arXiv:2601.17446v1 [math.CO] 24 Jan 2026

# 射影几何中的基于流形的证明方法

Michael Martin Katzenberger[1],Jürgen Richter-Gebert[21]
michael.martin.katzenberger@tum.de，Orcid:
0009-0004-2270-2502[2] richter@tum.de，Orcid：0009-0000-0049-9743

慕尼黑工业大学数学系、CIT

**摘要**。本文比较了射影关联定理的不同证明方法。具体而言，本文指出，Sergey Fomin 和 Pavlo Pylyavskyy 最近提出的一种利用四边形铺砌的技巧，其证明能力至多与使用双二次终结多项式的证明相当，因此也至多与使用塞瓦-梅涅劳斯铺砌的证明相当。此外，我们还证明了四边形铺砌证明与仅使用梅涅劳斯构型的证明等价。我们通过若干二维和三维实例展示了这些证明之间的转换。

**关键词：** 二项式证明 · 铺砌 · 射影关联定理 · 括号代数

## 1 引言

射影几何研究在射影变换下保持不变的性质。本文聚焦于这类性质中最基本的一种：点与直线之间（在三维空间中还包括平面之间）的关联关系。它们是自然的射影不变量，因为在射影变换下保持不变。射影关联定理的典型框架如下：

某些关联成立 +某些关联不成立 $\Longrightarrow$ 另一个关 联成立。

仅涉及点和直线的关联定理，是平面几何定理的一种重要基本形式。借助适当的工具，许多其他几何命题最终都可以改写为这种形式的定理，从而归结为只涉及点、直线和关联的命题。

关于此类问题的自动证明生成已有大量文献，涵盖了格罗布纳基 [6], 和吴方法 [10] 等非常通用的代数工具、终结多项式 [4] 等仍然通用且更具不变性的几何方法，以及利用括号代数中的特定消去模式、揭示某些定理为何成立的几何原因的专门方法。本文关注的是最后一类证明方法的比较。

本文将比较基于流形结构的（双二次）终结多项式 [4, 9], 证明，这些结构用于塞瓦／梅涅劳斯构形 [1, 8] ，以及最近

由 Fomin 和 Pylyavskyy 提出的四边形铺砌方法 [7, 5]。这三种方法都依赖括号层面上的消去模式。后两种方法还有一个共同点：消去模式可以组织在一个可定向二维流形上，使得每次消去都对应于流形上沿一条边相接的两个片块。定理成立这一陈述，对应于底层流形没有边界这一事实。换句话说：只要一切都能顺利闭合，定理就成立。

我们将快速回顾已有的证明方法，介绍四边形铺砌证明，然后说明它们的效力至多与其他技巧相当。

## 2 二项式证明与塞瓦-梅涅劳斯证明

### 2.1 二项式证明

照例，我们用 $[A,B,C] := \det(p_A, p_B, p_C)$ 表示齐次坐标下三个平面点的行列式。二项式证明最初是在定向拟阵理论的背景下提出的 [2, 9]，如今已得到相当充分的理解。它们利用由格拉斯曼–普吕克关系导出的双二次最终多项式。对于射影平面上的任意点 A,B, C,D, E，以下等式成立：

$$[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{C}][\mathtt{A},\mathtt{D},\mathtt{E}] - [\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{D}][\mathtt{A},\mathtt{C},\mathtt{E}] + [\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{E}][\mathtt{A},\mathtt{C},\mathtt{D}] = 0 \tag{1}$$

这意味着，A,B 和 C 共线可立即推出

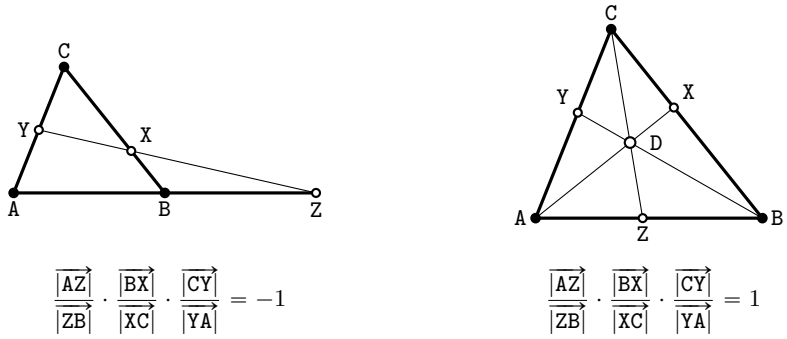
$$[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{D}][\mathtt{A},\mathtt{C},\mathtt{E}] = [\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{E}][\mathtt{A},\mathtt{C},\mathtt{D}]. \tag{2}$$

另一方面，如果方程 (2) 成立，且已知 A,D, E 不共线，那么即可推出 A,B, C 共线。在二项式证明技巧中，假设中的关联以及结论都被转化为形如 (2) 的方程。证明由一组这样的方程组成，其中表示结论的方程可通过将假设对应的方程左右两边的所有项分别相乘，并约去两边共有的项而得到。非关联陈述被用作非退化条件，以确保约去项的过程中不会出现除以零的情况。虽然目前尚不清楚这种方法是否普遍适用，但已知只要它适用，就能产生简短、易读且富有启发性的证明。事实上，据我们所知，如果允许添加辅助点，那么在任意域上成立的每个关联定理仍有可能都存在二项式证明。一个等价的问题曾以问题3.3的形式在 [5] 中提出。目前似乎既没有可行的证明策略，也没有反例。

### 2.2 塞瓦-梅涅劳斯证明

这种证明方法在 [8]中引入，通过多次运用塞瓦定理和梅涅劳斯定理来证明关联。证明结构沿着一个三角剖分的可定向流形组织。每个三角形对应一个塞瓦构型或

梅涅劳斯构型。相邻三角形的边上的点彼此对应。如果该构型对应的关联结构对除一个以外的所有三角形都成立，那么它也会自动对最后一个三角形成立，因此某个关联定理便成立。这里，两个相




$$\frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{BX}|}{|\overrightarrow{XC}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{CY}|}{|\overrightarrow{YA}|}=-1 \qquad \frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{BX}|}{|\overrightarrow{XC}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{CY}|}{|\overrightarrow{YA}|}=1$$

**图 1.** 梅涅劳斯定理与塞瓦定理及其对应的方程。

带符号的三角形相互抵消，因此只剩下未指定三角形边界上的长度比。这意味着最终的三角形也必须对应塞瓦构型或梅涅劳斯构型，从而迫使一个额外的关联（结论）成立。更多详情请参见 [8]。 [1] 中介绍了一种将二项式证明转化为塞瓦-梅涅劳斯证明（简称CM证明</style>）以及反向转换的过程，表明只要允许向构形中添加两个辅助一般点，这些证明技术就同样强大。

## 3 Fomin和Pylyavskyy风格的四边形证明

在近期论文《关联与铺砌》中， [7],Fomin 和 Pylyavskyy 介绍了另一种证明技巧，它同样基于流形的方法。与塞瓦-梅涅劳斯证明技巧不同，这种方法的基本构件是四边形瓦片，每个瓦片都编码了某种交比。其思路是：每当两个瓦片沿一条边相接时，就让一个变量消去，而最后填入的瓦片便给出结论。这与塞瓦-梅涅劳斯方法非常相似。从某种意义上说，四边形基本构件更加初等：每个四边形面的顶点（我们称之为四边形）表示两个点 P、Q 和两条互不关联的直线 l、m，并满足附加的“相容性”条件：P、Q 和 $l \wedge m$ 共线。这三个点的共线性，或者对偶地说，直线 l、m 和 $P \vee Q$ 的共点性，等价于以下同样具有自对偶性的代数表达式

$$\frac{\langle P,l\rangle\cdot\langle Q,m\rangle}{\langle P,m\rangle\cdot\langle Q,l\rangle}=1. \tag{3}$$

