arXiv:2601.17294v1 [math.CO] 24 Jan 2026

构造　利用紧 t-融合框架构造球面设计

RYUTARO MISAWA

Abstract. 本文研究如下条件：当有限子集 Z 由以下过程构造时，何时会成为一个球面 t-设计：从实格拉斯曼流形 $G_{k,d}$中取有限个 k维子空间；对每个这样的 k维子空间，在其单位球面上放置一个有限集；然后取这些集合在 S^{d-1}中的并。针对这一构造问题——即逐个子空间地将点集分布在低维球面上，从而在更高维空间中获得球面设计——我们基于 Bachoc–Ehler 提出的紧 t-融合框架（TFF$_t$）框架，给出一个充分条件。为便于应用，我们还通过超八面体群轨道的并，显式构造了在 $G_{2,d}$上适用于无限多个维数 d的等权紧 2-融合框架。此外，我们推导了在 $G_{2,d}$上存在高度对称紧 t-融合框架的必要条件，即等弦紧 t-融合框架（ECTFF$_t$ ）和等弦等斜紧 t-融合框架（EITFF$_t$），并特别给出了点数的界。

1. Introduction

球面 t设计广泛应用于逼近论、框架理论和代数组合学等领域（[1, 23, 7, 18, 20, 12, 6]）。其定义为（$d-1$）维单位球面上的有限子集

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$$

通过有限求和，精确复现所有次数不超过 t 的多项式的球面平均值。这一概念由 Delsarte–Goethals–Seidel [12] 系统地发展起来。此外，Bondarenko–Radchenko– Viazovska [8] 证明，对于每个固定维数 d 和任意 $t \in \mathbb{N}$，在 S^{d-1} 上都存在一个球面 t设计，其点数为 $N = O(t^{d-1})$ 。

此后，球面 t设计的显式构造得到了广泛研究（[5, 24, 22]）。本文聚焦于以下类型的构造问题：在一族子空间中的每个子空间内放置低维球面上的设计，从而在更高维球面上构造出一个设计。全文中，我们记

$$G_{k,d} := \{V \leq \mathbb{R}^d \mid \dim V = k\}$$

对于实格拉斯曼流形。

问题 1.1. 固定 $t \in \mathbb{N}$。对于任意 (d,k) $(d \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq d)$，给出有限集 $D \subset G_{k,d}$ 和点集 $Y_V \subset S(V) \simeq S^{k-1}$ 的条件，使得对每个 $V \in D$ 都有

$$Z := \bigcup_{V \in D} Y_V \subset S^{d-1}$$

是一个球面 t-设计。特别是，阐明这一性质在多大程度上可以通过选择 D来控制。

这类构造可追溯至 K¨onig [14] 和 Kuperberg [15]的工作。Cohn–Conway– Elkies–Kumar [9] 提出了沿 Hopf 纤维化进行构造的潜力。作为一个具体例子，Sloane–Hardin–Cara [21] 研究了 S^3 上的球面设计，并在情形 $(d,\ k) = (4,\ 2)$ 下进行构造。随后，Okuda [19] 针对 $(d,\ k) = (4,\ 2)$ 建立了一个定理，并通过 Hopf 映射 $S^3 \to S^2$在 S^3 上构造了设计。此外，Lindblad [16] 推广了 Okuda 的框架，并以统一的方式处理了对应于 $(d,\ k) = (2d',\ 2)$，$(4d'',\ 4)$，$(16,\ 8)$ 的各族，其中d'，$d'' > 1$ 为整数。

本文利用 Bachoc–Ehler [3],提出的紧 t-融合框架（TFF_t）框架，为问题 1.1 给出一个一般的充分条件，并在某个特定类别中给出显式构造。

在框架理论中，融合框架是普通框架的一种推广，它通过用子空间替代向量而得到。具体而言，它由希尔伯特空间 H的一族闭子空间 $\{W_i\}_{i\in I}$ 及权重 $w_i > 0$组成。若算子 $\sum_{i\in I} w_i^2 P_{W_i}$（其中 P_{W_i} 表示到 W_i上的正交投影）在 H 上有界、正且可逆，则称 $(\{W_i\}, \{w_i\})$ 为融合框架（见[11]）。Bachoc–Ehler [3] 提出了紧 t-融合框架（TFF_t），将其作为融合框架的高阶类比；它们与格拉斯曼流形上的设计密切相关。尽管 TFF_t 的存在性通常已得到证明，但显式且系统的构造方法仍远不完备。受此启发，我们提出以下构造问题。

问题 1.2。设 t 为正整数。对于任意 $d,\ k$，在 $G_{k,\ d}$ 上显式构造一个 TFF_t。

最后，受 $G_{1,\ d}$ 上等角直线集所展现出的强对称性的启发，我们考虑 $G_{k,\ d}$ 上的高维类似物：等弦紧 t融合框架（ECTFF_t）和等斜紧 t融合框架（EITFF_t）。这些是 TFF_t 的高度对称子类，其中子空间间的距离是一致的，并且它们与格拉斯曼空间中的最优堆积和高度对称构形密切相关。在本文中，我们推导出 ECTFF_2 和 EITFF_2 存在所必需的参数条件。

贡献。

(1) 对于问题 1.1，我们利用 $G_{k,\ d}$ 上的 TFF_t 给出一个一般性的充分条件。(2) 对于问题 1.2，我们给出一种在 $G_{2,\ d}$ 上构造 TFF_2 的显式方法。(3) 我们建立了 $G_{2,\ d}$ 上 ECTFF_2/EITFF_2 基数的界。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们介绍 TFF_t 及相关概念，并说明它们与格拉斯曼流形上的设计之间的关系。第 3 节中，我们证明一个定理，该定理可由 $G_{k,d}$上的 TFF_t 构造出球面设计。第 4 节中，我们通过取超八面体群的轨道并集，显式构造 $G_{2,d}$ 上的 TFF_2。第 5 节中，我们讨论 ECTFF_2 和 EITFF_2 的不存在性结果及其必要条件。

2. Preliminaries

2.1. 球面设计。设 $d \in \mathbb{N}$。我们用 $d\sigma$ 表示 S^{d-1}上的归一化表面积测度。我们还引入波赫哈默符号

$$(a)_0 := 1, \qquad (a)_m := a(a+1)\cdots(a+m-1) \quad (m \geq 1).$$

定义 2.1。 [12, Def. 5.1] 设 $t,\ d \in \mathbb{N}$。有限集 $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^{d-1}$ 称为一个（等权）球面 t-设计，如果对于每个总次数至多为 t的函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，都有

$$\int_{S^{d-1}} f(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

为给出一个等价刻画，我们引入缩放的 Gegenbauer 多项式。假设$d \geq 2$。对于 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义多项式序列 $Q_\ell^{(d)}(x)$ 如下:

$$Q_0^{(d)}(x) := 1, \qquad Q_1^{(d)}(x) := x,$$

并满足递推关系

$$(\ell + d - 2)\, Q_{\ell+1}^{(d)}(x) = (2\ell + d - 2)\, x\, Q_\ell^{(d)}(x) - \ell\, Q_{\ell-1}^{(d)}(x) \qquad (\ell \geq 1).$$

则对所有 ℓ， $Q_\ell^{(d)}(1) = 1$ 成立。

命题 2.2。 [6] 令 t、 $d \in \mathbb{N}$ 和 $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^{d-1}$。以下各项等价:

(i) X 是一个球面 t-设计。(ii) 对于每个 $1 \leq \ell \leq t$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} Q_\ell^{(d)}\big(\langle x_i, x_j \rangle\big) = 0$$

成立，其中 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^d$上的标准内积。

(iii) 对每个 $y \in \mathbb{R}^d$ 和每个整数 $0 \leq m \leq t$,

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, y \rangle^m = n \int_{S^{d-1}} \langle x, y \rangle^m\, d\sigma(x) = \begin{cases} n\, \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)_{m/2}}{\left(\frac{d}{2}\right)_{m/2}}\, \|y\|^m & \text{if } m \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

成立。

作为球面设计的一种自然推广，我们引入加权版本。

定义 2.3. 设 $t, d \in \mathbb{N}$。由有限集 $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^{d-1}$ 和正权重 λ_1, ..., $\lambda_n > 0$ 组成的一对称为加权球面 t-设计，如果对每个函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，其总次数至多为 t，都有

$$\int_{S^{d-1}} f(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(x_j), \qquad \Lambda := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

注 2.4。 如果权重为常数，那么加权球面 t-设计与（等权）球面 t-设计相同。

引理 2.5。 设 t、 $d \in \mathbb{N}$，且设 $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^{d-1}$ 为带有正权重 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ 的有限集。令 $\Lambda :\ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$。则以下各项等价:

(i) $(X, \{\lambda_j\})$ 是一个加权球面 t-设计。(ii) 对于每个 $y \in \mathbb{R}^d$ 和每个整数 $0 \leq m \leq t$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \langle x_j, y \rangle^m = \Lambda \int_{S^{d-1}} \langle x, y \rangle^m\, d\sigma(x) = \begin{cases} \Lambda\, \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)_{m/2}}{\left(\frac{d}{2}\right)_{m/2}}\, \|y\|^m & \text{if } m \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明与等权情形下的标准论证相同，此处从略，因为只需将平均值替换为加权平均。

2.2. **格拉斯曼流形、主角与等角性**。 我们将研究格拉斯曼流形的有限子集。作为球面上点配置的内积的类比，我们回顾主角的概念。此后，固定整数 $t, d, k \in \mathbb{N}$ ，其中 $1 \leq k \leq d$。

设 $V, W \in G_{k,d}$。选取 V和 W的正交归一基 $v_1, \ldots, v_k$及 $w_1, \ldots, w_k$，并令

$$Q_V := \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}, \qquad Q_W := \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times k},$$

使得 $Q_V^{\mathsf{T}} Q_V = Q_W^{\mathsf{T}} Q_W = I_k$。

命题 2.6. 设 $A := Q_V^{\mathsf{T}} Q_W$。其奇异值 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k \geq 0$ 满足 $0 \leq \sigma_i \leq 1$。

