arXiv:2601.17451v1 [math.DG] 24 Jan 2026

$T\mathbb{S}^n$ 的各向同性子流形及其焦集

NIKOS GEORGIOU、BRENDAN GUILFOYLE 和 MORGAN ROBSON

Abstract. 研究 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的定向直线族，并将其视为 $T\mathbb{S}^n$中的子流形。特别地，证明了与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中子流形正交的定向直线族，恰好是相对于 $T\mathbb{S}^n$上的典范辛结构各向同性的直线族。

随后研究与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个 k维子流形相切的直线族。对于这类直线族，证明了各向同性等价于生成向量场在该子流形上既是测地的，又是超曲面正交的。

引入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中直线族的焦集，将经典上针对超曲面法向直线族的定义推广到任意余维的一般直线族。推导出一个公式，用对应焦点之间的有向距离表示焦集的某些截面曲率。

接着，我们求解关于超曲面焦集的一个反问题，并证明焦集的某些截面曲率和里奇曲率由超曲面曲率半径之差决定。这推广了比安基1874年的一个定理——即实数集 $\mathbb{R}^3$ 中常散光差曲面的焦集是伪球面的。

1. Introduction and Statement of Results

实数集 $T\mathbb{S}^n$ 到 n-球面的切丛具有一个众所周知的辛结构 Ω，它是通过音乐同构 $\flat_g$: $T\mathbb{S}^n \to T^*\mathbb{S}^n$ 将 $\mathbb{S}^n$ [16]上的典范辛结构从 $T^*\mathbb{S}^n$ 拉回而定义的，其中 g是 $\mathbb{S}^n$ [16]上的圆度量。此外， $T\mathbb{S}^n$ 可自然地识别为 $\mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+1})$—— $\mathbb{R}^{n+1}$中有向（仿射）直线的空间。通过这种识别，人们对 $\mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+1})$的各种性质进行了深入研究 [15] [22] [30], ，尤其是在 $n = 2$的情形下，此时 Ω 与 $T\mathbb{S}^2$ 上的一种伪 K¨ahler 结构相容，其度量的符号为 (2, 2) [19]。这进而被用于研究 $\mathbb{R}^3$ [20] [21]中的微分几何问题。

浸入子流形 $\Gamma \subseteq T\mathbb{S}^n$ 称为各向同性，若 $\Omega|_\Gamma = 0$。本文旨在从 $T\mathbb{S}^n$ 的视角研究 $\mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+1})$中的各向同性。我们首先证明， Γ 是各向同性的，当且仅当这些直线与 $\mathbb{R}^{n+1}$中的某个子流形正交，至少局部如此（见定理1、命题3和4——高维情形的

日期：2026年1月27日。2020 数学主题分类。 主要分类 53A25；次要分类 53B20。关键词和短语。 各向同性子流形、定向直线、焦点集、截面曲率。

类似结果见 [5]）。随后，我们研究 $T\mathbb{S}^n$ 中点（定向直线）由与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的子流形相切所定义的子流形。具体而言，给定一对（S， v），其中 $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个浸入子流形，而 $v \in \Gamma(TS)$是一个单位长度向量场，我们定义映射

$$\Phi_v : S \to T\mathbb{S}^n, \tag{1.1}$$

它将 $p \in S$ 映射到一条经过 p 并沿 v方向的定向直线（p）。我们的第一个主定理刻画了此类像在 $T\mathbb{S}^n$中的各向同性。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 ∇分别表示 $\mathbb{R}^{n+1}$上的平坦度量和联络。

主定理 1。 假设 Φ_v 是一个浸入，且 $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$ 是浸入的。以下条件等价：

> ***(a)*** $\Phi_v(S)$是各向同性的。***(b)*** 每个 $p \in S$ 都有一个开邻域 $U \subseteq S$，在其上，对某个光滑函数 $f : U \to \mathbb{R}$， $v|_U = \mathbf{grad}\, f$ 。若 S 是单连通的，则有 ***(c)*** 分布 $v^\perp$ 可积，且 v 是 S上的测地向量场。

我们指出，条件 (c) 等价于 v 是 S 的一个局部叶状结构的法向量场，该叶状结构由等距超曲面构成。随后，我们将上述刻画应用于研究各向同性直线族的焦集。本文将 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个子集定义为 焦集，即一族定向直线的焦集。如果这些直线是超曲面正交的，我们的定义（定义1）便还原为经典定义（命题 5），其表述如下：

对于定向的严格凸超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 及其单位法向量场ν，每个曲率半径 $r_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ ($i = 1, \ldots, n$) 都定义了一个映射 $\mathcal{Y}_i : \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathcal{Y}_i(q) := q - r_i(q)\nu(q). \tag{1.2}$$

经典地，像 $\mathcal{Y}_i(\Sigma)$ 称为与 r_i 相关联的 Σ 焦叶。每个曲率半径对应的这些焦叶的并集构成焦集，其中的元素称为 Σ [12] 的焦点。考虑以下反问题：

问题：给定一个超曲面 S，构造使 S 成为焦叶的超曲面 Σ。

若固定 S，由命题 8 可知，满足 $S = \mathcal{Y}_i(\Sigma)$的超曲面 Σ 会在S 上诱导一个满足（c）的向量场。反之，根据主定理 1，任何满足（c）的向量场 v 都会产生一个各向同性子流形 $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$。在自然的假设下，例如 Φ_v 是单射且 $\pi_1(S) = 0$，根据推论 2 和引理 5，存在一个超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$，它与 $\Phi_v(S)$中的每条定向直线都正交。于是，根据命题 5，对于某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有 $S = \mathcal{Y}_i(\Sigma)$。超曲面与其法向直线的焦集之间的关系，是正交与相切之间的对偶——这是平面曲线的渐屈线与渐伸线的一种推广。惠更斯于 1673年在设计最优时钟摆 [7] [8] [23] [33]时引入了这一概念。

