通过递归梯度剖析揭示元胞自动机中的潜在自相似性

郝仲恩 应用艺术研究所，国立阳明交通大学，新竹，台湾
alson6101@gmail.com

刘怡辰 应用艺术研究所，国立阳明交通大学，新竹，台湾
ivanliu@nycu.edu.tw

arXiv:2601.17361v1 [nlin.CG] 24 Jan 2026

摘要

元胞自动机（CA）最初作为自然过程的计算模型而发展，如今已成为复杂系统与生成式视觉形态研究的核心课题。其中，乌拉姆–沃伯顿元胞自动机（UWCA）在空间演化中展现出递归生长与类分形特征。然而，精确的自相似分形结构通常仅在特定代中可见，并且在传统二值渲染中仍被视觉遮蔽。本研究提出递归梯度剖面函数（RGPF），根据新激活细胞的代索引为其赋予灰度值，使潜在的自相似结构能够在空间可视化中逐步显现。通过这种基于梯度的映射，递归几何图案得以跨尺度呈现，揭示出标准表示形式中并不明显的分形属性。我们进一步将此方法扩展至采用其他邻域配置的 UWCA 变体，证明这些规则在使用递归梯度剖面进行可视化时，同样会产生各异但始终具有分形特征的视觉图案。除了计算分析之外，由此生成的形态还令人联想到无限镜、视频反馈以及欧洲艺术史中的画中画等光学与文化现象，也让人联想到宗教建筑中的分形图案。这些视觉对应关系表明，复杂性科学、计算可视化与文化艺术和设计之间存在更广泛的联系。

CCS 概念

• **应用计算** → **艺术与人文学科**；• **以人为中心的计算** → **可视化技术**；

关键词

元胞自动机、复杂性、分形、美学

ACM 参考文献格式：

Chung-En Hao 和 刘怡辰。. 通过递归梯度剖析揭示元胞自动机中的潜在自相似性。载于（*arXiv*预印本）论文集。ACM，纽约州纽约，美国，8页。

1 引言

从树木分枝和雪花结晶等自然现象，到模 2 [Stewart 2006], 谢尔宾斯基三角形和科赫雪花等数学结构，许多复杂形态都源于简单的递归规则。这些自相似分形结构凸显了方程逻辑与自然之间的深刻联系，构成了复杂系统研究的核心焦点复杂系统 [Bunde and Havlin 2013年；Falconer 2013年；Peitgen et al. 2004]。

元胞自动机（CA）最初由冯·诺伊曼和乌拉姆于20世纪50年代初提出 [Schiff 2011], , 旨在利用离散系统模拟生物的生长与演化。元胞自动机由排列在网格中的细胞构成，每个细胞根据局部相互作用更新自身状态。其中，康威的生命游戏 [Conway et al. 1970] 是最广为人知的模型。更广泛而言，元胞自动机框架已广泛应用于计算机科学、物理学、地球科学、社会科学乃至生成艺术等领域 [Wolfram and Gad-el Hak 2003]。

乌拉姆-沃伯顿元胞自动机（UWCA）由乌拉姆 [Ulam et al. 1962], 提出，其灵感源自晶体和植物的生长模式。该模型展现出类分形扩张[Applegate et al. 2010] 和无限拓扑熵，表明其具有高度复杂性 [Kawaharada 2014a]。后续研究探讨了UWCA在模拟分枝结构 [Okura 2022]和地貌形成 [Batty 2000],等自然系统中的应用；它也被认为是最早用于计算机模拟树木生长的模型 [Palubicki et al. 2009]。

Wolfram 系统地研究了一维初等元胞自动机和具有二元状态（生／死）的二维版本，并引入了一套编号系统来分析和分类其行为。许多这类规则会在时空图中产生自相似分形，但仅针对空间图中的自相似分形图案，鲜有讨论 [Wolfram and Gad-el Hak 2003]。

在各种元胞自动机中，UWCA 因其独特的生长行为而脱颖而出，这种行为呈现出递归生长的特征。Applegate 及其合作者认为，其几何形状和数值演进具有递归性，但并非真正的自相似分形图案 [Applegate et al.2010],；Kawaharada 等人则使用盒计数法分析其分形维数，并研究其在特定演化代数下的图案轮廓的分形特征 [Kawaharada 2014a]。

基于 Applegate 及其合作者关于几何和算术递归性的观点，本文提出递归梯度轮廓函数（RGPF），将灰度轮廓应用于每一代新生细胞。这种可视化映射揭示了 UWCA 空间结构中的自相似性，而传统黑白可视化无法捕捉到这一点。我们还探讨了 UWCA 研究中此前未曾讨论的各种邻域配置，并观察到通过重复应用 RGPF，这些配置同样会产生自相似分形图案。

最后，基于这些UWCA图像中自相似性和尺度不变性的特征，我们将这些视觉形式与无限镜等光学现象进行类比 [Gbur

2011], 视频反馈 [Peitgen等人 2004],以及欧洲艺术史中的画中画（指“画中画”的概念） [Reinhardt 2012]。我们还将它们与宗教建筑和文物中发现的分形元素联系起来 [Rian等人 2007年；Trivedi1989], , 从而揭示复杂系统、计算可视化、艺术与人文学科之间可能存在的联系。

2 背景与相关研究

本节介绍分形几何及其文化诠释，概述一维和二维元胞自动机，并阐述 UWCA 的关键特征。

2.1 分形几何与文化诠释

分形一词指的是在不同尺度上呈现自相似性、且具有分形维数 [Fal- coner 2013] 的几何结构。自相似性意味着某种模式与其自身的一部分完全或近似相似，而这种相似性在不同尺度上的程度则通过分形维数来表示。该维数通常大于对象的拓扑维数，而且往往不是整数 [Cannon 1984]。此外，具有非整数分形维数的形状始终是分形。最常用的分形维数表示形式——豪斯多夫维数——对于单个点为零，对于线段为 1，对于正方形为 2，对于立方体为 3。