证明。 对于任意 $x \in \mathbb{R}^k$,

$$\|Ax\| = \|Q_V^{\mathsf{T}}(Q_W x)\| \leq \|Q_W x\| = \|x\|,$$

因为 Q_V^{T}是压缩算子（其行向量正交归一），而 Q_W是等距映射。因此，最大奇异值满足 $\sigma_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq 1$，所以 $0 \leq \sigma_i \leq \sigma_1 \leq 1$。 □

定义 2.7。 $[4, \text{第 } 2]$ 节设 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k \geq 0$是 $A = Q_V^{\mathsf{T}} Q_W$的奇异值。根据命题 2.6， $\sigma_i \in [0, 1]$, 并定义

$$\theta_i(V, W) := \arccos(\sigma_i) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

这些称为 V与 W之间的主角 。

注 2.8。 若我们选择不同的正交归一基，则对于某个U， $Q'_V = Q_V U$和 $Q'_W = Q_W V, V \in O(k)$，因此

$$(Q'_V)^{\mathsf{T}} Q'_W = U^{\mathsf{T}} (Q_V^{\mathsf{T}} Q_W) V.$$

由于奇异值在左乘和右乘正交矩阵时保持不变，主角的定义与正交归一基的选择无关。

定义 2.9. 若存在 $\theta \in [0, \pi/2]$，使得对于任意不同的 $i \neq j \in [N]$ 以及任意 $\ell \in [k]$，有限集 $D = \{V_i\}_{i=1}^N \subset G_{k,d}$ 称为等斜 (EI),

$$\theta_\ell(V_i, V_j) = \theta$$

成立。

定义 2.10. $[10]$ 对于 V,$W \in G_{k,d}$,

$$d_C(V, W) := \sqrt{\sum_{\ell=1}^{k} \sin^2 \theta_\ell(V, W)}.$$

这个量称为 V 与 W 之间的弦距离 。

定义 2.11。 如果对于任意不同的$i \neq j \in [N]$，有限集 $D = \{V_i\}_{i=1}^N \subset G_{k,\,d}$ 被称为等弦 （EC），

$$d_C(V_i, V_j) = \text{const}.$$

2.3。**格拉斯曼设计**。 我们将 $d\sigma_{k,\,d}$ 记作格拉斯曼流形 $G_{k,\,d}$上的 $O(d)$-不变概率测度。

命题 2.12。 [4, 定理 3.2，定义 3.3] 空间 $L^2(G_{k,d})$ 分解为不可约 $O(d)$-子表示，如下：

$$L^2(G_{k,d}) \;=\; \bigoplus_{\ell(\mu)\le k} \mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}.$$

这里， $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)$ 是一个分拆（即 $\mu_1\ge\cdots\ge\mu_r\ge 1$）或空分拆 $\mu=\varnothing$。我们设 $\deg(\mu):=\sum_{i=1}^{r}\mu_i$，且 $\ell(\mu):=r$，约定 $\deg(\varnothing)=\ell(\varnothing)=0$。此外，$\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}\subset L^2(G_{k,d})$ 表示类型为 $2\mu:=(2\mu_1,\dots,2\mu_r)$ 的不可约分量。

对于 $t\in\mathbb{N}$，定义 $G_{k,d}$ 上函数的一个子空间如下：

$$\mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d})=\mathrm{Pol}_{2t+1}(G_{k,d}) \;:=\; \bigoplus_{\substack{\ell(\mu)\le k\\ \deg(\mu)\le t}} \mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}.$$

我们进一步设

$$\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,d})=\mathrm{Pol}_{2t+1}^{(1)}(G_{k,d}) \;:=\; \bigoplus_{1\le j\le t} \mathsf{H}_{(2j)}^{k,d} \;\subset\; \mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d}).$$

定义 2.13。 [4, 命题 4.2] 有限集 $D=\{V_j\}_{j=1}^{n}\subset G_{k,d}$ 称为一个格拉斯曼 $2t$-设计，如果对每个函数 $f\in\mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d})$，都有

$$\int_{G_{k,d}} f(V)\,d\sigma_{k,d}(V)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(V_j).$$

格拉斯曼 $2t$-设计有几种等价的刻画。特别地，我们将采用通过球函数给出的判据。对于 $V,W\in G_{k,d}$，设

$$y_i(V,W):=\cos^2\theta_i(V,W)\qquad(1\le i\le k).$$

固定一个基点 $V_0\in G_{k,d}$。其稳定子群满足 $\mathrm{Stab}(V_0)\simeq O(k)\times O(d-k)$。由于每个不可约分量 $\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}$，$(\ell(\mu)\le k)$ 在 $L^2(G_{k,d})$ 中的重数均为一，$\mathrm{Stab}(V_0)$-不变子空间

$$\big(\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}\big)^{\mathrm{Stab}(V_0)}:=\{\,f\in\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}\mid f(g\cdot V)=f(V)\ \ (\forall g\in\mathrm{Stab}(V_0),\ \forall V\in G_{k,d})\,\}$$

是一维的。因此，存在一个非零的 $\mathrm{Stab}(V_0)$-不变函数 f in $\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}$，且在相差一个标量倍数的意义下唯一。我们称这样的函数为关于 V_0的 2μ 型球函数 f。接着定义 $P_{2\mu}=f/f(V_0)\in\big(\mathsf{H}_{2\mu}^{k,d}\big)^{\mathrm{Stab}(V_0)}$。由 $\mathrm{Stab}(V_0)$- 不变性可知，$P_{2\mu}(V)$ 仅依赖于 $y_i(V,V_0)=\cos^2\theta_i(V,V_0)$，因此可将其视为关于 k 个变量的对称多项式，我们也将其记作 $P_{2\mu}$，于是

$$P_{2\mu}(V)=P_{2\mu}\big(y_1(V,V_0),\dots,y_k(V,V_0)\big).$$

特别地，归一化 $P_{2\mu}(V_0)=1$ 等价于 $P_{2\mu}(1,\dots,1)=1$。此外，对于任意$V,W\in G_{k,d}$，我们定义

$$P_{2\mu}(V,W):=P_{2\mu}\big(y_1(V,W),\dots,y_k(V,W)\big).$$

注记 2.14。 假设 $k\ge 2$；类型为 $(2,2)$ 的分量仅在此范围内出现（对于 $k=1$，项 $P_{(2,2)}$ 不存在）。我们列出显式的低次球函数 $P_{(2)}$，$P_{(4)}$，$P_{(2,2)}$。（见 [13]）。

$$P_{(2)} = \frac{k}{k-d} - \frac{d}{k-d}\, c_2, \qquad \text{where} \qquad c_2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i. \tag{2.1}$$

$$P_{(4)} = \frac{P'_{(4)}}{P'_{(4)}(1,\dots,1)}, \qquad \text{where} \qquad \begin{aligned} P'_{(4)} &= 1 - \frac{2(d+2)}{k}\, c_2 + \frac{(d+2)(d+4)}{k(k+2)}\, c_4, \\ c_4 &= \frac{3}{k(k+2)} \left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \frac{2}{3} \sum_{1\le i<j\le k} y_i y_j \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$P_{(2,2)} = \frac{P'_{(2,2)}}{P'_{(2,2)}(1,\dots,1)}, \qquad \text{where} \qquad \begin{aligned} P'_{(2,2)} &= 1 - \frac{2(d-1)}{k}\, c_2 + \frac{(d-1)(d-2)}{k(k-1)}\, c_{22}, \\ c_{22} &= \frac{2}{k(k-1)} \sum_{1\le i<j\le k} y_i y_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

命题 2.15。 [4, 命题 4.2] 设 $D \subset G_{k,\ d}$。以下条件等价：

(i) D 是一个 Grassmann $2t$设计。(ii) 对于每个满足 $\deg(\mu) \le t$ 的非零分拆 μ，

$$\sum_{V,W\in D} P_{2\mu}(V,W) = 0$$

成立。

2.4. **紧致 t融合框架**。

定义 2.16。 [3, 定义 4.1] 设 $\{V_j\}_{j=1}^n \subset G_{k,d}$ 为一个有限集，且 $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ 为正权重。对于每个 j，令 $P_{V_j} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 表示到 V_j 上的正交投影。若存在常数 $A, B > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$A\,\|x\|^{2t} \;\le\; \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, \|P_{V_j} x\|^{2t} \;\le\; B\,\|x\|^{2t},$$

则称 $\{(V_j,\omega_j)\}_{j=1}^n$ 为一个 t-融合框架。特别地，若 $A = B$，则称其为一个紧致 t-融合框架。在等权情形下，我们称 $\{(V_j,\omega_j)\}_{j=1}^n$ 为一个等权紧致 t-融合框架，并且通常省略权重，直接记作 $\{V_j\}_{j=1}^n$。

Bachoc–Ehler [3] 将紧 t-融合框架刻画为 $\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,\ d})$ 的求积公式。

定理 2.17。 [3, 定理 5.3] 设 $D \subset G_{k,\ d}$ 以及正权重 $\{\omega_V\}_{V\in D}$，并且设 t

$$\Omega := \sum_{V\in D} \omega_V.$$

则以下条件等价：

(i) $\{(V,\omega_V)\}_{V\in D}$ 是一个紧 t-融合框架。(ii) 对于每个 $f \in$多项式$_{2t}^{(1)}(G_{k,d})$,

$$\sum_{V\in D} \omega_V\, f(V) = \Omega \int_{G_{k,d}} f(V)\, d\sigma_{k,d}(V). \tag{2.4}$$

等价地，取 $\tilde{\omega}_V := \omega_V/\Omega$，有

$$\int_{G_{k,d}} f(V)\, d\sigma_{k,d}(V) = \sum_{V\in D} \tilde{\omega}_V f(V).$$

