Ecalle 的双形运输与 Brown 提升

Hanamichi Kawamura

Abstract. Brown 提升过程表明，可以从线性化双 shuffle 方程的解求得模乘积的双 shuffle 方程的解。本文揭示，这一过程可在 Ecalle 的双形运输框架下加以描述。

arXiv:2601.17424v1 [math.QA] 24 Jan 2026

1. Introduction

我们一直关注群 DMR_0 与李代数 $\mathfrak{dmr}_0$ 框架下的双 shuffle 结构。它们最初是在非交换幂级数（或多项式）环中提出的，但还有另一种框架，它是在 Ecalle 创立的所谓屈曲理论中构造的。特别是，研究模乘积的双 shuffle 方程的具体解（= 即 $\mathfrak{dmr}_0$的一个元素）十分重要。Brown [B] 得到了若干组这样的解，而 Matthes–Tasaka [MT] 开始比较 Brown 与 Ecalle 的解。此外，最近 Furusho–Hirose–Komiyama [FHK]揭示，Brown 的一组解 $\{\psi_{2n+1}\}_n$可以精确地描述为 Ecalle 的极点孤立子。另一方面，Brown [B] 与 Ecalle [E1]也分别独立提出了一种方法：通过提升每个“线性化”双 shuffle 方程的解 $f \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}$，得到允许存在某些极点的双 shuffle 方程的解 $\chi_B(f)$ $\chi_E(f) \in \mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$。本文揭示，Brown 提升 $\mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}} \ni f \mapsto \chi_B(f) \in \mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$ 本质上与算子 adari(par) 一致，而后者是 Ecalle 提升的一个例子。

定理 1.1。我们有

$$\mathsf{swap} \circ \mathsf{anti} \circ \chi_B = \mathsf{adari}(\mathsf{par}) \circ \mathsf{swap} \circ \mathsf{anti}.$$

尽管原始预印本 [B] 没有给出证明，即 $\chi_B(f)$ 对每个 $f \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}$ 在 $\mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$ 中给出一个解，但 Kimura–Tasaka 的报告 [KT] 将这一断言作为一个开放猜想提出。借助定理 1.1 和埃卡尔的双形运输理论，我们可以对此给出肯定的回答。

推论 1.2。对于任意 $f \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}$，我们有 $\chi_B(f) \in \mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$。

Acknowledgements

作者谨此感谢 Ayu Kawamura 对改进本文术语和表述提出的宝贵建议。

2. Matthes–Tasaka's setting and flexions

2.1. 一些函数集。我们基本上采用 Matthes–Tasaka [MT] 以及作者系列论文 [Ka1], [Ka2]中的约定。deck $\mathcal{F}$ 应选择为包含这一互共轭对的屈曲元

$$\mathsf{Pa}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} := \frac{1}{u_1}, \quad \text{and} \quad \mathsf{Pi}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} := \frac{1}{v_1}.$$

为便于与 Brown 的工作进行比较，基域 $\mathbb{K}$ 取为 $\mathbb{Q}$；但此处我们指出，本文中的所有弯曲理论论证都适用于满足 $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) = 0$ 的任意基域 $\mathbb{K}$。正如我们在

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11M32, 16B05.

Key words and phrases. 双 shuffle 方程、弯曲、二态性。

[Ka2], 除非相关，否则在若干记号中通常省略关于 $\mathcal{F}$ 和 R 的信息。我们用 BIMU$^{\text{v-cst}}$ （分别用 BIMU$^{\text{u-cst}}$ ）表示 BIMU(R) 的子集，其中包含所有不依赖于下层（分别为上层）变量的双胚。

定义 2.1. (1) 设 $\mathcal{Q}$ 为该空间的直和 $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{Q}_k$

$$\mathcal{Q}_k := \left\{ f=(f^{(r)})_r \in \prod_{r\geq 0}\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_r) \;\middle|\; \deg(f^{(r)})=k-r \ (r\geq 0) \right\}.$$

注意， $\mathbb{Q}(x_1,\ \dots,\ x_0) := \mathbb{Q}$ ，且元素 0 可以具有任意次数。

(2) $\mathcal{Q}$ 的子集 $\mathcal{G}$ （分别地， $\mathcal{L}$）定义为所有以 1（分别地，0）作为其 $r=0$ 分量的元素所组成的集合。(3) 我们取 $\mathcal{Q}$ 的一个副本 $\mathcal{Q}$ （分别地， $\mathcal{Q}$），并通过由 $x_i\mapsto u_i$ （分别地，$x_i\mapsto v_i$）确定的嵌入，将其视为 BIMU$^{\text{v-cst}}(\mathbb{Q})$（分别地，BIMU$^{\text{u-cst}}$）的子集。(4) 类似地，我们用 $\mathcal{G}$、 $\mathcal{G}$、 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{L}$ 的适当副本，使其与 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{L}$ 的定义相容。 $(\mathbb{Q}))$

根据上述识别，我们称元素 $f=(f^{(r)})_r\in\mathcal{Q}$ （或 $\mathcal{Q}$）具有一个长度为 r 的分量，其中可以包含次数各异的项。注意， $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{Q}$ 关于此长度滤过并未完备，但这无关紧要，因为我们总是在将它们视为 BIMU 的子集之后进行讨论。根据定义，我们有

$$\overline{\mathcal{G}}=\mathsf{MU}\cap\overline{\mathcal{Q}},\quad \overline{\mathcal{L}}=\mathsf{LU}\cap\overline{\mathcal{Q}},$$
$$\underline{\mathcal{G}}=\mathsf{MU}\cap\underline{\mathcal{Q}},\quad \underline{\mathcal{L}}=\mathsf{LU}\cap\underline{\mathcal{Q}}.$$

两类音乐变音记号

$$f^\sharp(x_1,\dots,x_r) := f(x_1,x_1+x_2,\dots,x_1+\cdots+x_r),$$
$$f^\flat(x_1,\dots,x_r) := f(x_1,x_2-x_1,\dots,x_r-x_{r-1})$$

在 [MT 的 §2.4], 中分别视为映射 $\sharp\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$ 和 $\flat\colon\mathcal{Q}\to\overline{\mathcal{Q}}$.