尽管一个初始超曲面 Σ 可能是光滑的，但焦叶 $\mathcal{Y}_i(\Sigma)$ 往往会有奇点。理解这种情形下可能出现的奇点类型，一直是广泛研究的课题；参见 [6] [10] [11] [27] 及其中的参考文献。焦集产生奇点的一个原因是散光差的零点；$s_{ij}: \Sigma \to \mathbb{R}$

$$s_{ij}(q) := r_i(q) - r_j(q). \tag{1.3}$$

对于 $i \neq j$，$s_{ij}(q) = 0$ 当且仅当 $r_i(q) = r_j(q)$ 成立，因此在这些点处，曲率半径的重数大于 1。在这些点处，函数 r_i 变得不可微，焦叶也失去正则性。这里我们考虑光滑情形，其中$\mathcal{Y}_i$ 是一个微分同胚，因此 $\mathcal{Y}_i(\Sigma)$ 是一个超曲面。我们研究这类焦集的曲率性质；在这一方向上的经典结果之一是 Bianchi 的结果（定理 A，1874年）：具有常散光差的 $\mathbb{R}^3$ 曲面具有高斯曲率为相等负常数的焦叶（即伪球面） [9]。我们的下一个主定理将其推广如下：

主定理 2。令 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个 C^3-光滑的严格凸超曲面，其单位法向量场为 ν，曲率半径 $(r_i)_{i=1}^n$ 的重数为 1。对于 $i = 1, 2$ 令$S_i := \mathcal{Y}_i(\Sigma)$ 为与 r_i相关联的焦叶，并假设 $\mathcal{Y}_i$ 是一个微分同胚。定义 $X_i \in \Gamma(T\Sigma)$ 如下：

$$r_i \overline{\nabla}_{X_i} \nu = X_i \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{d}r_i(X_i) = 1, \tag{1.4}$$

因此，X_i 是 Σ的主向量场。S_1的截面曲率记为 K_1，满足

$$(\mathcal{Y}_1^* K_1)(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{d}s_{12}(X_1) - 1}{(s_{12})^2}.$$

Bianchi 定理可通过将 $n = 2$ 以及 Σ 的散光差视为常数得出（参见 [26]，其中对旋转对称情形下此类 Σ进行了分类）。注意，在上文中，S_1 和 S_2 是任意的，而主定理2 适用于 Σ的任意两个不同焦叶。因此，主定理2 断言，X 的主向量场 Σ 与任意另一个不同的主向量场一起，在与 X相关联的焦叶上自然诱导出一个平面场。该平面的截面曲率完全由 Σ的散光差决定。对这些平面求和可得：

主定理 3. 设 Σ，ν 以及 $(r_i)_{i=1}^n$ 如定理 *2*所述。设 $S_j := \mathcal{Y}_j(\Sigma)$ 为焦叶，且 $\mathcal{Y}_j$对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$都是微分同胚。若 $X_j \in \Gamma(T\Sigma)$ 满足方程 *(1.4)*，则对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，S_i 的里奇曲率满足

$$(\mathcal{Y}_i^* \mathrm{Ric})(X_i, X_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X_i(s_{ij}) - 1}{(s_{ij})^2}.$$

事实上，上述构造并不限于余维 1，在满足适当条件的任意嵌入子流形上也成立（参见备注4）。

最后，我们指出，超曲面的两个焦叶之间的关系可以从可积系统的角度来理解。几何 *Bianchi-B¨acklund* 变换 (BBT)（广义而言）是沿着与 $\mathbb{R}^{n+1}$的两个子流形相切的直线族进行平移。当将这些直线视为切向量场时（参见映射（1.1）），命题6 表明，BBT 定义了一个从其直线族的焦集到自身的映射。给定一个具有散光度的超曲面 Σ（s_{ij}）$_{i,\ j=1}^{n}$ 并满足主定理 2的条件，该映射为

$$\mathcal{Y}_j \circ \mathcal{Y}_i^{-1} : \mathcal{Y}_i(\Sigma) \to \mathcal{Y}_j(\Sigma), \tag{1.5}$$

是一个 BB T，沿着与两个焦叶相切的直线平移距离 $|s_{ij}|$。

更具体地说，经典 BBT 是 $\mathbb{R}^3$中伪球面之间的映射，并使点沿公共切线移动一段恒定距离 [29]。经典 BBT 有许多推广形式，包括高余维中的伪球面 [17][18]以及 n维双曲空间中的情形 $\mathbb{R}^{2n-1}$ [3] [4][31] [32]。若 Σ 具有常散光差，则映射（1.5）是经典 BBT 的一种推广。在我们的推广中，直线族必须是各向同性的，而主定理 2 表明，焦叶仅包含某些负截面曲率平面，而非伪球面。

