律，

$$\frac{\chi^\lambda(e_{J,+})}{\det(\boldsymbol{q} - e_{J,+} \mid \mathsf{V}_G)} = \left\langle s_\lambda\left[\frac{X}{\boldsymbol{q}-1}\right], h_\nu[X]\right\rangle = \left\langle s_\lambda[X], h_\nu\left[\frac{X}{\boldsymbol{q}-1}\right]\right\rangle,$$

并且将 $e_{J,-}$, e_ν 替换为 $e_{J,+}$, h_ν 时，也有类似结论。 □

5. 辫簇与 Deodhar 分解

5.1. 在本文余下部分，我们假设 G 是分裂的。本节中，我们证明定理 1.5，该定理将部分辫子 Steinberg 簇与开辫子 Richardson 簇的胞腔分解联系起来。事实上，我们证明了一个尊重各个胞腔的细化结果。

我们将自由使用 §1.5 中回顾过的 Coxeter 组合学术语。全文中，我们固定一个词 $\vec{s} = (s^{(1)}, \dots, s^{(\ell)})$ 属于 S。

5.2. **理查森簇。** 回顾一下，对于任意 $v \in W$，我们定义了 *v-扭曲开 Richardson 簇* 中 $\vec{s}$ 的点如下：

$$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s}) = \{\vec{g}\mathbf{B} \in \mathbf{O}(\vec{s}) \mid g_0\mathbf{B} = vw_\circ\mathbf{B} \text{ and } \mathbf{B} \xrightarrow{vw_\circ} g_\ell\mathbf{B}\}.$$

下面，我们将进一步详述 §1.5 中提到的胞腔分解。对于任意 v-区分子词 $\vec{\omega}$ 属于 $\vec{s}$，令 $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} \subseteq \mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})$ 为子簇

$$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} = \{\vec{g}\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{(v)}(\vec{s}) \mid \mathbf{B} \xrightarrow{v\omega_{(i)}w_\circ} g_i\mathbf{B}\}.$$

与前面一样，令 $\mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$ 表示满足 $\omega_{(\ell)} = e$ 的 v-区分子词 $\vec{\omega}$ 属于 $\vec{s}$ 的集合。对于任意 $\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$，令

$$\mathbf{d}_{\vec{\omega}} = \{i \mid v\omega_{(i)} < v\omega_{(i-1)}\},$$
$$\mathbf{e}_{\vec{\omega}} = \{i \mid \omega^{(i)} = e\},$$

定理 [Deo85] 的主要结果表明，对于任意的字 $\vec{s}$ 属于 S：

(1) $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 非空，当且仅当 $\omega \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$。在此情形下，

$$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} \simeq \left\{ \vec{t} \in \mathbf{A}^\ell \;\middle|\; \begin{array}{ll} t_i \neq 0 & \text{for } i \in \mathbf{e}_{\vec{\omega}}, \\ t_i = 0 & \text{for } i \notin \mathbf{d}_{\vec{\omega}} \cup \mathbf{e}_{\vec{\omega}} \end{array} \right\} \tag{5.1}$$

由此 $R^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} := \mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})^F_{\vec{\omega}}$ 满足

$$|R^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}| = q^{|\mathbf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathbf{e}_{\vec{\omega}}|}. \tag{5.2}$$

(2) 子簇 $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 两两不相交，并且当遍历 $\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})$ 时，它们构成 $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})$ 的一个划分。

鉴于 (5.1)，这些簇 $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 称为*Deodhar 胞腔*。

5.3. **结构群变更。** 为了将它们与前几节中的几何对象进行比较，我们需要一个更对称版本的开理查森簇。令 $\mathbf{X}^{(v)}$, $\mathbf{X}^{(v)}_{\mathbf{B}}$,$\mathbf{R}^{(v)}$ 为按点定义的簇：

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(v)} &= \{(h\mathbf{B}, x\mathbf{B}, g\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^3 \mid h\mathbf{B} \xleftarrow{vw_\circ} x\mathbf{B} \xrightarrow{vw_\circ} g\mathbf{B}\} \\
&\simeq \mathbf{O}((vw_\circ)^{-1}, vw_\circ), \\
\mathbf{X}^{(v)}_{\mathbf{B}} &= \{(h\mathbf{B}, g\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^2 \mid h\mathbf{B} \xleftarrow{vw_\circ} \mathbf{B} \xrightarrow{vw_\circ} g\mathbf{B}\}, \\
\mathbf{R}^{(v)} &= \{vw_\circ\mathbf{B}\} \times \mathbf{B}vw_\circ\mathbf{B}/\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

根据构造，$\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})$ 是沿着 $\mathbf{O}(\vec{s})$ $pr \xrightarrow{0\,\ell}(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$ 映射的$\mathbf{R}^{(v)}$ 的原像。我们将建立上述各簇之间的联系，从而把 $\mathbf{R}^{(v)}(\vec{s})$ 及其 Deodhar 胞腔与由$\mathbf{X}^{(v)}$, $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 构造的类似簇联系起来。

注意，$\mathbf{X}^{(v)}$ 在$\mathbf{G}$对 $(\mathbf{G}/\mathbf{B})^3$的作用下保持稳定。$\mathbf{G}$ 在$\mathbf{X}^{(v)}$ 上的作用限制为$\mathbf{B}$在 $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 上的作用，而后者又进一步限制为

$$\mathbf{B}_v^- := \mathbf{B} \cap v\mathbf{B}_- v^{-1} = \mathbf{B} \cap (vw_\circ)\mathbf{B}(vw_\circ)^{-1}$$

在 $\mathbf{R}^{(v)}$上。由2.1(2) 可知，$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v^- \mathbf{U}_v = \mathbf{U}v\mathbf{B}_v^-$以及 $\mathbf{B}_v^- \cap \mathbf{U}_v = \{1\}$。

引理 5.1. 对于任意 $v \in W$，令$\mathbf{B}$ 从左侧作用于$\mathbf{G} \times \mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$，其作用方式为

$$b \cdot (x, h\mathbf{B}, g\mathbf{B}) = (xb^{-1}, bh\mathbf{B}, bg\mathbf{B}).$$

于是:

(1) 映射$(\mathbf{G} \times \mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}})/\mathbf{B} \to \mathbf{X}^{(v)}$，它将 $[x, h\mathbf{B}\ g\mathbf{B}] \mapsto (xh\mathbf{B}\ x\mathbf{B}\ xg\mathbf{B})$ 映为...

...，是一个同构。(2)商$\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ $/\mathbf{U}_v$ 构成一个代数簇。映射的复合

$$\mathbf{R}^{(v)} \to \mathbf{X}_{\mathbf{B}}^{(v)} \to \mathbf{X}_{\mathbf{B}}^{(v)}/\mathbf{U}_v$$

是一个同构。

证明。(1)：$\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 是由条件 $x\mathbf{B}$ $=\mathbf{B}$切出的$\mathbf{X}^{(v)}$ 的闭子簇。$\mathbf{X}^{(v)}$ 上的$\mathbf{G}$作用在坐标 $x\mathbf{B}$上是传递的，而点$\mathbf{B}$ 的稳定子就是它自身。

(2)：$\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 中由条件 $h\mathbf{B} = vw_\circ\mathbf{B}$切出的闭子簇为$\mathbf{R}^{(v)}$。根据引理2.1(3), $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 上的$\mathbf{B}$作用限制为$\mathbf{U}_{vw_\circ}^-$ $=\mathbf{U}v$ 的作用，该作用在坐标 $h\mathbf{B}$上是单传递的。□

推论 5.2。上述同构诱导的 F-不动点之间的映射$(G \times X_B^{(v)})/B \to X^{(v)}$ 和 $R^{(v)} \to X_B^{(v)}/U_v$ 是双射。

证明。由 Lang 定理立即可得，因为$\mathbf{B}$（$resp.$ $\mathbf{U}v$）是连通的，并且在$\mathbf{G}$ $\times\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$（$resp.$ $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$）上自由作用。□

设 $\mathbf{X}^{(v)}(\vec{s})$ $= \mathbf{O}(\vec{s}) \times^{(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2} \mathbf{X}^{(v)}$ 和 $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ $(\vec{s})$ $= \mathbf{O}(\vec{s}) \times^{(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2} \mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$，其中纤维积是相对于左侧因子上的映射 $pr_{0,\ell}$ 以及右侧因子上的坐标对 $(h\mathbf{B}\ g\mathbf{B})$ 构造的。在点上，

$$\mathbf{X}^{(v)}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, x\mathbf{B}) \in \mathbf{O}(\vec{s}) \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g_0\mathbf{B} \xleftarrow{vw_\circ} x\mathbf{B} \xrightarrow{vw_\circ} g_\ell\mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{B}}^{(v)}(\vec{s}) = \{\vec{g}\mathbf{B} \in \mathbf{O}(\vec{s}) \mid g_0\mathbf{B} \xleftarrow{vw_\circ} \mathbf{B} \xrightarrow{vw_\circ} g_\ell\mathbf{B}\}.$$

这些簇分别可以划分为子簇

$$\mathbf{X}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} = \{(\vec{g}\mathbf{B}, x\mathbf{B}) \in \mathbf{O}(\vec{s}) \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid x\mathbf{B} \xrightarrow{v\omega_{(i)}w_\circ} g_i\mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{B}}^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} = \{\vec{g}\mathbf{B} \in \mathbf{X}^{(v)}(\vec{s}) \mid \mathbf{B} \xrightarrow{v\omega_{(i)}w_\circ} g_i\mathbf{B}\}$$