定义 2.2 （Ihara 括号； [MT，定义 4.1]）。设 f 和 g 是 $\mathcal{L}$ 的元素。则我们将 Ihara 括号定义为.....的交换子

$$\{f,g\} := f\circledcirc g - g\circledcirc f$$

Ihara 作用 $\circ$ ，它由双线性性给出，并且

$$\begin{aligned}(f^{(r)}\circledcirc g^{(s)})&(x_1,\dots,x_{r+s})\\ &:=\sum_{i=0}^{s} f^{(r)}(x_{i+1}-x_i,\dots,x_{i+r}-x_i)g^{(s)}(x_1,\dots,x_i,x_{i+r+1},\dots,x_{r+s})\\ &\quad+(-1)^r\sum_{i=1}^{s} f^{(r)}(x_{i+r}-x_{i+r-1},\dots,x_{i+r}-x_i)g^{(s)}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+r},\dots,x_{r+s}).\end{aligned}$$

根据定义，下面的断言显然成立。

引理 2.3。 对于任意 $g\in\mathcal{L}$, 其 Ihara 作用由下式给出

$$f\mapsto f\circledcirc g=\mathsf{axit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(f),f)(g)+\mathsf{mu}(f,g).$$

这里我们还介绍了用于 [B] 和 [MT] 的双 shuffle 方程框架。符号 x 表示变量序列的通常 s huffle 积。我们通常采用以下约定

即 $\mathcal{Q}$ 中的一个元素对于变量序列的线性组合呈线性行为。例如，我们写作

$$f((x_1,x_2)\sqcup\!\sqcup(x_3))=f(x_1,x_2,x_3)+f(x_1,x_3,x_2)+f(x_3,x_1,x_2).$$

调和积 $*$定义为一种类似的 $\mathbb{Q}(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots)$-双线性乘积，它由以下规则确定： $\varnothing\mathbf{x}\,\mathbf{x}=\mathbf{x}\,\mathbf{x}\,\varnothing=\mathbf{x}$ 以及

$$((x_i)\uplus\mathbf{x})*((x_j)\uplus\mathbf{x}')=(x_i)\uplus(\mathbf{x}*((x_j)\uplus\mathbf{x}'))+(x_j)\uplus(((x_i)\uplus\mathbf{x})*\mathbf{x}')+\frac{1}{x_i-x_j}(\mathbf{x}*\mathbf{x}'),$$

其中 $\uplus$ 表示序列拼接。

定义 2.4。我们定义子空间 pace $\mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}\subseteq\underline{\mathcal{L}}$ 为所有 y 函数 $f\in\underline{\mathcal{L}}$ 满足 ying[1]

(1) $f_{(1)}(x_1)=f^{(1)}(-x_1)$, (2) $f^{(r+s)}((x_1,\ldots,x_r)\,\mathrm{x}\,(x_{r+1},\ldots,x_{r+s}))$ $=0$ 对 $r,s\geq 1$, (3) $(f^{(r+s)})^{\sharp}((x_1,\ldots,x_r)\,\mathrm{x}\,(x_{r+1},\ldots,x_{r+s}))=0$ 对 $r,s\geq 1$。

类似地，我们用 $\mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}\subseteq\mathcal{L}$ 表示由所有满足 (1)、(3) 以及

$$f^{(r+s)}((x_1,\ldots,x_r)*(x_{r+1},\ldots,x_{r+s}))=0 \tag{2.1}$$

对每个 $r,s\geq 1$。

注2.5. 根据定义， $\mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}$ 等于 $\mathcal{L}$ 与 $\mathrm{ARI}^{\mathrm{al/al}}$的交集。此外，空间$\mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$是 $\mathcal{L}\cap\underline{\mathrm{swap}}(\mathrm{ARI}^{\mathrm{al/il}})$，其中 il 表示 Pi-交替性（= 交替性）。后一个巧合可由 Komiyama 的结果 [Ko] 验证；该结果表明，条件 (2.1) 与使用 ganit(pic) 定义的交替性本质上等价。

根据上述注记，假设定理 1.1，我们可以如下证明推论 1.2。由于算子 anti 保持 alternality 和交替性，只需证明对于任意 $f\in\mathfrak{ls}_{\mathcal{Q}}$，$(\mathrm{swap}\circ\mathrm{anti}\circ\chi_B)(f)\in\mathrm{ARI}^{\mathrm{al/il}}$。由于 f 是 $\mathrm{ARI}^{\mathrm{al/al}}$ 的元素，$-(\mathrm{swap}\circ\mathrm{anti})(f)$ 也是。因此，由定理 1.1 可得

$$(\mathrm{swap}\circ\mathrm{anti}\circ\chi_B)(f)\in\mathrm{adari}(\mathrm{par})(\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}}).$$

如 [Ka2 定理 3.5] 所示，右边等于 $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{al/il}}$。

2.2. **变形**。 根据定义以及我们在上一小节给出的对应关系，可知 $\sharp=(\mathrm{swap}\circ\mathrm{anti})|_{\mathcal{Q}}$ 和 $\flat=(\mathrm{anti}\circ\mathrm{swap})|_{\mathcal{Q}}$ 成立。此外，我们给出 ila-括号的定义

$$\begin{aligned}\mathrm{preila}(A,B)&:=\mathrm{ilat}(B)(A)+\mathrm{mu}(A,B):=\mathrm{axit}(B,(\mathrm{neg}\circ\mathrm{pari}\circ\mathrm{anti})(B))(A),\\ \mathrm{ila}(A,B)&:=\mathrm{preila}(A,B)-\mathrm{preila}(B,A),\end{aligned}$$