(iii) 对每个 $1 \le \ell \le t$,

$$\sum_{V,W\in D} \omega_V \omega_W\, P_{(2\ell)}\big(V,W\big) = 0$$

成立。

注 2.18。根据定义 2.13 和定理 2.17，对于任意 t ，我们有

$$\text{Grassmann } 2t\text{-design} \implies \text{tight } t\text{-fusion frame},$$

因为 $\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,d}) \subset \mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d})$。一般而言，逆命题不成立。特别地，对于 $k \ge 2$ 和$t \ge 2$ ，有 $\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,d}) \subsetneq \mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d})$，因此紧 t-融合框架是比格拉斯曼 $2t$-设计严格更弱的概念。（当 $k = 1$ 或 $t = 1$时，我们有 $\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,d}) = \mathrm{Pol}_{2t}(G_{k,d})$。）

3. Spherical Designs Using Tight t-Fusion Frames

本节提出一个一般原理，可由定义在$G_{k,d}$上的紧致 t-融合框架构造高维球面上的（加权）球面设计。

对每个$V \in G_{k,d}$，记

$$S(V) := \{x \in V : \|x\| = 1\} \simeq S^{k-1}.$$

设 $d\sigma_V$表示 $S(V)$上的 $O(V) \simeq O(k)$不变测度。

对于 $y \in S^{d-1}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$f_{y,m}(V) := \big(\mathrm{tr}(P_V P_y)\big)^m \qquad (V \in G_{k,d}),$$

其中 P_V 是到 V上的正交投影，而 P_y 是到直线 $\mathbb{R}y$上的正交投影。

引理 3.1 ([3, 注 5.2，定理 5.3])。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le d$。对于任意 $y \in S^{d-1}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，以下结论成立：

(1) $f_{y,\,m} \in$ 多项式$_{2m}^{(1)}(G_{k,\,d})$。特别地，如果 $m \le t$，那么 $f_{y,\,m} \in$ 多项式$_{2t}^{(1)}(G_{k,\,d})$。

(2)

$$\int_{G_{k,d}} \big(\mathrm{tr}(P_V P_y)\big)^m\, d\sigma_{k,d}(V) = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)_m}{\left(\frac{d}{2}\right)_m}.$$

定理 3.2。设 $t,\ s \in \mathbb{N}$。设 $D \subset G_{k,\,d}$是一个带有正权重 $\{\omega_V\}_{V\in D}$ 的有限集，并假设 $(D,\ \{\omega_V\})$ 是一个紧 t-融合框架。令

$$\Omega := \sum_{V\in D} \omega_V.$$

对于每个 $V \in D$，设 $(Y_V,\ \{\lambda_{V,z}\}_{z\in Y_V})$ 是 $S(V)$ 上的一个加权球面 s-设计，并假设 t

$$\Lambda := \sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z}$$

与 V 无关。定义 S^{d-1} 上的加权有限集 (Z, w) 如下：

$$Z := \bigcup_{V\in D} Y_V \subset S^{d-1}, \qquad w(z) := \sum_{\substack{V\in D\\ z\in Y_V}} \omega_V\, \lambda_{V,z} \quad (z \in Z).$$

于是，(Z, w) 是 S^{d-1} 上的加权球面 r-设计，且 $r = \min\{s,\, 2t+1\}$.

证明。 由引理 2.5，只需证明对于每个 $y \in \mathbb{R}^d$ 和每个整数 $0 \le \ell \le r$,

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^\ell = \begin{cases} \Gamma \|y\|^{2m} \dfrac{(1/2)_m}{(d/2)_m} & \text{if } \ell = 2m \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } \ell \text{ is odd.} \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$\Gamma := \sum_{z\in Z} w_z = \sum_{V\in D} \omega_V \sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z} = \Omega\Lambda.$$

固定 $y \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 \le \ell \le r$。根据定义,

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^\ell = \sum_{V\in D} \omega_V \sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z} \langle z, y\rangle^\ell.$$

由于 $z \in Y_V \subset V$，我们有 $P_V z = z$，因此

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^\ell = \sum_{V\in D} \omega_V \sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z} \langle z, P_V y\rangle^\ell. \tag{3.2}$$

(A) 为奇数的情形。 由于 $\ell \le r \le s$，对于每个 V，函数 $x \mapsto \langle x,\ P_V y\rangle^\ell$ 在 $S(V)$ 上是奇函数，因此

$$\int_{S(V)} \langle x, P_V y\rangle^\ell \, d\sigma_V(x) = 0.$$

此外，由于 $(Y_V, \{\lambda_{V,z}\})$ 是一个加权球面 s-设计，且 $\ell \le s$，我们有

$$\sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z} \langle z, P_V y\rangle^\ell = \Lambda \int_{S(V)} \langle x, P_V y\rangle^\ell \, d\sigma_V(x) = 0.$$

将其代入 (3.2)，得到 $\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^\ell = 0$。

(B) $\ell = 2m$ **为偶数的情形**。 由于 $2m \le r \le s$，我们有 $2m \le s$；又由于 $2m \le r \le 2t+1$，我们有 $m \le t$。对于每个 $V \in D$，由于 $(Y_V, \{\lambda_{V,z}\})$ 是 $S(V)$ 上的一个加权球面 s-设计，$\simeq S^{k-1}$且 $2m \le s$，在 $S(V)$ 上（将其视为 S^{k-1}）应用引理 2.5，并取 $d = k$ 和 $y = P_V y$，可得

$$\sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z} \langle z, P_V y\rangle^{2m} = \Lambda \|P_V y\|^{2m} \frac{(1/2)_m}{(k/2)_m}.$$

因此,

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^{2m} = \Lambda \frac{(1/2)_m}{(k/2)_m} \sum_{V\in D} \omega_V \|P_V y\|^{2m}.$$

令 P_y 表示到直线 $\mathbb{R}y$ 上的正交投影。由于 $\|P_V y\|^2 = \|y\|^2$迹$(P_V P_y)$，我们得到

$$\|P_V y\|^{2m} = \|y\|^{2m} \big(\mathrm{tr}(P_V P_y)\big)^m.$$

因此

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z, y\rangle^{2m} = \Lambda \frac{(1/2)_m}{(k/2)_m} \|y\|^{2m} \sum_{V\in D} \omega_V \left(\mathrm{tr}(P_V P_y)\right)^m.$$

由引理 3.1，函数 $V \mapsto$ (迹$(P_V P_y)$)^m 属于 $\mathrm{Pol}_{2t}^{(1)}(G_{k,\ d})$，因此由 (2.4) 得

$$\sum_{V\in D} \omega_V \left(\mathrm{tr}(P_V P_y)\right)^m = \Omega \int_{G_{k,d}} \left(\mathrm{tr}(P_V P_y)\right)^m d\sigma_{k,d}(V) = \Omega \frac{(k/2)_m}{(d/2)_m}.$$

将其代入前一个恒等式，得到

$$\sum_{z\in Z} w_z \langle z,y\rangle^{2m} = \Omega\Lambda \|y\|^{2m} \frac{(1/2)_m}{(d/2)_m} = \Gamma \|y\|^{2m} \frac{(1/2)_m}{(d/2)_m}.$$

结合 (A) 和 (B)，对所有 $0 \le \ell \le r$，(3.1) 均成立。因此，$(Z,\ w)$ 是一个加权球面r-设计。□

推论 3.3。设 $t,\ s\in\mathbb{N}$。假设 $D\subset G_{k,\ d}$ 是一个等权紧 t-融合框架，并且对于每个 $V\in D$，$Y_V\subset S(V)$ 是一个球面 s-设计，其中 $|Y_V|$ 与 V 无关。令

$$Z := \bigcup_{V\in D} Y_V \subset S^{d-1}$$

be v视为一个多重集。则多重集 Z 是 S^{d-1} 上的球面 $\min\{s,\,2t+1\}$-设计 .

注 3.4。推论 3.3 在多重集 意义下给出了一个球面 r-设计。此外，如果对于 $V\neq V'$ 有 $Y_V\cap Y_{V'}=\varnothing$，那么 $Z=\bigsqcup_{V\in D} Y_V$，从而得到一个普通球面设计。如果 $k\ge 2$，我们可以如下重新选取Y_V，使这一附加条件得到满足。固定 $V\in D$，并假设对于某个 $V'\in D$ 有 $Y_V\cap Y_{V'}\neq\varnothing$。定义

$$\mathcal{B} = \bigcup_{V'\in D\setminus\{V\}} \{\, g\in O(V) \mid (gY_V)\cap Y_{V'}\neq\varnothing \,\}.$$

于是，$\mathcal{B}$ 是 $O(k-1)$中与 $O(V)$共轭的子群的陪集的有限并。由于 $k\ge 2$，每个这样的陪集都是 $O(V)$的闭子集且内部为空，因此其补集是开稠密集。因此，$O(V)\setminus\mathcal{B}$ 是 $O(V)$中开稠密集的有限交，特别地非空。于是，选取 $g\in O(V)\setminus\mathcal{B}$ 可得，对于所有 $V'\neq V$，$(gY_V)\cap Y_{V'}=\varnothing$。由于 $gY_V\subset S(V)$ 再次是一个球面s-设计，我们可以用 gY_V替换 Y_V。对每个 $V\in D$重复此过程，我们得到一个两两不交族 $\{Y_V\}_{V\in D}$。

最后，我们注意到，利用推论 3.3 构造球面$(2t+1)$-设计包含两个相互独立的任务：

(1) 在低维球面 S^{k-1} 上构造球面 $(2t+1)$-设计，以及 (2) 在 $G_{k,\ d}$ 上构造紧 t-融合框架。

4. Constructing Tight 2-Fusion Frames on $G_{2,\ d}$ via Group Orbits

本节中，我们利用超八面体群 B_d 的轨道，在 $G_{2,\ d}$ 上构造等权紧 2-融合框架。随后，这些格拉斯曼配置可作为提升结果（推论 3.3）的输入，从而生成球面设计。全文中，二项式系数按以下方式解释：