当 $\vec{\omega}$ 遍历 $D^{(v)}(\vec{s})$ 时。注意，$X^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 在 $X^{(v)}(\vec{s})$ 上的 G-作用下保持稳定；$X^{(v)}$ B $(\vec{s})$ $_{\vec{\omega}}$ 和 $R^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 分别在 B 和 $Bvw_\circ$ 下也如此。沿 $\mathrm{pr}0,\ell : O(\vec{s})_{\vec{\omega}} \to (G/B)^2$，拉回引理 5.1，我们得到：

推论 5.3. 对于任意 $\vec{s}$ 和 $\vec{\omega} \in D^{(v)}(\vec{s})$，引理 *5.1* 和推论 *5.2* 的类似结论均成立：对每个 $\diamondsuit \in \{\mathbf{X}^{(v)},\mathbf{X}^{(v)}\ \mathbf{B}\ \cdot\mathbf{R}^{(v)}\}$，以 $\diamondsuit(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 替代 $\diamondsuit$。因此，

$$|X^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}| = \frac{|G||X_B^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}|}{|B|},$$
$$|X_B^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}| = |U_v||R^{(v)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}|.$$

5.4. **斯坦伯格簇。** 固定 $J \subseteq S$。如 §1.5中所述，我们将 部分斯坦伯格簇 定义为 $\vec{s}$ 类型为 J 的点集如下：

$$\mathbf{Z}_J^{\pm}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{O}(\vec{s}) \times \mathbf{Spr}_J^{\pm} \mid ug_0\mathbf{B} = g_\ell\mathbf{B}\}.$$

令 G 通过其在 $\mathrm{Spr}_J^{\pm}$ 和 $O(\vec{s})$上的作用作用于 $Z_J^{\pm}(\vec{s})$。坐标三元组 $(g_\ell B\ u, yP_J)$ 定义了一个等变映射 $Z_J^{\pm}(\vec{s}) \to E_J^{\pm}$。将 $E_J^{\pm}$ 按第 3 节中的子簇 $E_{J,v}^{\pm}$ 划分拉回后，我们得到 $Z_J^{\pm}(\vec{s})$ 的一个子簇划分

$$\mathbf{Z}_{J,v}^{\pm}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, u, y\mathbf{P}_J) \in \mathbf{Z}_J^{\pm}(\vec{s}) \mid \mathbf{P}_J y^{-1} g_\ell \mathbf{B} = \mathbf{P}_J v\mathbf{B}\}$$

当 $W_J v$ 遍历 $W_J \backslash W$ 时。注意，$\mathbf{Z}_{J,v}^{\pm}(\vec{s})$ 中的点也满足条件$\mathbf{P}_J y^{-1} g_0\mathbf{B} = \mathbf{P}_J v\mathbf{B}$。

命题 5.4。 若 $v \in W^{J,-}$，则：

(1) $|Z_{J,v}^{-}(\vec{s})| = |U_{w_J \circ v}||X^{(vw_\circ)}(\vec{s})|$.(

2) $|Z_{J,v}^{+}(\vec{s})| = |U_{w_J \circ v}||X^{(w_J \circ vw_\circ)}(\vec{s})|$.

证明。 对于任意 $v \in W$，我们有

$$|Z_{J,v}^{\pm}(\vec{s})| = \sum_{\vec{g}B \in O(\vec{s})} f_! 1_{E_{J,v}^{\pm}}(g_0 B, g_\ell B), \tag{5.3}$$

$$|X^{(vw_\circ)}(\vec{s})| = \sum_{\vec{g}B \in O(\vec{s})} (1_{v^{-1}} * 1_v)(g_0 B, g_\ell B). \tag{5.4}$$

(第二个单位元用到了 $w_\circ$ 的对合性。)现在应用定理 3.1。 □

由于乘以 $w_\circ$ 或 $w_{J\circ}$ 会将 $W^{J,-}$ 与 $W^{J,+}$ 互换，以下结果推出定理 1.5。

推论 5.5. 若 $v \in W^{J,-}$，则

$$\frac{|Z_{J,v}^{-}(\vec{s})|}{|G|} = \frac{1}{q^{\ell_J}(q-1)^{\mathrm{rk}(G)}} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|},$$
$$\frac{|Z_{J,v}^{+}(\vec{s})|}{|G|} = \frac{1}{(q-1)^{\mathrm{rk}(G)}} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}.$$

证明. 我们只处理 $-$ 情形，因为 $+$ 情形类似。注意到

$$\frac{|U_{w_J\circ v}||X^{(vw_\circ)}(\vec{s})|}{|G|}=\frac{|U_{w_J\circ v}||U_v||R^{(vw_\circ)}(\vec{s})|}{|B|}=\frac{|U_J||R^{(vw_\circ)}(\vec{s})|}{|B|}=\frac{|R^{(vw_\circ)}(\vec{s})|}{|B_J|}$$

由推论 5.3 和引理 2.8。然后在左侧应用命题 5.4 ，在右侧应用 (5.2)。□

注 5.6。并非总是有 $|Z^-_{J,v}(\vec{s})/G|=|Z^-_{J,v}(\vec{s})|/|G|$。事实上，$\mathbf{G}$ 在 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})$ 上的作用未必是自由的，因此我们无法应用 Lang 定理。

5.5. **迹作为点计数**。 我们汇总特定迹的点计数公式。令 $1_{\vec{s}}=1_{s^{(1)}}*\cdots*1_{s^{(\ell)}\circ}$ 对 5.3) 求和，并对 W_Jv 应用引理 4.2 可得

$$\tau_G(e_{J,\pm}\otimes 1_{\vec{s}})=\frac{|Z^{\pm}_J(\vec{s})|}{|G|}.$$

类似地，对于任意 $v\in W$，(5.4) 给出

$$\frac{1}{|B|}\tau(1_{\vec{s}}*1_{v^{-1}}*1_v)=\frac{|X^{(vw_\circ)}(\vec{s})|}{|G|}. \tag{5.5}$$

为了证明定理 1.5，我们实际上并不需要这些结果。但在后续章节中，掌握公式的 q-版本将很有用

$$q^{-\ell(v)}\tau(1_{\vec{s}}*1_{v^{-1}}*1_v)=|R^{vw_\circ}(\vec{s})| \tag{5.6}$$

这可由结合（5.5）、推论 5.3和引理 2.4得到。该公式本身是 [GLTW24]中推论 5.3 的一个较简单版本。

也就是说：设 $T_{\vec{s}}=T_{s^{(1)}}\cdots T_{s^{(\ell)}\circ}$ 结合（1.3）和（5.6），可得一个关于 $1_{\vec{s}}$ 和 q 的 Laurent 多项式恒等式，该恒等式对无穷多个 q成立，因此可提升为

$$\boldsymbol{q}^{-\ell(v)}\tau(T_{\vec{s}}T_{v^{-1}}T_v)=\sum_{\vec{\omega}\in\mathcal{D}^{(vw_\circ)}(\vec{s})}\boldsymbol{q}^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(\boldsymbol{q}-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}, \tag{5.7}$$

$T_{\vec{s}}$ 和$\boldsymbol{q}$中的一个恒等式。

5.6. **斯坦伯格簇的分解**。我们可以显著细化命题5.4中的情形（1）。对于任意 $\vec{\omega}\in\mathcal{D}^{(vw_\circ)}(\vec{s})$，令 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 为$\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})$的一个$\mathbf{G}$-稳定子簇，定义为

$$\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}=\{(\vec{g}\mathbf{B},u,y\mathbf{P}_J)\in\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})\mid \mathbf{P}_Jy^{-1}g_i\mathbf{B}=\mathbf{P}_Jvw_\circ\omega_{(i)}w_\circ\mathbf{B}\}.$$

这个子簇仅取决于 $W_Jvw_\circ$，尽管 $\vec{\omega}$ 本身取决于 $vw_\circ$ 。对于任意 $v\in W$，令 $\check{\mathbf{Z}}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 为沿 §<style id='3.3'>3.3 中的遗忘映射 $\check{\mathbf{E}}^-_{J,v}\to\mathbf{E}^-_{J,v}$ 对 $\mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 作拉回所得的对象。沿$pr_{0,\ell}:\mathbf{O}(\vec{s})_{\vec{\omega}}\to(\mathbf{G}/\mathbf{B})^2$, 对引理 3.2 和命题3.3作拉回，可得：

命题 5.7。若 $v \in W^J$,– 和 $\vec{\omega} \in D^{(vw_\circ)}(\vec{s})$，则 §3.3 中的映射 $\check{E}^-_{J,v} \xrightarrow{\sim} E^-_{J,v}$ 和 $\check{f} : \check{E}^-_{J,v} \to O(v^{-1}, v) = X^{(vw_\circ)}$ 构成一个笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}} & \longrightarrow & \mathbf{E}^-_{J,v} \\ \wr\uparrow & & \uparrow \\ \check{\mathbf{Z}}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}} & \longrightarrow & \check{\mathbf{E}}^-_{J,v} \\ \downarrow & & \downarrow \check{f} \\ \mathbf{X}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}} & \longrightarrow & \mathbf{X}^{(vw_\circ)} \end{array} \tag{5.8}$$