虽然分形维数在数学上可以得到严格定义，但自然系统很少符合这样的理想条件。真实世界数据中的噪声、不规则性和随机性，使得直接应用豪斯多夫公式并不切实际，尤其是在基于图像的分析中。尽管如此，分形维数的概念仍然是分析和描述自然形态的有用工具 [Falconer 2013]。

为解决这一问题，盒计数法已成为估算数字图像中分形维数的广泛应用技术 [Foroutan-pour et al. 1999]。这种方法包括将图像转换为二值形式、进行边缘检测，并叠加由盒子组成的网格，以统计其中有多少个盒子包含物体边界的一部分。在不同尺度下重复这一过程，可以揭示占据的盒子数量 $N(\epsilon)$如何随盒子大小 ϵ变化，从而近似得到分形维数 D:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \tag{1}$$

在实际操作中，通常通过绘制 $\log N(\epsilon)$ 与 $\log(1/\epsilon)$ 的双对数图来估算，其最佳拟合线的斜率通过最小二乘回归求得。

传统的盒计数法主要用于根据边缘估算分形维数，例如神经元结构或树枝，因为物体的轮廓具有分形特性。然而，当分形特征嵌入灰度纹理本身时（例如岩石表面或布朗运动），基于边缘的方法便不足以应对。为克服这一局限，研究者提出了差分盒计数法（DBC），用于分析灰度图像 [Sarkar 和 Chaudhuri 1994]。

为进一步提高准确度，人们开发了平滑差分盒计数（SDBC）等增强方法 [Chen 等人。2003]。SDBC算法通过沿强度轴引入量化与移位机制，解决传统 DBC 中的常见问题，例如过度计数以及对灰度级偏移的敏感性。本研究采用 SDBC 来评估我们图像中灰度输出的分形维数。

2.1.1 人文与艺术中的分形。除了数学和自然界，分形也出现在艺术表达中。无限镜是一种通过平行或倾斜排列的镜子，使反射看起来无限向后延伸的装置 [Gbur 2011]。一种相关的媒体技术是视频反馈 [Peitgen 等人 2004], , 即摄像机捕捉屏幕上自身的输出，生成实时递归图像，并向中心压缩。这种视觉效果类似于西方艺术史中的画中画概念 [Watling 2009], , 这是一种将图像嵌套在自身之中的技法，用以表现无限递归——Diego Velázquez 的画作《宫娥》便是著名例证。

在许多宗教建筑中，无论是教堂、清真寺还是寺庙，重复出现的拱廊都营造出强烈的视觉韵律，令人感受到递归与无限 [Rian 等人 2007]。拱门似乎无穷无尽地一个接一个延伸，每一道拱门都映照并框住下一道，引人沉思永恒、神性以及信仰的无边无际。正如 Acosta [Acosta 2025] 所指出的，这种递归形式映照了现实本身的架构——现实并非由静止的事物构成，而是由动态、自我更新的过程构成。因此，宗教建筑成为这种演化过程的物质隐喻：神圣递归的空间表达。

2.2 元胞自动机与自相似性

Wolfram元胞自动机编号系统 [Wolfram 和 Gad-el Hak 2003]对一维和二维中所有可能的二状态元胞自动机配置进行分类 [Packard 和 Wolfram 1985]。在一维元胞自动机中，每个元胞根据自身当前状态以及左右邻居的状态更新。图1（1）和（2）展示了规则30，其呈现出非周期性、混沌的行为，视觉上类似于织锦芋螺的天然贝壳织锦芋螺 [Coombes 2009]。相比之下，规则90呈现出一种称为谢尔宾斯基三角形的自相似图案（图1（3））。

关于元胞自动机自相似性的讨论大多聚焦于一维时空图，其中时间沿垂直方向推进，递归模式随着代数演化而显现。虽然某些二维元胞自动机也会产生类似的分形图案，例如图 1（4）所示的情形，这表明类似谢尔宾斯基的结构也可能出现在随时间演化的二维网格横截面中。

正如 Wolfram 及其同事的系统研究所示，此类自相似特征在纯粹的空间图中鲜少出现。因此，UWCA 尤为独特，因为它揭示了递归的几何结构，表明存在某种空间自相似性，而不只是由时间演化所产生。

2.3 乌拉姆-沃伯顿元胞自动机

乌拉姆-沃伯顿元胞自动机（UWCA）也可用 Wolfram 编码描述为五邻域外总计规则，其编码为 686。其演化过程可通过几个非正式步骤来说明，如图 2 所示。

(1) 创建一个二维网格，其中所有细胞均处于死亡状态（白色）。

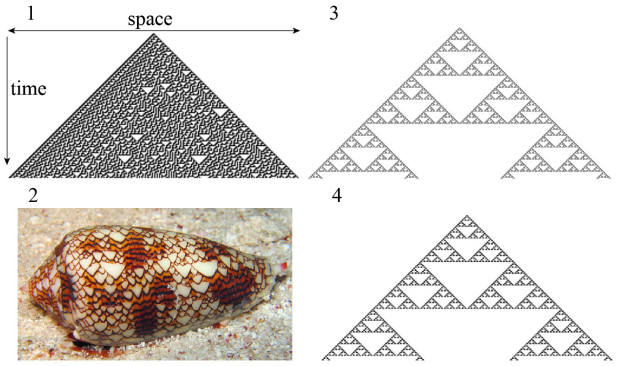

图1：(1)和(2)：一维初等元胞自动机规则30呈现出类似织锦芋螺天然贝壳的图案；(3)和(4)：一维初等元胞自动机规则30和二维摩尔邻域外总和型元胞自动机规则510均呈现出类似谢尔宾斯基三角形的图案。这些元胞自动机图案以时空图的形式可视化。（图像(2)改编自 [Coombes 2009]）

(2) 在第一代中，将一个细胞初始化为存活状态（黑色）。(3) 对于每个死亡细胞，如果其冯·诺伊曼邻域中恰好有一个细胞存活，它就会在下一代变为存活状态。(4) 迭代各代，并从步骤 (3) 重复操作。