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad (k<0 \text{ or } k>n).$$

设 $d\ge 4$，并令 e_1、…、e_d 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准基。超八面体群

$$B_d := \{\pm 1\}^d \rtimes S_d \subset O(d)$$

通过带符号坐标置换作用于 $\mathbb{R}^d$，因此它通过 $=gW$: $g\cdot W$ 作用于 $G_{2,\ d}$。对于有限集 $X\subset G_{2,\ d}$，定义

$$F_X(x) := \frac{1}{|X|}\sum_{W\in X} \|P_W x\|^4 \qquad (x\in\mathbb{R}^d),$$

其中，P_W 表示到 W上的正交投影。

命题 4.1。 对于有限集$X \subset G_{2,\ d}$，以下结论等价：

(i) X 是 TFF$_2$。(ii) F_X 在单位球面 S^{d-1}上为常数。

证明。 蕴含关系 (i)⇒(ii) 是显然的。对于 (ii)⇒(i)，令 $x \neq 0$ 并设 $u := x/\|x\| \in S^{d-1}$。根据 F_X 的 4 次齐次性，

$$F_X(x) = F_X(\|x\|u) = \|x\|^4 F_X(u).$$

根据 (ii)，$F_X(u)$ 是球面上的常数 C，因此对所有 $x \neq 0$，$F_X(x) = C\|x\|^4$。$x = 0$ 的情形是显然的。□

接下来，我们将讨论一个 B_d-不变子集 $X \subset G_{2,\ d}$ 成为 TFF$_2$ 的判据。

引理 4.2。 若 $X \subset G_{2,\ d}$是 B_d-不变的，则 F_X是 B_d-不变的，即对所有 $g \in B_d$和 $x \in \mathbb{R}^d$，$F_X(gx) = F_X(x)$。此外，存在常数 α，$\beta \in \mathbb{R}$，使得

$$F_X(x) = \alpha \sum_{i=1}^{d} x_i^4 + \beta \Big(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \Big)^2 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^d).$$

证明。 由 $gX = X$和正交性恒等式 $P_{gW} = gP_W g^{\mathsf{T}}$（因此 $\|P_{gW}x\| = \|P_W(g^{\mathsf{T}}x)\|$），我们得到

$$F_X(g^{\mathsf{T}}x) = F_X(x) \qquad (\forall g \in B_d),$$

因此，特别地，F_X 在坐标置换和符号变化下保持不变。

符号不变性意味着，F_X 可以写成关于 $y_i := x_i^2$的多项式。由于 F_X 是关于 x的 4 次齐次多项式，因此它是关于 y的 2 次齐次多项式。此外，置换不变性意味着 F_X是关于 $y_1, \dots, y_d$的 2 次对称齐次多项式。2 次对称齐次多项式空间由以下多项式张成：

$$\sum_{i=1}^{d} y_i^2, \qquad \Big(\sum_{i=1}^{d} y_i \Big)^2,$$

由此得到所声称的形式。 □

由引理 4.2，在球面上我们可以写作 $F_X = \alpha \sum_i x_i^4 + \beta$。因此，在 S^{d-1} 上为常数等价于 $\alpha = 0$，只需比较 F_X 在 $\sum_i x_i^4$取不同值的两个点处的取值。

命题 4.3. 假设 $X \subset G_{2,d}$ 是 B_d-不变的。则以下条件等价：

(i) X 是 TFF$_2$。(ii)

$$F_X(e_1) = F_X\Big(\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \Big).$$

证明. 由引理 4.2，

$$F_X(x) = \alpha \sum x_i^4 + \beta \Big(\sum x_i^2 \Big)^2.$$

在球面上，$(\sum_i x_i^2)^2 = 1$，因此 $F_X|_{S^{d-1}} = \alpha \sum_i^i x_i^4 + \beta$。所以 F_X 在 S^{d-1} 上为常数，当且仅当 $\alpha = 0$。

另一方面，

$$\sum_i (e_1^4)_i = 1, \qquad \sum_i \Big(\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \Big)_i^4 = \frac{1}{2},$$

因此

$$F_X(e_1) - F_X\Big(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\Big) = \alpha\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\alpha}{2}.$$

因此 (ii) $\iff \alpha = 0 \iff$ (i)。 □

接下来，我们将显式定义 B_d-轨道形式的 B_d-不变集合。设 a 和 b为满足 $1 \le a \le b$, $a+b \le d$的整数，并记 $[d] := \{1,\dots,d\}$. 定义

$$u_0 := \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{i=1}^{a} e_i, \qquad v_0 := \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{j=a+1}^{a+b} e_j, \qquad W_0 := \operatorname{span}(u_0, v_0) \in G_{2,d}.$$

$$\mathcal{O}_{a,b}^{(d)} := B_d \cdot W_0 \subset G_{2,d},$$

$$N_d(a,b) := \big|\mathcal{O}_{a,b}^{(d)}\big|.$$

为计算 $N_d(a,b)$，以及稍后要用到的量 $F_{\mathcal{O}}(x)$，我们引入以下集合，它将用于通过支集与符号对 $\mathcal{O}_{a,b}^{(d)}$,中的元素进行参数化：

$$\mathcal{T}_{b}^{(d)\,a,} := \Big\{(A,B,\varepsilon,\delta) \;\Big|\; A,B\subset[d],\ A\cap B=\varnothing,\ |A|=a,\ |B|=b,\ \varepsilon\in\{\pm1\}^A,\ \delta\in\{\pm1\}^B\Big\},$$

其中 $\{\pm1\}^A$ 表示所有函数 $A\to\{\pm1\}$构成的集合。

对于 $\tau=(A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta)\in\mathcal{T}^{(d)\,a,\,b}$，令

$$u_{A,\varepsilon} := \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{i\in A}\varepsilon_i\, e_i, \qquad v_{B,\delta} := \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{j\in B}\delta_j\, e_j,$$

并定义

$$W_\tau = W_{A,B;\varepsilon,\delta} := \operatorname{span}\big(u_{A,\varepsilon},\, v_{B,\delta}\big) \in G_{2,d}.$$

引理 4.4. 由下式定义的映射

$$\pi : \mathcal{T}_{a,b}^{(d)} \longrightarrow \mathcal{O}_{a,b}^{(d)}, \qquad \pi(\tau) := W_\tau.$$

是满射。

证明。 我们首先证明 π定义良好，即对于每个 $\tau=(A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta)\in\mathcal{T}^{(d)\,a,\,b}$，都有 $W_\tau\in\mathcal{O}_{a,b}^{(d)}$。选取一个置换 $\sigma\in S_d$，使得 $\sigma(\{1,\dots,a\}) = A$且 $\sigma(\{a+1,\dots,a+b\}) = B$。令 $s\in\{\pm1\}^d$为一个符号向量，使得当 $i\in A$时 $s_i=\varepsilon_i$，当 $j\in B$时 $s_j=\delta_j$，其余情况下 $s_\ell=1$，并令 $g :=$ 对角矩阵 $(s)\,\sigma\in B_d$。于是

$$gu_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{i\in A}\varepsilon_i e_i = u_{A,\varepsilon}, \qquad gv_0 = \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{j\in B}\delta_j e_j = v_{B,\delta},$$

因此 $gW_0 =$张成空间$(gu_0,\ gv_0) =$张成空间$(u_{A,\ \varepsilon},\ v_{B,\ \delta}) = W_\tau$。因此 $W_\tau\in B_d\cdot W_0 = \mathcal{O}_{a,b}^{(d)}$，，故 π定义良好。

为证明 π 是满射，令 $W\in\mathcal{O}_{a,b}^{(d)}$，。则对于某个 $g\in B_d$，有 $W = gW_0$。将 $g=$ 写作 $\operatorname{diag}(s)\,\sigma$，其中 $s\in\{\pm1\}^d$ 且 $\sigma\in S_d$，并令

$$A := \sigma(\{1,\dots,a\}), \qquad B := \sigma(\{a+1,\dots,a+b\}), \qquad \varepsilon_i := s_i\ (i\in A), \quad \delta_j := s_j\ (j\in B).$$

于是 $\tau:=(A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta)\in\mathcal{T}^{(d)\,a,\,b}$同样的计算可得 $gu_0 = u_{A,\ \varepsilon}$和 $gv_0 = v_{B,\ \delta}$，因此 $W = gW_0 = W_\tau = \pi(\tau)$。由此，$\pi$ 是满射。□

对于 $x=(x_1,\ \dots,\ x_d)\in\mathbb{R}^d$，将其支撑定义为

$$\operatorname{supp}(x):=\{\,i\in[d]:x_i\neq 0\,\}.$$

命题 4.5。令 $W\in\mathcal{O}^{(d)}_{a\ b}$，则

$$|\pi^{-1}(W)|=\begin{cases}4, & \text{if } a<b,\\ 8, & \text{if } a=b.\end{cases}$$

证明。固定 $W\in\mathcal{O}^{(d)}_{a\ b}$. 根据引理 4.4，存在 $\tau=(A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta)\in\mathcal{T}_{(d)\ a,\ b}$使得 $W=W_\tau$。记 $u:=u_{A,\ \varepsilon}$, $v:=v_{B,\ \delta}$。由于 $A\cap B=\varnothing$，我们有 $\operatorname{supp}(u)=A$、$\operatorname{supp}(v)=B$，以及 $u\perp v$。对于任意$x=\alpha u+\beta v\in W\setminus\{0\}$,

$$(*)\qquad \operatorname{supp}(x)=\begin{cases}A, & \text{if } \beta=0,\\ B, & \text{if } \alpha=0,\\ A\cup B, & \text{if } \alpha\beta\neq 0,\end{cases}\qquad\text{hence}\qquad |\operatorname{supp}(x)|\in\{a,b,a+b\}.$$

特别地，W中满足 $|\operatorname{supp}(x)|=a$ 的向量位于直线 $\mathbb{R}u$ 上，且它们的支撑总是A （对于 $|\operatorname{supp}(x)|=b$ 也同样如此）。