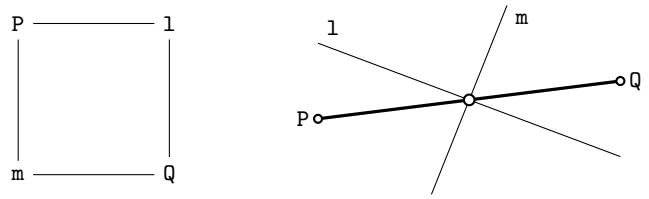



**图 2.** 一个相容四边形及其底层关联结构。

若沿逆时针方向遍历这样的四边形，则对应于从直线到点的边的标量积出现在分数的分子中，而对应于从点到直线的边的行列式出现在分数的分母中。这意味着，沿一条边粘合两个逆时针定向的四边形后，该边对应的标量积会分别出现在分子和分母中，因而相互抵消。因此，与塞瓦-梅涅劳斯证明类似，如果用这些四边形铺砌一个闭定向曲面，且除一个瓦片外的所有瓦片都相容，那么剩下的瓦片也相容。由此，每个四边形铺砌都编码了一个射影关联定理的证明（我们将这类证明称为四边形证明）。在 [7]中给出了许多利用四边形铺砌证明射影关联定理的例子。人们或许会猜想，这种更为初等的证明技巧能够提供更一般的证明，并且与塞瓦-梅涅劳斯技巧相比，可以证明范围更广的定理。然而，事实证明，每个四边形证明都可以转化为一个等价的、仅使用梅涅劳斯定理的证明。

### 3.1 从四边形证明中提取二项式证明

由于四边形的相容性等价于某个方程成立，因此尝试将这种证明方法与二项式证明联系起来似乎很自然。实际上，从四边形证明中提取二项式证明的过程相当直接。选取两点 $\mathtt{L}_1$,$\mathtt{L}_2$ 张成 $\mathtt{l}$，两点 $\mathtt{M}_1$,$\mathtt{M}_2$ 张成 $\mathtt{m}$，并定义关联点 $\mathtt{I} = \mathtt{l} \wedge \mathtt{m}$，则每个相容四边形实际上都编码了 3 个共线关系，从而得到以下方程

$$\begin{aligned}
\mathtt{L}_1,\mathtt{L}_2,\mathtt{I}\ \text{col.} &\iff [\mathtt{L}_1,\mathtt{L}_2,\mathtt{P}][\mathtt{L}_1,\mathtt{I},\mathtt{Q}] = [\mathtt{L}_1,\mathtt{L}_2,\mathtt{Q}][\mathtt{L}_1,\mathtt{I},\mathtt{P}],\\
\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2,\mathtt{I}\ \text{col.} &\iff [\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2,\mathtt{Q}][\mathtt{M}_1,\mathtt{I},\mathtt{P}] = [\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2,\mathtt{P}][\mathtt{M}_1,\mathtt{I},\mathtt{Q}]\ \text{and}\\
\mathtt{I},\mathtt{P},\mathtt{Q}\ \text{col.} &\iff [\mathtt{I},\mathtt{P},\mathtt{L}_1][\mathtt{I},\mathtt{Q},\mathtt{M}_1] = [\mathtt{I},\mathtt{P},\mathtt{M}_1][\mathtt{I},\mathtt{Q},\mathtt{L}_1].
\end{aligned}$$

将这些方程的左边和右边分别相乘，可得

$$[\mathtt{P},\mathtt{L}_1,\mathtt{L}_2][\mathtt{Q},\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2] = [\mathtt{P},\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2][\mathtt{Q},\mathtt{L}_1,\mathtt{L}_2], \tag{4}$$

这与方程（3）等价。对每个四边形应用这一过程，便可立即得到一个二项式证明，因此四边形证明的能力至多与二项式证明相当，进而也至多与塞瓦-梅涅劳斯证明相当。换言之，每个四边形证明都可以转化为双二次证明，再由此转化为 CM证明。

# 4 基于铺砌的方法之间的关系

## 4.1 四边形证明与塞瓦-梅涅劳斯证明

将四边形证明直接转化为塞瓦-梅涅劳斯证明的一种方法，其实已在 [7] 中有所暗示。文中描述了一种将证明转化为使用“闭定向曲面的三角剖分”的过程；该过程实质上通过仅 使用梅涅劳斯三角形，将四边形证明转化为塞瓦-梅涅劳斯证明，但没有明确提及梅涅劳斯定理。具体做法是，首先在包含于超过 3 个四边形中的“线顶点”处，迭代插入额外的四边形，将这些线顶点拆分为两个顶点，延伸——

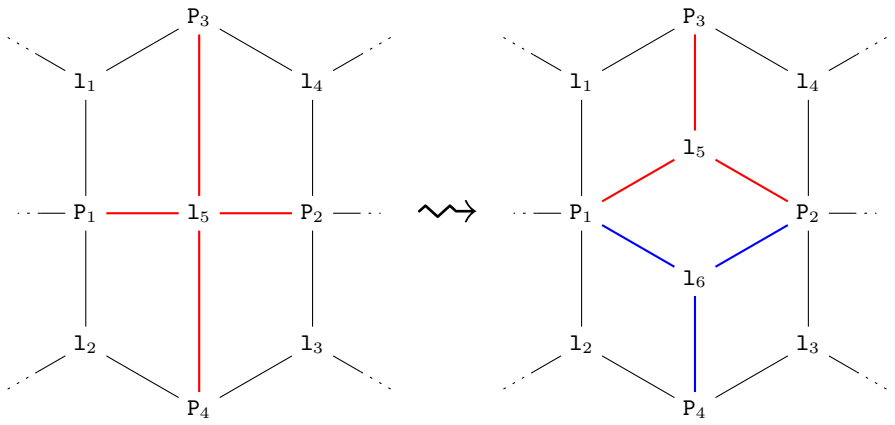



**图3.** 通过插入一个新四边形来分割一个线顶点。

将四边形证明推广为一个更一般的射影关联定理的证明（如果对应于线顶点的两条直线重合，这个更一般的定理就退化为原定理）。接下来，如果每个线顶点恰好包含在3个四边形中，就可以将四边形铺砌转化为三角剖分：把每个四边形分成两半，再将包含同一线顶点的三块半片拼成三角形，如图4所示。不难看出，这些三角形的底层关联结构恰好就是梅涅劳斯定理的关联结构。只需反向执行这一过程，就能将任意纯梅涅劳斯证明转化为四边形证明，因此四边形证明和纯梅涅劳斯证明的证明能力相同。

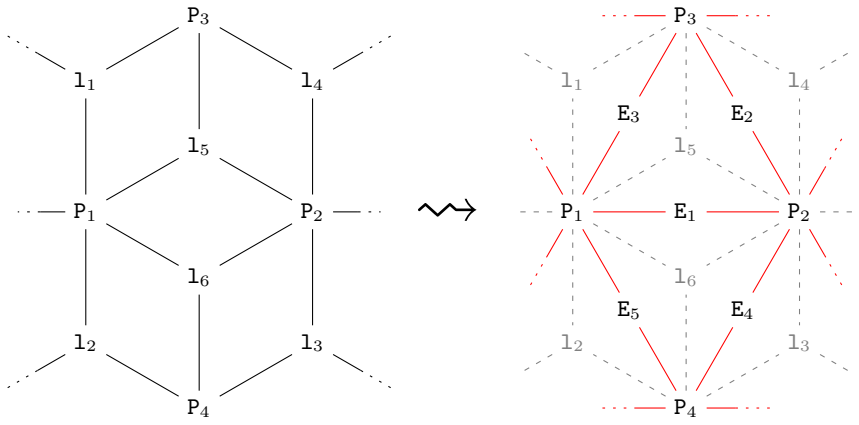



**图4.** 将四边形证明转化为纯梅涅劳斯证明。

### 4.2 塞瓦定理与梅涅劳斯定理

自然会有人提出这样的问题：纯梅涅劳斯证明是否已经与塞瓦-梅涅劳斯证明具有同等的证明能力？事实证明，塞瓦定理实际上可以由两次应用梅涅劳斯定理组合而成，如图5所示。然而，一个简单的论证表明，将单个塞瓦三角形替换为