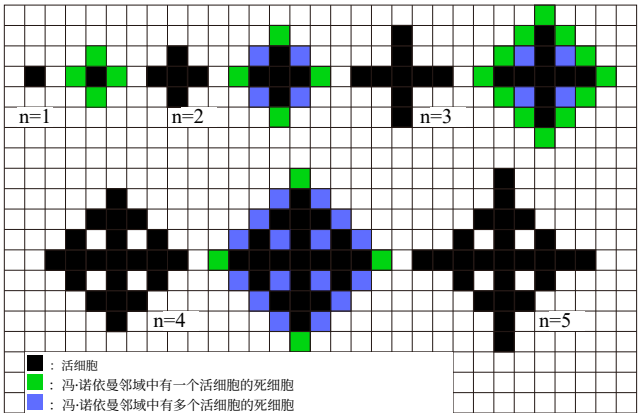

图 2：UWCA 从第 $n = 1$代到5代的可视化。初始状态（$n = 1$）从一个活细胞开始。在每一代中，死细胞都会检查其冯·诺依曼邻域（上、下、左、右）。如果恰好有一个邻居处于存活状态（绿色），该细胞就会在下一代变为存活。拥有多个存活邻居的细胞（蓝色）表示无效转移。

与初等元胞自动机中的规则150类似，UWCA 的时空图也呈现出自相似图案 [Kawaharada 2014年]。然而，它是否呈现自相似的空间图案（仅从二维俯视图观察）仍存在争议。

Applegate 及其同事从几何和算术两个角度凸显了 UWCA 的递归特征 [Applegate 等人 2010]。例如，他们观察到，活细胞（黑色）的图案每隔 2^k 代就形成一个正方形（$k \in \mathbb{N}$），每代新激活的活细胞数量则可以用递归函数描述，其中 $u(n)$ 表示在第 n 代由死到活的细胞数量。

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1, \quad \text{for } k \geq 0,$$
$$u(2^k + 1 + i) = \begin{cases} 4, & \text{if } i = 0, \\ 3u(i+1), & \text{if } i = 1, \ldots, 2^k - 1. \end{cases} \tag{2}$$

他们认为，UWCA 的空间图中只有类分形图案。相比之下，Kawaharada 提供了证据，表明 UWCA 在某些条件下确实会形成真正的自相似分形 [Kawaharada 2014a]。如图 3 所示，他们使用盒计数法进行了论证 [Liebovitch 和 Toth 1989],：在第 $2^5 = 32$代，结构形成了一个完美的正方形，分形维数为 2；而在第 $2^7 - 3 = 125$代，测得的分形维数约为 1.585。这一发现表明，UWCA 在空间形态上呈现条件分形行为，具体取决于所选的代数。总的来说，这些发现表明，UWCA 的空间分形特征不会随着代数的增加而持续累积，而只会在特定代数下显现。

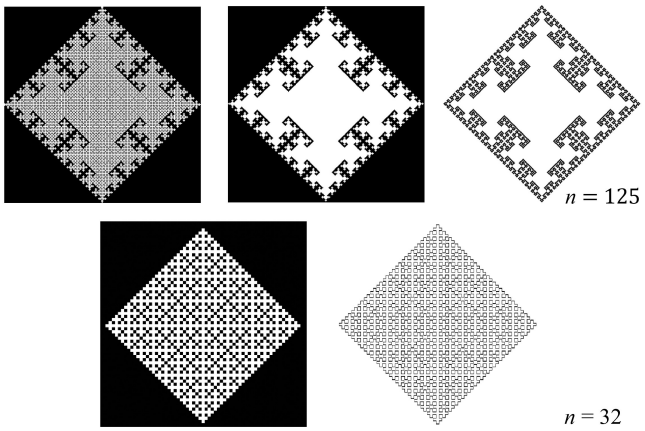

图 3：左上：第 $n = 125$代的 UWCA；中上：使用图像处理仅提取图案的边界轮廓；右上：使用边缘检测法提取的边缘特征。左下：第 $n = 32$代。右下：使用边缘检测法提取的边缘特征 [Kawaharada 2014a]。

3 递归梯度剖面分析过程

尽管先前研究表明，UWCA 在特定代会呈现递归增长和条件分形行为，但仅凭纯空间的二值渲染仍难以察觉其自相似结构。传统可视化将时间信息压缩为统一状态，因而掩盖了递归如何随时间累积。为此，我们提出一种以可视化为驱动的设计方法，将代信息重新编码为空间强度，从而逐步揭示潜在自相似性。

Applegate 及其同事 [Applegate 等人 2010] 分析了 UWCA 的几何和算术性质，揭示了其活细胞配置的递归行为。具体而言，他们证明，对于每个 2^k 代（对于 $k \in \mathbb{N}$），活细胞集合都会形成矩形图案，并且每一代新增激活细胞的数量可由方程 2 描述。这些发现表明，UWCA 的增长具有内在规律，与分形结构中发现的模式相吻合。

基于这一观察，我们提出了一种可视化方法，以增强这类递归模式的可见性。具体而言，我们将 2^k 到 2^{k+1} 代之间的每个区间视为一个分组序列，并使用连续渐变轮廓来可视化各组内的生长趋势。我们不再赋予固定的黑色或白色值，而是将每一代中新生的活细胞归一化为 0 到 1 之间的灰度强度，从而实现平滑过渡，展现随时间演变的递归生长模式。

为此，我们定义了递归梯度轮廓函数（RGPF），为给定分组中的每一代赋予灰度值，如公式（3）所示：

$$\text{grayscale intensity } f(n) = \begin{cases} 0, & n < 1 \\ 2 - n, & 1 \le n \le 2 \\ f\left(\frac{n}{2}\right), & n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

图4上方展示了从 $n = 1$ 到 256 的 RGPF，下方则展示了根据公式（2），在第 n 代中由死到活的细胞总数。红线展示了强度轮廓的锐利边缘与模式中新活细胞生成代数之间的关系。可以看到，梯度轮廓的陡升对应着新一代细胞的生成。这些时刻在图5（左）中以红色方块标出。