本文安排如下。第 2 节确定记号，并更详细地描述辛结构 ($T\mathbb{S}^n$, Ω)，以及 $T\mathbb{S}^n$ with$\mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的识别。第 3 节定义子流形 $\Gamma \subset T\mathbb{S}^n$ 的焦集，并描述其性质。第 4 节证明，直线族各向同性当且仅当它们子流形正交（命题 3 和 4），并证明这类正交子流形的结构定理（定理 1）。此外，还证明了与超曲面正交的直线具有与经典定义一致的焦集（命题 5）。第 5 节证明主定理 1。第 6 节给出各向同性直线族的焦集（当其为 C^2-光滑时）的截面曲率和里奇曲率表达式，这些表达式以焦点之间的距离表示（定理 2 和 3）。最后，第 7 节专门研究 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中超曲面的焦集，并在此证明主定理 2 和主定理 3。

2. Preliminaries

2.1. $TT\mathbb{S}^n$的辛形式与分解。

令 g 为 $\mathbb{S}^n$ 上的圆度量，D 为 Levi-Civita 联络。D 诱导出双切丛 $TT\mathbb{S}^n = H\mathbb{S}^n \oplus V\mathbb{S}^n$ 的一个分解，其中 $V\mathbb{S}^n$ 和 $H\mathbb{S}^n$ 分别为

垂直 以及 $TT\mathbb{S}^n$ 的 水平子丛。它们定义为 s

$$V\mathbb{S}^n := \ker(\mathrm{d}\pi), \qquad H\mathbb{S}^n := \ker(\mathcal{K}),$$

其中 π： $T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ 是典范投影映射，而 $\mathcal{K}$： $TT\mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ 是联络映射，定义如下：给定 $(\mu_0, X) \in TT\mathbb{S}^n$，令 $\mu(t)$ 为一条曲线，满足 $T\mathbb{S}^n$ 中的 $\mu(0) = \mu_0$ 和 $\mu'(0) = X$，并用 $\mathrm{D}\,\mathrm{d}t$ 表示沿曲线 $(\pi \circ \mu)(t)$ 相对于 D 的协变导数，其中该曲线位于 $\mathbb{S}^n$ 中。现在定义

$$\mathcal{K}(\mu_0, X) := \left.\frac{\mathrm{D}\mu(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

限制映射 $\mathrm{d}\pi|_{H\mathbb{S}^n}$： $H\mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ 和 $\mathcal{K}|_{V\mathbb{S}^n}$： $V\mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ 是同构，并通过 $TT\mathbb{S}^n = H\mathbb{S}^n \oplus V\mathbb{S}^n \simeq T\mathbb{S}^n \oplus T\mathbb{S}^n$ 诱导出同构 $X \simeq (\mathrm{d}\pi(X)\ \mathcal{K}(X))$。详见 [14] 和 [24]。此外， $T\mathbb{S}^n$ 具有辛结构 $\Omega := -\mathrm{d}\theta$，其中 θ： $TT\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ 相应的李维尔 1-形式为

$$\theta_{(p,\beta)}(X) = g_p(\mathrm{d}\pi_{(p,\beta)}(X), \beta), \tag{2.1}$$

其中 $(p,\ \beta) \in T\mathbb{S}^n$ 且 $X \in T_{(p,\beta)}T\mathbb{S}^n$。取外微分可得

$$\Omega(X, Y) = g(\mathrm{d}\pi(X), \mathcal{K}(Y)) - g(\mathrm{d}\pi(Y), \mathcal{K}(X)), \tag{2.2}$$

为简洁起见，我们省略了基点 $(p,\ \beta)$。通过在 g 所诱导的度量同构 $\flat$： $T\mathbb{S}^n \to T^*\mathbb{S}^n$ 下，将 $T^*\mathbb{S}^n$ 上的典范 1-形式拉回，可得到 θ 的等价定义。任意黎曼流形上的坐标描述见 [1] [2]。

2.2. 定向直线与 $T\mathbb{S}^n$。

记 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 为欧几里得内积，∇ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的平坦联络。给定一点 $(\xi,\ \eta) \in T\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$，可将其与定向直线 $\{\eta + t\xi\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ 等同起来，使得 ξ 给出直线的方向，而 η 是直线上距原点最近的点。给定参数 $r \in \mathbb{R}$ 和一条定向直线 $(\xi,\ \eta)$，映射

$$\begin{aligned} \Psi : T\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ ((\xi, \eta), r) &\longmapsto \eta + r\xi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

返回沿直线从 $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ 出发、距离为 r 的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的点。因此，像 $\Psi(\{(\xi,\ \eta)\} \times \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中位于定向直线 $(\xi,\ \eta)$ 上的点的集合。更一般地，对于子流形 $\Gamma \subseteq T\mathbb{S}^n$，集合 $\Psi(\Gamma \times \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有位于 Γ 中某条直线上的点的集合。

反之，给定一条定向直线 $\{p + tv\colon\ t \in \mathbb{R}\}$，对于 $p,\ v \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $|v| = 1$，我们可以将这条直线与有序对 $(v,\ p - \langle p,\ v\rangle v)$ 等同起来，并将其视为 $T\mathbb{S}^n$ 的一个元素，这是因为 v 是单位向量，且与 $v - \langle p,\ v\rangle v$ 正交。因此， $T\mathbb{S}^n$ 的子流形与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的直线族相对应，反之亦然。设 $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑浸入子流形，且 v 是 $T\mathbb{R}^{n+1}$ 在 S 上的一个光滑截面

$$v : p \in S \longmapsto v(p) \in T_p\mathbb{R}^{n+1},$$

满足 $||v(p)|| = 1$。我们将有序对 (S, v) 视为生成一个定向直线族，其中 v 为每个 $p \in S$ 指定一条经过p 、方向为 $v(p)$ 的定向直线。这个指定通过如下光滑映射实现

$$\begin{aligned} \Phi_v : S &\to T\mathbb{S}^n \\ p &\longmapsto (v(p), p - \langle v(p), p\rangle\, v(p)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于 S 和 v的一般选取，子集 $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$ 可能不具有子流形的结构，即使映射 Φ_v 是浸入。尽管如此，我们仍会经常假设情况确实如此。