因此，$\check{\mathbf{Z}}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}} \to \mathbf{X}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 构成一个光滑纤维丛，其限制到子簇 $\mathbf{U}_{w_{J\circ}v}$ 上后是一个扭子 $(h\mathbf{B}\ x\mathbf{B}) = (v\mathbf{B}, \mathbf{B})$。

推论 5.8. 若 $v \in W^J$, –，则 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 两两不相交，并且当 $\vec{\omega}$ 遍历 $D^{(vw_\circ)}(\vec{s})$ 时，它们构成 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})$ 的一个划分。

证明. 命题 5.7 表明，若 $v \in W^J$,–，则 $\mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 由 $\mathbf{X}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 经拉回得到。这证明了 – 情形下的结论。然而，定义 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}} \subseteq \mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})$ 的条件不涉及坐标 u，而 $\mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})$ 与 $\mathbf{Z}^+_{J,v}(\vec{s})$ 正是由该坐标区分开来的。因此，+ 情形下的结论也成立。□

推论 5.9。若 $v \in W^J$, – 且 $\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{vw_\circ}(\vec{s})$，则

$$\begin{aligned} |Z^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}| &= |U_{w_{J\circ}v}||X^{(vw_\circ)}(\vec{s})|, \\ &= |G|\, q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|-\ell_J}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|-\mathrm{rk}(G)}, \end{aligned}$$

细化命题 – 5.4 和推论 5.5 中的情形。

此外，$\mathbf{G}$-等变 $\mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 的 $\mathbf{Q}_\ell$-系数 *étale* 上同调与 $\mathbf{T}$-等变 *étale* 上同调 $\mathbf{R}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 同构。对于紧支撑上同调，相应的结论成立，但次数需平移 ℓ_J。

证明。第一个断言由命题 5.7 取 F-不动点即可得到。至于第二个断言，令 H^*_c 表示紧支撑 étale 上同调。则

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}^*_{c,\mathbf{G}}(\mathbf{Z}^-_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}) \\ &\simeq \mathrm{H}^*_{c,\mathbf{G}}(\mathbf{X}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}})[\dim \mathbf{U}_{w_{J\circ}v}] && \text{by Proposition 5.7} \\ &\simeq \mathrm{H}^*_{c,\mathbf{B}}(\mathbf{R}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}})[\dim \mathbf{U}_{w_{J\circ}v} + \dim \mathbf{U}_{vw_\circ}] && \text{by Corollary 5.3} \\ &\simeq \mathrm{H}^*_{c,\mathbf{T}}(\mathbf{R}^{(vw_\circ)}(\vec{s})_{\vec{\omega}})[\dim \mathbf{U}_{w_{J\circ}v} + \dim \mathbf{U}_{vw_\circ} - \dim \mathbf{U}] && \text{since } \mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}. \end{aligned}$$

最后，由引理 2.1。$\mathbf{U}_{w_{J\circ}v}$ 的维数等于 $\mathbf{U}_{vw_\circ}$ 的维数等于 $\mathbf{U} = -\ell_J$ 的维数，普通上同调的结论相同，只是不发生次数平移。□

注记 5.10。当 $J = S$ 时，我们必须有 $v = e$ in (5.8)。此处竖直箭头变为平凡的，从而得到同构 $\mathbf{E}^-_S \simeq \check{\mathbf{E}}^-_S \simeq \mathbf{G}/\mathbf{B}$ 以及 $\mathbf{Z}^-_S(\vec{s}) \simeq \mathbf{X}^{(w_\circ)}(\vec{s})$。

当 $G = \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$，使得 $W = S_n$，且 β 是由 $\vec{s}$ 定义的、具有 n 股的正辫时，[STZ17] 中记作 $\mathcal{M}(\beta^\circ)$ 的代数栈恰好是 $[\mathbf{X}^{(w_\circ)}(\vec{s})/\mathbf{G}]$。它们的

命题 6.31 给出了另一个代数栈$\mathcal{M}(\beta^{\succ})$ 的分解，该分解为由勒让德子流形链环 $\beta^{\succ}$ 的分层所索引的子代数栈。同时，

$$\mathcal{M}(\beta^{\succ}) \simeq \mathcal{M}((\Delta\beta\Delta)^{\circ}) \simeq \mathcal{M}((\beta\Delta^2)^{\circ}),$$

其中 Δ 是半扭转：将 $w_{\circ} \in S_n$提升得到的最小正辫。注意，$\mathcal{M}((\Delta\beta\Delta)^{\circ})$ 也同构于 $[\mathbf{X}^{(e)}(\vec{s})/\mathbf{G}]$。

这样一来，我们的代数栈 $[\mathrm{Z}^{\overline{J}}{}_{,v}(\vec{s})/\mathrm{G}]$ 推广了[STZ17]中的代数栈 $\mathrm{M}(\beta^{\circ})$ 和 $\mathrm{M}(\beta^{\succ})$。我们将 $\mathrm{Z}^{\overline{J}}{}_{,v}(\vec{s})$ 分解为子簇 $\mathrm{Z}^{\overline{J}}{}_{,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$，推广了它们对 $\mathrm{M}(\beta^{\succ})$ 的直纹分解：事实上，引理 5.1 和命题 5.7 表明，前者对应于将结构群从 G 变更为 B/U_v时 $\mathrm{R}^{(v)}(\vec{s})$ 的 Deodhar 分解，而 [ACSH+25] 表明，后者对应于将结构群从 G 变更为 T 时的 Deodhar 分解。

注记 5.11。 在 [Mel25], Mellit 通过先将温和$\mathbf{GL}_n$特征簇——更确切地说，是它们的复数类比——分解为辫簇（其上带有向量丛），再将后者分解为 Deodhar 胞腔，从而证明了奇异 Lefschetz 性质。[3]辫簇记为 $Y_{\beta}(t)$，其中 β 是一个具有 n 条辫股、由 W中的显式字表示的正辫，而 t 是极大环面 $\mathbf{T}$中的一个充分一般的元素。

由于一般性条件， $Y_{\beta}(t)$ 与本节前面讨论的簇在性质上截然不同，即使进行结构群变更也仍然如此。它本质上是某个形式单值映射在 t 处的纤维，该映射从 β 的开 Richardson 簇映入$\mathbf{T}$。（ [Mel25]，§8] 中使用 Springer 解消与我们这里的做法无关。）

尽管如此，在温和特征簇这一层面，Mellit 的工作确实涉及与相对范数相关的结构。具体来说，设该特征簇由一个零亏格黎曼曲面构造而成，该曲面有 $k+1$ 个 punctures，单值条件由$\mathbf{G}$中的半单共轭类指定：例如，$[C_i]$ 对应于 $1 \le i \le k+1$，其中对所有 i， C_i 均属于$\mathbf{T}$ 。对于每个 i，令 $J_i \subseteq S$ 为固定 C_i的反射所成的子集。 [Mel25] 的定理 7.3.1 指出，当这些 $[C_i]$满足某个一般性假设时，特征簇上存在一个纤维为$\mathbf{U}$ 的向量丛，而该向量丛又是不交并，其各部分为由序列 $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ 标记的辫簇；其中，对每个 i， v_i 遍历 $W^{J_i,\,-}$。与 $\vec{v}$ 相对应的正辫 β由以下 W中的字表示：

$$(v_1^{-1}, v_1, \ldots, v_k^{-1}, v_k).$$

因此，将特征簇（及其上的向量丛）分解为辫簇，与我们将 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J}(\vec{s})$ 分解为其子簇 $\mathbf{Z}^{\pm}_{J,\,v}(\vec{s})$ 的方式奇妙地相似，尤其是在上述设定中 $k=1$ 时。

[3]请注意，Mellit 的论文使用术语 分层 来指代 Deodhar 分解。尽管如此，Dudas 在 [Dud08] 中证明，类型 B 中的 Deodhar 分解未必符合技术意义上的分层：胞腔的 Zariski 闭包未必是若干胞腔的并集。

5.7. **带框架的斯坦伯格簇**。 在 §5.3 中，从 $\mathbf{X}^{(v)}$ 到 $\mathbf{X}^{(v)}{}_{\mathbf{B}}$ 再到 $\mathbf{R}^{(v)}$ 的过程，体现了从 $\mathbf{G}$ 对称性到 $\mathbf{B}$ 对称性，再到 $\mathbf{B}_v^-$ 对称性的转变。我们本可以使用 $\mathbf{P}_J$-簇，而不使用 $\mathbf{G}$-簇 $\mathbf{Z}_J^{\pm}(\vec{s})$ 及其分层

$$\mathbf{Z}^-_{J,\square}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, u) \in \mathbf{O}(\vec{s}) \times \mathbf{U}_J \mid ug_0\mathbf{B} = g_\ell\mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{Z}^+_{J,\square}(\vec{s}) = \{(\vec{g}\mathbf{B}, u) \in \mathbf{O}(\vec{s}) \times \mathbf{V}_J \mid ug_0\mathbf{B} = g_\ell\mathbf{B}\}$$

以及由如下形式的条件切出的分层：$\mathbf{P}_J g_0\mathbf{B} = \mathbf{P}_J g_\ell\mathbf{B} = \mathbf{P}_J v\mathbf{B}$。