图5（左）展示了将递归梯度轮廓乘以截至第256代所有新激活活细胞后的结果。每个细胞对应一个像素，因此输出分辨率为 480×480 像素。我们使用移位差分盒计数法（SDBC）[Chen 等人 2003]分析该图案的分形维数。与标准差分盒计数法（DBC）相比，SDBC 通过两项关键改进提高了准确性。首先，它引入了一种计算量化过程，沿灰度级（z）轴垂直移动盒子，从而最大限度地减少过度计数和计数不足造成的误差。其次，该方法具有灰度级移位不变性，这意味着在亮度变化时，其估算的分形维数仍保持稳定，因此适用于分析灰度纹理以及 UWCA 这类具有梯度轮廓的基于渐变的结构。

图5（右）展示了用于计算分形维数的双对数图，结果为 $D = 2.6827$，拟合误差为 $E = 0.0063$。在该图中，横轴表示 $\log(1/r)$，其中 r 是缩放比 $r = s/M$，s 表示每个盒子的尺寸，M 表示图像总尺寸。随着 r 减小，$1/r$ 反映了空间细分的程度。纵轴表示 $\log(N_r)$，其中 N_r 是覆盖每个尺度下灰度表面所需的盒子数量。回归线在该双对数空间中的斜率对应于分形维数 D，体现了图像在不同尺度下细节的变化方式。

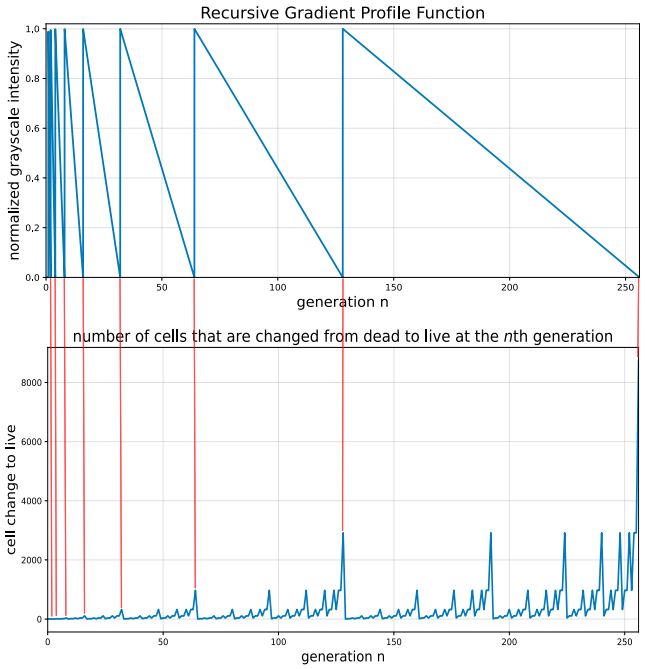

图4：上：根据递归梯度轮廓函数（RGPF），将代索引（$n = 1$ 至256）映射为灰度强度值，定义见公式(3)。下：使用公式(2)中的 UWCA 更新规则计算每一代新生活细胞的数量。红线表示 $n = 2^k$发生的代。在这些代中，活细胞会形成方形图案。

误差 E 对应于均方根（RMS），用于衡量双对数空间中数据点与回归线之间的平均垂直距离。该值反映了数据遵循线性趋势的程度。为了衡量其质量，我们随后对 E进行了归一化：

$$E_{\text{norm}} = \frac{E}{\log N_r^{\max} - \log N_r^{\min}} \tag{4}$$

其中 $\log N_r^{\max}$ 和 $\log N_r^{\min}$ 分别为 6.532 和 0.903。由此得到的归一化误差为 $E_{\text{norm}} \approx 0.112\%$。如此低的数值表明拟合效果极佳，证实了自相似性在不同尺度间保持一致。

为了将我们生成的结果与 Kawaharada [Kawaharada 2014a]，的可视化结果进行比较，我们突出显示了原始 UWCA 可视化中未能观察到的自相似分形图案；在原始可视化中，所有活细胞都以统一颜色呈现。图6（左）展示了叠加了尺寸逐次加倍的方形掩膜的梯度调整后的 UWCA，揭示了该图案的自相似特征。右侧的蓝色掩膜突出显示了大小不一的方形簇，它们构成了晶体状递归图案。通过递归梯度剖析可以轻松观察到这些视觉图案，而在原始图示中则无法观察到，如图6（右）所示。

在初始 UWCA 设计的基础上，我们进一步在替代邻域条件下对其进行考察。此前关于 UWCA 的研究

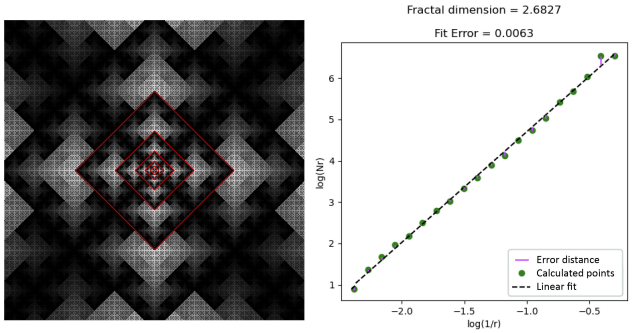

图5：左：展示 UWCA 的递归梯度剖析倍增结果，以及截至第 256 代的输出；红色方块对应图4中的红线，标示出 $n = 2^k$ 和方形轮廓出现的代数。右：展示相应的双对数图，据此计算出分形维数 $D = 2.6827$。拟合误差 $E = 0.0063$ 量化了数据点与回归线之间的平均垂直距离。误差距离线表示各点到拟合线的垂直距离，用于可视化拟合质量。