2.3. **记号与约定**。

1. 当需要考虑 $T\mathbb{R}^{n+1}$ 在 S上的其他截面（例如 X或 Y）时，我们将使用记号 Φ_X 或 Φ_Y 等。通常， ν 表示法向截面， $\nu \in \Gamma(TS)$，而 v 表示任意截面或切截面。**2.** 对于 v 能否在全局上定义， S 可能受到拓扑限制，尤其是在 $v \in \Gamma(TS)$ 时。在本文中，我们假设对 (S, v) 的选取足以满足这一条件。**3.** 给定一个光滑流形 $\mathcal{M}$ ，若子集 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ 本身是光滑流形，且包含映射 $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ 是光滑浸入，则称 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ 为浸入的。**4.** 按照惯例，我们将 $\mathbb{R}^n$ 与其切空间视为一体，从而可以将 $T\mathbb{R}^n$的不同纤维中的元素相加。**5.** 除非另有说明，本文中的“光滑”均指 C^2。

3. Focal Points of Submanifolds in $T\mathbb{S}^n$

我们首先用映射 Ψ来描述导数 Ψ，该映射定义于（2.3）中，并用映射 π、 $\mathcal{K}$ 以及 Liouville 形式 θ来表示。

引理 1。 对于任意 $Y \in T_{((\xi_0,\eta_0)\ r_0)}\ (T\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) \simeq T_{(\xi_0,\eta_0)}\ T\mathbb{S}^n \oplus T_{r_0}\mathbb{R}$ 记 $Y = X + \rho\dfrac{\partial}{\partial r}$为 $X \in T_{(\xi_0,\eta_0)}\ T\mathbb{S}^n$， $\rho \in \mathbb{R}$，并令 r 为 $\mathbb{R}$上的典范坐标。则

$$\mathrm{d}\Psi_{((\xi_0,\eta_0),r_0)}(Y) = r_0 \mathrm{d}\pi(X) + \mathcal{K}(X) + (\rho - \theta(X))\xi_0. \tag{3.1}$$

证明。 若 $\gamma_{(\eta,\xi)}$ 是沿方向 ξ经过 η 的测地线，则可写为Ψ（ξ， η） r（r）。因此，若 σ（t） $=$（ξ（t） η（t））是一条满足 $X = \sigma'$（0）的曲线，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Psi_{((\xi_0,\eta_0),r_0)}(Y) &= \mathrm{d}\Psi_{((\xi_0,\eta_0),r_0)}(X) + \rho \mathrm{d}\Psi_{((\xi_0,\eta_0),r_0)}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \gamma_{(\eta(t),\xi(t))}(r_0) + \rho {\gamma_{(\eta_0,\xi_0)}}'(r_0). \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\Psi_{((\xi_0,\eta_0)\ r_0)}(Y) = J(r_0)$，其中 $J(r)$ 是沿 (ξ_0, η_0) 的雅可比场，满足

$$J(0) = \eta'(0) + \rho\xi_0, \qquad \nabla_r J(0) = \xi'(0).$$

由于， $\xi(t)\cdot\eta(t)\equiv 0$，联络 D 在 $\mathbb{S}^n$ 上是切向的，并由方程 (2.1) ；

$$\mathcal{K}(X)=\left.\frac{D\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}=\eta'(0)-\langle\eta'(0),\xi_0\rangle\xi_0=\eta'(0)+\langle\eta_0,\xi'(0)\rangle\xi_0=\eta'(0)+\theta(X)\xi_0.$$

因此，初始条件可表示为

$$J(0)=\mathcal{K}(X)+(\rho-\theta(X))\xi_0,\qquad\qquad \nabla_r J(0)=\mathrm{d}\pi(X).$$

对 $J(r)$ 的雅可比方程积分即可得出结论。 □

定义 1. 子流形 $\Gamma\subseteq T\mathbb{S}^n$ 的一个焦点 是点 $p\in\Psi(\Gamma\times\mathbb{R})$，满足 $\Psi|_{\Gamma\times\mathbb{R}}$ 在 $\Psi^{-1}(p)$ 中的某一点处不是浸入。所有此类p的并称为的焦集。

对于黎曼流形 $(\mathcal{M},\mathbb{G})$，也可以根据雅可比场 [13]定义子流形的焦点。因此，对于某个度量 $\mathbb{G}$，子流形 $(T\mathbb{S}^n,\mathbb{G})$ 也可能具有此意义下的焦点。我们指出，定义1与这一概念不同。

命题 1. 设 $((\xi,\eta)\ r)\in\Gamma\times\mathbb{R}$。那么 $p=\Psi((\xi,\eta)\ r)$ 是 Γ的焦点，当且仅当存在非零的 $X\in T_{(\xi,\eta)}\Gamma$，使得 $r\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)=0$。

证明。 p是焦点，当且仅当存在非零的 $Y\in T_{((\xi,\eta),r)}(\Gamma\times\mathbb{R})$，使得 $\mathrm{d}\Psi_{((\xi,\eta),r)}(Y)=0$。记 $Y=X+\rho\frac{\partial}{\partial r}$。由于$\mathrm{d}\pi(X)\ \mathcal{K}(X)\perp\xi$，由引理 1 可知， p是焦点，当且仅当存在 $X\in T_{(\xi,\eta)}\Gamma$ 和 $\rho\in\mathbb{R}$，使得 $r\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)=0$ 且 $\rho=\theta(X)$。□