命题5.7 及其推论的类似结论对 $\square$版本也成立。事实上，根据构造，$\mathbf{G}$等变上同调$\mathbf{Z}^{\pm}_{J,v}(\vec{s})_{\vec{\omega}}$ 与其 $\square$ 类比对象的$\mathbf{P}_J$-等变上同调相吻合。

6. 停车数

6.1. 在本小节和下一小节中，(W, S) 表示任意一个不可约有限*Coxeter*系统，其考克斯特数为 h。记 V 表示 W的不可约反射表示，而 χ_{V} 表示其特征标。

对于任意整数 p，令V_p 表示伽罗瓦共轭 V，它具有相同的底层向量空间，但其特征标由 $\chi_{\mathsf{V}_p}(w) = \chi_{\mathsf{V}}(w^p)$给出。若 W 是晶体学型且 p 与 h互素，则 $\mathsf{V}_p \simeq \mathsf{V}$。

对于任意整数 $k \geq 0$，我们设 $[k]_{\boldsymbol{q}} = 1 + \boldsymbol{q} + \cdots + \boldsymbol{q}^{k-1}$。将 §1.6 中晶体学型情形的公式推广，我们定义有理抛物$\boldsymbol{q}$-停车数为$(W,\ p,\ J)$：

$$\mathrm{Park}^{J,\pm}_{W,p}(\boldsymbol{q}) = \prod_{i=1}^{|J|} \frac{[p \pm e_i^{J,p}]_{\boldsymbol{q}}}{[d_i^J]_{\boldsymbol{q}}}, \tag{6.1}$$

其中 d_1^J，……，$d_{|J|}^J$ 是 W_J的基本次数，而 $e^{J,\ p}_{1}$，……，$e^{J,\ p}_{|J|}$是指数或伪度，对应于 W_J在V_p^*上的作用，定义见 [BR11]。

回顾一下，S 中的考克斯特词是一个词 $\vec{c}$，由 S中的元素按任意顺序排列而成。我们用 $\vec{c}^p$ 表示 p 个 $\vec{c}$的连接。本节的目标是证明以下恒等式，它在$\mathrm{q} \to 1$ 极限下蕴含推论 1.6。

定理 6.1。若 W 是晶体学型的，则对于任意考克斯特词 $\vec{c}$ （属于 S）、与 h互素的整数$p > 0$ 以及子集 $J \subseteq S$，有

$$\mathrm{Park}^{J,\pm}_{W,p}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{(\boldsymbol{q}-1)^r} \sum_{v \in W^{J,\mp}} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{c}^p)} \boldsymbol{q}^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(\boldsymbol{q}-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}.$$

（注意符号翻转。）

猜想 6.2。 定理*6.1* 当 $\mathrm{Park}^{J,\pm}_{W,p}(\boldsymbol{q})$ 采用 (6.1). 推广到任意不可约有限 *Coxeter* 系统。

6.2. **从乘积到迹**。 我们继续允许非晶体学型 W。令$\mathbf{K}$ 为 W 的分裂域，使得 V_p 定义在$\mathbf{K}$上。当 W 为晶体学型时，我们可以取$\mathbf{K} = \mathbf{Q}$。

存在一个分次表示 $\mathsf{L}_{p/h} = \bigoplus_i \mathsf{L}^i_{p/h}$，属于 W，可称为有理停车空间，对应于 (W,p)，其精神源自 [ARR15 、，因为其分次维数为 $[p]^r_{\boldsymbol{q}}$。具体而言，$\mathsf{L}^{p/h}$ 是 W 的表示，其底层是 W 在参数 p/h下的有理 Cherednik 代数的简单球面模，并配备由欧拉元素导出的、平移后的 W-稳定分次。

我们将 $\mathsf{L}^{p/h}$ 的分次特征视为定义在 $\mathbf{K}[\boldsymbol{q}]$ 上、取值于 $\mathbf{K}W$ 的迹。为明确描述它，令 $\mathsf{S} = \bigoplus_i \mathsf{S}^i$ 和 $\bigwedge_p = \bigoplus_j \bigwedge^j_p$，其中

$$\mathsf{S}^i := \mathrm{Sym}^i(\mathsf{V}^*) \quad \text{and} \quad \bigwedge^j_p := \bigwedge^j(\mathsf{V}^*_p).$$

那么对所有 $w \in W$，我们有

$$\sum_i \boldsymbol{q}^i \operatorname{tr}(w \mid \mathsf{L}^i_{p/h}) = \left[\sum_{i,j} \boldsymbol{q}^i t^j \operatorname{tr}(w \mid \mathsf{S}^i \otimes \bigwedge^j_p)\right]\Bigg|_{t\to -\boldsymbol{q}^p} = \frac{\det(1-\boldsymbol{q}^p w \mid \mathsf{V}^*_p)}{\det(1-\boldsymbol{q} w \mid \mathsf{V}^*)}. \tag{6.2}$$

这个公式源自所谓的 BGG 分解：它由有理 Cherednik 代数的 Verma 模构成，底层的 W-表示具有 $\mathsf{S}\otimes\bigwedge^j$ 的形式。

命题 6.3。对于任意与 h 互素的整数 $p>0$ 及子集 $J\subseteq S$，我们有

$$\mathrm{Park}^{J,\pm}_{W,p}(\boldsymbol{q}) = \sum_i \boldsymbol{q}^i \operatorname{tr}(e_{J,\pm} \mid \mathsf{L}^i_{p/h}).$$

证明。我们只证明 $+$ 的情形，因为 $-$ 的情形类似。

令 $\mathsf{U} = \mathsf{V}_p$。利用 S的反射超平面，我们可以将 W_J- 在 V 上的作用分解为直和 $\mathsf{V} \simeq \mathsf{V}_J \oplus \mathsf{V}^\intercal_J$，其中 $\mathsf{V}^\intercal_J$是平凡表示的 $(r-|J|)$ 重幂。对将 V 映到 $\mathsf{U}(-p)$ 的伽罗瓦扭曲和分次移位进行处理后，我们得到直和 $\mathsf{U}(-p) \simeq \mathsf{U}_J(-p) \oplus \mathsf{U}^\intercal_J(-p)$，其中 $\mathsf{U}_J(-p) \simeq (\mathsf{V}_J)_p(-p)$，而 $\mathsf{U}^\intercal_J(-p)$仍然是平凡表示的 $(r-|J|)$ 重幂。

因此，作为 W_J 的表示，$\mathsf{U}(-p)$ 的伪度可由 $(\mathsf{V}_J)_p$ 的 $|J|$伪度构成：附加 $r-|J|$ 个零，并将所有项上移 p。特别地，$\mathsf{U}(-p)$ 满足 [OS80] 的定理 3.1 和推论 3.2 中的假设，即伪度之和等于其第 r 个外幂的伪度。由此可得，$(\mathsf{S}\otimes\bigwedge\mathsf{U}(-p))^{W_J}$ 仍与 S^{W_J} 上的外代数同构。因此，我们得到公式

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{q}^i t^j \dim(\mathsf{S}^i \otimes \bigwedge^j_p)^{W_J} = \prod_i \frac{1+t\boldsymbol{q}^{p+e^J_i}}{1-\boldsymbol{q}^{d^J_i}},$$

这就得到了 $t\to -1$ 处所需的乘积公式。 □

例 6.4。在命题 $J=\emptyset$ 和 $J=S$ 中取 6.3，我们得到公式 as

$$\mathrm{Cat}_{W,p}(\boldsymbol{q}) = \sum_i \boldsymbol{q}^i \dim(\mathsf{L}^i_{p/h})^W \quad \text{and} \quad [p]^r_{\boldsymbol{q}} = \sum_i \boldsymbol{q}^i \dim \mathsf{L}^i_{p/h},$$

分别。

6.3. **从迹到胞腔**。 回顾记号 $T_{\vec{c}} \in H_W$ ，见 §5.5。在 [Tri21],第一作者证明了，在 $T_{\vec{c}}$ 处的迹取值 H_W 对应于 τ_G是 $\mathsf{L}^{p/h}$ 的分次特征，相差一个移位。用我们的记号，这就是恒等式

$$\tau_G(w \otimes T_{\vec{c}}^p) = \sum_i \boldsymbol{q}^i \operatorname{tr}(w \mid \mathsf{L}_{p/h}^i). \tag{6.3}$$

现在假设 W 是晶体学型。取一个分裂半单 G ，其魏尔群为W。在这种情况下，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Park}_{W,p}^{J,\pm}(\boldsymbol{q}) &= \sum_i \boldsymbol{q}^i \operatorname{tr}(e_{J,\pm} \mid \mathsf{L}_{p/h}^i). && \text{by Proposition 6.3} \\
&= \tau_G(e_{J,\pm} \otimes T_{\vec{c}}^p) && \text{by (6.3)} \\
&= \frac{1}{(\boldsymbol{q}-1)^r} \sum_{v \in W^{J,\pm}} \boldsymbol{q}^{-\ell(v)} \tau(T_{\vec{c}}^p T_{v^{-1}} T_v) && \text{by Theorem 1.3.}
\end{aligned}$$

将（5.7）应用于上一个表达式，可得定理6.1。

7. Markov 迹与柯克曼数

7.1. 本节中，我们证明定理 1.8 和推论 1.10。在此过程中，我们回顾 Markov 迹、HOMFLYPT 多项式和有理柯克曼多项式。除非另有说明， $W = S_n$和 $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$，如 §4.7所述。