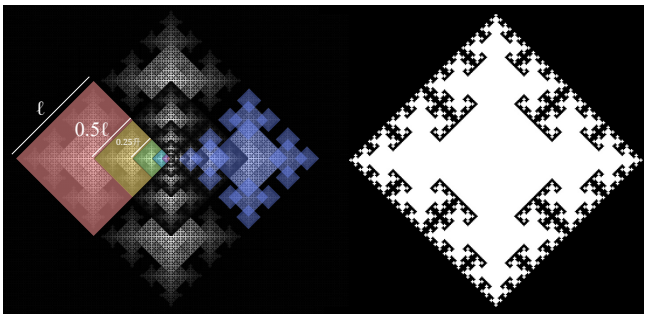

图6：比较经梯度调整的图案（左）与 Kawaharada[Kawaharada 2014a]展示的原始 UWCA 可视化效果（右）。在经梯度调整的图案中，左侧遮罩突出显示了由递归缩放的方形构成的自相似结构，而右侧蓝色遮罩则揭示了彼此重叠的方形簇，形似晶体般的递归图案。这些特征在纯色渲染中并不明显，但通过递归梯度剖析便可显现。

主要集中于两种经典的邻域配置：冯·诺伊曼邻域和摩尔邻域，它们是元胞自动机邻域设计中最常见的形式。在更广泛的元胞自动机文献中，研究者还探索了多种邻域模型，包括位移冯·诺依曼邻域、史密斯邻域和科尔邻域 [Batty 2007年；Last 2025年；Zekrizadeh 等 2019]。

我们在保留原始 UWCA 规则和梯度剖析的同时，探索了若干替代性的邻域配置，从而扩展了 UWCA框架。图7显示，多种邻域变体生成的图案在视觉上各不相同，但在结构上具有可比性。我们进一步量化其几何性质，使用 SDBC方法测量分形维数和拟合误差。如表1所示，六种邻域变体的分形维数 D 均稳定介于 2 和 3 之间，符合分形几何的定义。此外，所有配置的归一化拟合误差均较低（均为 $E_{\text{norm}} \leq 0.12\%$），表明其在对数—对数空间中具有很强的线性关系。这些结果表明，我们的梯度剖析揭示了不同邻域中的自相似分形结构，凸显了扩展后的 UWCA框架的稳健性与视觉丰富性。

表1：邻域配置及其对应的 D、E 和 E_{norm} 值

邻域	D	E	E_{norm} (%)
1. 冯·诺伊曼	2.6827	0.0063	0.112
2. 莫尔	2.7072	0.0066	0.116
3. 莫尔-冯·诺依曼	2.6519	0.0150	0.116
4. 位移冯·诺依曼	2.7150	0.0069	0.12
5. 科尔	2.6499	0.0062	0.111
6. 循环	2.7492	0.0058	0.102

4 从计算系统到文化形态：递归梯度分析作为桥梁

除了探索元胞自动机与分形几何之间的关系外，本研究还试图寻找计算系统与文化艺术之间的潜在交汇点。在图6中，UWCA展现出一种递归空间生长模式。从单个种子细胞开始，其结构向外扩展，同时不断在更大尺度上复现其原始形状。如果这一演化无限持续下去，可以想象它在任意尺度上都表现出自相似性；这一原理让人联想到无限镜像和视频反馈 [Peitgen等人 2004]，，在后者中，不同尺度上的反复反射保持着一致的结构相似性。

这一概念也与某些建筑视觉效果相呼应，如图8中的(5)和(6)所示，其中重复的形态营造出朝向消失点不断后退、仿佛无穷延伸的视觉感知。这种递归性的空间韵律唤起了视觉无穷的感受。我们的递归梯度剖面分析揭示了UWCA中类似的自相似性，使这些几何递归更加明显，并与宗教建筑中的设计母题产生共鸣。尤其是，印度的斯瓦米纳拉扬·阿克萨达姆寺庙群作为联合国教科文组织世界遗产，拥有多个曼达帕姆大厅，每个大厅顶部都冠以装饰繁复的穹顶，呈现出类似分形的美学。图9展示了Lila Mandapam的穹顶这一实例。另一个案例是克久拉霍古迹群，同样是联合国教科文组织世界遗产，以其印度教寺庙和耆那教寺庙而闻名。这些建筑的特色在于墙面、穹顶（曼达帕）和塔楼（希卡拉）上丰富的雕刻表面与重复排列，由此产生的效果，无论在平面还是立面上，都可以被解读为分形图案。这些图案不仅具有美学用途，也反映了植根于印度教寺庙设计中的宇宙论和数学象征。