对于 $A,B\in\mathrm{LU}$。

引理 2.6。 设 $f,g\in\mathcal{L}$。则有

$$\{f,g\}=\mathrm{anti}(\mathrm{ila}(\mathrm{anti}(g),\mathrm{anti}(f))).$$

证明。 由于 anti 关于 mu-乘积 [Ka1 是反同态，由引理 2.8], 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{anti}(\mathrm{ila}(\mathrm{anti}(g),\mathrm{anti}(f)))\\ &=(\mathrm{anti}\circ\mathrm{ilat}(\mathrm{anti}(f))\circ\mathrm{anti})(g)-(\mathrm{anti}\circ\mathrm{ilat}(\mathrm{anti}(g))\circ\mathrm{anti})(f)\\ &\qquad+\mathrm{anti}(\mathrm{mu}(\mathrm{anti}(g),\mathrm{anti}(f)))-\mathrm{anti}(\mathrm{mu}(\mathrm{anti}(f),\mathrm{anti}(g)))\\ &=(\mathrm{anti}\circ\mathrm{ilat}(\mathrm{anti}(f))\circ\mathrm{anti})(g)-(\mathrm{anti}\circ\mathrm{ilat}(\mathrm{anti}(g))\circ\mathrm{anti})(f)+\mathrm{mu}(f,g)-\mathrm{mu}(g,f),\end{aligned}$$

[1]正如 [KT], 中所指出的，在 pdmt B [中空间], 的定义里（该空间应与我们的 $\mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$一致），缺少奇偶条件 (1)。

而 Ihara 括号根据引理 2.3 计算为

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= f \circeq g - g \circeq f \\ &= \mathsf{axit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(f),f)(g) - \mathsf{axit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(g),g)(f) + \mathsf{mu}(f,g) - \mathsf{mu}(g,f).\end{aligned}$$

因此，只需证明等式

$$(\mathsf{anti}\circ\mathsf{ilat}(\mathsf{anti}(f))\circ\mathsf{anti})(g) = \mathsf{axit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(f),f)(g)$$

因为此恒等式以及交换 $f \leftrightarrow g$ 后得到的恒等式，便能推出所需的等式。由于对于任意 $A \in \mathrm{LU}$，都有 $\mathsf{anti}\circ\mathsf{amit}(\mathsf{anti}(A))\circ\mathsf{anti} = \mathsf{anit}(A)$ 成立，因此我们有

$$\begin{aligned}&(\mathsf{anti}\circ\mathsf{ilat}(\mathsf{anti}(f))\circ\mathsf{anti})(g) \\ &= (\mathsf{anti}\circ\mathsf{amit}(\mathsf{anti}(f))\circ\mathsf{anti})(g) + (\mathsf{anti}\circ\mathsf{anit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari})(f))\circ\mathsf{anti})(g) \\ &= \mathsf{anit}(f)(g) + \mathsf{amit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(f))(g) \\ &= \mathsf{axit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti})(f),f)(g),\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

这里我们不直接给出定义，而是通过说明辅助运算 $\circ_{\mathsf{ari}}$ 和括号 $\{-,-\}_{\mathsf{ari}}$ （在 [MT]，中讨论）与原有屈曲结构的关系，回顾它们。如 [MT, §3.2]，中所述，它们分别是限制在 $\mathrm{BIMU}^{\text{v-cst}}$ 和 $\mathrm{LU}^{\text{v-cst}}$ 上的通常 preari 和 ari 括号，这一点可立即看出：

$$f \circeq_{\mathsf{ari}} g = \mathsf{preari}(g,f), \quad \{f,g\}_{\mathsf{ari}} = \mathsf{ari}(g,f)$$

对于任意 f，$\overline{g} \in \mathcal{L}$。我们还注意到，在 [MT, §4.2] 中引入的空间 $\mathcal{V}$ 与 $\mathrm{ARI}^{\text{u-cst}}_{\mathsf{mantar}} := \mathrm{ARI}_{\mathsf{mantar}} \cap \mathrm{LU}^{\text{u-cst}}$ 一致，因为 $\mathcal{V}$ 被定义为所有满足以下条件的 $f \in \mathcal{L}$ 所构成的空间（任意长度下均成立）：

$$0 = f(x_1,\dots,x_r) + (-1)^r f(x_1,\dots,x_r) = (f - \mathsf{mantar}(f))(x_1,\dots,x_r).$$

因此，下面的推论为 [MT，命题 4.5] 提供了另一种证明。

推论 2.7 ([MT，命题 4.5])。 对于所有 f，$g \in \mathcal{V}$，我们有 $\{f,g\}^{\flat}_{\mathsf{ari}} = \{f^{\flat}, g^{\flat}\}$。

证明。 由引理 2.6，只需证明

$$(\mathsf{anti}\circ\mathsf{swap})(\mathsf{ari}(G,F)) = \mathsf{anti}(\mathsf{ila}(\mathsf{swap}(G),\mathsf{swap}(F))) \tag{2.2}$$

对于所有 F，$G \in \mathrm{ARI}_{\mathsf{mantar}}$。 利用 Schneps 恒等式 [S、(2.4.7)、(2.4.8)], , 即

$$(\mathsf{swap}\circ\mathsf{amit}(\mathsf{swap}(A))\circ\mathsf{swap})(B) = \mathsf{amit}(A)(B) + \mathsf{mu}(B,A) - \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(\mathsf{swap}(B),\mathsf{swap}(A)))$$

and

$$(\mathsf{swap}\circ\mathsf{anit}(\mathsf{swap}(A))\circ\mathsf{swap})(B) = \mathsf{anit}(\mathsf{push}(A))(B),$$