7.2. **Markov 迹与 HOMFLYPT 多项式**。如 [Jon87]（采用不同的归一化方式）所解释的，存在一个唯一的迹族

$$\mu_n : H_{S_n} \to \mathbf{Q}(\boldsymbol{q}^{1/2})[a^{\pm 1}]$$

满足以下条件：

(1) $\mu_1(1) = 1$。(2) 对所有 $\beta \in H_{S_{n-1}}$，我们都有

$$\mu_{n+1}(\beta T_{s_n}^{\pm 1}) = (-a^{-1}\boldsymbol{q}^{1/2})^{\pm 1} \mu_n(\beta).$$

特别地，由于 T_{s_n} 上的二次关系， $\mu_{n+1}(\beta) = \dfrac{a - a^{-1}}{\boldsymbol{q}^{1/2} - \boldsymbol{q}^{-1/2}} \mu_n(\beta)$。

这些迹构成（温和）拓扑链环的同痕不变量。

也就是说：任意一个有 n 股的拓扑辫 β 定义了 H_{S_n}中的一个元素，我们仍记为 β。这是通过从辫群到 H_{S_n} 的映射实现的，该映射将第 i个正简单扭转 σ_i 映为元素 $\mathsf{q}^{-1/2} T_{s_i}$。例如，若 $\vec{s} = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$，那么此映射会将正辫 $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_\ell}$ 映为元素 $\mathsf{q}^{-\ell} T_{\vec{s}}$。与此同时，将 β 绕实心环面缠绕后闭合，再将其嵌入三维空间，可定义一个在同痕意义下确定的链环 β ，称为 β的闭包。Ocneanu 证明，若 $e(\beta) \in \mathbf{Z}$ 是 β 的绕数，即其相对于正简单扭转的长度，那么

$$\mathbf{P}(\hat{\beta}) := (-a)^{e(\beta)} \mu_n(\beta) \in \mathbf{Q}(\boldsymbol{q}^{1/2})[a^{\pm 1}]$$

$\hat{}$ 仅取决于 β。

Laurent 多项式 $\mathbf{P}(\hat{}\beta)$ 如今称为约化 *HOMFLYPT* 多项式，以纪念其发现者。（“O”代表 Ocneanu；“约化”一词表示其归一化满足 $\mathbf{P}(\text{平凡结}) = 1$。）这些迹 μ_n 称为*Markov* 迹，因为其定义中的条件 (2) 对应于辫子上的所谓第二 Markov 变换。更多详情请参见 [Jon87]。

在 [Gom06], Y. Gomi 将迹 μ_n 统一推广到了有限 Coxeter 群 W。在 [WW15], Webster–Williamson 根据混合层上同调的权重滤过，构造了 Gomi 的迹。在他们工作的基础上， [Tri21] 的主要结果将 Gomi 的迹的一种范畴化与 W 在斯坦伯格簇的权重滤过$\mathbf{G}$-等变上同调上的 Springer 作用联系起来 $\mathbf{Z}_{\emptyset}^{-}(\vec{s}) = \mathbf{Z}_{\emptyset}^{+}(\vec{s})$。

7.3. 个体 a-次数。 对 $|e(\beta)|$ 进行归纳可知，若 $\beta \in H_{S_n}$ 来自拓扑辫，则 a在 $\mu(\beta)$ 中可能出现的指数只有

$$-n+1, \quad -n+3, \quad \ldots, \quad n-1.$$

对于 $0 \le k \le n-1$，我们定义 $\mu_n^{(k)}\colon H_{S_n} \to \mathbf{Q}(q^{1/2})$ 为

$$\mu_n^{(k)}(\beta) = \mathbf{Q}(q^{1/2})\text{-coefficient of } a^{-n+1+2k} \text{ in } \mu_n(\beta).$$

由线性性可知，这仍是一个迹。

当 G 是类型为 A_{n-1}的（分裂）半单对象时，[Tri21] 中范畴化迹的公式可退范畴化为一个关联 $\mu_n^{(k)}$与 τ_G的公式。为陈述该公式，设 $e_{\wedge^k} \in \mathbf{Q}S_n$ 是反射表示$\mathsf{V} \simeq \mathsf{V}^*$ 的第 k外幂的对称化子。对于秩为 r的任意有限不可约考克斯特群 W，可通过如下形式恒等式定义这类元素 $e_{\wedge^k} \in \mathbf{Q}W$： $0 \le k \le r$

$$\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} \det(1 - tw \mid \mathsf{V})w = \sum_{k=0}^{r} (-t)^k e_{\wedge^k}. \tag{7.1}$$

注意，$e_{\wedge^0} = e_{S,+}$ 和$e_{\wedge^{n-1}} = e_{S,-}$采用 §4.4中的记号。对于类型为 G 的（分裂）半单对象 A_{n-1}，我们有：

$$\mu_n^{(k)} = (q-1)^{n-1}\,\tau_G(e_{\wedge^k} \otimes (-)). \tag{7.2}$$

证明只需将 $z = e_{\wedge^k}$ 代入（4.2），然后利用（7.1）重新整理各项，即可得到 $\mu_n^{(k)}$ 在 [Gom06第 4 节中的特征论公式。3]。

与此同时，在 [BT22], Bezrukavnikov–Tolmachov 给出了一个公式，它（在我们的归一化下）将 $\mu_n^{(k)}$与 $\mu_n^{(n-1)}$联系起来。为陈述该公式，我们需要乘法 *Jucys–Murphy* 元素 $JM_k \in H_{S_n}$，其定义为

$$JM_k = q^{-k} T_{s_k \cdots s_2 s_1} T_{s_1 s_2 \cdots s_k} \quad \text{for } 1 \le k \le n.$$

令 $e_i(X_1,\dots,X_{n-1})$ 为变量 i 中的$X_1,\dots,X_{n-1}$上的 次数为 [BT22，推论 6.1。2] 是单位元

$$\mu_n^{(k)}(\beta) = \mu_n^{(n-1)}(\beta e_{n-1-k}(JM_1,\dots,JM_{n-1})). \tag{7.3}$$

事实证明， $\mu_n^{(n-1)}$恰好就是在第 τ §1.4 节中记作 τ 的迹，这一点也可以由（7.2）和定理 1.3推出。

注 7.1。 注意，在 [BT22 的 §6] 中，变量 a 与我们的变量 $-a^{-2}$ 相同，但相差一个整体的分次移位。因此，他们的 $\mathrm{Tr}_n^{(k)}$ 就是我们的 $\mu_n^{(n-1-k)}$，等等。

注 7.2。 Jucys–Murphy 元最初是在群环 $\mathbf{Z}S_n$ 的背景下定义的。可以证明 [IO05，（3）]，

$$\frac{JM_k - 1}{\boldsymbol{q}^{1/2} - \boldsymbol{q}^{-1/2}} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{q}^{i-k} T_{s_i\cdots s_{k-1}} T_{s_k} T_{s_{k-1}\cdots s_i}.$$

在 $\boldsymbol{q} \to 1$ 处，右端特化为 k 阶经典 Jucys–Murphy 元（属于 $\mathbf{Z}S_n$）。这些元生成 $\mathbf{Z}S_n$ 的极大交换子代数。同样，JM_k 生成 H_{S_n} [IO05 的极大交换子代数，命题 1]。

7.4. **Jucys–Murphy 乘积。** 回顾$\mathrm{Asc}(v)$ 和 $\mathrm{Des}(v)$ 分别表示 v的左上升集和下降集。由（7.3），我们将定理1.8化为：

定理 7.3。 对所有 k，有

$$e_{n-1-k}(JM_1,\dots,JM_{n-1}) = \sum_{\mathrm{Des}(v)=I_k} \boldsymbol{q}^{-\ell(v)} T_{v^{-1}} T_v,$$

其中 $I_k = \{s_1,\dots,s_{n-1-k}\} \subseteq S$。

例 7.4。 取上面的 $k=0$，得到

$$JM_1 \cdots JM_{n-1} = \boldsymbol{q}^{-\ell_S} T_{w_\circ}^2.$$

通过这一恒等式，（7.3）意味着“最低”和“最高” a-次数的 μ_n通过全扭转 Δ^2 相关：$= \boldsymbol{q}^{-\ell_S} T_{w_\circ}^2$：明确地说，

$$\mu_n^{(0)}(\beta) = \mu_n^{(n-1)}(\beta\Delta^2),$$

由 Kálmán 最初发现的一个恒等式 [Kál09]。参见注记5.10。

定理 7.3 的证明7.5–7.7由下文的引理构成。作为准备，对于任意子集 $I = \{s_{i_1},\dots,s_{i_j}\} \subseteq S$，令

$$\begin{aligned} JM(I) = JM_{i_1,\dots,i_j} &:= \textstyle\prod_i^{\downarrow} JM_i && \in H_{S_n}, \\ c(I) = c_{i_1,\dots,i_j} &:= \textstyle\prod_i^{\downarrow} (s_1\cdots s_i) && \in S_n, \end{aligned}$$