焦点还有一种更具几何意义的刻画。用 $\mathcal{L}(c)$表示经过固定点 $c\in\mathbb{R}^{n+1}$的定向直线集合。不难看出

$$\mathcal{L}(c)=\{(\xi,c-\langle c,\xi\rangle\xi)\ :\ \xi\in\mathbb{S}^n\}.$$

下面的引理表明， $c\in\mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathcal{L}(c)$的唯一焦点。

引理 2. 假设$(\xi,\eta)\in\mathcal{L}(c)$ 对某个 $c\in\mathbb{R}^{n+1}$成立。那么

$$T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(c)=\{X\in T_{(\xi,\eta)}T\mathbb{S}^n:\langle c,\xi\rangle\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)=0\}.$$

证明。 我们通过双重包含来证明。固定 $c\in\mathbb{R}^{n+1}$。对于所有 $(\xi,\ \eta)\in\mathcal{L}(c)$，我们有

$$c=\Psi((\xi,\eta),\langle c,\xi\rangle).$$

对 $X\in T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(c)$ 求导得 $\langle c,\xi\rangle\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)=0$ (由引理 1 及 $\mathrm{d}\pi(X)\ \mathcal{K}(X)\perp\xi$)，从而得到 $\subseteq$ 方向。为证明 $\supseteq$ 方向，假设 $X\in T_{(\xi,\eta)}T\mathbb{S}^n$ 且 $\langle c,\xi\rangle\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)=0$。在 $\mathcal{L}(c)$ 中定义曲线 σ如下

$$\sigma(t)=\big(\xi(t),c-\langle c,\xi(t)\rangle\xi(t)\big),$$

使得 $\sigma(0)=(\xi,\ \eta)$ 且 $\xi'(0)=\mathrm{d}\pi(X)$。注意，$\mathrm{d}\pi(\sigma'(0))=\mathrm{d}\pi(X)$ 也成立。此外，由于 $\sigma(t)$ 是 $\mathcal{L}(c)$ 中的一条曲线，已证明的 $\subseteq$方向意味着

$$\mathcal{K}(\sigma'(0))=-\langle c,\xi\rangle\mathrm{d}\pi(\sigma'(0))=-\langle c,\xi\rangle\mathrm{d}\pi(X)=\mathcal{K}(X).$$

Henc因为它们的水平分量和垂直分量相同， $X=\sigma'(0)\in T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(c)$. □

推论1. 设$((\xi,\eta)\ r)\in\Gamma\times\mathbb{R}$。那么，$p=\Psi((\xi,\eta)\ r)$是$\Gamma$的一个焦点，当且仅当$T_{(\xi,\eta)}\Gamma\cap T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(p)\neq\{0\}$。

命题2. 设$(\xi,\eta)\in\Gamma$。若维数$\Gamma>n$，则沿定向直线(ξ,η)上的每一点都是焦点；若维数$\Gamma\leq n$，则(ξ,η)上至多有n个焦点。

证明. 固定$(\xi,\eta)\in\Gamma$并令$c_r=\Psi((\xi,\eta)\ r)$, 其中r为实变量。由引理2以及由于$\mathrm{d}\pi|_{H\mathbb{S}^n}\colon H\mathbb{S}^n\to T\mathbb{S}^n$和$\mathcal{K}|_{V\mathbb{S}^n}\colon V\mathbb{S}^n\to T\mathbb{S}^n$是线性同构，可以选取$H_{(\xi,\eta)}\mathbb{S}^n, V_{(\xi,\eta)}\mathbb{S}^n$和$T_\xi\mathbb{S}^n$的基，使得得到如下同一认定

$$H_{(\xi,\eta)}\mathbb{S}^n\oplus V_{(\xi,\eta)}\mathbb{S}^n=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n,\qquad T_{(\xi,\eta)}\Gamma=\ker A,\qquad T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(c_r)=\operatorname{Im}\ G(r),$$

其中A和$G(r)=[I_n|-rI_n]^T$分别是$(2n-\text{维数}\,\Gamma)\times 2n$和$2n\times n$矩阵，且$I_n$为单位矩阵。$AG(r)$因此是一个$(2n-\text{维数}\,\Gamma)\times n$矩阵，并且

$$T_{(\xi,\eta)}\Gamma\cap T_{(\xi,\eta)}\mathcal{L}(c_r)\neq\{0\}\iff\ker AG(r)\neq\{0\}\iff\operatorname{rank}\ AG(r)<n.$$

若$\dim\ \Gamma>n$，则由于$AG(r)$的阶数，$\operatorname{rank}\ AG(r)<n$，因此对于任意$r$，直线$(\xi,\eta)$都有一个焦点（即$c_r$）。反之，若$\dim\Gamma\leq n$，则

$$\operatorname{rank}\ AG(r)<n\iff\text{all }n\times n\text{ minors of }AG(r)\text{ vanish.}$$

每个子式都是关于r的多项式，次数至多为n，因此至多有n个实根。 □

注1. 给定直线上存在焦点，当且仅当$\binom{2n-\dim\Gamma}{n}$个多项式（上述证明中的子式个数）有一个公共解。这个数随$\dim\ \Gamma$的增大而减小；当$\dim\Gamma=n$时，会得到关于r的单个多项式方程。因此，$\dim\Gamma$相对于n越小，焦点就越不常见。