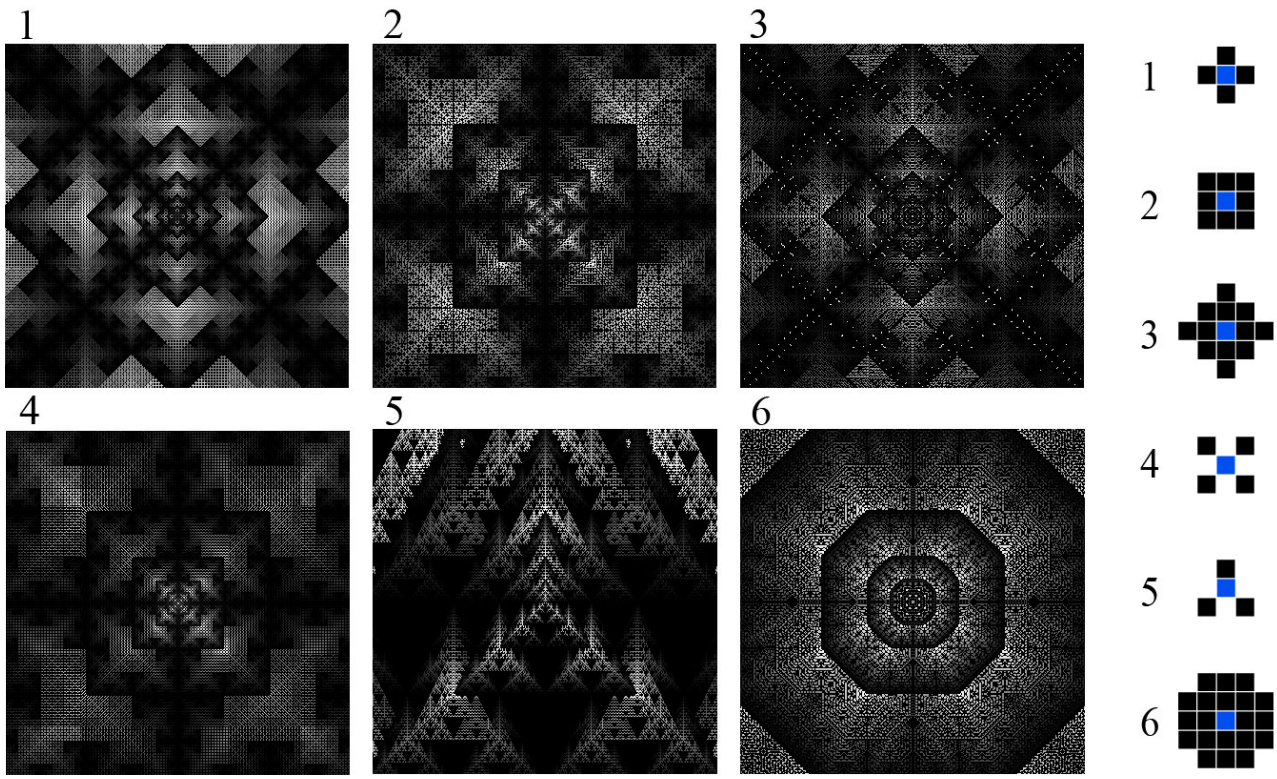

图7：不同 的 UWCA 邻域配置演化至 $n = 256$，包括：1. 冯·诺伊曼，2. 莫尔 , 3. 莫尔-冯·诺依曼，4. 位移 的冯·诺伊曼，5. 科尔，6. 循环。

图10（左）展示了使用替代邻域的UWCA时空可视化，其中新激活的细胞逐代朝蓝色坐标轴的负方向生长。旁边，我们并置了若干精选印度教寺庙的图像，包括阿达尼香提格拉姆耆那教寺庙（中）和曼多尔寺庙（右），旨在促成算法递归与神圣建筑几何之间的视觉对话。

通过这些对比性可视化示例，我们揭示了元胞自动机系统新的表现潜力：它们不仅可用于模拟自然现象，还能生成文化性、象征性且富有美学价值的分形图案，从而连接复杂性科学与文化艺术。

5 结论

元胞自动机最初由冯·诺伊曼和乌拉姆提出，用于通过局部规则模拟自然生长。如今，元胞自动机已成为复杂系统研究的基础工具，应用领域涵盖计算机科学、物理学、地球科学和生成艺术。

乌拉姆-沃伯顿元胞自动机（UWCA）是最早的元胞自动机模型之一，曾影响计算机图形学中的树木生长模拟。本研究从视觉角度重新审视 UWCA，重点关注其递归空间扩展。由于元胞自动机中的自相似分形图案通常出现在时空图中，而非纯粹的空间维度中，因此我们探讨能够揭示传统渲染中经常隐藏的分形特征的替代性视觉策略。

通过将 2^k 与 2^{k+1}之间的细胞世代分组，我们引入了递归梯度轮廓函数（RGPF），以便在各代之间应用线性渐变着色。传统的 UWCA 黑白可视化只能呈现边界处和特定世代中的自相似分形结构，而这种梯度轮廓能够连续且累积地展现递归生长中蕴含的自相似性。

我们还将 UWCA 扩展到原始设计之外，采用了其他邻域配置，包括位移冯·诺依曼、科尔和循环邻域。与我们的梯度轮廓结合后，这些变体仍能生成自相似分形图案。我们使用移位差分盒计数法（SDBC）评估其灰度输出的分形维数。所有配置所得的分形维数均为 D，介于 2 和 3 之间——处于曲面与体积的拓扑维数之间——且拟合误差较低（$E_{\text{norm}} \leq 0.12\%$），表明这些变体均具有显著的分形特征。

这些递归模式与几何重复、无限镜像和视频反馈等视觉效果，以及历史与文化背景中出现的递归美学产生共鸣。它们呼应了西方艺术史中的画中画 概念，并与宗教建筑形式中观察到的分形图案相契合。