其中，记号 $\prod_i^{\downarrow}$表示按降序对 $i_1,\dots,i_j$求乘积。

引理 7.5. 对于任意子集 $I \subseteq S$，我们有

$$JM(I) = \boldsymbol{q}^{-\ell(c(I))} T_{c(I)^{-1}} T_{c(I)}.$$

证明。设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ 为 I 的元素。对于任意满足 $1 \le k < i \le n-1$ 的 i, k，我们有以下关系

$$T_{s_k} T_{s_i \cdots s_2 s_1} = T_{s_i \cdots s_2 s_1} T_{s_{k+1}} \quad \text{and} \quad T_{s_k} T_{s_1 s_2 \cdots s_i} = T_{s_1 s_2 \cdots s_i} T_{s_{k-1}},$$

这可以通过辫图验证。利用这些关系，我们可以将 $JM(I)$ 的每个因子 JM_{i_k} 中的前缀 $T_{s_1 s_2 \cdots s_i}$ 从右向左移动，依次穿过 $JM_{i_{k+1}}$、……、JM_{i_j}，从而得到所述结果。□

例 7.6。 下文中，为方便起见，我们用 T_i 代替 T_{s_i}。当 $n = 4$ 和 $|I| = 2$ 时，我们有

$$\begin{aligned} JM_{1,2} &= \boldsymbol{q}^{-3} T_2 T_1^2 T_2 \cdot T_1^2, & c_{1,2} &= s_1 s_2 \cdot s_1, \\ JM_{1,3} &= \boldsymbol{q}^{-4} T_3 T_2 T_1^2 T_2 T_3 \cdot T_1^2, & c_{1,3} &= s_1 s_2 s_3 \cdot s_1, \\ JM_{2,3} &= \boldsymbol{q}^{-5} T_3 T_2 T_1^2 T_2 T_3 \cdot T_2 T_1^2 T_2, & c_{2,3} &= s_1 s_2 s_3 \cdot s_1 s_2, \end{aligned}$$

引理7.5 表明

$$\begin{aligned} JM_{1,2} &= \boldsymbol{q}^{-3} T_1 T_2 T_1 \cdot T_1 T_2 T_1, \\ JM_{1,3} &= \boldsymbol{q}^{-4} T_1 \cdot T_3 T_2 T_1 \cdot T_1 T_2 T_3 \cdot T_1, \\ JM_{2,3} &= \boldsymbol{q}^{-5} T_2 T_1 \cdot T_3 T_2 T_1 \cdot T_1 T_2 T_3 \cdot T_1 T_2. \end{aligned}$$

引理 7.7。 对于 $1 \le j \le n$，我们有

$$\{c(I) \mid |I| = j-1\} = \{v \in S_n \mid \mathsf{Des}(v) = \{s_1, \ldots, s_{j-1}\}\}.$$

证明。以下设 $J = \{s_1, \ldots, s_{j-1}\}$ 和 $J' = S \setminus \{s_j\}$。我们断言，任何满足 $\mathsf{Des}(v) = J$ 的元素 $v \in S_n$ 都必须具有形式 $w_{J_\circ} v'$，其中 v' 是 $W_{J'} \simeq S_j \times S_{n-j}$ 的最小长度右陪集代表元。事实上，$\mathsf{Des}(v) \supseteq J$ 迫使 $w_{J_\circ}$ 成为 v 的左因子；若 $v = w_{J_\circ} v'$，那么反向包含关系 $\mathsf{Des}(v) \subseteq J$ 则迫使 v' 满足相应条件。

注意，恰有 $\binom{n}{j}$ 个形如 $w_{J_\circ} v'$ 且满足 $v' \in W^{J'}{}_{,-}$ 的元素。这些恰好是满足 $|I| = j$ 的元素 $c(I)$。这一计算表明，$\prod_i^{\downarrow}(s_1 \cdots s_i)$ 是约化的，并且 $\mathsf{Des}(c(I)) = J$。由于满足 $|I| = j$ 的 I 有 $\binom{n}{j}$ 种选择，相应的元素 $c(I)$ 穷尽了所有满足 $\mathsf{Des}(v) = J$ 的元素 v。□

推论 7.8。 对于任意一个属于 $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ 的词 $\vec{s}$，我们有

$$\mu_n^{(k)}(T_{\vec{s}}) = \frac{1}{(\boldsymbol{q}-1)^{n-1}} \sum_{\mathsf{Asc}(v) = I_k} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{s})} \boldsymbol{q}^{|\mathbf{d}_{\vec{\omega}}|} (\boldsymbol{q}-1)^{|\mathbf{e}_{\vec{\omega}}|}.$$

证明。结合（7.3）、定理 7.3和（5.7），可得到关于 v 的双重求和，其中 $\mathsf{Des}(v) = I_k$，以及关于 $\mathcal{D}^{(vw_\circ)}(\vec{s})$ 中的 $\vec{\omega}$ 的双重求和。然后注意到，当且仅当 $\ell(svw_\circ) > \ell(svw_\circ)$ 时，$\ell(sv) < \ell(v)$。□

7.5. **柯克曼数。** 对于任意有限不可约考克斯特群 W，其秩为 r，考克斯特数为 h，且整数 $p > 0$ 与 h互素，我们将 有理柯克曼多项式 定义为 (W, p)：

$$\mathrm{Kirk}_{W,p}^{(k)}(q) = \frac{\det(1 - q^p e_{\wedge^k} \mid \mathsf{V}_p^*)}{\det(1 - q e_{\wedge^k} \mid \mathsf{V}^*)} \quad \text{for } 0 \le k \le r.$$

等价地，根据（7.1），

$$\sum_{k=0}^{r} t^k \,\mathrm{Kirk}_{W,p}^{(k)}(q) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{\det(1 + tw \mid \mathsf{V}^*)\det(1 - q^p w \mid \mathsf{V}_p^*)}{\det(1 - qw \mid \mathsf{V}^*)}.$$

当 $p = h + 1$时，此定义还原为 柯克曼多项式，由 W 在 [ARR15，§9 中引入。2]。

我们将 (W, p) 的有理柯克曼数定义为 $\mathsf{Kirk}_{W,p}^{(k)} := \mathsf{Kirk}_{W,p}^{(k)}(1)$。对于$W = S_n$ 和 $p = n+1$，它们还原为通常的结合多面体 [ARW13] 的 f-向量。对于一般的 W 和 $p = h + 1$，它们还原为[FR05], 中 W-结合多面体的 f-向量，正如 [ARR15, §3.3]中所述。我们将在附录 A 中进一步讨论这一点。

在 $q \to 1$ 极限下，下列恒等式推出了关于 1.10 的推论，该推论涉及 S_n的有理柯克曼数。论文末尾的图 1 同时展示了推论 1.6和推论 1.10。

定理 7.9。 取 $W = S_n$ 和 $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$。那么对于任意考克斯特词$\vec{c}$、与 n互素的整数 $p > 0$ 以及整数 k，有

$$\mathrm{Kirk}_{S_n,p}^{(k)}(q) = \frac{1}{(q-1)^{n-1}} \sum_{\mathsf{Asc}(v) = I_k} \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{D}^{(v)}(\vec{c}^p)} q^{|\mathsf{d}_{\vec{\omega}}|}(q-1)^{|\mathsf{e}_{\vec{\omega}}|}.$$

证明。 任取一个类型为 A_{n-1}的分裂半单 G。那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kirk}_{S_n,p}^{(k)}(q) &= \tau_G(e_{\wedge^k} \otimes T_{\vec{c}}^p) && \text{by (6.2) and (6.3)} \\
&= \frac{1}{(q-1)^{n-1}} \tau[\zeta_{I_k}^+](T_{\vec{c}}^p) && \text{由定理 1.8} \\
&= \frac{1}{(q-1)^{n-1}} \sum_{\mathsf{Des}(v) = I_k} q^{-\ell(v)} \tau(T_{\vec{c}}^p T_{v^{-1}} T_v).
\end{aligned}$$

将（5.7）应用于对 v 满足 $\mathsf{Des}(v) = I_k$ 的求和。然后按照推论 7.8 的证明得出结论。□

7.6. **其他类型?** 自然会想到将推论 7.8和定理 7.9 推广到其他 W。迄今为止，我们还未能找到这样的构造。这或许与一般情况下缺乏柯克曼多项式的统一公式有关。对于巧合类型，存在简洁的公式，其中 W的次数构成一个等差数列 [RSS21，§10]。

在近期的研究中 [TZ25], Tolmachov–Zhylinskyi 将 [BT22，推论 6.1 中的乘法型 Jucys–Murphy 公式推广2] 至类型 BC 和 D。将定理 7.3推广至这些类型将会很有意义。注意，类型 BC 总是巧合型，而类型 D_n 对于 $n \ge 4$并非巧合型。

附录 A. 结合多面体的面

我们沿用第 7 节的记号。推论1.10 表明，对于任意互素整数 n， $p>0$， $\vec{c}$ 的考克斯特词 S_n以及整数 k，抛物型停车对象的集合

$$\coprod_{\mathsf{Asc}(v)=I_k} \mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{p}), \quad \text{where } I_k=\{s_1,\dots,s_{n-1-k}\}, \tag{A.1}$$

可视为有理柯克曼数 $\mathsf{Kirk}_{S_n}^{(k)}$ ，$_p$对应的 $\vec{c}$-非交叉集。下文在 $p=n+1$的情形下，我们将这些对象与结合子多面体的经典非交叉组合学联系起来。