现在假设 $\tau'=(A',\ B',\ \varepsilon',\ \delta')$ 满足 $W_{(\tau')}=W$。若 $a<b$，则由支撑大小为 a 的向量张成的 U 中的直线是唯一的，因此 $\mathbb{R}u_{A,\ \varepsilon}=\mathbb{R}u_{A',\ \varepsilon'}$，从而 $A=A'$。同样地，$B=B'$。若 $a=b$，同样的论证表明 $\{A,B\}=\{A',B'\}$，因此只剩下交换 A和 B 这一种可能。

因此，当 $a<b$时，确定 W 的数对 $(A,\ B)$ 是唯一的；而当 $a=b$ 时，恰有两种选择，即 $(A,\ B)$ 和 $(B,\ A)$。因此，接下来只需统计固定 $(A,\ B)$ 时由符号导致的等同关系。

固定 $(A,\ B)$，并考虑

$$W_{A,B;\varepsilon,\delta}=W_{A,B;\varepsilon',\delta'}\quad\Longleftrightarrow\quad \varepsilon'=\pm\varepsilon \text{ and } \delta'=\pm\delta.$$

我们证明 $(\Rightarrow)$。若$W_{A,B;\varepsilon',\delta'}=W_{A,B;\varepsilon,\delta}$，则 $u_{A,\varepsilon'}\in\operatorname{Span}\{u_{A,\varepsilon},v_{B,\delta}\}$，因此存在某个 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，使得 $u_{A,\ \varepsilon'}=\alpha u_{A,\varepsilon}+\beta v_{B,\delta}$。左侧的支撑为 A，而 $v_{B,\delta}$ 的支撑为 B，因此 $A\cap B=\varnothing$ 推出 $\beta=0$。于是 $u_{A,\ \varepsilon'}=\alpha u_{A,\varepsilon}$。由于二者都是单位向量，$|\alpha|=1$，故 $\alpha=\pm1$，这等价于 $\varepsilon'=\pm\varepsilon$。同理可得 $\delta'=\pm\delta$。逆命题 $(\Leftarrow)$ 显然成立。

因此，对于固定的 (A,B)，恰有 4 个符号等价类。因此，当 $a<b$时，$|\pi^{-1}(W)|=4$。当$a=b$ 时，我们可以交换 (A,B)，因此 $|\pi^{-1}(W)|=8$。□

引理 4.6。设 $d\in\mathbb{N}$，并设 $1\le a\le b$满足 $a+b\le d$，并考虑 B_d-轨道 $\mathcal{O}^{(d)}_{a\ ,b}\subset G_{2,d}$.

(i) 设 $1\le a'\le b'$ 满足 $a'+b'\le d$。若 $\{a,b\}\neq\{a',b'\}$，则

$$\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}\cap\mathcal{O}^{(d)}_{a',b'}=\varnothing.$$

(ii) 轨道大小由下式给出

$$N_d(a,b)=\binom{d}{a}\binom{d-a}{b}2^{a+b-2}\times\begin{cases}1, & \text{if } a<b,\\ \frac{1}{2}, & \text{if } a=b.\end{cases}$$

证明。(i) 假设 $W\in\mathcal{O}^{(d)}_{a\ b}$,. 根据引理 4.4，存在 $\tau=(A,B,\varepsilon,\delta)\in\mathcal{T}_{(d)\,a,b}$使得

$$W=\pi(\tau)=W_{A,B;\varepsilon,\delta}=\operatorname{Span}\{u_{A,\varepsilon},v_{B,\delta}\}.$$

令 $u := u_{A,\varepsilon}$ 以及 $v := v_{B,\delta}$. 则 $\mathrm{supp}(u) = A, \mathrm{supp}(v) = B, A \cap B = \varnothing$, 且 $|A| = a, |B| = b$. 因此，对任意 $x = \alpha u + \beta v \neq 0$,

$$|\mathrm{supp}(x)| = \begin{cases} a, & \beta = 0, \\ b, & \alpha = 0, \\ a + b, & \alpha\beta \neq 0. \end{cases}$$

定义

$$m_1(W) := \min\{|\mathrm{supp}(x)| : x \in W \setminus \{0\}\},$$

并选取达到 $m_1(W)$ 的 $x_1 \in W \setminus \{0\}$。于是 $m_1(W) = a$。令

$$m_2(W) := \min\{|\mathrm{supp}(x)| : x \in W \setminus (\mathbb{R}x_1)\}.$$

注意， $m_2(W)$ 与 x_1 的选择无关：若 $a < b$, 则 $|\mathrm{supp}(x)| = a$ 强制得到 $\beta = 0$, 因此$x_1 \in \mathbb{R}u$，进而 $m_2(W) = b$；若 $a = b$, 则对任何这样的 x_1, 都有 $m_1(W) = m_2(W) = a$。因此，无序对 $\{a, b\}$ 由 W 确定。

因此，若 W 同时属于 $\mathcal{O}^{(d)}_{a\ b}$, 和 $\mathcal{O}^{(d)}_{a'\ ,\ b'}$，则必有 $\{a, b\} = \{a', b'\}$。所以，若$\{a, b\} \neq \{a', b'\}$, 这两个轨道互不相交。

(ii) 我们有

$$|\mathcal{T}^{(d)}_{a,b}| = \binom{d}{a}\binom{d-a}{b} \cdot 2^a \cdot 2^b = \binom{d}{a}\binom{d-a}{b} 2^{a+b}.$$

另一方面, 命题 4.5 表明， $|\pi^{-1}(W)|$ 与 $W \in \mathcal{O}^{(d)}_{a\ b}$, 无关。因此

$$N_d(a, b) = |\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}| = \frac{|\mathcal{T}^{(d)}_{a,b}|}{|\pi^{-1}(W)|} = \binom{d}{a}\binom{d-a}{b} 2^{a+b} \times \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{if } a < b, \\ \frac{1}{8}, & \text{if } a = b, \end{cases}$$

这就化简为所述公式。 □

根据命题 4.3， X 是 TFF_2 ，当且仅当 F_X 在两个点处取值相同。我们用以下量来衡量这种偏差。

对于轨道 $X \subset G_{2,\ d}$，定义

$$\Delta(X) := F_X(e_1) - F_X\Big(\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\Big).$$

定理 4.7。 设 $(a_t,\ b_t) \in \mathbb{N}^2\,(t = 1,\ \ldots,\ m)$ 为两两不同的数对，满足 $1 \le a_t \le b_t$ 和$a_t + b_t \le d$, 并令

$$X := \bigsqcup_{t=1}^{m} \mathcal{O}^{(d)}_{a_t,b_t} \subset G_{2,d}.$$

那么，以下各项等价：

(i) X 是一个 TFF_2。

(ii)

$$\sum_{t=1}^{m} N_d(a_t, b_t)\, \Delta\big(\mathcal{O}^{(d)}_{a_t,b_t}\big) = 0.$$

证明。 每个 $\mathcal{O}^{(d)}_{a_t,\,b_t}$ 都是一个 B_d-轨道，因此是 B_d-不变的，所以它们的不交并 $X=\bigsqcup_{t=1}^{m}\mathcal{O}^{(d)}_{a_t,\,b_t}$ 也是 B_d-不变的。因此，根据命题 4.3，

$$X \text{ is a } \mathrm{TFF}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad F_X(e_1)=F_X\Big(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\Big). \tag{4.1}$$

另一方面， $|X|=\sum_{t=1}^{m}N_d(a_t,b_t)$，且

$$F_X(x)=\frac{1}{|X|}\sum_{W\in X}\|P_Wx\|^4=\frac{1}{\sum_{t=1}^{m}N_d(a_t,b_t)}\sum_{t=1}^{m}N_d(a_t,b_t)\,F_{\mathcal{O}^{(d)}_{a_t,b_t}}(x).$$

将此应用于 $x=e_1$ 和 $x=(e_1+e_2)/\sqrt{2}$，并取其差，得到

$$\Delta(X)=\frac{1}{\sum_{t=1}^{m}N_d(a_t,b_t)}\sum_{t=1}^{m}N_d(a_t,b_t)\,\Delta\big(\mathcal{O}^{(d)}_{a_t,b_t}\big).$$

由于分母为正，将其与 (4.1) 结合即可得出结论。 □

特别地，对于单轨道 $X=\mathcal{O}^{(d)}_{a\,b}$，$\mathrm{TFF}_2$ 条件等价于 $\Delta(X)=0$。因此，只需显式计算 $\Delta(\mathcal{O}^{(d)}_{a\,b})$。

引理 4.8。 设 $a,b,d\in\mathbb{N}$ 满足 $a+b\le d$。则

$$F_{\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}}(e_1)=\frac{a+b}{ab\,d}. \tag{4.2}$$

$$F_{\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}}\Big(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\Big)=\frac{8ab+(d-4)(a+b)}{2ab\,d(d-1)}. \tag{4.3}$$

此外，

$$\Delta\big(\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}\big)=\frac{(d+2)(a+b)-8ab}{2ab\,d(d-1)}. \tag{4.4}$$

证明。 令 $\mathcal{O}:=\mathcal{O}^{(d)}_{a\,b}$，并令 $\mathcal{T}:=\mathcal{T}^{(d)}_{a\,b}$。根据命题 4.5，对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$，我们有

$$F_{\mathcal{O}}(x)=\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{W\in\mathcal{O}}\|P_Wx\|^4=\frac{1}{|\mathcal{T}|}\sum_{\tau\in\mathcal{T}}\|P_{W_\tau}x\|^4. \tag{4.5}$$

此外，

$$|\mathcal{T}|=\binom{d}{a}\binom{d-a}{b}2^{a+b}. \tag{4.6}$$

我们在两个向量处计算 (4.5)

$$x_1:=e_1,\qquad x_2:=\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}.$$