这些等式对任意 $A \in$LU 和 $B \in$ BIMU 均成立，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\mathsf{ila}(\mathsf{swap}(G),\mathsf{swap}(F)) \\ &= \mathsf{ilat}(\mathsf{swap}(F))(\mathsf{swap}(G)) - \mathsf{ilat}(\mathsf{swap}(G))(\mathsf{swap}(F)) + \mathsf{swap}(\mathsf{swamu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{swamu}(F,G)) \\ &= \mathsf{amit}(\mathsf{swap}(F))(\mathsf{swap}(G)) - \mathsf{amit}(\mathsf{swap}(G))(\mathsf{swap}(F)) + \mathsf{anit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti}\circ\mathsf{swap})(F))(\mathsf{swap}(G)) - \\ &\quad \mathsf{anit}((\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti}\circ\mathsf{swap})(G))(\mathsf{swap}(F)) + \mathsf{swap}(\mathsf{swamu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{swamu}(F,G)) \\ &= \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(F)(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(G)(F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(F,G)) \\ &\quad + \mathsf{swap}(\mathsf{anit}((\mathsf{push}\circ\mathsf{swap}\circ\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti}\circ\mathsf{swap})(F))(G)) \\ &\quad - \mathsf{swap}(\mathsf{anit}((\mathsf{push}\circ\mathsf{swap}\circ\mathsf{neg}\circ\mathsf{pari}\circ\mathsf{anti}\circ\mathsf{swap})(G))(F))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{swap}(\mathsf{amit}(F)(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(G)(F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(F,G)) \\
=\ & - \mathsf{swap}(\mathsf{anit}((\mathsf{push}\circ\mathsf{swap}\circ\mathsf{neg}\circ\mathsf{mantar}\circ\mathsf{swap})(F))(G)) \\
& + \mathsf{swap}(\mathsf{anit}((\mathsf{push}\circ\mathsf{swap}\circ\mathsf{neg}\circ\mathsf{mantar}\circ\mathsf{swap})(G))(F)) \\
=\ & \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(F)(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(G)(F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(F,G)) \\
& - \mathsf{swap}(\mathsf{anit}(\mathsf{mantar}(F))(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{anit}(\mathsf{mantar}(G))(F))
\end{aligned}
$$

其中在最后一个等式中，我们使用了恒等式

$$\mathsf{push} = \mathsf{neg}\circ\mathsf{mantar}\circ\mathsf{swap}\circ\mathsf{mantar}\circ\mathsf{swap}.$$

由于 F an d G被假设为 mantar-不变，上述计算最终验证了 s

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{ila}(\mathsf{swap}(G),\mathsf{swap}(F)) \\
&= \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(F)(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(G,F)) - \mathsf{swap}(\mathsf{amit}(G)(F)) \\
&\quad - \mathsf{swap}(\mathsf{mu}(F,G)) - \mathsf{swap}(\mathsf{anit}(F)(G)) + \mathsf{swap}(\mathsf{anit}(G)(F)) \\
&= \mathsf{swap}(\mathsf{preari}(G,F) - \mathsf{preari}(F,G)) \\
&= \mathsf{swap}(\mathsf{ari}(G,F)),
\end{aligned}
$$

这表明（2.2）。 □

3. Dilators

我们回顾 gari-膨胀子的定义，见 [E2, (28)]。

定义 3.1 （[E2, (17)]。 对于 $S \in$MU，我们通过等式定义 S 的 gari 膨胀子 di$S \in$ LU

$$\mathsf{der}(S) = \mathsf{preari}(S, \mathsf{di}S).$$

由于 gari-乘积的线性化给出了 preari 运算

$$\mathsf{gari}(A, 1+\varepsilon B) = A + \varepsilon\mathsf{preari}(A,B) \pmod{\varepsilon^2}$$

如 [S, (2.8.4)], 所示，我们可以说膨胀子也定义为

$$1 + \varepsilon\mathsf{di}S = \mathsf{gari}(\mathsf{invgari}(S), \exp(\varepsilon\mathsf{der})(S)). \tag{3.1}$$

本节旨在证明以下定理，这是证明主定理 1.1 最关键的部分。对于 $A \in$LU，我们用 ari(A) 表示李代数 ARI 上的伴随作用： —

$$\underline{\mathsf{ari}}(A)(B) \coloneqq \mathsf{ari}(A,B) \quad (A,B \in \mathsf{LU}).$$

定理 3.2 ([E2, (42)]). 设 S 是 MU 的一个元素。那么我们有以下 LU $\to$ LU 的线性映射恒等式:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{adari}(S) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_s\geq 1} \frac{1}{r_1(r_1+r_2)\cdots(r_1+\cdots+r_s)} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{di}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{di}S)), \\
\mathsf{adari}(S) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_s\geq 1} \frac{1}{r_1(r_1+r_2)\cdots(r_1+\cdots+r_s)} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{diri}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{diri}S)),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中，ri$S$ 表示 S 的 gari-逆元 invgari(S)，上述各个和式中的 $s = 0$ 项视为恒等映射。

引理 3.3. 线性算子 der 是关于二元运算 preari 的导子。因此，它也给出了李代数 ARI 上的导子。

证明。 设 A 和 B 是 BIMU 中的两个元素。由于 der 是结合代数 BIMU 上的导子,

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{mu}(\mathsf{der}(A),B)+\mathsf{mu}(A,\mathsf{der}(B)))(w_1\cdots w_r)\\
&=\sum_{i=0}^{r}\mathsf{der}(A)(w_1\cdots w_i)B(w_{i+1}\cdots w_r)+\sum_{i=0}^{r}A(w_1\cdots w_i)\mathsf{der}(B)(w_{i+1}\cdots w_r)\\
&=\sum_{i=0}^{r}iA(w_1\cdots w_i)B(w_{i+1}\cdots w_r)+\sum_{i=0}^{r}(r-i)A(w_1\cdots w_i)B(w_{i+1}\cdots w_r)\\
&=r\sum_{i=0}^{r}A(w_1\cdots w_i)B(w_{i+1}\cdots w_r)\\
&=\mathsf{der}(\mathsf{mu}(A,B))(w_1\cdots w_r),
\end{aligned}$$

只需证明该恒等式

$$\mathsf{der}(\mathsf{arit}(B)(A))=\mathsf{arit}(\mathsf{der}(B))(A)+\mathsf{arit}(B)(\mathsf{der}(A))$$

在 $B\in$LU 的情形下。事实上，通过简单计算可得等式

$$\mathsf{der}(\mathsf{amit}(B)(A))=\mathsf{amit}(\mathsf{der}(B))(A)+\mathsf{amit}(B)(\mathsf{der}(A))$$