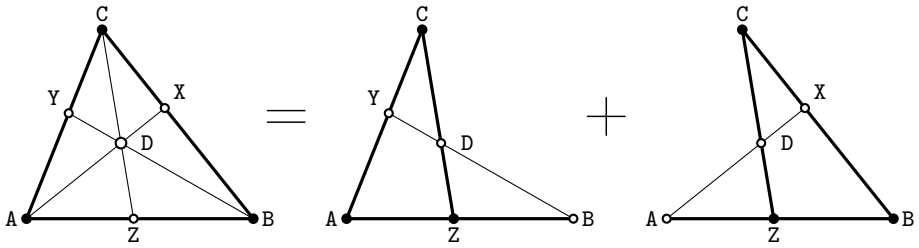



**图5.** 两次使用梅涅劳斯定理证明塞瓦定理。

由任意数量的梅涅劳斯三角形组成塞瓦-梅涅劳斯证明是不可能的：

1. 三角形总数为偶数：每个三角形有3条边，且每条边都属于2个三角形，因此 $3\ \#triangles = 2\ \#edges$。2. 梅涅劳斯三角形总数（因此根据第 1 点，塞瓦三角形总数也）为偶数：每个梅涅劳斯三角形都会增加一个因子“$-1$”，但所有方程的乘积必须为1。3. 将一个塞瓦三角形替换为梅涅劳斯三角形，会使塞瓦三角形的数量变为奇数。

不过，有些替换是可行的。如果一个塞瓦-梅涅劳斯证明包含两个相邻的塞瓦三角形，就可以同时将它们分割成四个相邻的

梅涅劳斯三角形，并以原先位于这两个塞瓦三角形公共边上的边点作为顶点，如下图所示。虽然这并不能

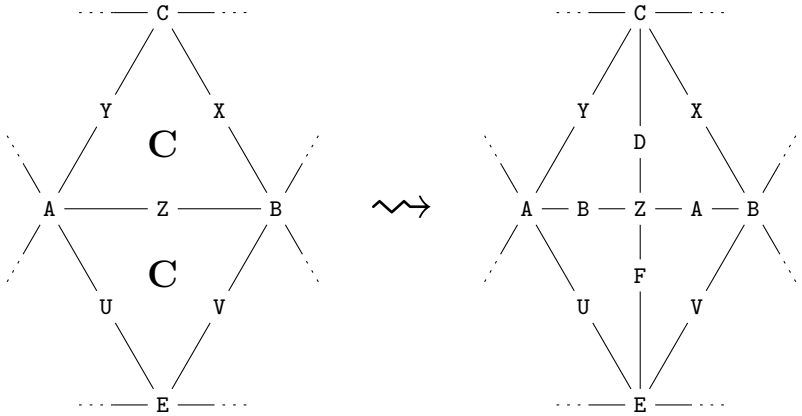



**图 6.** 拆分两个相邻的塞瓦三角形。

将每个塞瓦-梅涅劳斯证明转化为纯梅涅劳斯证明，这至少表明纯梅涅劳斯证明必须比纯塞瓦证明更强。

### 4.3 结果总结

总的来说，我们得到证明方法最终多项式（**P**）、二项式证明（**B**）、塞瓦-梅涅劳斯证明（**CM**）、四边形证明（**Q**）、纯梅涅劳斯证明（**M**）和纯塞瓦证明（**C**）之间如下的关系，其中“$\Rightarrow$”表示“至少与.....一样强”。

$$\mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} \iff \mathbf{CM}$$

$$\mathbf{Q} \iff \mathbf{M}$$

$$\mathbf{C}$$

**图 7.** 证明技术层级。

## 5 两个示例

现在，我们将通过两个简单但恰当的例子来说明不同证明方法之间的转换：德萨格定理和帕普斯定理。我们特意选择了最基础的定理，因为在这些定理中，各种方法之间的联系能够以最直观的方式展现出来。

### 5.1 笛沙格定理

笛沙格定理可以——并且已经——使用所有介绍过的技术加以证明。具体而言，可以使用：

1. 如 [7],所示，由 6 个四边形（一个立方体）组成的球面铺砌。2. 如 [8] 所示，由 4 个梅涅劳斯三角形（一个四面体）组成的球面铺砌。或者 3. 由 10 个共线点三元组和 Grassmann-Plücker 关系得到的 10 个二项式方程，如 [8, 9]所示。

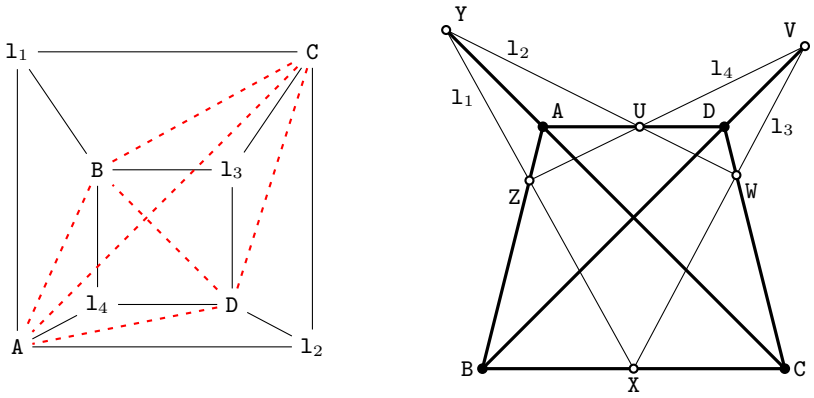



**图8。** 笛沙格定理的铺砌证明。

我们从一个组合结构对应于立方体的四边形证明开始（图 8 左）。立方体的八个顶点必须视为二分图的顶点。其中一半（A. . . , D）表示点，另一半（$l_1, \ldots, l_4$）表示直线。六个面的每个一致性条件都对应一个关联。例如，顶点为 B, C,$l_1, l_3$ 的面，对应于图 8 右侧的点 X，直线 $l_1, l_3$,BC 在此相交。从这个意义上说，立方体的每个面都与笛沙格定理中的一个点相关联，而 A . . . B, U . . . Z 构成了该定理的十个点。

现在，我们将相容的面条件转换为一组二项式行列式表达式。为此，我们必须将直线表示为由两个点张成的集合。在我们的例子中，对于每条直线，我们取与其关联的三个点中的任意两个

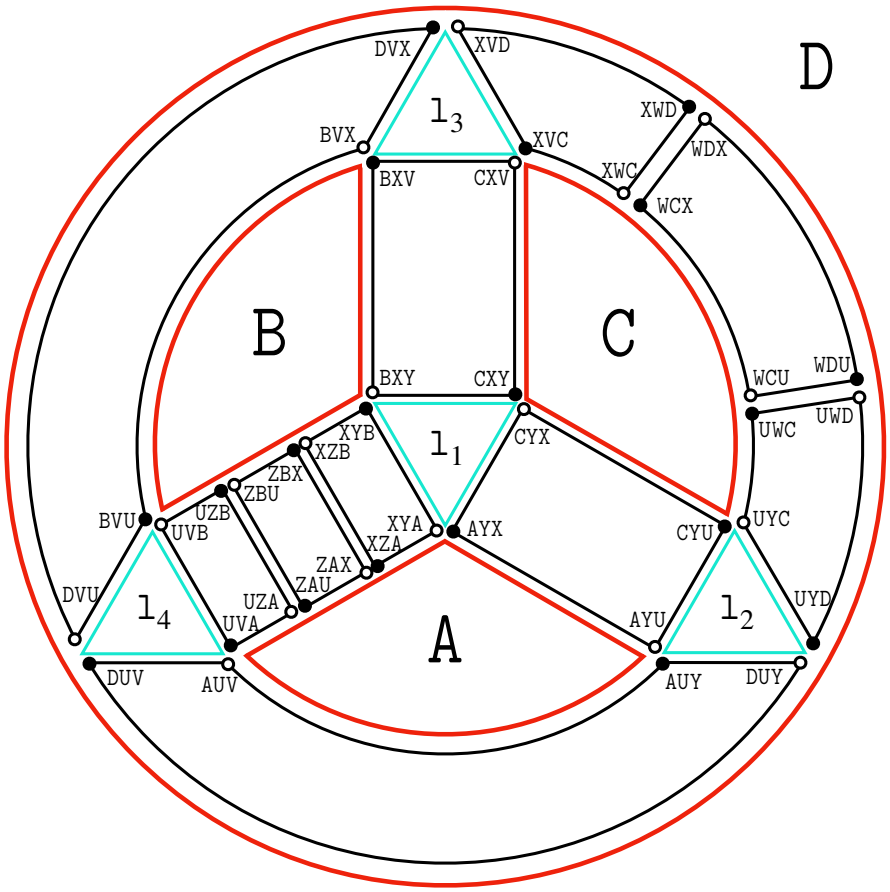



**图 9.** 整体图景。

到它。虽然第 3.1 节的方法实际上会从四边形证明中生成 18 个二项式方程，但这种特定的组合结构让我们能够“走捷径”：通过直接将这些直线描述为相邻四边形的关联点所确定的连接线，只用一个 二项式方程就能转换其中四个四边形。我们得到