对于任意不可约的有限Coxeter系统 (W,S)，令 $T\subseteq W$ 为所有反射构成的集合。令 $\leq_T$ 表示 W上的绝对序。对于表示考克斯特元素 $c\in W$的任意考克斯特词 $\vec{c}$，令 $\vec{w}_\circ(c)$ 为最长元素 $w_\circ=w_{S\circ}$ 的 - 排序词：也就是说，在字典序下， $\vec{c}^{p}$ 的第一个子词，它是 $w_\circ$的约化字。

令 $\mathrm{Asso}(W,c)$ 为 由 [Rea06] 和 [HLT11]定义的结合多面体。按照 [CLS14, PS15], ，我们可以将其视为一个单纯复形，其面是 $\vec{c}\vec{w}_\circ(c)$ 的子词，且其补集中包含 $w_\circ$的约化字。该复形的顶点集与 c- 非交叉划分的集合存在双射

$$\mathrm{NC}(W,c):=\{\pi\in W\mid \pi\leq_T c\}.$$

我们将顶点与 c-非交叉划分本身对应起来。

对于每个 $\pi\in\mathrm{NC}(W,c)$，令 W_π 为 W 中由满足 $t\in T$ 的反射 $t\leq_T\pi$生成的（不一定是标准的）抛物子群。令 W^π 为 W_π的最小左陪集代表元集合。-非交叉停车函数 W是陪集 vW_π，其中 $\pi\in\mathrm{NC}(W,c)$ 和 $v\in W^\pi$遍历所有取值。

例 A.1。取 $W=S_3$ 和 $c=st$，其中 $s=s_1$ 和 $t=s_{2\circ}$ 则 $\mathsf{NC}(W,c)=\{e,s,t,sts,c\}$。*16* 个非交叉停车函数为

$$\begin{aligned}&eW_e, sW_e, tW_e, stW_e, tsW_e, stsW_e,\\ &eW_s, tW_s, stW_s, \quad eW_t, sW_t, tsW_t, \quad eW_{sts}, sW_{sts}, tW_{sts},\\ &eW_c,\end{aligned}$$

写成使用最小陪集代表元的形式时。

回顾一下，从给定顶点 $\pi\in\mathsf{NC}(W,c)$ 出发的边由克雷韦拉斯补 $c\pi^{-1}$ 的典范分解中的反射标记。因此，具有最小顶点 π 的 $\mathsf{Asso}(W,c)$ 的面中，最大维数为 $r-\ell_T(\pi)$，其中 ℓ_T 表示绝对长度。更一般地，具有最小顶点 π 的 $\mathsf{Asso}(W,c)$ 的 k- 面数量为 $\binom{r-\ell_T(\pi)}{k}$。

以下结果展示了在 $W=S_n$ 时，如何利用 c-非交叉停车函数构造一个大小为这样的集合。请注意，此处 $r=n-1$。

命题 A.2。对于所有 $\pi \in \mathrm{NC}(S_n,\ c)$，我们有

$$|W^\pi \cap \mathsf{A}_k| = \binom{n-1-\ell_T(\pi)}{k}, \quad where\ \mathsf{A}_k := \{w \in W \mid \mathsf{Asc}(w) = I_k\}.$$

因此，我们得到了从最小顶点为 π 的$\mathrm{Asso}(S_n, c)$ 的 k-面集合到集合 $S_n^\pi \cap \mathsf{A}_k$ 的一个双射。

证明。不失一般性，取 $\vec{c} = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$。记 $w_j = s_r s_{r-1} \ldots s_j$，于是 A_k 由以下元素组成：$\binom{r}{k}$ 当我们遍历k子集 $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$（取自 $\{1,\ldots,r\}$）时，形如 $w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_i}$ 的元素。（参见下文的例 A.3。）

用单行记法表示时，这些排列的构造方式是：从左到右依次填入数字 $1, 2, \ldots, n-k$，但跳过位置 $j_1, \ldots, j_k$上的项；然后从右到左用数字 $n-k+1, \ldots, n$填入跳过的位置。由于 $1, \ldots, n-k$ 按顺序出现，而 $n-k+1, \ldots, n$ 没有按顺序出现，因此此类排列的左上升集恰好是 I_k。

对于我们对 c 的选择，可以将每个 c-不交叉划分 π 看作集合 $[n] := \{1, \ldots, n\}$ 的一个（经典）不交叉划分。可以将形如 vW_π 的 c- 不交叉停车函数看作一种装饰方式：将 π 的每个块标记为 $[n]$ 的某个任意集合划分中的一个同样大小的块。还需证明，A_k 中存在 $\binom{r-\ell_T(\pi)}{k}$ 个元素 v，使得 π 的每个块中的字母在 v 的单行记法中都按递增顺序出现；由此即可推出，v 是 W_π 的一个最小左陪集代表元。

注意，$n - \ell_T(\pi) = r - \ell_T(\pi) + 1$ 是 π 的块数。将这些块按其最大元素递增的顺序列为 $B_1, B_2, \ldots, B_{n-\ell_T(\pi)}$。依次将这些最大元素记为 $b_1, b_2, \ldots, b_{n-\ell_T(\pi)}$，于是 $b_{n-\ell_T(\pi)} = n$。所需的元素 $v \in \mathsf{A}_k$，就是当我们遍历 $\{1, \ldots, r-\ell_T(\pi)\}$ 的子集 $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$ 时得到的元素 $w_{b_{j_1}} w_{b_{j_2}} \ldots w_{b_{j_k}}$。（另见例 A.3。）□

例 A.3。取 $W = S_3$ 得到

$$\mathsf{A}_0 = \{e\}, \quad \mathsf{A}_1 = \{w_1, w_2\}, \quad \mathsf{A}_2 = \{w_1 w_2\},$$

其中 $w_1 = s_2 s_1$ 和 $w_2 = s_2$。取 $W = S_4$ 得到

$$\mathsf{A}_0 = \{e\}, \quad \mathsf{A}_1 = \{w_1, w_2, w_3\}, \quad \mathsf{A}_2 = \{w_1 w_2, w_1 w_3, w_2 w_3\}, \quad \mathsf{A}_3 = \{w_1 w_2 w_3\},$$

其中 $w_1 = s_3 s_2 s_1$ 和 $w_2 = s_3 s_2$ 以及 $w_3 = s_3$。

注意，元素 w_j 与第 $c(S \setminus \{s_j\})$ 节中的元素 7类似，但以 Asc 替代Des。

推论 A.4。对于任意整数 k，我们有从$\mathrm{Asso}(S_n, c)$ 的 k-面集合到具有 $v \in S_n^\pi \cap \mathsf{A}_k$ 的 c-非交叉停车函数 vW_π 集合的一个双射。

在 [GLTW24], 中，对于任意 W 和 $v \in W$，我们给出了从 c- 非交叉停车函数 $\{vW_\pi \mid \pi \in \mathrm{NC}(W, c)\}$ 到 $\mathcal{M}^{(v)}(\vec{c}^{h+1})$的一个双射。由此可得：

推论 A.5。对于任意整数 k，存在一个双射，将 k-面$\mathrm{Asso}(S_n, c)$ 的集合映射到 (A.1)中的集合。

参考文献

[ACSH+25] Johan Asplund、Orsola Capovilla-Searle、James Hughes、Caitlin Leverson、Wenyuan Li 和 Angela Wu。《通过编织与分层分解增广簇》，2025年。v1. arXiv:2508.20226.[ALW16] Drew Armstrong、Nicholas A. Loehr 和 Gregory S. Warrington。《有理停车函数与卡特兰数》。《组合年刊》，20(1):21–58，2016年。 doi:10.1007/s00026-015-0293-6.[ARR15] Drew Armstrong、Victor Reiner 和 Brendon Rhoades。《停车空间》。《数学进展》，269:647–706，2015年。 doi:10.1016/j.aim.2014.10.012.[ARW13] Drew Armstrong、Brendon Rhoades 和 Nathan Williams。《有理结合多面体与非交叉划分》。《电子组合学期刊》，20(3):论文 54，27，2013年。 doi:10.37236/3432.[BM83] Walter Borho 和 Robert MacPherson。《幂零簇的部分解消》。载于《奇异空间上的分析与拓扑，II、III》（Luminy，1981年），Astérisque 第 101–102 卷，第 23–74 页。法国数学学会，巴黎，1983年。[BMR98] M. Broué、G. Malle 和 R. Rouquier。《复反射群、辫群、Hecke代数》。《纯粹与应用数学杂志》，500:127–190，1998年。[BR11] David Bessis 和 Victor Reiner。《复反射群非交叉划分的循环筛法》。《组合年刊》，15(2):197–222，2011年。 doi:10.1007/s00026-011-0090-9.[BT22] Roman Bezrukavnikov 和 Kostiantyn Tolmachov。《Khovanov-Rozansky同调的单值模型》。《纯粹与应用数学杂志》，787:79–124，2022年。 doi:10.1515/crelle-2022-0008.[Car93] Roger W. Carter。《Lie型有限群》。Wiley经典丛书。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1993年。共轭类与复特征标，1985年原版重印，Wiley-Interscience出版物。[Car95] R. W. Carter。《特征为 0 的代数闭域上 Lie 型有限群的表示论》。载于《代数，IX》，《数学科学百科全书》第 77 卷，第 1–120、235–239 页。Springer，柏林，1995年。 doi:10.1007/978-3-662-03235-0_1.[CLS14] Cesar Ceballos、Jean-Philippe Labbé 和 Christian Stump。《子词复形、簇复形与广义多结合多面体》。《代数组合学杂志》，39(1):17–51，2014年。doi:10.1007/s10801-013-0437-x.[Deo85] Vinay V. Deodhar。《Bruhat序的若干几何方面。I. Bruhat胞腔的更精细分解》。《数学发明》，79(3):499–511，1985年。 doi:10.1007/BF01388520.[Dud08] Olivier Dudas。《关于双Schubert 胞腔的 Deodhar 分解的注记》，2008年。v1。arXiv:0807.2198.[FR05] Sergey Fomin 和 Nathan Reading。《广义簇复形与 Coxeter 组合学》。《国际数学研究通知》，(44):2709–2757，2005年。 doi:10.1155/IMRN.2005.2709.[Gin89] Victor Ginsburg。《对称空间上的容许模》。第 173–174 号，第 9–10、199–255 页。1989年。《幂零轨道与表示，III》。[GLTW24] Pavel Galashin、Thomas Lam、Minh-Tâm Trinh 和 Nathan Williams。《有理非交叉 Coxeter-卡塔兰组合学》。《伦敦数学学会会刊》(3)，129(4):论文编号 e12643，50，2024年。 doi:10.1112/plms.12643.[Gom06] Yasushi Gomi。《Markov 迹与傅里叶变换》。《代数杂志》，303(2):566–591，2006年。 doi:10.1016/j.jalgebra.2005.09.034.[GP00] Meinolf Geck 和 Götz Pfeiffer。《有限 Coxeter 群与 Iwahori-Hecke代数的特征标》，伦敦数学学会专著新编第 21 卷。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，2000年。