通过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{amit}(\mathsf{der}(B))(A)+\mathsf{amit}(B)(\mathsf{der}(A)))(\mathbf{w})\\
&=\sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{abc}\\ \mathbf{c}\neq\varnothing}}(A(\mathbf{a_b}\lceil\mathbf{c})\mathsf{der}(B)(\mathbf{b}\rfloor_{\mathbf{c}})+\mathsf{der}(A)(\mathbf{a_b}\lceil\mathbf{c})B(\mathbf{b}\rfloor_{\mathbf{c}}))\\
&=\sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{abc}\\ \mathbf{c}\neq\varnothing}}(\ell(\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{a_b}\lceil\mathbf{c})B(\mathbf{b}\rfloor_{\mathbf{c}})+(\ell(\mathbf{a})+\ell(\mathbf{c}))A(\mathbf{a_b}\lceil\mathbf{c})B(\mathbf{b}\rfloor_{\mathbf{c}}))\\
&=\ell(\mathbf{w})\sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{abc}\\ \mathbf{c}\neq\varnothing}}A(\mathbf{a_b}\lceil\mathbf{c})B(\mathbf{b}\rfloor_{\mathbf{c}})\\
&=\mathsf{der}(\mathsf{amit}(B)(A))(\mathbf{w}),
\end{aligned}$$

以及恒等式

$$\mathsf{der}(\mathsf{anit}(B)(A))=\mathsf{anit}(\mathsf{der}(B))(A)+\mathsf{anit}(B)(\mathsf{der}(A))$$

采用非常类似的方法即可证明。 □

在下文中 下文中，我们分别用 $L(S)$ 和 $R(S)$ 表示 (3.2) 式的右端项 y.

引理 3.4。 对于任意 $S\in$MU，我们有恒等式

$$[\mathsf{der},L(S)]=L(S)\circ\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S)$$

and

$$[\mathsf{der},R(S)]=-\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S)\circ R(S)$$

LU 上的线性算子。

证明。 我们将计算括号 $[\mathsf{der}\ L(S)]$: 由于引理 3.3 成立，我们有

$$\begin{aligned}
[\mathsf{der},L(S)]=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_s\geq1}&\frac{1}{r_1\cdots(r_1+\cdots+r_s)}\\
&\cdot[\mathsf{der},\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{di}S))\circ\cdots\circ\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{di}S))]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_s\geq 1} \frac{1}{r_1\cdots(r_1+\cdots+r_s)} \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{i=1}^{s} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{di}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_{i-1}}(\mathsf{di}S)) \\
&\qquad \circ \underline{\mathsf{ari}}((\mathsf{der}\circ \mathsf{leng}_{r_i})(\mathsf{di}S)) \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_{i+1}}(\mathsf{di}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{di}S)) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_s\geq 1} \sum_{i=1}^{s} \frac{r_i}{r_1\cdots(r_1+\cdots+r_s)} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{di}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{di}S)) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_{s-1}\geq 1} \frac{r_i}{r_1\cdots(r_1+\cdots+r_{s-1})} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{di}S)) \circ \cdots \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_{s-1}}(\mathsf{di}S)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \circ \sum_{r_s\geq 1} \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{di}S)) \\
&= L(S) \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S).
\end{aligned}
$$

最后一个等式可用类似的方法证明。 □

引理 3.5. 成立：

$$[\mathsf{der}, \mathsf{adari}(S)] = \mathsf{adari}(S) \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S) = -\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{diri}S) \circ \mathsf{adari}(S)$$

对任意 $S \in$MU。

证明。 由于 adari 是 GARI 在 ARI 上的伴随作用，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathsf{adari}(1+\varepsilon \mathsf{di}S) &= \mathsf{adari}(\mathsf{gari}(\mathsf{ri}S, \exp(\varepsilon\mathsf{der})(S))) \\
&= \mathsf{adari}(\mathsf{ri}S) \circ \mathsf{adari}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S)) \\
&= \mathsf{adari}(S)^{-1} \circ \mathsf{adari}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S))
\end{aligned}
$$

由 (3.1) 得到。另一方面，根据伴随作用的一般理论，$\mathsf{adari}(1+\varepsilon \mathsf{di}S) = \mathrm{id} + \varepsilon\mathsf{ari}(\mathsf{di}S)$ 成立。因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathsf{adari}(S) + \varepsilon\mathsf{adari}(S) \circ \underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S) &= \mathsf{adari}(S) \circ (\mathrm{id} + \varepsilon\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S)) \\
&= \mathsf{adari}(S) \circ \mathsf{adari}(1+\varepsilon\mathsf{di}S) \\
&= \mathsf{adari}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S)).
\end{aligned}
$$

由于引理 3.3 成立，我们看到 $\exp(\varepsilon\mathsf{der})$ 对 adari 呈分配性：

$$
\begin{aligned}
\exp(\varepsilon\mathsf{der}) \circ \mathsf{adari}(\mathsf{expari}(L)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp(\varepsilon\mathsf{der}) \underline{\mathsf{ari}}(L)^{\circ n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\mathsf{ari}}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(L))^{\circ n} \circ \exp(\varepsilon\mathsf{der}) \\
&= \mathsf{adari}((\mathsf{expari} \circ \exp(\varepsilon\mathsf{der}))(L)) \circ \exp(\varepsilon\mathsf{der}) \\
&= \mathsf{adari}((\exp(\varepsilon\mathsf{der}) \circ \mathsf{expari})(L)) \circ \exp(\varepsilon\mathsf{der})
\end{aligned}
$$

对任意 $L \in$ARI。注意，最后一个等式由引理 3.3 和该表达式得出

$$\mathsf{expari}(L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathsf{preari}(\underbrace{L, \cdots \mathsf{preari}(L, L)}_{n} \cdots).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{adari}(S)+\varepsilon\mathsf{adari}(S)\circ\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S) &= \mathsf{adari}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S))\\ &= \exp(\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(S)\circ\exp(-\varepsilon\mathsf{der})\\ &= (\mathrm{id}+\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(S)\circ(\mathrm{id}-\varepsilon\mathsf{der})\\ &= \mathsf{adari}(S)+\varepsilon[\mathsf{der},\mathsf{adari}(S)].\end{aligned}$$