相容四边形 $A,\ l_2, C,\ l_1 \iff [A,\ Y,\ X][C,\ Y,\ U] = [A,\ Y,\ U][C,\ Y,\ X]$相容四边形 $C,\ l_3, B,\ l_1 \iff [C,\ X,\ Y][B,\ X,\ V] = [C,\ X,\ V][B,\ X,\ Y]$相容四边形 $B,\ l_3, D,\ l_4 \iff [B,\ V,\ U][D,\ V,\ X] = [B,\ V,\ X][D,\ V,\ U]$相容四边形 $D,\ l_2, A,\ l_4 \iff [D,\ U,\ V][A,\ U,\ Y] = [D,\ U,\ Y][A,\ U,\ V]$

对于其中四个面。我们通过使用 3.1 中的方法，对来自两个四边形的方程进行变换，整理出剩余的括号。

相容四边形 $A,l_1,B,l_4 \Longleftrightarrow [A、U、V][B、X、Y] = [A、X、Y][B、U、V] \Longleftrightarrow [U、V、A][U、Z、B] = [U、V、B][U、Z、A]$ 以及$[X、Y、B][X、Z、A] = [X、Y、A][X、Z、B]$ 和$[Z、A、U][Z、B、X] = [Z、A、X][Z、B、U]$；相容四边形 $C,l_2,D,l_3 \Longleftrightarrow [C、X、V][D、U、Y] = [C、U、Y][D、X、V] \Longleftrightarrow [X、V、C][X、W、D] = [X、V、D][X、W、C]$ 以及$[U、Y、D][U、W、C] = [U、Y、C][U、W、D]$ 和$[W、C、X][W、D、U] = [W、C、U][W、D、X]$

这会得到 10 个彼此抵消的二项式方程。在这组 10 个二项式方程中，每个方程都恰好编码了笛沙格定理中的一种共线性。因此，我们得到了一个二项式证明。四边形证明中的抵消模式直接对应于二项式证明中的证明结构。

图9以更全面的方式展示了这一情形。图中显示了十个四边形区域（黑色）。每个顶点对应于某个二项式方程中一个括号的出现。黑色顶点对应于出现在方程左侧的括号，白色顶点对应于出现在方程右侧的括号。顶点标注了相应括号中的字母。抵消性质体现为：每当一个黑色顶点与一个白色顶点相接时，它们标注的字母就相同。

每条黑色边都可以看作形如 [OPQ]/[OPR] 的比（用黑色端点除以白色端点）。因此，每条边都表示一个长度比。图中有四个红色区域，标注为 A...，D。它们代表原四边形证明中的点 。请注意，与此类区域相邻的每个顶点都包含相应的字母。蓝色三角形代表四边形证明中的直线 。与此类三角形相邻的顶点都共有两个点。这两个点确定了相应的直线。

最后，我们可以读出相应的塞瓦–梅涅劳斯证明。为此，我们只需关注绿色三角形。它们将被视为梅涅劳斯证明中的三角形。每对三角形都沿着两条边粘合，而这两条边由一条黑色长区域连接（该区域由一个或三个四边形单元组成）。这种区域两端的两条线段表示相同的长度比。例如，连接 $l_1$ 和 $l_4$ 的区域通过 [XYB]/[XYA] 与 $l_1$ 相连，并通过 [UVA]/[UVB] 与 $l_4$ 相连。两个分数都表示相同的长度比 $|\overrightarrow{ZA}|/|\overrightarrow{ZB}|$（其中一个是另一个的倒数）。这就是直线 $l_1$ 和 $l_4$ 截直线 AB 时所得到的长度比。

如果我们收集由直线 $l_1$，截得的梅涅劳斯三角形 ABC、由直线 $l_2$，截得的梅涅劳斯三角形 ACD、由直线 $l_3$ 截得的梅涅劳斯三角形 BCD，以及由直线 $l_4$，截得的梅涅劳斯三角形 ABD 的比值乘积，那么它们的

梅涅劳斯方程等价于显然的恒等式

$$\begin{aligned}
\texttt{ABC with } \mathtt{l}_1 &\iff \frac{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{A}]}{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{B}]}\cdot\frac{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{B}]}{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{C}]}\cdot\frac{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{C}]}{[\texttt{X},\texttt{Y},\texttt{A}]}=1 \iff \frac{\overrightarrow{|\texttt{AZ}|}}{\overrightarrow{|\texttt{ZB}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{BX}|}}{\overrightarrow{|\texttt{XC}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{CY}|}}{\overrightarrow{|\texttt{YA}|}}=-1,\\
\texttt{ACD with } \mathtt{l}_2 &\iff \frac{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{A}]}{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{C}]}\cdot\frac{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{C}]}{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{D}]}\cdot\frac{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{D}]}{[\texttt{U},\texttt{Y},\texttt{A}]}=1 \iff \frac{\overrightarrow{|\texttt{AY}|}}{\overrightarrow{|\texttt{YC}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{CW}|}}{\overrightarrow{|\texttt{WD}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{DU}|}}{\overrightarrow{|\texttt{UA}|}}=-1,\\
\texttt{BCD with } \mathtt{l}_3 &\iff \frac{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{C}]}{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{B}]}\cdot\frac{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{B}]}{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{D}]}\cdot\frac{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{D}]}{[\texttt{X},\texttt{W},\texttt{C}]}=1 \iff \frac{\overrightarrow{|\texttt{CX}|}}{\overrightarrow{|\texttt{XB}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{BV}|}}{\overrightarrow{|\texttt{VD}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{DW}|}}{\overrightarrow{|\texttt{WC}|}}=-1,\\
\texttt{ABD with } \mathtt{l}_4 &\iff \frac{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{B}]}{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{A}]}\cdot\frac{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{A}]}{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{D}]}\cdot\frac{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{D}]}{[\texttt{U},\texttt{V},\texttt{B}]}=1 \iff \frac{\overrightarrow{|\texttt{BZ}|}}{\overrightarrow{|\texttt{ZA}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{AU}|}}{\overrightarrow{|\texttt{UD}|}}\cdot\frac{\overrightarrow{|\texttt{DV}|}}{\overrightarrow{|\texttt{VB}|}}=-1.
\end{aligned}$$

现在，这些分数的分子和分母中包含的括号，完全 与等式两边各自四边形所对应的方程中的括号相同。因此，我们得到了一个梅涅劳斯证明。图9在一幅图中展示了这三种证明的整体结构。

### 5.2 帕普斯定理

在上一节中我们看到，二项式方程似乎是四边形证明的“构件”，因为每个四边形至多可以用 3 个二项式方程表示。另一方面，我们也看到，二项式证明和塞瓦－梅涅劳斯证明在某种意义上彼此“对偶”，因为一种证明存在于另一种证明的空隙中。接下来，我们将讨论最基本的射影关联定理之一：帕普斯定理。