[Gro92] Ian Grojnowski. 对称空间上的特征层。ProQuest LLC，Ann Arbor, MI，1992年。博士论文（Ph.D.）–麻省理工学院。URL: https://www.proquest.com/docview/304017771.[HLT11] Christophe Hohlweg、Carsten E. M. C. Lange 和 Hugh Thomas. 排列多胞体与广义结合多胞体。《Adv. Math.》，226(1):608–640，2011年。 doi:10.1016/j.aim.2010.07.005.[IO05] A. P. Isaev 和 O. V. Ogievetsky. 关于 Hecke代数的表示。《Czechoslovak J. Phys.》，55(11):1433–1441，2005年。 doi:10.1007/s10582-006-0022-9.[Jon87] V. F. R. Jones. 辫群的 Hecke代数表示与链环多项式。《Ann. of Math. (2)》，126(2):335–388，1987年。 doi:10.2307/1971403.[Jon90] Lenny K. Jones. 泛Hecke代数的中心。《美国数学会汇刊》，317(1):361–392，1990年。 doi:10.2307/2001467.[Kál09] Tamás Kálmán. 闭辫的子午线扭转与HOMFLY多项式。《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》，146(3):649–660，2009年。 doi:10.1017/S0305004108002016.[Kaw75] Noriaki Kawanaka. 有限Chevalley群的幺正元与特征标。《Osaka Math. J.》，12(2):523–554，1975年。URL: https://mqtrinh.github.io/math/resources/kawanaka_unipotent-elements-and-characters-of-finite-chevalley-groups_v-humphreys.pdf.[Las06] Alain Lascoux. Hecke代数与对称多项式环的结构常数，2006年。 arXiv:0602379.[Lus81] George Lusztig. 关于Benson和Curtis的一个定理。《J. Algebra》，71(2):490–498，1981年。doi:10.1016/0021-8693(81)90188-5.[Lus84] George Lusztig. 有限域上约化群的特征标，数学年刊研究丛书第107卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，1984年。 doi:10.1515/9781400881772.[Lus15] G. Lusztig. 特征层的截断卷积。《Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)》，10(1):1–72，2015年。URL: https://www.math.sinica.edu.tw/bulletin/journals/1613.[Mel25] Anton Mellit. 特征簇的环面分层。《Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.》，142:153–240，2025年。 doi:10.1007/s10240-025-00158-0.[OS80] Peter Orlik 和 Louis Solomon. 酉反射群与上同调。《Invent. Math.》，59(1):77–94，1980年。 doi:10.1007/BF01390316.[PS15] Vincent Pilaud 和 Christian Stump. 球面子词复形的砖多胞体与广义结合多胞体。《Adv. Math.》，276:1–61，2015年。 doi:10.1016/j.aim.2015.02.012.[Rea06] Nathan Reading. Cambrian格。《Adv. Math.》，205(2):313–353，2006年。 doi:10.1016/j.aim.2005.07.010.[RSS21] Victor Reiner、Anne V. Shepler 和 Eric Sommers. 偶合复反射群的不变量理论。《Math. Z.》，298(1-2):787–820，2021年。 doi:10.1007/s00209-020-02592-8.[Sho88] Toshiaki Shoji. 轨道几何与Springer对应。第168号，第9、61–140页。1988年。幺正轨道与表示，I。[STZ17] Vivek Shende、David Treumann 和 Eric Zaslow. 勒让德结与可构造层。《Invent. Math.》，207(3):1031–1133，2017年。 doi:10.1007/s00222-016-0681-5.[Tri21] Minh-Tâm Quang Trinh. 从 Hecke范畴到幺正轨迹，2021年。v2。arXiv:2106.07444.[Tri22] Minh-Tâm Quang Trinh. 幺正元与Kálmán–Serre对偶，2022年。v2。arXiv:2210.09051.[TZ25] Konstiantyn Tolmachov 和 Heorhii Zhylinskyi. 广义Markov迹与Jucys–Murphy元，2025年。v1。 arXiv:2507.19896。

[WW11] Ben Webster 和 Geordie Williamson. 马尔可夫迹的几何。《杜克数学杂志》，160(2):401–419，2011年。 doi:10.1215/00127094-1444268。[WW15] Jinkui Wan 和 Weiqiang Wang. Hecke代数中心的Frobenius 映射。《美国数学会汇刊》，367(8):5507–5520，2015年。 doi:10.1090/S0002-9947-2014-06211-9。

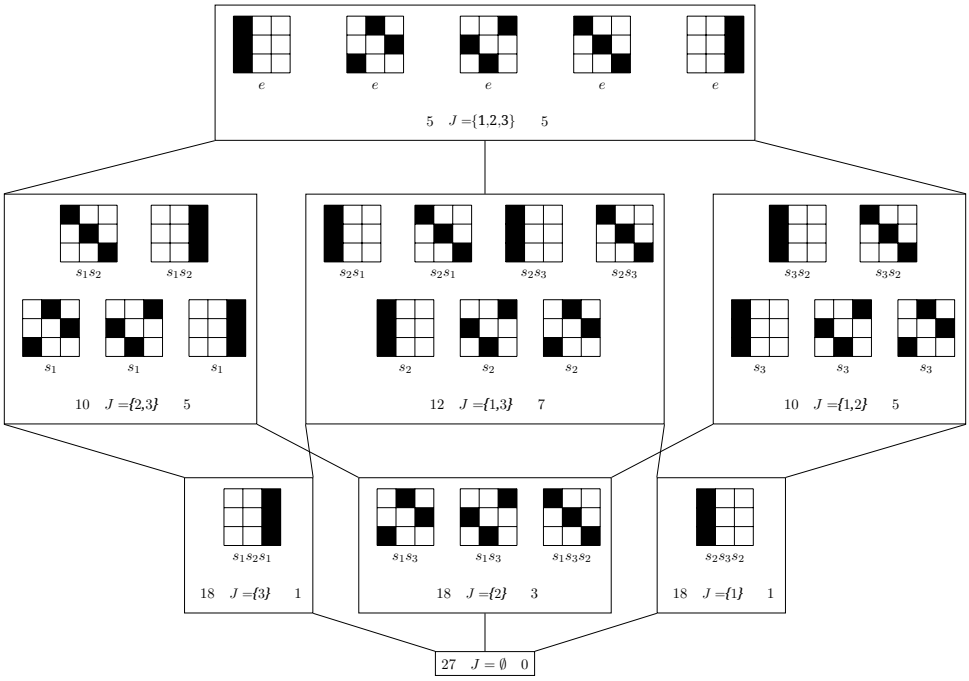


图 1. 我们取 $W = S_4$ 和 $\vec{c} = (s_1, s_2, s_3)$ 以及 $p = 3$。集合 J 的方框由满足 $\mathrm{Asc}(v) = J$ 且 $\vec{\omega} \in \mathrm{D}^{(v)}(\vec{c}^{p})$ 的数对 $(v, \vec{\omega})$ 组成。方框之间的边表示 J 的包含关系。每个 $\vec{\omega}$ 都绘制成一个 3×3 数组，其中 $\mathrm{e}_{\vec{\omega}}$ 的元素用黑色表示。例如，表示 $\vec{\omega}$ =(id s_2, s_3, s_1, id s_3, s_1, s_2, id)。每个方框中，位于 J 右侧和左侧的数字分别统计该方框中的数对数量，以及包含 J 的方框中的数对数量。后者给出 $\mathrm{Park}_W^{J+}, {}_p$。第 $(k+1)$ 行最右侧的数字是$\mu_4^k(L_4,3)\big|_{q\to 1}$。

霍华德大学数学系，华盛顿特区 20059电子邮件地址： minhtam.trinh@howard.edu

德克萨斯大学达拉斯分校数学科学系，西坎贝尔路 800 号，理查森，德克萨斯州 75080电子邮件地址： nathan.f.williams@gmail.com