比较 ε 的系数，得到所需的第一个等式。对于后一个等式，我们可以用类似的方法证明

$$\begin{aligned}\mathsf{adari}(S)-\varepsilon\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{diri}S)\mathsf{adari}(S) &= \mathsf{adari}(1-\varepsilon\mathsf{diri}S)\circ\mathsf{adari}(S)\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ\mathsf{adari}(\exp(-\varepsilon\mathsf{der})(\mathsf{ri}S))\circ\mathsf{adari}(S)\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ\exp(-\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(\mathsf{ri}S)\circ\exp(\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(S)\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ\exp(-\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(\mathsf{ri}S)\circ\mathsf{adari}(\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S))\circ\exp(\varepsilon\mathsf{der})\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ\exp(-\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(\mathsf{gari}(\mathsf{ri}S,\exp(\varepsilon\mathsf{der})(S)))\circ\exp(\varepsilon\mathsf{der})\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ\exp(-\varepsilon\mathsf{der})\circ\mathsf{adari}(1+\varepsilon\mathsf{di}S)\circ\exp(\varepsilon\mathsf{der})\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ(\mathrm{id}-\varepsilon\mathsf{der})\circ(\mathrm{id}+\varepsilon\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S))\circ(\mathrm{id}+\varepsilon\mathsf{der})\\ &= \mathsf{adari}(S)\circ(\mathrm{id}+\varepsilon\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S)).\end{aligned}$$

□

定理的证明　　*m 3.2.* 我们证明，等式 $[\mathsf{der}\ f]=f\circ\mathsf{ari}(\mathsf{di}S)$ 和初始条件　　n

$$f|_{\mathsf{BIMU}_r}\equiv\mathrm{id}\bmod\mathsf{BIMU}_{\geq r+1}\quad(r\geq 1)$$

确定了 LU 上的线性算子 f。由引理 3.4 和 3.5，这一断言可推出定理 3.2。对于整数 r 和 s，我们令

$$f_{r;s}\coloneqq\mathsf{leng}_{r+s}\circ f|_{\mathsf{BIMU}_r}\colon\mathsf{BIMU}_r\to\mathsf{BIMU}_{r+s}.$$

我们将验证 f 是归纳确定的，也就是说，$f_{r;s}$ 可表示为若干个$f_{r';\,j'}$的线性组合，其中r'和 $j\in\{0,1,\dots,s-1\}$。令 r 为正整数，且 $A\in\mathsf{BIMU}_r$。于是有

$$\begin{aligned}[\mathsf{der},f](A)&\equiv\mathsf{der}(f_{r;0}(A)+\cdots+f_{r;s}(A))-(f_{r;0}+\cdots+f_{r;s})(\mathsf{der}(A))\\ &= rf_{r;0}(A)+(r+1)f_{r;1}(A)+\cdots+(r+s)f_{r;s}(A)-r(f_{r;0}+\cdots+f_{r;s})(A)\\ &= (f_{r;1}+2f_{r;2}+\cdots+sf_{r;s})(A),\end{aligned}$$

模 $\mathsf{BIMU}_{\geq r+s+1}$，同时有

$$\begin{aligned}(f\circ\underline{\mathsf{ari}}(\mathsf{di}S))(A) &= \sum_{k\geq 1}f(\mathsf{ari}(\mathsf{leng}_k(\mathsf{di}S),A))\\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{t\geq 1}f_{k+r,t}(\mathsf{ari}(\mathsf{leng}_k(\mathsf{di}S),A))\\ &\equiv \sum_{\substack{k,t\geq 1\\ k+t\geq s}}f_{k+r,t}(\mathsf{ari}(\mathsf{leng}_k(\mathsf{di}S),A))\end{aligned}$$

模去同一个空间。因此，根据等式 $[\mathsf{der}\ f]=f\circ\mathsf{ari}(\mathsf{di}S)$，数据 $f_{i;j}(i\geq 1\,\mathrm{and}\,0\leq j<s)$ 确定了对所有 $r\geq 1$ 的 $f_{r;s}$。类似的方法表明，$[\mathsf{der}\ g]=-\mathsf{ari}(\mathsf{diri}S)\circ g$ 也确定了 $-g$。□

4. Brown's lifting

4.1. 作为膨胀子的成分 ψ_0

定义 4.1。 我们定义 $\psi_0 \in \mathcal{L}$，令其长度为 d 分量，即

$$\begin{aligned}&\psi_0(x_1,\dots,x_d)\\ &\quad\coloneqq \binom{d+1}{2}^{-1}\left(\frac{d}{x_1\cdots x_k}+\sum_{k=1}^{d-1}\frac{d-k}{(-x_k)(x_1-x_k)\cdots(x_{k-1}-x_k)(x_{k+1}-x_k)\cdots(x_d-x_k)}\right).\end{aligned}$$

我们回顾极性挠曲单位的互共轭对的定义

$$\mathsf{Pa}\binom{u_1}{v_1}\coloneqq\frac{1}{u_1},\quad \mathsf{Pi}\binom{u_1}{v_1}\coloneqq\frac{1}{v_1}.$$

记次级双模 par $\mathfrak{ess}$ 为 $\mathfrak{E}=\mathsf{Pa}$。

引理 4.2。 在包含 $\mathcal{L}\subseteq \mathrm{LU}^{\text{u-cst}}$下，我们有

$$\frac{1}{2}\mathsf{anti}(\psi_0)=\mathsf{darapir}\coloneqq\mathsf{swap}(\mathsf{diripar}). \tag{4.1}$$

证明。 首先我们回顾，对于每个幂级数 f 以及挠曲单位的一个互共轭对（$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{O}$），相关双模 $\mathfrak{Se}(f)$ 的 gari 膨胀子为

$$\mathsf{di}\mathfrak{Se}(f)=\mathfrak{Te}(f)=\sum_{r=1}^{\infty}\gamma_r^f\,\mathfrak{te}_r$$

根据 [Ka1，引理 6.16]。将其与 [Ka1，引理 6.8] 中关于 $\mathfrak{tö}_r=\mathsf{swap}(\mathfrak{te}_r)$ 的显式公式结合，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathsf{darapir}(w_1\cdots w_r)\\ &=\mathsf{swap}(\mathsf{diripar})(w_1\cdots w_r)\\ &=\mathsf{swap}(\mathsf{di}\mathfrak{Se}(\mathrm{e}^{-1})|_{\mathfrak{E}=\mathsf{Pa}})(w_1\cdots w_r)\\ &=\mathsf{swap}(\mathfrak{Te}(\mathrm{e}^{-1})|_{\mathfrak{E}=\mathsf{Pa}})(w_1\cdots w_r)\\ &=\gamma_r^{\mathrm{e}^{-1}}\mathfrak{tö}_r|_{\mathfrak{O}=\mathsf{Pi}}(w_1\cdots w_r)\\ &=\frac{1}{r(r+1)}\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\mathsf{pic}((w_1\cdots w_{i-1})\rfloor_{w_i})\mathsf{Pi}({}_{w_1\cdots w_{i-1}}\lceil w_i\rceil_{w_{i+1}\cdots w_r})\mathsf{pic}({}_{w_i}\lfloor(w_{i+1}\cdots w_r)),\end{aligned}$$