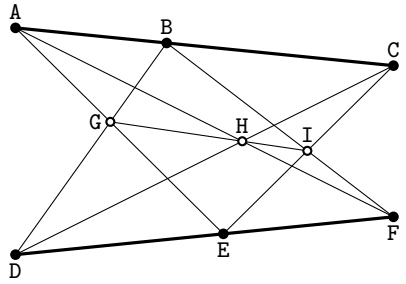



**图 10.** 帕普斯定理。

同样， [7] 和 [8] 都给出了该定理的铺砌证明，我们将分析它们之间的关系，并揭示一些在笛沙格定理证明中“隐藏”的附加结构。类似的分析（但不包括四边形证明）

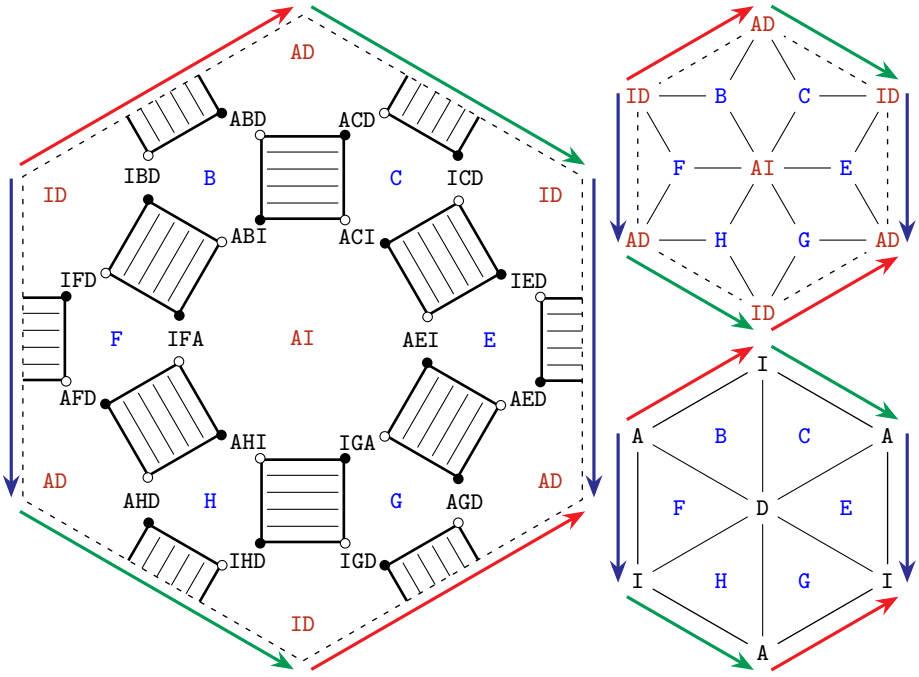



**图11.** 帕普斯定理的证明可视化。

已在 [1]中进行。我们将从二项式证明开始:

$$
\begin{aligned}
&\text{ABC共线} \iff [\text{A, B, D}][\text{A,C, I}] = [\text{A, B, I}][\text{A, C, D}]\\
&\text{AHF共线} \iff [\text{A, H, D}][\text{A,F, I}] = [\text{A, H, I}][\text{A, F, D}]\\
&\text{AEG共线} \iff [\text{A, E, D}][\text{A,G, I}] = [\text{A, E, I}][\text{A, G, D}]\\
&\text{DCH共线} \iff [\text{D, C, A}][\text{D,H, I}] = [\text{D, C, I}][\text{D, H, A}]\\
&\text{DFE共线} \iff [\text{D, F, A}][\text{D,E, I}] = [\text{D, F, I}][\text{D, E, A}]\\
&\text{DGB共线} \iff [\text{D, G, A}][\text{D,B, I}] = [\text{D, G, I}][\text{D, B, A}]\\
&\text{IGH共线} \iff [\text{I, G, D}][\text{I,H, A}] = [\text{I, G, A}][\text{I, H, D}]\text{IBF}\\
&\text{共线} \iff [\text{I, B, A}][\text{I,F, D}] = [\text{I, B, D}][\text{I, F, A}]\text{ICE共线}\\
&\iff [\text{I, C, D}][\text{I,E, A}] = [\text{I, C, A}][\text{I, E, D}]
\end{aligned}
$$

和之前一样，任意一个方程都可由其余8个方程推出。现在，我们将采用与图9相同的方式，把二项式方程表示为小矩形，并在它们共享括号的地方拼接起来。笛沙格定理的证明位于球面上，而这里得到的结构则位于环面上；这一点在图5.2左侧一目了然。正如我们在上一个例子中看到的，孔洞对应点或直线，具体取决于括号中共享了多少个点。例如，左上方的三角形以括号 ABD，ABI 和 BDI 为顶点，因此它们都包含点 B。

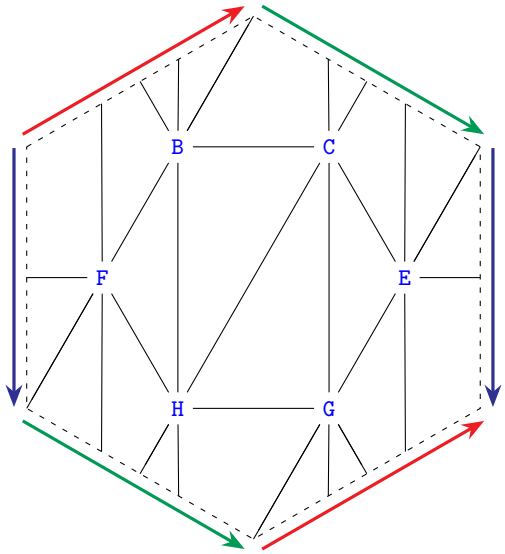



**图12**。使用12个梅涅劳斯三角形证明帕普斯定理。

另一方面，中间六边形的全部6个顶点都共享点 A 和 I，因此它们确定了由这两点张成的直线。这样我们便能立即读出四边形铺砌证明：只需构造以点和直线为顶点的四边形，如图5.2右上方所示。从这幅图中提取塞瓦-梅涅劳斯证明也同样简单，因为共享一个点的三角形恰好对应于以该共享点为“塞瓦点”的塞瓦三角形。特别是，例如，左上方的三角形 ABD → IBD → ABI 对应于塞瓦三角形 I →A → D，其中点 B 位于中间，由此得到：

$$1 = \frac{[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{D}]}{[\mathtt{I},\mathtt{B},\mathtt{D}]}\frac{[\mathtt{I},\mathtt{B},\mathtt{D}]}{[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{I}]}\frac{[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{I}]}{[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{D}]},$$

这等于三角形各边上的长度比。对全部6个三角形进行这一操作后，我们便得到图5.2右下方的纯粹塞瓦证明。事实上，这两个证明此前分别已在 [7] 和 [8],中给出，而现在则表明，从源自同一二项式消去模式这一意义上说，它们是“同一个证明”。

如果我们再次比较图9和图5.2，就会发现，在前者中，我们看到的是三角形空洞，其中顶点处的所有括号都共享2个点；而在后者中，我们看到的也是三角形空洞，但顶点处的所有括号只共享1个点。随后我们看到，这些空洞可以分别解释为梅涅劳斯三角形和塞瓦三角形。现在我们将重点放在非三角形空洞上。它们将引出一种纯梅涅劳斯证明，其存在性已在第4节中被提出。仔细观察图5.2中的3个六边形空洞，可以看到，

它们顶点处的括号都共享相同的2个点：中央空洞共享A和I，顶部空洞共享A和D，而底部空洞共享 $I$ 和D。因此，实际上，每个空洞都可以使用4个梅涅劳斯三角形进行三角剖分，从而得到另一个利用12个梅涅劳斯三角形证明帕普斯定理的方法；恰好，这正是我们应用第4节中的平移过程所得到的梅涅劳斯证明之一。

事实上，这种方法适用于所有二项式证明！ [1] 表明塞瓦-梅涅劳斯证明与二项式证明等价的证明，构成了二项式方程链（图5.2中的黑色矩形），并利用未匹配边的循环将塞瓦三角形和梅涅劳斯三角形嵌入其中。事实上，总有两种可能的做法，因此每个二项式证明至少对应两个塞瓦-梅涅劳斯证明。

## 6 三维示例

人们可能会想知道，不同的概念如何推广到更高维度。在 [7] Fomin 和 Pylyavskyy 给出了若干四边形证明的示例，这些证明可视为三维关联定理的证明。此外，在 [9] 也为一些三维关联定理给出了双二次终结多项式证明。这里我们举例说明如何将塞瓦/梅涅劳斯方法诠释于三维语境中。为此，我们首先必须探究如何将塞瓦定理和梅涅劳斯定理推广到更高维度。我们将范围限定在三维情形。

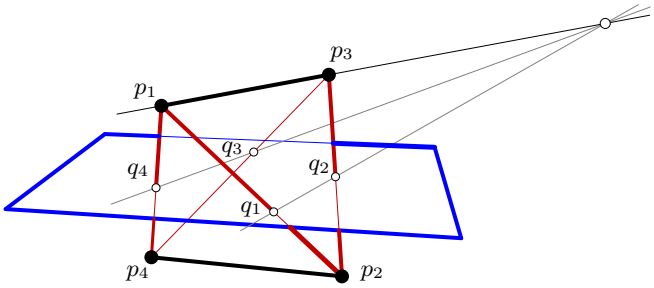



**图 13**。三维梅涅劳斯

将塞瓦定理和梅涅劳斯定理推广到更高维度有几种方法。这里我们将介绍以下两个版本，它们的证明显而易见。

**定理1**。（三维梅涅劳斯定理）：设 $p_1, \ldots, p_4$ 是三维空间中四个不共面的点。考虑一个处于一般位置的平面 $H$ 及其交点 $q_i := H \cap$

$\overline{p_i\, p_{i+1}}$ （下标模 *4*）。那么有（带方向的距离）：

$$\frac{|p_1,q_1|}{|q_1,p_2|}\cdot\frac{|p_2,q_2|}{|q_2,p_3|}\cdot\frac{|p_3,q_3|}{|q_3,p_4|}\cdot\frac{|p_4,q_4|}{|q_4,p_1|}=1$$