4. Lines Normal to Submanifolds

定义 2. 设$\Gamma\subseteq T\mathbb{S}^n$和$\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+1}$是浸入子流形。$\Sigma$称为的正交子流形$\Gamma$，若$\dim\Sigma>0$且存在一个光滑单位法截面$\nu\in\Gamma(N\Sigma)$，使得$\Phi_\nu(\Sigma)\subseteq\Gamma$，其中$\Phi_\nu$由式（2.4）给出。

下一个命题表明，当Γ为各向同性时，存在维数为$\dim\Gamma$的正交子流形Γ，并且这些子流形经过$\Psi(\Gamma\times\mathbb{R})$中每一个非焦点。

命题 3。 设$\Gamma\subseteq T\mathbb{S}^n$为各向同性，且维数$\Gamma>0$。假设$p\in\Psi(\Gamma\times\mathbb{R})$不是焦点。则$p$包含于$\Gamma$的一个维数为维数$\Gamma$的正交子流形中，其形式为

$$\Sigma_0:=\Psi\Big(\Big\{((\xi,\eta),F(\xi,\eta)):(\xi,\eta)\in W\Big\}\Big),$$

其中$W\subset\Gamma$开且$F:\ W\to\mathbb{R}$一个光滑函数，使得$\theta=\mathrm{d}F$且$F(\xi_0,\ \eta_0)=r_0$其中$p=\Psi((\xi_0,\ \eta_0)\ r_0)$且$\theta$是李维尔*1*-形式（2.1）。

证明。令 $p=\Psi((\xi_0,\ \eta_0)\ r_0)$。由于 Γ 是各向同性的，$\theta|_\Gamma$ 是局部恰当的，因此存在 $(\xi_0,\ \eta_0)$ 的一个邻域 $W\subseteq\Gamma$，以及一个光滑函数 $F\colon W\to\mathbb{R}$，使得 $\theta=\mathrm{d}F$。不失一般性，设 $F(\xi_0,\ \eta_0)=r_0$。定义 $\Sigma_0=\Psi(\mathrm{graph}(F))$，其中

$$\mathrm{graph}(F)=\Big\{\big((\xi,\eta),F(\xi,\eta)\big):(\xi,\eta)\in W\Big\}.$$

由于 p不是焦点，Ψ 在（$(\xi_0,\ \eta_0)$ F（$\xi_0,\ \eta_0$））附近是局部微分同胚，因此 $\Psi|_{\mathrm{graph}(F)}$是到 S_0 上的微分同胚（必要时可缩小 W）。故 Σ_0 是浸入的，且 $\dim\Sigma_0=\dim\Gamma$。为证明 Σ_0 满足定义 2，若 $q\in\Sigma_0$，则存在唯一的（$\xi_q,\ \eta_q$），使得 $q=\Psi$（$\xi_q,\ \eta_q,\ F$（$\xi_q,\ \eta_q$））， 且映射 $q\mapsto\xi_q$是光滑的。定义单位截面 $\nu\colon\ q\mapsto\xi_q$。由此可得 Φ_ν（Σ_0）$=W\subseteq\Gamma$。此外，ξ_q 是 $T_q\Sigma_0$的法向；

$$\begin{aligned}T_q\Sigma_0&=\mathrm{d}\Psi(T_{(\xi_q,\eta_q,F(\xi_q,\eta_q))}\mathrm{graph}(F))\\&=\{F(\xi_q,\eta_q)\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X)+(\mathrm{d}F(X)-\theta(X))\xi_q:X\in T_{(\xi_q,\eta_q)}\Gamma\}\\&=\{F(\xi_q,\eta_q)\mathrm{d}\pi(X)+\mathcal{K}(X):X\in T_{(\xi_q,\eta_q)}\Gamma\},\end{aligned}$$

由引理得到的第二条线1。因此 $\xi_q\in N_q\Sigma_0$ 并且因此 $\nu\in\Gamma(N\Sigma_0)$。 □

推论 2。如果假设 Γ 是单连通的，我们可以取 $W=\Gamma$，使得存在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个子流形，并且 Γ 与其整体正交。

在 Γ 的正交子流形中，Σ_0 之类的子流形是“极大的”，因为其他正交子流形至少在局部包含于其中。

定理 1（正交子流形结构定理）。设 $\Gamma\subset T\mathbb{S}^n$ 是各向同性的，$\mathcal{U}$ 是 Γ 中不含焦点的正交子流形。对于所有 $p\in\mathcal{U}$，存在 V_p，它是 $\mathcal{U}$ 中 p 的一个开邻域，使得 $V_p\subset\Sigma_p$，其中

$$\Sigma_p:=\Psi\Big(\Big\{\big((\xi,\eta),F(\xi,\eta)\big):(\xi,\eta)\in W\Big\}\Big),$$

其中 $W\subseteq\Gamma$ 在 Γ 中是开集，并且 $F\colon\ W\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，满足 $\theta|_W=\mathrm{d}F$。

在证明这一点之前，我们先证明一个关于映射（2.4）的引理。

引理 3。设 $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是浸入的，且 v 是 S 上的一个单位截面。对于所有 $X\in T_pS$，映射 $\mathrm{d}\Phi_v\colon\ TS\to TT\mathbb{S}^n$ 满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(X))=\overline{\nabla}_Xv(p),\\&\mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(X))=X-\langle X,v(p)\rangle v(p)-\langle p,v(p)\rangle\overline{\nabla}_Xv(p),\end{aligned}\tag{4.1}$$

and 核$\Phi_v|_p\subseteq$ 张成$\{v(p)\}$。此外，若 $v(p)\notin T_pS$，则 $\mathrm{d}\Phi_v|_p$ 是单射 *e.*