固定 $\tau=(A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta)\in\mathcal{T}$，并记 $u:=u_{A,\,\varepsilon}$, $v:=v_{B,\,\delta}$，以及 $W_\tau=$张成空间$(u,\ v)$。由于 $A\cap B=\varnothing$，我们有 $u\perp v$ 和 $\|u\|=\|v\|=1$，因此

$$\|P_{W_\tau}x\|^2=\langle x,u\rangle^2+\langle x,v\rangle^2,\qquad \|P_{W_\tau}x\|^4=\langle x,u\rangle^4+\langle x,v\rangle^4+2\langle x,u\rangle^2\langle x,v\rangle^2. \tag{4.7}$$

1. (4.2)**的证明**。我们有

$$\langle e_1,u\rangle=\begin{cases}\varepsilon_1/\sqrt{a}, & \text{if } 1\in A,\\ 0, & \text{if } 1\notin A,\end{cases}\qquad \langle e_1,v\rangle=\begin{cases}\delta_1/\sqrt{b}, & \text{if } 1\in B,\\ 0, & \text{if } 1\notin B.\end{cases}$$

So

$$\|P_{W_\tau} e_1\|^4 = \begin{cases} 1/a^2, & \text{if } 1 \in A, \\ 1/b^2, & \text{if } 1 \in B, \\ 0, & \text{if } 1 \notin A \cup B. \end{cases}$$

因此,

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \|P_{W_\tau} e_1\|^4 = \frac{1}{a^2} \left|\{\tau \in \mathcal{T} : 1 \in A\}\right| + \frac{1}{b^2} \left|\{\tau \in \mathcal{T} : 1 \in B\}\right|,$$

$$\left|\{\tau \in \mathcal{T} : 1 \in A\}\right| = \binom{d-1}{a-1}\binom{d-a}{b} 2^{a+b},$$

$$\left|\{\tau \in \mathcal{T} : 1 \in B\}\right| = \binom{d-1}{b-1}\binom{d-b}{a} 2^{a+b}.$$

将其与 (4.5) 和 (4.6) 结合可得

$$F_{\mathcal{O}}(e_1) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\binom{d-1}{a-1}}{\binom{d}{a}} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\binom{d-1}{b-1}}{\binom{d}{b}} = \frac{a+b}{ab\,d}.$$

2. (4.3) **的证明**。

固定 $\tau = (A,\ B,\ \varepsilon,\ \delta) \in \mathcal{T}$，并记 $u := u_{A,\ \varepsilon}$, $v := v_{B,\ \delta}$，以及 $W_\tau =$ 张成空间$(u,\ v)$。令 $x := x_2$。

(AA) 情形 $\{1,2\} \subset A$。那么 $\langle x,\ v\rangle = 0$ 和 $\langle x,\ u\rangle = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/\sqrt{2a}$.因此

$$\sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^A} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^4 = 2^{a-2} \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^4 = 32 \cdot 2^{a-2}.$$

因此，对于固定的 $(A,\ B)$,

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\delta} \|P_{W_\tau} x\|^4 = 2^b \cdot \frac{32 \cdot 2^{a-2}}{4a^2} = \frac{2^{a+b+1}}{a^2},$$

此类对（$A,\ B$）的数量为 $\binom{d-2}{a-2}\binom{d-a}{b}$。

（BB）情形 $\{1,2\} \subset B$。类似地,

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\delta} \|P_{W_\tau} x\|^4 = \frac{2^{a+b+1}}{b^2}, \qquad \#\{(A,B)\} = \binom{d-2}{a}\binom{d-a-2}{b-2}.$$

（AB）情形 $\{1,2\}$ 分为两部分，一个元素在 A 中，另一个在 B中。例如，若 $1 \in A$ 且 $2 \in B$，则 $\langle x,\ \overline{u}\rangle = \varepsilon_1/\sqrt{2a}$ 以及 $\langle x,\ \overline{v}\rangle = \delta_2/\sqrt{2b}$. 由（4.7）可得,

$$\|P_{W_\tau} x\|^4 = \Big(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\Big)^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{2ab},$$

从而

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\delta} \|P_{W_\tau} x\|^4 = 2^{a+b}\Big(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{2ab}\Big).$$

此类对（$A,\ B$）的数量等于 $2\binom{d-2}{a-1}\binom{d-a-1}{b-1}$。

(AC) 一种情况是 $\{1,2\}$ 位于 A，另一种情况是位于 $[d] \setminus$（$A \cup B$）。例如，如果 $1 \in A$ 且 $2 \notin A \cup B$，那么 $\langle x,\ u\rangle = \varepsilon_1/\overline{\sqrt{}}2a$ 和 $\langle x,\ v\rangle = 0$，因此

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\delta} \|P_{W_\tau} x\|^4 = 2^{a+b} \cdot \frac{1}{4a^2}, \qquad \#\{(A,B)\} = 2\binom{d-2}{a-1}\binom{d-a-1}{b}.$$

(BC) 一种情况是 $\{1,2\}$ 位于 B，另一种情况是位于 $[d]\setminus(A\cup B)$。类似地，

$$\sum_{\varepsilon}\sum_{\delta}\|P_{W_\tau}x\|^4 = 2^{a+b}\cdot\frac{1}{4b^2},\qquad \#\{(A,B)\} = 2\binom{d-2}{a}\binom{d-a-2}{b-1}.$$

在剩余的情形 $\{1,2\}\cap(A\cup B)=\varnothing$ 中，我们有 $\|P_{W_\tau}x\|^4=0$。

将这些贡献代入 (4.5)，并利用 (4.6)，得到

$$F_{\mathcal{O}}(x) = \frac{8ab+(d-4)(a+b)}{2ab\,d(d-1)}.$$

最后，结合 1 和 2 的结果可得

$$\Delta\big(\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}\big) = \frac{a+b}{ab\,d} - \frac{8ab+(d-4)(a+b)}{2ab\,d(d-1)} = \frac{(d+2)(a+b)-8ab}{2ab\,d(d-1)}.$$

□

定理 4.9. 假设 $(d_0;a_0,b_0)\in\mathbb{N}^3$ 满足

$$(d_0+2)(a_0+b_0)=8a_0b_0,\qquad 1\le a_0\le b_0,\qquad a_0+b_0\le d_0.$$

对于任意整数 $s\ge 1$，令

$$d:=(d_0+2)s-2,\qquad a:=a_0s,\qquad b:=b_0s.$$

Then

$$X:=\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}\subset G_{2,d}$$

是一个等权 TFF_2。

证明。 由引理 4.8，单轨道 $X=\mathcal{O}^{(d)}_{a\,b}$，是 TFF_2 当且仅当

$$\Delta(X)=\Delta\big(\mathcal{O}^{(d)}_{a,b}\big)=0 \iff (d+2)(a+b)=8ab.$$

另一方面，

$$d+2=(d_0+2)s,\qquad a+b=(a_0+b_0)s,\qquad ab=a_0b_0\,s^2,$$

因此

$$(d+2)(a+b)=(d_0+2)(a_0+b_0)\,s^2=8a_0b_0\,s^2=8ab.$$

因此 $\Delta(X)=0$，从而证明了该结论。此外，

$$d-a-b=(d_0+2-a_0-b_0)s-2\ge 2s-2\ge 0$$

由 $a_0+b_0\le d_0$ 得出。 □

备注 4.10. 单轨道 $X=\mathcal{O}^{(d)}_{a\ ,b}\subset G_{2,d}$ 成为 TFF_2 的一个充分条件是

$$(d+2)(a+b)=8ab,\qquad 1\le a\le b,\qquad a+b\le d$$

（参见引理 4.8 和定理 4.7，其中 $m=1$）。我们记录两个满足此条件的显式无穷族。

(1) 三元组 $(d_0;\ a_0,\ b_0)=(4;1,\ 3)$ 满足 $(4+2)(1+3)=8\cdot1\cdot3$. 对于任意整数 $s\ge1$，令

$$d=6s-2,\qquad a=s,\qquad b=3s,\qquad d-a-b=2s-2\ge0.$$

于是，由定理 4.9,

$$X_s := \mathcal{O}_{s,\,3s}^{(6s-2)} \subset G_{2,\,6s-2}$$

是一个单轨道 TFF$_2$。第一项为（d； a, b） =(4; 1, 3)。

(2) 三元组（d_0； a_0, b_0） =(13; 3,5) 满足（13+2） （3+5） $= 8\cdot 3\cdot 5.$ 。为获得仅含奇数的维数, 令 $s = 2r + 1$ ($r \geq 0$)，并定义

$$d = 15(2r + 1) - 2 = 30r + 13, \quad a = 3(2r + 1) = 6r + 3, \quad b = 5(2r + 1) = 10r + 5.$$

于是，由定理 4.9,

$$Y_r := \mathcal{O}_{6r+3,\,10r+5}^{(30r+13)} \subset G_{2,\,30r+13}$$

是一个单轨道 TFF$_2$。第一项为（d； a, b） =(13; 3, 5)。

由引理 4.6 (ii)，当 $a < b$ 时，我们有

$$\left|\mathcal{O}_{a,b}^{(d)}\right| = N_d(a, b) = \binom{d}{a}\binom{d-a}{b} 2^{a+b-2}.$$

因此，这些族的大小为

$$|X_s| = N_{6s-2}(s, 3s) = \binom{6s-2}{s}\binom{5s-2}{3s} 2^{4s-2},$$

$$|Y_r| = N_{30r+13}(6r + 3, 10r + 5) = \binom{30r+13}{6r+3}\binom{24r+10}{10r+5} 2^{16r+6}.$$

以下列表由暴力搜索得到：对于每个奇数 $d \leq 1000$，我们穷举搜索所有满足 $1 \leq a \leq b$ and $a + b \leq d$ 的数对 (a, b)，并检验是否存在两对 (a_1, b_1)、(a_2, b_2) 满足

$$N_d(a_1, b_1)\Delta(a_1, b_1) + N_d(a_2, b_2)\Delta(a_2, b_2) = 0.$$

注 4.11。 计算机搜索表明，对于以下奇数维数 $d \leq 1000$，至少存在一个由两个轨道的并给出的解:

5、7、13、19、33、93、133、163、193、229、253、283、313、349、403、427、493、523、583、613 ,

661、673、691、713、733、739、763、817、823、853、933、943、973。

作为一些小规模示例，我们得到

$$d = 5 : \ (a, b) = (1, 1) \ \sqcup \ (2, 2), \qquad d = 7 : \ (a, b) = (1, 3) \ \sqcup \ (3, 3).$$

5. Non-existence problem for certain tight 2-fusion frames on $G_{2,\ d}$

本节主要关注等弦紧2-融合框架（ECTFF$_2$）on$G_{2,\ d}$，并推导其存在的必要条件，包括基数的上界和下界以及相应的等号情形。在格拉斯曼打包的背景下，Conway–Hardin–Sloane [10]通过投影矩阵引入了到球面的等距嵌入，并获得了等弦（EC）构型的单纯形界。利用这一嵌入，我们还概述了格拉斯曼流形上的设计性质与球面上的设计性质之间的关系。

对于 $V \in G_{k,\ d}$，令 P_V 表示到 V的正交投影。令 Sym(d) 表示实对称 $d \times d$ 矩阵构成的空间, 并设

$$H_0 := \{A \in \mathrm{Sym}(d) : \mathrm{tr}(A) = 0\}, \qquad D_0 := \dim H_0 = \binom{d+1}{2} - 1.$$

赋予 H_0 弗罗贝尼乌斯内积

$$\langle A, B\rangle_F := \operatorname{tr}(AB) \qquad (A, B \in H_0).$$

定义

$$R_V := \sqrt{\frac{d}{k(d-k)}}\Big(P_V - \frac{k}{d} I_d\Big) \in H_0, \qquad \Phi : G_{k,d} \to S^{D_0-1} \subset H_0, \quad V \mapsto R_V.$$

定理 5.1（Conway–Hardin–Sloane [10, 定理 5.1]）。 在上述记号下， Φ 关于弦距离是一个等距嵌入。特别地，如果有限集 $\mathcal{D} \subset G_{k,\ d}$ 是等弦的，那么 $\Phi(\mathcal{D}) \subset S^{D_0-1}$ 是球面上的等距集。

推论 5.2（Conway–Hardin–Sloane [10, 推论 5.2]）。 对于 $\{V_i\}_{i=1}^N \subset G_{k,\ d}$，最小弦距离 d_C 满足

$$d_C^2 \ \le\ \frac{k(d-k)}{d} \cdot \frac{N}{N-1}.$$

此外，等 式要求 $N \le D_0 + 1$，且当且仅当 $\Phi(V_i) \in H_0 \simeq \mathbb{R}^{D_0}$ 满足等式 y

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi(V_i) = 0, \qquad \langle \Phi(V_i), \Phi(V_j)\rangle_F = -\frac{1}{N-1}\ (i \neq j),$$

即 $\{\Phi(V_i)\}$ 在 S^{D_0-1}中构成一个正则单纯形。

接下来，我们证明 Φ将 Grassmann 4-设计映射为球面 2-设计 .

引理 5.3. 设 $X \subset G_{k,d}$ 为一个 Grassmann 4-设计。则 $Y := \Phi(X)$ 是S^{D_0-1}上的球面 2-设计。

证明. 根据命题 2.2，只需证明

$$\sum_{V,W \in X} Q_\ell^{(D_0)}(\langle R_V, R_W\rangle_F) = 0 \qquad (\ell = 1, 2).$$

根据 R_V 的定义，

$$\langle R_V, R_W\rangle_F = \frac{d}{k(d-k)}\left(\operatorname{tr}(P_V P_W) - \frac{k^2}{d}\right).$$

此外，$\operatorname{tr}(P_V P_W) = \operatorname{tr}(AA^{\mathsf{T}}) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^k y_i(V, W)$，因此 $c_2 = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(P_V P_W)$。将其代入 $P_{(2)} = \frac{k}{k-d} - \frac{d}{k-d} c_2$ 可得

$$P_{(2)}(V, W) = \frac{d}{k(d-k)}\left(\operatorname{tr}(P_V P_W) - \frac{k^2}{d}\right) = \langle R_V, R_W\rangle_F.$$

因此， $\ell = 1$ 的情形恰为 $\sum_{V,W \in X} P_{(2)}(V, W) = 0$，这可由假设 X 是 Grassmann 4-设计（因而也是 2- 设计）推出。

对于 $\ell = 2$，利用

$$Q_2^{(D_0)}(x) = \frac{D_0 x^2 - 1}{D_0 - 1},$$

我们得到

$$\sum_{V,W \in X} Q_2^{(D_0)}(\langle R_V, R_W\rangle_F) = \frac{D_0}{D_0 - 1} \sum_{V,W \in X} P_{(2)}(V, W)^2 - \frac{|X|^2}{D_0 - 1}.$$

这里我们可以展开

$$P_{(2)}(V,W)^2 = \frac{1}{D_0} + \frac{4(d-2k)^2}{k(d-2)(d+4)(d-k)}\,P_{(2)}(V,W) + \frac{d^2(k+2)(d-k+2)}{3k(d+2)(d+4)(d-k)}\,P_{(4)}(V,W) + \frac{2d^2(k-1)(d-k-1)}{3k(d-2)(d-1)(d-k)}\,P_{(2,2)}(V,W).$$

由于 X 是 Grassmann 4-设计，我们有

$$\sum_{V,W\in X} P_{(2)}(V,W) = \sum_{V,W\in X} P_{(4)}(V,W) = \sum_{V,W\in X} P_{(2,2)}(V,W) = 0,$$

因此

$$\sum_{V,W\in X} P_{(2)}(V,W)^2 = \frac{|X|^2}{D_0}.$$

代入后可知，$\ell = 2$ 和也为零。 □

数目 $\binom{d+1}{2}$ 是 $G_{k,d}$ 上 Grassmann 4-设计的绝对下界（例如参见 [4]）。

定义 5.4。 [2] 设 $d \geq 4$。有限集 $X \subset G_{k,d}$ 称为紧 *Grassmann* 4-设计，如果 X 是一个 Grassmann 4-设计，并且

$$|X| = \binom{d+1}{2}.$$

推论 5.5. 设 $X \subset G_{k,d}$ 是紧 Grassmann 4-设计，则 X 等弦。

证明. 若 X 是紧 Grassmann 4-设计，则 $|X| = \binom{d+1}{2} = D_0 + 1$。根据引理 5.3，$Y = \Phi(X)$ 是 S^{D_0-1} 上的球面 2-设计，且满足 $|Y| = D_0 + 1$。因此 $\sum_{y\in Y} y = 0$，所以 Y 达到了推论 5.2 中的等号。由此，Y 在 S^{D_0-1} 中构成一个正则单纯形，因而两两等距。由于 Φ 关于弦距离是等距嵌入，X 等弦。□

以下定理给出了 $G_{2,d}$ 中 ECTFF$_2$ 的基数约束。

定理 5.6. 设 $d \geq 4$，并设 $X = \{V_i\}_{i=1}^N \subset G_{2,d}$ 是一个 ECTFF$_2$。那么

$$\frac{d^2}{4} \leq N \leq \binom{d+1}{2}.$$

此外，当且仅当 X 在 $G_{2,d}$上是等角等距紧框架$_2$ 时，下界取等号；当且仅当 X 在 $G_{2,d}$上是紧 4-设计时，上界取等号。

证明。对于 V,$W \in G_{2,d}$，令

$$e_1(V,W) := y_1(V,W) + y_2(V,W), \qquad e_2(V,W) := y_1(V,W)y_2(V,W).$$

由于 X 是等弦的，$e_1(V_i,V_j)$ 对所有 $i \neq j$均为常数。令

$$e_{1,0} := e_1(V_i,V_j) \qquad (i \neq j).$$

另定义

$$\overline{e_2(N)} := \frac{1}{N^2-N}\sum_{i\neq j} e_2(V_i,V_j).$$

(i) 下界。由于 X 是一个等权紧 2-融合框架，将定理 2.17(iii) 应用于 $t = 2$（权重为 $\omega_i = 1/N$），可得单行 zonal 多项式 $P_{(2)}$ 和 $P_{(4)}$ 的矩恒等式:

$$\sum_{i,j=1}^{N} P_{(2)}(V_i,V_j)=0, \qquad \sum_{i,j=1}^{N} P_{(4)}(V_i,V_j)=0. \tag{5.1}$$

由 (2.1)（其中 $k=2$），我们得到

$$P_{(2)}(V,W)=\frac{4-d\,e_1(V,W)}{2(2-d)}.$$

由于 $e_1(V_i,\ V_j)=e_{1,\ 0}$ 对所有 $i\neq j$ 都成立，(5.1) 中的第一个恒等式给出

$$0=\sum_{i,j=1}^{N} P_{(2)}(V_i,V_j)=N+\sum_{i\neq j} P_{(2)}(V_i,V_j)=N+(N^2-N)\,\frac{4-d\,e_{1,0}}{2(2-d)}.$$

解出 $e_{1,\ 0}$ 可得

$$e_{1,0}=\frac{2(2N-d)}{d(N-1)}. \tag{5.2}$$

接下来，根据 (2.2)（取 $k=2$），我们用变量 $(e_1,\ e_2)$ 将 $P_{(4)}$ 重写为：

$$P'_{(4)}(e_1,e_2):=1-\frac{d+2}{2}e_1+\frac{3(d+2)(d+4)}{64}e_1^2-\frac{(d+2)(d+4)}{16}e_2, \qquad P_{(4)}(e_1,e_2):=\frac{8}{d(d-2)}\,P'_{(4)}(e_1,e_2).$$

由于 $P_{(4)}$ 在 e_2 中是一次的，因此有

$$\sum_{i\neq j} P_{(4)}\big(e_{1,0},e_2(V_i,V_j)\big)=(N^2-N)\,P_{(4)}\big(e_{1,0},\overline{e_2(N)}\big).$$