类似地，我们有塞瓦定理的一个版本。

**定理 2.** （三维塞瓦定理）：设 $p_1$、...、$p_4$ 是三维空间中的四个不共面点。再取一点 $a$。对于直线 $p_i$、$p_{i+1}$，考虑平面$H_i:=\overline{a\vee p_{i+2}}\vee\underline{p_{i+3}}$及其交点 $q_i:=H_i\cap p_i$、$p_{i+1}$（指标模 *4*）。则有：

$$\frac{|p_1,q_1|}{|q_1,p_2|}\cdot\frac{|p_2,q_2|}{|q_2,p_3|}\cdot\frac{|p_3,q_3|}{|q_3,p_4|}\cdot\frac{|p_4,q_4|}{|q_4,p_1|}=1$$

这两个定理的证明完全遵循 [8] 中所介绍的二维情形的推理。三维梅涅劳斯的情形如图13所示。蓝色平面起到平面 $H$ 的作用，截取四面体中一个四环的各条边。该图还展示了多重比方程的一种简单论证。首先注意到，三条直线 $q_1\vee q_2$、$q_3\vee q_4$ 和 $p_1$，$p_3$ 必须交于一点，因为它们分别是三个平面 $H$、$p_1p_2p_3$、$p_1p_4p_3$ 的两两交线。现在将图形严格看作三维情形的正交投影。那么，这个四环可以看作两个沿边 $p_1p_3$ 粘合的二维梅涅劳斯构型的一个版本，沿该边的连接因子会相互抵消。从

由此也可以立即得出相应的三维塞瓦定理。为此，请注意塞瓦定理和梅涅劳斯定理具有相同的多重比n (= 1)，因此，分割该循环的四个点也可以解释为梅涅劳斯点或塞瓦点。换言之，如果 $q_1,\dots,q_4$ 满足梅涅劳斯条件（它们共面），那么它们也满足塞瓦条件（平面 $p_1p_2q_3$, $p_2p_3q_4$,$p_3p_4q_1$, $p_4p_1q_2$ 交于一点）。交点 $p_1p_2q_3\wedge p_3p_4q_1$ 是直线 $q_3q_1$，而交点 $p_3p_4q_1\wedge p_4p_1q_2$ 是直线 $q_2q_4$。由于四个点 $q_i$共面，这两条直线（因而这四个平面）必定相交。这个论证很容易反过来进行。

我们将这两种构形分别称为梅涅劳斯构型和塞瓦构型。这些 CM四边形将用于我们的流形证明。图14展示了在基图中使用这些四边形时的标记方式。左图展示了一个梅涅劳斯四边形，其中假设四面体的顶点为 A...,D，平面 $H$ 由三个点 XYZ 张成。右图展示了塞瓦情形，其中四面体的顶点为 A...,D，且有一个内部点 E。

### 6.1 十六点定理

现在我们来考察一个空间定理，它以十六点定理之名为人所知。早在一篇关于双二次终结多项式的预印本 [3] 中，就提到了以下两个关联定理、它们的双二次终结多项式以及

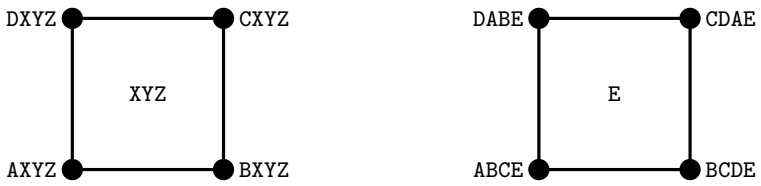



**图14**。T　三维塞瓦定理和梅涅劳斯定理四边形的标记　角。

它们的正则组合性质。我们在此重新审视这些结构，以强调如何将它们转化为流形证明。

16点定理实际上可以解释为一个关于两组各含4条直线及其16个潜在相互交点的定理。几何构型见图15。

**定理3.** 设 $l_1, \ldots, l_4, m_1, \ldots, m_4$ 是两组直线（且这*8*条直线彼此不同）。如果*16*对直线 $\{l_i, m_j\}$ 中有*15*对关联，那么最后一对也关联。

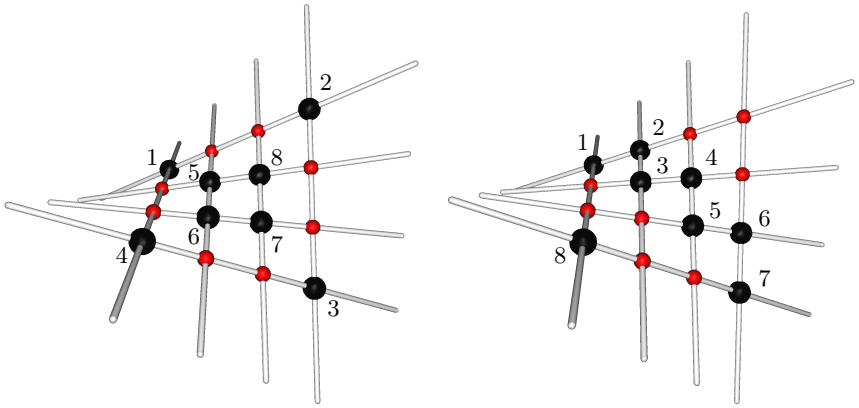



**图 15.** 16点定理的两个版本。

可以将该定理重新表述为一个涉及8个点和8个共面关系的关联定理。这可以通过两种组合非同构的方式实现，如图15的两幅图所示。构形中的点以黑点表示。每条直线恰由其中两个点确定。因此，每个黑点已经表示两条直线的一次关联。小红点对应其余8个关联。当且仅当 I，J，K，L 共面时，直线 I $\vee$ J 和 K $\vee$ L 才关联。因此，在这两种版本中，七个共面关系都能推出第八个。令人惊讶的是，这两类构形的组合结构也都可以解释为由8个四边形组成的环面。

图16展示了这两种情形的组合结构。每个正方形都表示点之间的一个共面关系。

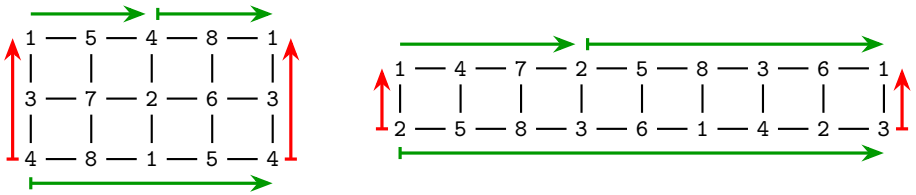



**图16.** 该 两个版本的16点 定理的组合结构。

在 [9] 中，已给出了两种情形下的双二次终结多项式。现在我们将这些双二次终结多项式转化为 CM证明和四边形证明。我们先讨论与图15和图16左侧结构相关的情形。该情形的一个终结多项式如下（见 [9]）：

$$
\begin{aligned}
[1253][1264] = [1254][1263] \quad &\Leftarrow \quad h(1526)\\
[2361][2374] = [2364][2371] \quad &\Leftarrow \quad h(2637)\\
[3451][3462] = [3452][3461] \quad &\Leftarrow \quad h(6453)\\
[1463][1472] = [1462][1473] \quad &\Leftarrow \quad h(6471)\\
[3471][3482] = [3472][3481] \quad &\Leftarrow \quad h(4837)\\
[1452][1483] = [1453][1482] \quad &\Leftarrow \quad h(4815)\\
[1273][1284] = [1274][1283] \quad &\Leftarrow \quad h(8271)\\
[2354][2381] = [2351][2384] \quad &\Rightarrow \quad h(8253)
\end{aligned}
$$