证明。设 $\alpha(t)$ 是 S 中的一条曲线，满足 $\alpha'(0)=X$。那么

$$(\Phi_v\circ\alpha)(t)=\big((v\circ\alpha)(t),\alpha(t)-\langle\alpha(t),(v\circ\alpha)(t)\rangle(v\circ\alpha)(t)\big),$$

是 $T\mathbb{S}^n$ 中的一条曲线，使得 $(\pi\circ\Phi_v\circ\alpha)(t)=(v\circ\alpha)(t)$，对其求导后可得 $\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(X))=\nabla_Xv(p)$。第二个表达式由取协变

导数得到：沿着 $\mathbb{S}^n$ 中的曲线 $(v\circ\alpha)(t)$，对 D 求 $\alpha(t) - \langle\alpha(t), (v\circ\alpha)(t)\rangle(v\circ\alpha)(t)$ 的导数。若"$\top$"表示将 $T_{v(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ 投影到 $T_{v(p)}\mathbb{S}^n$ 上；

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(X)) &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\alpha(t) - \langle\alpha(t), (v\circ\alpha)(t)\rangle(v\circ\alpha)(t)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\alpha(t) - \langle\alpha(t), (v\circ\alpha)(t)\rangle(v\circ\alpha)(t)\Big]\Big|_{t=0}\right)^{\top} \\
&= \big(X - \langle X, v(p)\rangle - \langle p, \overline{\nabla}_X v(p)\rangle v(p) - \langle p, v(p)\rangle\overline{\nabla}_X v(p)\big)^{\top} \\
&= X - \langle X, v(p)\rangle v(p) - \langle p, v(p)\rangle\overline{\nabla}_X v(p).
\end{aligned}$$

为证明最后几个断言，令 $X \in \ker\mathrm{d}\Phi|_p$。于是 $\mathrm{d}\Phi(X) = 0$，从而 $\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(X)) = \mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(X)) = 0$。由引理的第一部分可得 $X = \langle X, v(p)\rangle v(p)$。□

定理1的证明。设 $\mathcal{U}$是 Γ的正交子流形，并设 $\nu \in \Gamma(N\mathcal{U})$ 是单位向量，且 $\Phi_\nu(\mathcal{U}) \subseteq \Gamma$。固定 $p \in \mathcal{U}$。由于 $\nu(p) \in N_p\mathcal{U}$，引理3 的最后一部分表明，存在一个包含 p 的开邻域 $V_p \subset \mathcal{U}$，使得 $\Phi_\nu|_V$ 是到其像上的微分同胚。定义光滑函数

$$r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad q \mapsto \langle q, \nu(q)\rangle.$$

根据定义 Ψ和 Φ_ν，可知对所有 $q \in \mathcal{U}$，$q = \Psi(\Phi_\nu(q)\ r(q))$。因此
$V_p = \Psi\Big(\Big\{(\Phi_\nu(q)\ r(q)) :\ q \in V_p\Big\}\Big) = \Psi\Big(\Big\{((\xi,\ \eta),\ (r\circ\Phi_\nu^{-1})(\xi,\ \eta)) :\ (\xi,\ \eta) \in \Phi_\nu(V_p)\Big\}\Big).$

另一方面，由于 Γ 是各向同性的，且 p不是焦点，命题3 ，

$$\Sigma_p := \Psi\Big(\Big\{((\xi,\eta), F(\xi,\eta)) : (\xi,\eta) \in W\Big\}\Big),$$

是Γ维的 Γ 正交子流形，包含 p，其中 $\Phi_\nu(p) \in W \subset \Gamma$是开集，且 $F :\ W \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，使得$\mathrm{d}F = \theta$。如有需要，缩小 V_p 后，我们可以假设 $\Phi_\nu(V_p) \subset W$。另请注意，若 $X \in T_q\mathcal{U}$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r(X) = X(r) &= \langle X, \nu(q)\rangle + \langle q, \overline{\nabla}_X\nu(q)\rangle, \\
&= \langle q, \overline{\nabla}_X\nu(q)\rangle, && \text{(Since } X \perp \nu(p)\text{)} \\
&= \langle q - \langle q, v(q)\rangle v(q), \overline{\nabla}_X v(q)\rangle, && \text{(Since } \nabla_X\nu(p) \perp \nu(p)\text{)} \\
&= \langle q - \langle q, v(q)\rangle v(q), \mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_\nu(X))\rangle, && \text{(By Lemma 3)} \\
&= \Phi_\nu^*\theta(X), && \text{(From equation (2.1))} \\
&= \mathrm{d}(\Phi_\nu^* F)(X). && \text{(By definition of } F\text{)}
\end{aligned}$$

因此 $r = \Phi_\nu^*(F|_{\Phi_\nu(V)})$，因为我们可以选择 F使其满足 $F(\Phi_\nu(p)) = r(p)$。因此

$$V_p = \Psi\Big(\Big\{((\xi,\eta), F(\xi,\eta)) : (\xi,\eta) \in \Phi_\nu(V_p)\Big\}\Big) \subseteq \Psi\Big(\Big\{((\xi,\eta), F(\xi,\eta)) : (\xi,\eta) \in W\Big\}\Big) = \Sigma_0.$$

□

W我们现在证明，正交子流形的存在意味着各向同性 c.