因此，(5.1) 中的第二个恒等式变为

$$0=\sum_{i,j=1}^{N} P_{(4)}(V_i,V_j)=N+(N^2-N)\,P_{(4)}\big(e_{1,0},\overline{e_2(N)}\big),$$

并解出 $e_2(N)$，$\overline{\text{得到}}$

$$\overline{e_2(N)}=\frac{d^2(d+2)+2d(d^2-4d-4)N-4(d-6)N^2}{d^2(d+2)(N-1)^2}. \tag{5.3}$$

对于每个 $i\neq j$，我们有 $y_1(V_i,\ V_j)\ y_2(V_i,\ V_j)\ \geq 0$ 且 $y_1(V_i,\ V_j)+y_2(V_i,\ V_j)=e_{1,\ 0}$；因此由算术-几何平均不等式，

$$0\leq e_2(V_i,V_j)=y_1(V_i,V_j)y_2(V_i,V_j)\leq\Big(\frac{e_{1,0}}{2}\Big)^2. \tag{5.4}$$

对 $i\neq j$ 上的 (5.4) 取平均，得到

$$0\leq\overline{e_2(N)}\leq\frac{e_{1,0}^2}{4}.$$

代入 (5.2) 和 (5.3) 并化简，得到

$$\frac{e_{1,0}^2}{4}-\overline{e_2(N)}=\frac{-2N(d-2)(d^2-4N)}{d^2(d+2)(N-1)^2}.$$

分母为正，且左侧为 ≥ 0，因此 $d^2-4N\leq 0$，即

$$N\geq\frac{d^2}{4}.$$

若 $N = \frac{d^2}{4}$，则 $e_2(N) = e_{1,0}^2/4$。由于每一项都满足 $e_2(V_i, V_j) \le e_{1,0}^2/4$，要达到平均值的最大值，必然有

$$e_2(V_i, V_j) = \frac{e_{1,0}^2}{4} \qquad (i \neq j).$$

因此，对于所有 $i \neq j$，$= e_{1,0}/2$，故 X 是等斜的，即一个等角等距紧框架。反之，若X 是一个等角等距紧框架，则上述计算可推出 $N = \frac{d^2}{4}$。

(ii) 上界。上界 $N \le D_0 + 1 = \binom{d+1}{2}$ 由推论 5.2 得出。进一步假设 $N = \binom{d+1}{2}$。在此情况下，要证明 X 是 Grassmann 4-设计，只需验证

$$\sum_{i,j=1}^{N} P_{(2,2)}(V_i, V_j) = 0,$$

因为矩恒等式 (5.1) 已经成立。类似地，由 (2.3)（取 $k = 2$），我们将 $P_{(2,2)}$ 改写为变量 (e_1, e_2) 的表达式，并将其除以 $P_{(2,2)}(2, 1) = 1$ 进行归一化：

$$P'_{(2,2)}(e_1, e_2) := 1 - \frac{d-1}{2} e_1 + \frac{(d-2)(d-1)}{2} e_2, \qquad P_{(2,2)}(e_1, e_2) := \frac{2}{(d-2)(d-3)} P'_{(2,2)}(e_1, e_2).$$

由于 $P_{(2,2)}$ 在 e_2中次数为 1，我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{N} P_{(2,2)}(V_i, V_j) = N + (N^2 - N)\, P_{(2,2)}\big(e_{1,0}, \overline{e_2(N)}\big).$$

代入 (5.2) 和 (5.3) 并化简后，我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{N} P_{(2,2)}(V_i, V_j) = \frac{3N^2(d-2)^2\big(d(d+1) - 2N\big)}{d^2(N-1)(d-3)(d+2)}.$$

因此，当 $N = d(d+1)/2$ 时，该和为 0，且 X 是 Grassmann 4-设计。此外，$|X| = D_0 + 1 = \binom{d+1}{2}$，并且由于 X 是 Grassmann 4-设计，由定义 5.4 可知，X 是紧 Grassmann 4-设计。

反之，若 X 是紧 4-设计，则 $|X| = D_0 + 1 = \binom{d+1}{2}$，且由推论 5.5 可知，$X$ 是等弦的。此外，Grassmann 4-设计特别满足 (5.1)，因此 X 是紧 2-融合框架。因此 X 是一个等弦紧融合框架（ECTFF）。□

因此，我们得出结论：在奇数维空间上不存在 EITFF$_2$ on $G_{2,d}$.

推论 5.7. 设 d 为奇数，且设 $t > 1$。那么不存在 EITFF$_t$ on $G_{2,d}$。

注 5.8。设 $d = 2n$ 并将 $\mathbb{R}^{2n}$ 与 $\mathbb{C}^n$等同。每条复直线 $\mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^n$ 确定一个实平面

$$V(z) := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{z, iz\} \in G_{2,2n}.$$

这里，$\mathbb{C}^n$ 中的对称信息完备正算子值测度是指一组单位向量 $z_1, \ldots\ldots, z_{n^2} \in \mathbb{C}^n$，满足对所有 $i \neq j$，$|z_i^* z_j|^2 = 1/(n+1)$。在这种对应关系下，一个对称信息完备正算子值测度会产生一个大小为 n^2、位于 $G_{2,2n}$ 上的 EITFF$_2$，反之亦然。详情请参见 [17]。

致谢。作者谨向 Akihiro Munemasa 教授致以诚挚谢意，感谢他的指导与鼓励。作者还感谢 Takayuki Okuda 教授和 Ayodeji Lindblad 提出的宝贵意见和有益讨论，尤其是关于通过射影映射和 Hopf 映射构造设计的讨论。

References

[1] C. An、X. Chen、I. H. Sloan 和 R. S. Womersley，《用于二维球面上积分与插值的良态球面设计》，*SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010)，第6期，2135–2157页。[2] C. Bachoc、E. Bannai 和 R. Coulangeon，《格拉斯曼空间中的码与设计》，*Discrete Math.* **277** (2004)，第1–3期，15–28页。doi:10.1016/S0012-365X(03)00151-1。[3] C. Bachoc 和 M. Ehler，《紧 p融合框架》，*Appl. Comput. Harmon. Anal.* **35**(2013)，第1期，1–15页。[4] C. Bachoc、R. Coulangeon 和 G. Nebe，《格拉斯曼空间与格中的设计》，*J. Algebraic Combin.* **16**(2002)，第1期，5–19页。[5] B. Bajnok，《球面4设计和5设计的构造》，*Graphs Combin.* **7**(1991)，第3期，219–233页。[6] E. Bannai 和 E. Bannai，《球面设计与球面代数组合学综述》，*European J.Combin.* **30**(2009)，第6期，1392–1425页。doi:10.1016/j.ejc.2008.11.007。[7] J. J. Benedetto 和 M. Fickus，《有限归一化紧框架》，*Adv. Comput. Math.* **18**(2003)，357–385页。[8] A. Bondarenko、D. Radchenko 和 M. Viazovska，《球面设计的最优渐近界》，*Ann. of Math.*178 (2013)，第2期，443–452页。[9] H. Cohn、J. H. Conway、N. D. Elkies 和 A. Kumar，《该 D_4 根系并非普适最优》，*ExperimentalMath.* **16** (2007)，第3期，313–320页。[10] J. H. Conway、R. H. Hardin 和 N. J. A. Sloane，《直线、平面等的打包：格拉斯曼空间中的打包》，*Experimental Math.* **5**(1996)，第2期，139–159页。doi:10.1080/10586458.1996.10504585。[11] P. G. Casazza、G. Kutyniok 和 S. Li，《融合框架与分布式处理》，*Appl. Comput. Harmon. Anal.*25 (2008)，第1期，114–132页。[12] P. Delsarte、J. M. Goethals 和 J. J. Seidel，《球面码与设计》，*Geometriae Dedicata* **6** (1977)，第3期，363–388页。[13] A. T. James 和 A. G. Constantine，《作为格拉斯曼流形球函数的广义雅可比多项式》，*Proc. London Math. Soc.* (3) 29 (1974)，174–192页。doi:10.1112/plms/s3-29.1.174。[14] H. K¨onig，《球面上的求积公式》，载于 *Advances in Multivariate Approximation* (Witten-Bommerholz, 1998)，《数学研究》，第107卷，Wiley-VCH，柏林，1999年，第201–211页。[15] G. Kuperberg，《基于阿基米德帽盒定理的数值求积》，*SIAM J. Numer. Anal.* **44** (2006)，第3期，908–935页。[16] A. Lindblad，《通过射影映射和 Hopf 映射关联的设计》，*Discrete & Computational Geometry* (2025)。[17] R. Misawa，《球面5设计和7设计的显式构造》，准备中（2026）。[18] F. J. Narcowich、P. Petrushev 和 J. D. Ward，《球面上的局部化紧框架》，*SIAM J. Math. Anal.* **38** (2006)，第2期，574–594页。[19] T. Okuda，《通过 Hopf 映射关联球面设计》，*arXiv preprint* arXiv:1506.08414 (2015)。[20] J. M. Renes、R. Blume-Kohout、A. J. Scott 和 C. M. Caves，《对称信息完备量子测量》，*J. Math. Phys.* **45** (2004)，第6期，2171–2180页。[21] N. J. A. Sloane、R. H. Hardin 和 P. Cara，《四维中的球面设计》，载于 *Proc. 2003 IEEE InformationTheory Workshop (ITW 2003)*，2003年。doi:10.1109/ITW.2003.1216742。[22] K. Tanino、T. Tamaru、M. Hirao 和 M. Sawa，《关于球面设计的角向量构造的进一步研究》，*Algebraic Combin.* **8** (2025)，第5期，1387–1414页。[23] R. S. Womersley，《具有良好几何性质的高效球面设计》，预印本（2017），arXiv:1709.01624。[24] Z. Xiang，《显式球面设计》，*Algebraic Combin.* **5** (2022)，第2期，347–369页。

（R. Misawa） Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 6-3-09 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

Email address: misawa.ryutaro.q2@dc.tohoku.ac.jp