考察该结构，并将双二次方程沿类似流形的结构排列，可得到图17（左）所示的图像。该图像应解释为一个环面，其相对的边彼此粘合。每个阴影单元都对应一个双二次方程，方程左侧出现黑色顶点，右侧出现白色顶点。显然，在每个括号处，一个白色顶点与一个黑色顶点相遇，从而形成关键的消去模式。这种消去模式的正则性已在 [3] 中提及。

在双二次方程的正方形周围，这幅图中还有另外八个空白正方形。它们中央的标签对应于四个相邻括号共有的点。有些单元标有一个点，对应一个三维塞瓦循环；有些单元标有三个点，对应一个三维梅涅劳斯循环。容易验证，这些循环确实对应于原关联构型中的塞瓦构型和梅涅劳斯构型。在梅涅劳斯-型单元中，三个点张成梅涅劳斯构型的截平面。在塞瓦单元中，内部的那个字母表示构成塞瓦构型所需的一个额外点。

与之前一样，我们可以将二项式方程视为两个塞瓦或梅涅劳斯单元之间的连接。每个这样的双二次正方形都可用于编码一对相对边的恒等关系，并且我们可以选择要识别的边对。

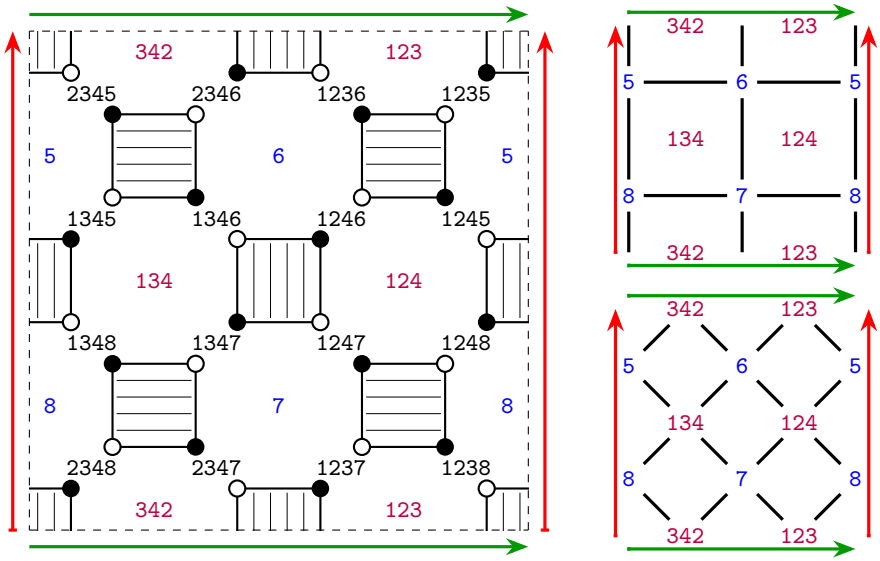



**图 17.** 该定理的流形证明的结构图。

在图17（左）的绘图中，正方形以阴影标出方向。我们假设这些正方形用于确定与阴影方向相同的边上的比率。例如，左上方顶点为2345，2346，1346，1345的正方形用于编码比率等价关系 $\begin{smallmatrix}[2345]\\[2346]\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}[1345]\\[1346]\end{smallmatrix}$。完成所有这些识别后，图示便转化为一个完全由梅涅劳斯构型组成的 CM证明，如图17（右上）所示。这个 CM证明仅由一个对边经过识别的 $2 \times 2$ 网格构成，其拓扑结构为环面。每个单元都对应一个三维梅涅劳斯构型。如果接着识别双二次正方形的另一组边，就会得到一个类似的证明，其中每个单元都是三维塞瓦构型。这两种情况均已由图18中的图示以及构型应所在的维数完全确定。

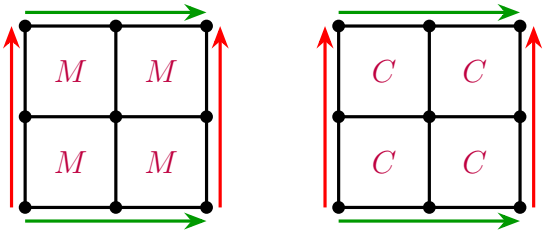



**图 18.** CM证明的两种证明方案。

接下来，我们展示如何利用这一结构构造四边形证明。相应的结构如图17（右下）所示。与之前一样，其底层流形是一个环面，这次由八个四边形组成。构成该流形的顶点包括4个点和4个超平面。超平面对应带有3个字母的红色标签，顶点对应带有1个字母的蓝色标签。同样的流形方案也见于 [7] （定理5.5）。

接下来，我们给出图16右侧所示关联定理的相应证明方案，这是表达16点定理的第二种方式。这里， [3] 也给出了一个双二次最终多项式。我们不逐一列出方程，而是直接从双二次证明的图示开始。该图示见图19。为了更清楚地展示结构，我们展示了底层环面上对应于两个完整覆盖的区域。矩形虚线区域对应环面的一个完整覆盖。要得到该区域中的环面，需要将左侧与右侧粘合，并将底边与顶边错开2个单位后粘合。同样，阴影正方形表示二项式方程，而在角上相接的黑点和白点表示同一个括号（分别位于双二次方程的左侧和右侧）。

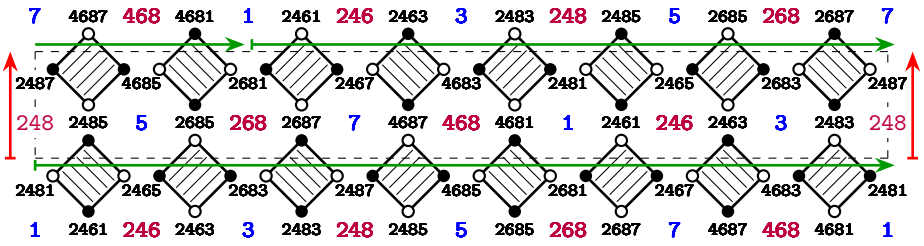



**图 19.** 16点定理第二种表述的证明。

与前一个例子完全类似，我们可以从这个方案中提取 CM 证明和四边形证明。四边形证明和梅涅劳斯证明对应的方案如图 20 所示。

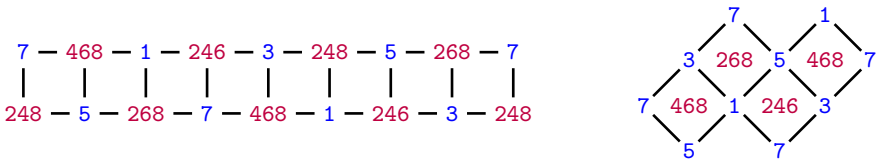



**图 20.** 16点定理第二种表述的四边形证明和梅涅劳斯证明。

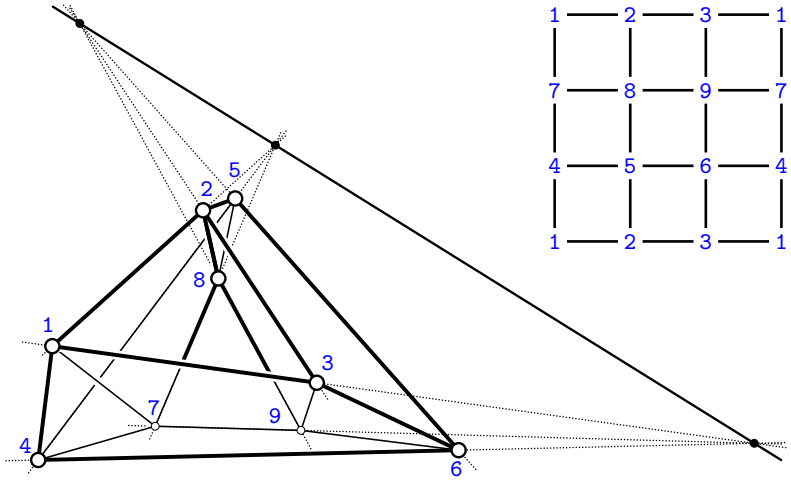


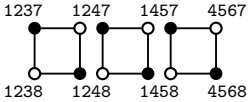

**图 21**。 托伯勒龙定理的几何与组合结构。

### 6.2 $3 \times 3$ 环面

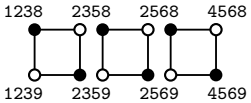
我们的最后一个例子有时被戏称为托伯勒龙环面，因为它可以由三个托伯勒龙盒拼装而成，并用它们搭建一个三角形框架。它是由 $3 \times 3$ 个四边形组成的网格形成的环面。它有 9 个顶点。如果其中八个四边形是平的，那么最后一个也会自动变平。图 21 展示了这一构形的射影正确的二维图及其组合结构。