其中 pic 表示 $\mathfrak{oz}$ 关于 $\mathfrak{O}=\mathsf{Pi}$ 的主双模，也就是说，我们设

$$\mathsf{pic}(w_1\cdots w_r)\coloneqq\mathsf{invmu}(1-\mathsf{Pi})(w_1\cdots w_r)=\mathsf{Pi}(w_1)\cdots\mathsf{Pi}(w_r).$$

另一方面，根据定义，双模 ψ_0 表示为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathsf{anti}(\psi_0)(w_1\cdots w_r)\\ &=\frac{1}{2}\psi_0(w_r,\dots,w_1)\\ &=\frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{r}{v_r\cdots v_1}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{k=2}^{r}\frac{k-1}{(-v_k)(v_r-v_k)\cdots(v_{k+1}-v_k)(v_{k-1}-v_k)\cdots(v_1-v_k)}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r(r+1)}\Bigg(r\mathsf{pic}(w_1\cdots w_r) \\ -\sum_{k=2}^{r}(k-1)\mathsf{pic}((w_1\cdots w_{k-1})\rfloor_{w_k})\mathsf{Pi}(_{w_1\cdots w_{k-1}}\lceil w_k\rceil_{w_{k+1}\cdots w_r})\mathsf{pic}(_{w_k}\lfloor(w_{k+1}\cdots w_r))\Bigg).$$

用缩写 $w_i = \binom{u_i}{v_i}$ 表示。因此我们得到

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{darapir} - \frac{1}{2}\mathsf{anti}(\psi_0))(w_1\cdots w_r) \\
&= \frac{1}{r(r+1)}\Bigg(r\mathsf{Pi}(w_1\rceil_{w_2\cdots w_r})\mathsf{pic}(_{w_1}\lfloor(w_2\cdots w_r)) - r\mathsf{pic}(w_1\cdots w_r) \\
&\quad + r\sum_{i=2}^{r}\mathsf{pic}((w_1\cdots w_{i-1})\rfloor_{w_i})\mathsf{Pi}(_{w_1\cdots w_{i-1}}\lceil w_i\rceil_{w_{i+1}\cdots w_r})\mathsf{pic}(_{w_i}\lfloor(w_{i+1}\cdots w_r))\Bigg) \\
&= \frac{1}{r(r+1)}\Bigg(-r\mathsf{pic}\binom{u_2,\ldots,u_r}{v_2-v_1,\ldots,v_r-v_1}\mathsf{Pi}\binom{-u_1-\cdots-u_r}{-v_1} - r\mathsf{pic}(w_1\cdots w_r) \\
&\quad - r\sum_{i=2}^{r}\mathsf{pic}\binom{u_1,\ldots,u_{i-1}}{v_1-v_i,\ldots,v_{i-1}-v_i}\mathsf{Pi}\binom{-u_1-\cdots-u_r}{-v_i}\mathsf{pic}\binom{u_{i+1},\ldots,u_r}{v_{i+1}-v_i,\ldots,v_r-v_i}\Bigg) \\
&= \frac{1}{r(r+1)}\Bigg(-r\mathsf{push}^{\circ r}(\mathsf{pic})(w_1\cdots w_r) - r\mathsf{pic}(w_1\cdots w_r) - r\sum_{i=2}^{r}\mathsf{push}^{\circ(r+1-i)}(\mathsf{pic})(w_1\cdots w_r)\Bigg) \\
&= \frac{1}{r(r+1)}\Bigg(-r\mathsf{push}^{\circ r}(\mathsf{pic})(w_1\cdots w_r) - r\sum_{i=2}^{r+1}\mathsf{push}^{\circ(r+1-i)}(\mathsf{pic})(w_1\cdots w_r)\Bigg).
\end{aligned}$$

由于 Pi 是一个屈折单元，根据 [Ka1, Proposition 4.2 (3)]，双模 pic 是推中性的。因此，上述表达式等于 0。□

注记 4.3. 在 [E2], Ecalle 使用记号 da$S$（相应地，ra$S$）表示每个双模 $S \in$MU 的 gira-膨胀算子（相应地，gira-逆算子）。尽管我们将 darapir 定义为 diripar 的交换像，但可以证明，对任意 $S \in$ MU，均有一般等式 swap(dara$S$) = diri(swap(S))。

由巧合式 (4.1)，我们得到以下结果，其证明在原论文 [B] 中省略了。

推论 4.4 ([B, Theorem 14.2]). 我们有 $\psi_0 \in \mathfrak{ds}_{\mathcal{Q}}$。

证明。只需证明 diripar $= (1/2)(\mathsf{swap}\circ\mathsf{anti})(\psi_0) \in \mathsf{ARI}^{\mathsf{al/il}}$。根据定义，奇偶条件显然成立。par 的构造以及 [Ka1, Proposition 6.13] 表明 par 是对称的，因此 $\overline{\mathsf{ripar}}\ \overline{\ } \in \mathsf{GARI}_{\mathsf{as}}$。于是，根据 [Ka2, Proposition A.3]，我们有 diripar $\in \mathsf{ARI}_{\mathsf{al}}$。交换像的交替性是 [Ka2, Theorem A.6]的一个特例。□

注 4.5。Brown [B] 表示通过从 $\psi_0^{(d)}$ 的定义中去掉二项式系数因子所得到的有理函数。由此可见，[MT, §5.2], 中提到的 Witt 型恒等式 $\{s_m, s_n\} = (m-n)s_{m+n}$ 是 [Ka1, Proposition 6.9], 的一个特例，因为正如引理 4.2 的证明所示，每个 s_d 都恰好是 $\mathsf{anti}(\mathfrak{r\ddot{o}}_d)|_{\mathfrak{O}=\mathsf{Pi}}$。