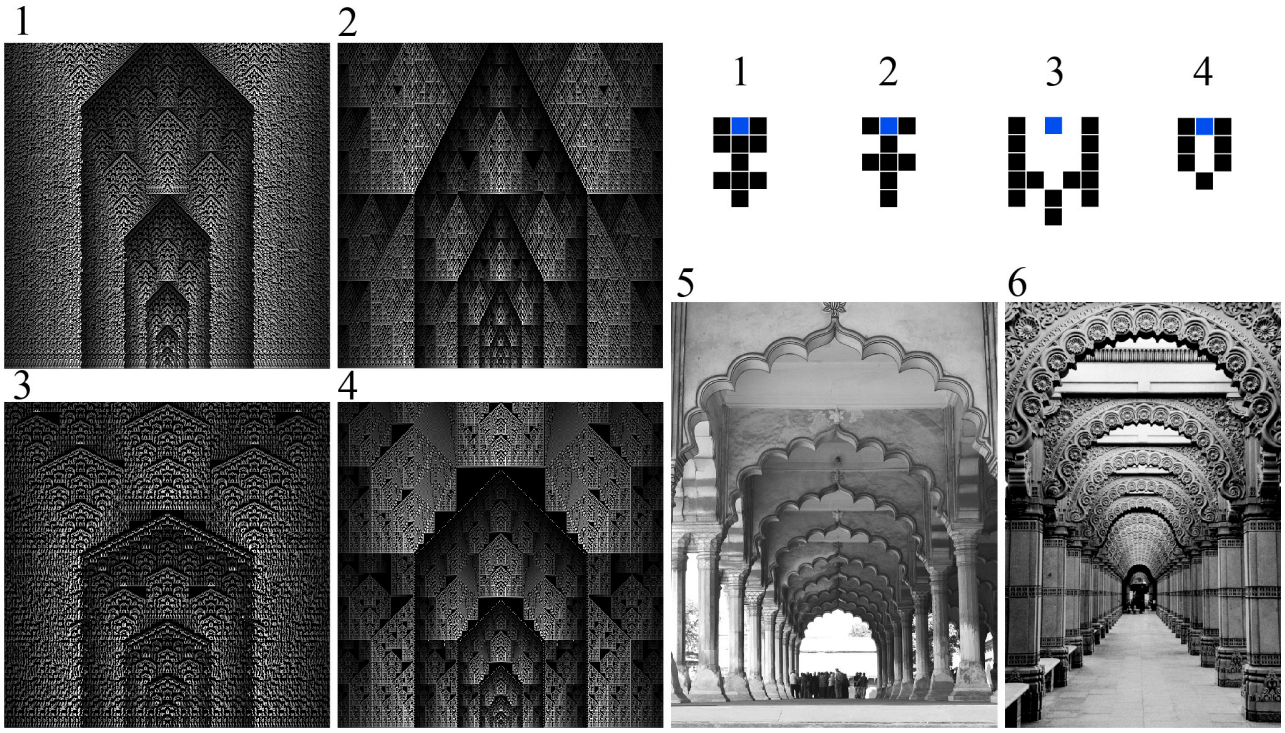

图8：(1)~(4)：使用递归梯度剖析生成的不同邻域 UWCA。(5)：阿格拉阿格拉堡（© Herojit Waikhom 2012年，来自维基共享资源）和 (6)：BAPS斯瓦米纳拉扬阿克萨达姆连续拱形结构（© Vivek Varma 2023年，来自 Unsplash）。UWCA 图案类似于阿拉伯式和印度教寺庙中拱门的连续排列。在两幅图像中，拱门随着空间深度逐渐增加而按比例缩小，最终汇聚于消失点。这种视觉韵律与 UWCA 结构固有的自相似性特征十分契合。

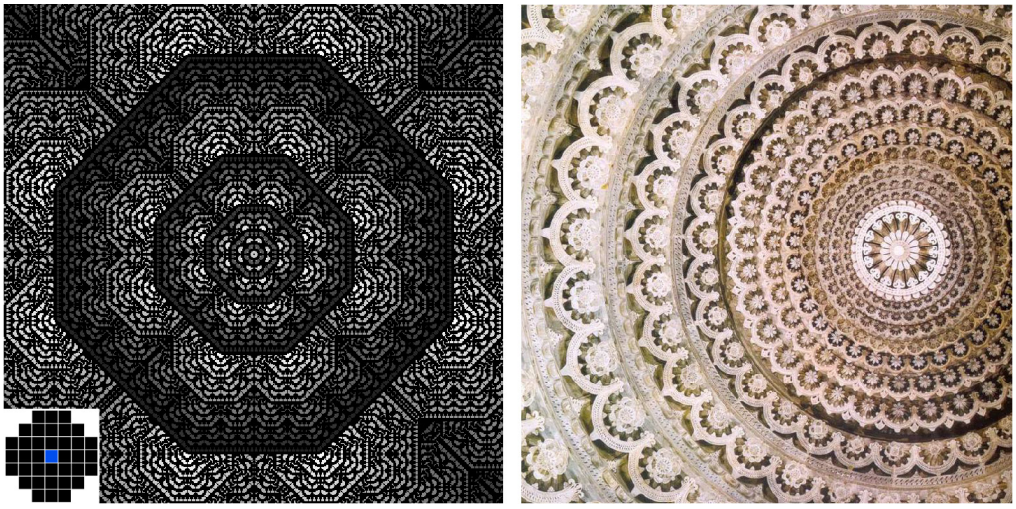

图9：左：使用梯度剖析和替代邻域生成的 UWCA。右：Lila Mandapam 的穹顶 [The Divine India 2024]。穹顶的同心图案从中心向外扩展，形成径向视觉结构。同样，左侧的 UWCA 图案呈现出从中心点向外延展的扇形，这是由递归生长产生的，与穹顶的几何扩展相呼应。

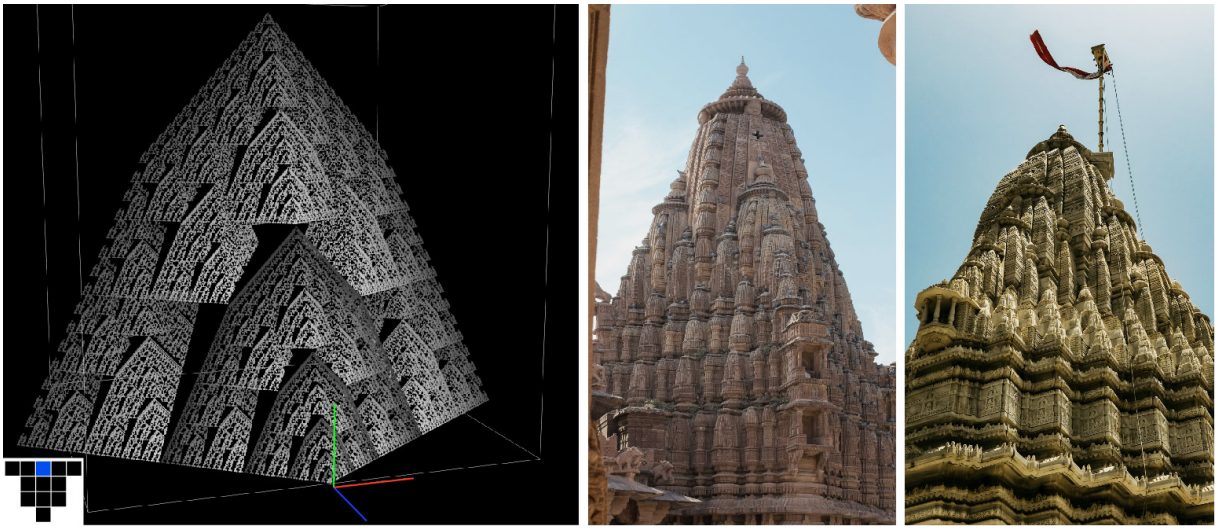

图10：左：采用替代邻域的 UWCA 时空可视化，每一代都沿蓝色坐标轴的负方向生长。中、右：阿达尼香提格拉姆耆那教寺庙（© Laura Lezman 2025年，图片来自 Unsplash）和曼多尔的印度教寺庙（© Yudhajit Ghosh 2025年，图片来自 Unsplash）。通过将时间视为时空图中的纵轴，每一层新生细胞都会形成层层递进的阶梯状结构。这种视觉上的层叠让人联想到寺庙中层层递升的结构。两者都在不同尺度上呈现模块化重复，体现了算法递归与象征性建筑分层之间的视觉类比。