同样， [9] 针对这一关联定理给出了一个双二次最终多项式。我们以预先整理好的形式在此呈现这个最终多项式，并将其分为三个部分。在每个部分中，红色和绿色部分会直接相互消去，从而形成一条由三个双二次方程组成的链，其中只有两端的部分——即方程中的黑色括号——才是相关的（与我们在图9中观察到的链类似）。我们展示这些部分，并附上各部分对应消去链的图示。

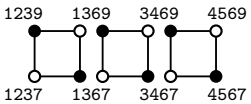
$$
\begin{aligned}
&[1273][1284] = [1274][1283] \quad \Leftarrow \quad h(7812)\\
&[1458][1427] = [1428][1457] \quad \Leftarrow \quad h(1245)\\
&[4571][4586] = [4576][4581] \quad \Leftarrow \quad h(4578)
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
&[2381][2395] = [2385][2391] \quad \Leftarrow \quad h(8923)\\
&[2569][2538] = [2539][2568] \quad \Leftarrow \quad h(2356)\\
&[5682][5694] = [5684][5692] \quad \Leftarrow \quad h(5689)
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
&[3192][3176] = [3196][3172] \quad \Leftarrow \quad h(9741)\\
&[3647][3619] = [3617][3649] \quad \Leftarrow \quad h(3164)\\
&[6493][6475] = [6495][6473] \quad \Rightarrow \quad h(6497)
\end{aligned}
$$



由于只有这些链的末端边才能构成四边形证明或CM证明所需的比值，因此我们可以立即将这些链折叠，并聚焦于所得方程。如此一来，我们得到以下三个方程（对数字进行了排序，同时注意了行列式的符号）。

$$\begin{aligned}[1237][4568] &= [1238][4567]\\ [1238][4569] &= [1239][4568]\\ [1239][4567] &= [1237][4569]\end{aligned} \tag{5}$$

将这些方程转化为 CM证明或四边形证明，极其困难之处在于，几乎没有任何结构能将这些方程与定理的几何内容联系起来。我们先将这种结构解释为四边形证明。

我们先考虑这个方程

$$[1237][4568] = [1238][4567] \tag{6}$$

及其几何意义。它编码了由 123、456 张成的平面与由 78 张成的直线之间的几何关系。这正是方程（3）所给出的方程类型，也是四边形证明的基本构件。当 7 和 8 的连接线与平面 123 和 456 的交线相交时，该方程成立。图 22 左侧描绘了这一情形。因此，我们的三个方程可以直接解释为一个四边形证明，表示一个非常简单的构形。其底层流形由 3 个四边形组成，形成一个球面结构，如图 23（左）所示。在该图中，外部面也应视为一个四边形。

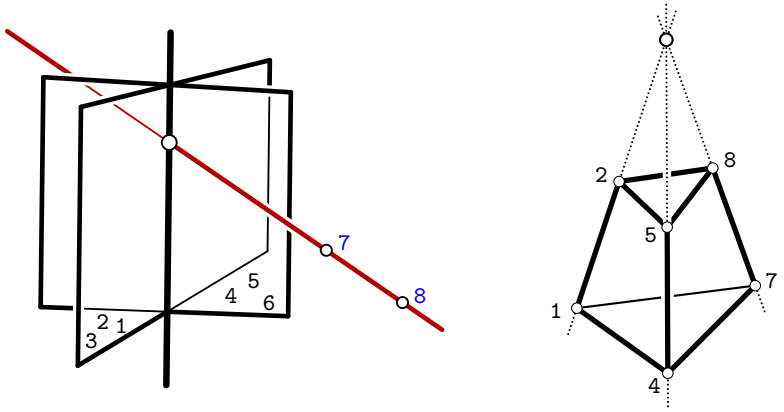



**图 22.** 用于解释方程（6）的几何关系。

为什么这种流形结构能证明我们的定理？为此，再考虑方程 $[1237][4568] = [1238][4567]$，并考虑三个共面关系 1245、1278 和 4578。

它们是托伯勒龙环面几何构型的一部分。由于任意三个平面都交于一点（也可能是无穷远点），因此直线 12、45、78 交于一点。这恰好由方程（6）编码，其中 3 和 6 在适当的一般位置下充当辅助点。反过来，如果方程（6）成立，并且我们知道 1245、1278 共面，就可以得出 4578 也共面的结论。这两条陈述立即表明，与方程（5）相关联的四边形流形证明了 Toblerone 环面定理：如果八个共面关系都成立，那么三个方程中有两个成立。这意味着第三个方程也成立；这一点与剩余的两个共面关系一起，便得出该定理的结论。

最后，还需要从 CM 证明的角度来解释这些方程。为此，我们可以再次将（5）中的方程视为连接三角形边的胶合条件。这个流形再简单不过了，它仅由两个三角形 789 的副本组成，这两个副本都是梅涅劳斯三角形，并沿着各自的边胶合在一起。其中一个副本假定被平面 123 截开，另一个副本假定被 456 截开。通过重新考察图 21，我们可以理解几何情形与 CM 证明之间的相互作用。三角形 123、456 和 789 构成环面边界上的一个环。用平面 123 截开三角形 789，会在支撑其边的直线上产生额外的点（图 21 中可以看到这些点）。它们就是图中标出的透视线上的三个点。这个几乎平凡的 CM 证明流形表明，如果选择平面 789，使其经过 123 与 456 的交线，那么就有以下结论：如果我们有 $78 \wedge 123 = 78 \wedge 456$ 和 $89 \wedge 123 = 89 \wedge 456$，那么我们自动就有 $79 \wedge 123 = 79 \wedge 456$。这正是关联定理成立所需要的。

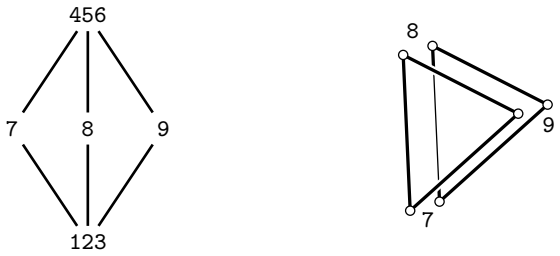



**图 23**。 托伯勒龙环面的四边形证明和 CM证明。

值得注意的是，在二维解释中得出空命题的 CM证明，在三维框架中解释时却能得出有趣的关联定理。我们并不认为，在这种情况下用四边形证明或 CM证明来理解这些证明，在概念上比采用双二次框架更简单。不过，看到这些高度退化的证明流形也能顺畅地融入我们对三种不同证明技术的一般性探讨，还是很令人欣喜的。

## 参考文献

1. Apel, S., Richter-Gebert, J.：《自动几何定理证明中的消去模式》。载于：《几何自动演绎》（2010） 2. Bokowski, J., Richter(-Gebert), J.：关于终结多项式的求法，《欧洲组合学杂志》，11（1990），21–34。 3. Bokowski, J., Richter(-Gebert), J.：关于不可实现有向拟阵的分类——第二部分：性质，预印本 1345，达姆施塔特工业大学，（1990），16页。 4. Bokowski, J., Sturmfels, B.：《计算合成几何》。数学讲义**1355** 施普林格，海德堡（1989） 5. Pylvavskyy, P., Skopenkov, M.：《关联、铺砌与域》。2025。arXiv：2505.02229v1 6. Kutzler, B., Stifter, S., 1986. 关于将 Buchberger算法应用于几何自动定理证明。《符号计算杂志》2，1986，389–398。7 07728 8 2023 2305 . Fomin, S., Pylvavskyy, P.：《关联与铺砌》。. arXiv：. . Richter-Gebert, J.：《塞瓦定理沉思》。载于：《考克斯特遗产》（2006），第227 254页 9 – . Richter-Gebert, J.：《射影几何中的机械定理证明》。《数学人工智能年刊》13，139 01531327 10 172 1995 10 1007 –（）。https://doi.org/ . /BF . 吴文俊：《几何学机械定理证明基本原理》，第一卷：初等几何部分。施普林格（原著发表于1984年，北京科学出版社），1994。