4.2. **Brown 提升作为一种二态运输**。

定义 4.6. 设 $f = f^{(d)}$ 属于 $\mathcal{L}$。则我们定义

$$\chi_B(f)^{(i)} \coloneqq \begin{cases} f & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } 0 \le i < d, \end{cases}$$

并通过递归方程定义其高阶长度部分

$$\chi_B(f)^{(d+r)} = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{r} \{\psi_0^{(i)}, \chi_B(f)^{(d+r-i)}\}. \tag{4.2}$$

这里我们给出定理 1.1 的证明。反复应用 (4.2)，我们看到

$$\chi_B(f)^{(d+r)} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ r_1+\cdots+r_s=r \\ s\ge 1}} \frac{1}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \left\{ \frac{\psi_0^{(r_1)}}{2}, \left\{ \cdots \left\{ \frac{\psi_0^{(r_s)}}{2}, f \right\} \cdots \right\} \right\}$$

对每个 $r \ge 1$ 都成立。由假设 $f \in \mathfrak{is}_{\mathcal{Q}}$，我们知道 $f^\sharp \in \mathcal{V}$；又由于根据 [Ka1，引理 7.8]，darapir 也如此，因此 ψ_0 属于 $\mathcal{V}$。于是命题 2.7 推出

$$\begin{aligned}
(\chi_B(f)^{(d+r)})^\sharp &= \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ r_1+\cdots+r_s=r \\ s\ge 0}} \frac{1}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \left\{ \frac{\psi_0^{(r_1)}}{2}, \cdots \left\{ \frac{\psi_0^{(r_s)}}{2}, f \right\} \cdots \right\}^\sharp \\
&= \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ r_1+\cdots+r_s=r \\ s\ge 0}} \frac{1}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \left\{ \frac{(\psi_0^{(r_1)})^\sharp}{2}, \cdots \left\{ \frac{(\psi_0^{(r_s)})^\sharp}{2}, f^\sharp \right\}_{\mathsf{ari}} \cdots \right\}_{\mathsf{ari}} \\
&= \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ r_1+\cdots+r_s=r \\ s\ge 0}} \frac{1}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \mathsf{ari}\left(\cdots \mathsf{ari}\left(f^\sharp, \frac{(\psi_0^{(r_s)})^\sharp}{2} \right), \cdots, \frac{(\psi_0^{(r_1)})^\sharp}{2} \right) \\
&= \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ r_1+\cdots+r_s=r \\ s\ge 0}} \frac{(-1)^s}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \mathsf{ari}\left(\frac{(\psi_0^{(r_1)})^\sharp}{2}, \cdots \mathsf{ari}\left(\frac{(\psi_0^{(r_s)})^\sharp}{2}, f^\sharp \right) \cdots \right).
\end{aligned}$$

此外，由引理 4.2，我们知道

$$\frac{1}{2}(\psi_0^{(r_j)})^\sharp = \frac{1}{2}(\mathsf{leng}_{r_j} \circ \mathsf{swap} \circ \mathsf{anti} \circ \mathsf{anti})(\mathsf{darapir}) = \mathsf{leng}_{r_j}(\mathsf{diripar}).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
\chi_B(f)^\sharp &= \sum_{r\ge 0} \chi_B(f)^{(d+r)} \\
&= \sum_{\substack{r_1,\dots,r_s \ge 1 \\ s\ge 0}} \frac{(-1)^s}{(r_1+\cdots+r_s)\cdots(r_{s-1}+r_s)r_s} \mathsf{ari}(\mathsf{leng}_{r_1}(\mathsf{diripar}), \cdots \mathsf{ari}(\mathsf{leng}_{r_s}(\mathsf{diripar}), f^\sharp) \cdots) \\
&= \mathsf{adari}(\mathsf{par})(f^\sharp),
\end{aligned}$$

由定理 3.2 的第二个等式可得。

注 4.7。 Kimura–Tasaka猜想 [KT，予想 3.5]探讨在何种条件下，将 Brown 提升中的 ψ_0 替换为另一个函数 ψ 所构造的提升χ_ψ 会成为诸如 χ_B这样的同构。尽管我们不知道什么条件才合适，但可以沿用定理 1.1 证明中完全相同的方法，证明所得的提升χ_ψ 是双模 X 满足 diri$X = \psi$时 adari(X) 的 anti ∘swap-共轭。

References

[B] F. Brown, *Anatomy of an associator*，预印本，arXiv:1709.02765。[E1] J. ´Ecalle, *The flexion structure and dimorphy: flexion units singulators generators and the enumeration of , , , , 在* S. Carr 的计算协助下。CRM丛书，第12卷，《动力系统、几何与偏微分方程中的渐近分析》；广义Borel求和。第二卷，27–211，Ed. Norm.，比萨，2011。[E2] J. ´Ecalle, *Eupolars and their bialternality grid*，《越南数学学报》**40** (2015), 545–636。[FHK] H. Furusho, M. Hirose and N. Komiyama, *Notes on Ecalle's and Brown's solutions to the double shuffle relations modulo products* 2601 03828 ，预印本，arXiv: 。

。[Ka1] H. Kawamura, *A note on flexion units*，预印本，arXiv:2506.22825。[Ka2] H. Kawamura, *Ecalle's senary relation and dimorphic structures*，预印本，arXiv:2509.21252。[KT] A. Kimura and K. Tasaka，关于复 shuffle 方程解的构造（日文），RIMS Kˆokyˆuroku **2238** (2023), art. 7。[Ko] N. Komiyama, *On properties of adari(pal) and gari(pic)*，预印本，arXiv:2110.04834。[MT] N. Matthes and K. Tasaka, *On Ecalle's and Brown's polar solutions to the double shuffle equations modulo products* **73** 2019 337 356 ，《九州数学杂志》( )，–。[S] L. Schneps, *ARI, GARI, Zig and Zag: An introduction to Écalle's theory of multiple zeta values*，预印本，arXiv:1507.01534v4。

(Hanamichi Kawamura) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Tokyo University of Science, 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan*Email address*: 1125512@ed.tus.ac.jp