除了 UWCA，递归梯度可视化方法也有望应用于其他具有类似生长规则的元胞自动机模型，例如一系列牙签序列元胞自动机。总体而言，这项工作展现了将复杂系统科学与文化艺术与设计相结合的新可能，并提供了一个连接计算、视觉设计与艺术诠释的生成式框架。

参考文献

Gabriel Acosta。2025年。《现实的递归架构：爱如何驱动宇宙运行》。Principia Recursionis。https://www.principiarecursionis.com/post/the-recursive-architecture-of-reality-how-love-operates-the-universe 访问日期：2025- 12-29。David Applegate、Omar E Pol 和 Neil JA Sloane。2010年。牙签序列及其他元胞自动机序列。*arXiv*预印本 *arXiv:1004.3036* (2010)。Michael Batty。2000年。利用元胞自动机进行地理计算。载于《地理计算》。纽约：泰勒与弗朗西斯出版集团，95–126。Michael Batty。2007年。《城市与复杂性：运用元胞自动机、基于主体的模型和分形理解城市》。麻省理工学院出版社。Armin Bunde 和 Shlomo Havlin。2013年。《科学中的分形》。施普林格。JW Cannon。1984年。Benoit B. Mandelbrot 所著《自然的分形几何》。《美国数学月刊》91, 9 (1984), 594–598。Wen-Shiung Chen、Shang-Yuan Yuan 和 Chih-Ming Hsieh。2003年。两种估算灰度图像分形维数的算法。《光学工程》42, 8 (2003), 2452–2464。John Conway 等。1970年。生命游戏。《科学美国人》223, 4 (1970), 4。Stephen Coombes。2009年。海贝的几何形态与色素沉着。诺丁汉：诺丁汉大学数学科学系(2009)。Kenneth Falconer。2013年。《分形几何：数学基础与应用》。约翰·威立父子出版公司。Kayhan Foroutan-pour、Pierre Dutilleul 和 Donald L Smith。1999年。分形维数估算中盒计数法实现方面的进展。《应用数学与计算》105, 2-3 (1999), 195–210。Greg Gbur。2011年。即使在无限镜中，无限也很奇妙。https://skullsinthestars.com/2011/07/30/infinity-is-weird-even-in-infinity-mirrors/ 访问日期：2026-01-04。Akane Kawaharada。2014a。乌拉姆元胞自动机生成的分形图案。载于*2014*年第二届计算与网络国际研讨会。IEEE，484–486。Akane Kawaharada。2014年。乌拉姆元胞自动机与规则150。《北海道数学杂志》43, 3 (2014), 361–383。First Last。2025年。元胞自动机。载于《地理学百科全书》，Barney Warf（编）。SAGE Publications，加利福尼亚州千橡市。Larry S Liebovitch 和 Tibor Toth。1989年。一种通过盒计数法快速确定分形维数的算法。《物理学快报*A*辑》141, 8-9 (1989), 386–390。Fumio Okura。2022年。植物与树木的三维建模和重建：对计算机图形学、视觉和植物表型分析的跨领域综述。《育种科学》72, 1 (2022), 31–47。Norman H Packard 和 Stephen Wolfram。1985年。二维元胞自动机。《统计物理学杂志》38, 5 (1985), 901–946。Wojciech Palubicki、Kipp Horel、Steven Longay、Adam Runions、Brendan Lane、Radomír Měch 和 Przemyslaw Prusinkiewicz。2009年。用于图像合成的自组织树木模型。《*ACM*图形学汇刊》*(TOG)*28, 3 (2009), 1–10。Heinz-Otto Peitgen、Hartmut Jürgens、Dietmar Saupe 和 Mitchell J Feigenbaum。2004年。《混沌与分形：科学新前沿》。第106卷。施普林格。Dagmar Reinhardt。2012年。《*Youtopia*：对黑暗的热情：数字过程与戏剧表演交汇处的建筑》。Freerange Press。Iasef Md Rian、Jin-Ho Park、Hyung Uk Ahn 和 Dongkuk Chang。2007年。坎达里亚·马哈德夫神庙（克久拉霍）中作为印度教宇宙观综合体现的分形几何。《建筑与环境》42, 12 (2007), 4093–4107。Nirupam Sarkar 和 Bidyut Baran Chaudhuri。1994年。一种高效的差分盒计数法，用于计算图像的分形维数。《*IEEE*系统、人类与控制论汇刊》24, 1 (1994), 115–120。Joel L Schiff。2011年。《元胞自动机：世界的离散视角》。约翰·威立父子出版公司。Ian Stewart。2006年。《如何切蛋糕：以及其他数学难题》。牛津大学出版社。The Divine India。2024年。阿克萨达姆神庙的精美天花板设计。https://www.thedivineindia.com/beautiful-ceiling-design-at-akshardham-temple/image/85。Kirti Trivedi。1989年。印度教寺庙：分形宇宙的模型。《视觉计算机》5, 4 (1989), 243–258。Stanislaw Ulam 等。1962年。关于与图形生长模式相关的一些数学问题。载于《应用数学专题讨论会论文集》，第14卷。美国数学学会（美国罗德岛州普罗维登斯），215–224。Stuart Watling。2009年。中世纪的“镜中镜”：物体在自身内部的呈现。英国考陶尔德艺术学院，英国，*2*月(2009), 1–2。Stephen Wolfram 和 M Gad-el Hak。2003 56, 2 2003 18 19。《一种新科学》。《应用力学评论》( ), B –B。Neda Zekrizadeh、Ahmad Khademzadeh 和 Mehdi Hosseinzadeh。2019年。一种基于成本的在线作业调度方法：在云计算环境中使用元胞自动机。《无线个人通信》105, 3 (2019), 913–939。