引理 4. 设 $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$ 是浸入的，且 v 是 S上的一个单位截面。对于 X, $Y \in T_pS$

$$(\Phi_v^*\Omega)_p(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X v(p), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_Y v(p), X\rangle.$$

证明。 若 $p \in S$ 且 X， $Y \in T_pS$ 则方程 (2.2) 给出

$$(\Phi_v^*\Omega)(X,Y) = g\Big(\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(X)), \mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(Y))\Big) - g\Big(\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(Y)), \mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(X))\Big).$$

由引理 3可得

$$\begin{aligned} g\Big(\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\Phi_v(X)), \mathcal{K}(\mathrm{d}\Phi_v(Y))\Big) &= g\Big(\overline{\nabla}_X v(p), Y - \langle v(p), Y\rangle v(p) - \langle v(p), p\rangle \overline{\nabla}_Y v(p)\Big) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X v(p), Y\rangle - \langle v(p), p\rangle \langle \overline{\nabla}_X v(p), \overline{\nabla}_Y v(p)\rangle. \end{aligned}$$

交换 X 和 Y 后进行类似计算，可得公式

$$(\Phi_v^*\Omega)_p(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X v(p), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_Y v(p), X\rangle.$$

□

本节余下部分中，我们用记号 (Σ, ν) 表示一对满足以下条件的对象：$\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是浸入的，且 $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$ 是单位的。

命题 4. 假设 $\Phi_\nu(\Sigma) \in T\mathbb{S}^n$ 是浸入的，且维数 $\Sigma > 0$。则 Σ 是 $\Phi_\nu(\Sigma)$ 的正交子流形，而 $\Phi_\nu(\Sigma)$ 是各向同性的。

证明。第一个断言由定义可知。对于第二个断言，令 X， $Y \in T_p\Sigma$。那么

$$\begin{aligned} (\Phi_\nu^*\Omega)_p(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \nu(p), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_Y \nu(p), X\rangle && \text{(By Lemma 4)} \\ &= \langle [X,Y], \nu(p)\rangle && \text{(Since } \overline{\nabla} \text{ is torsion free and } \nu(p) \perp T_p\Sigma) \\ &= 0. && \text{(Since } \nu(p) \perp T_p\Sigma) \end{aligned}$$

由于 $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$，根据引理 3 ， Φ_ν 是一个浸入，故 $\Omega|_{\Phi_\nu(\Sigma)} = 0$ 成立。 □

注 2. 命题 4 是命题 3的逆命题。事实上，若 $\Gamma \subseteq T\mathbb{S}^n$ 具有一个正交子流形 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 及其单位法向量场 ν， $\Phi_\nu(\Sigma)$ 根据命题 4是各向同性的。若 $\Gamma = \Phi_\nu(\Sigma)$——即 Γ 完全由法向量场 $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$ 生成——那么 Γ 它本身是各向同性的。

命题 5. 假设 $\Phi_\nu(\Sigma) \subset T\mathbb{S}^n$ 是浸入的。设 $q \in \Sigma$，并令 $p \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{q\}$位于直线 $\Phi_\nu(q)$ 上。那么， p是 $\Phi_\nu(\Sigma)$的焦点，当且仅当存在一个非零的 $Y \in T_q\Sigma$ 满足特征值方程

$$\langle q - p, \nu(q)\rangle \overline{\nabla}_Y \nu(q) = Y.$$

特别地，该特征值是沿着 $\nu(q)$ 从 Σ 到$\Phi_\nu(\Sigma)$的焦集的距离。若 Σ是超曲面，则 $X \mapsto \nabla_X \nu$是 Σ的形算子。

证明。设 $q \in \Sigma$ 和 $p \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{q\}$ 属于直线 $\Phi_\nu(q)$。因此，我们可以写成$p = \Psi(\Phi_\nu(q)\ \langle p,\ \nu(q)\rangle)$，即 $p = q - \langle q-p,\ \nu(q)\rangle\nu(q)$。若 $Y \in T_q\Sigma$，则由引理 3

$$\Phi_\nu^*\Big(\langle p, \nu(q)\rangle \mathrm{d}\pi + \mathcal{K}\Big)(Y) = \langle p-q, \nu(p)\rangle\overline{\nabla}_Y\nu(q) + Y,$$

且 Φ_ν 是一个浸入。由命题 1即可得出结论。 □

5. Lines Tangent to Submanifolds

现在考虑由一对向量 $(S,\ v)$ 生成的直线，其中 v 是 S 上的单位切向量场，且 $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 仍为浸入的。在这种情况下，我们证明 S 是 $\Phi_v(S)$ 的焦集的一部分，并给出关于 $\Phi_v(S)$ 为各向同性的若干刻画。首先，我们给出 Φ_v 何时为浸入的刻画。

引理 5. 映射 Φ_v 是浸入，当且仅当 $v \in \Gamma(TS)$ 相对于欧几里得联络 ∇ 处处非测地（即对所有 $p \in S$，均有 $\nabla_v v(p) \neq 0$）。

证明。我们证明其逆否命题，即对每个 $p \in S$

$$\mathrm{d}\Phi_v|_p \text{ has non trivial kernel} \iff \overline{\nabla}_v v(p) = 0.$$

逆向蕴含可通过在引理 3中令 $X = v(p)$ 得到。为证明正向蕴含，令 $X \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\Phi_v|_p$，其中 $X \neq 0$。引理 3 推出 $\nabla_X v(p) = 0$且 $X = \lambda v(p)$，其中 $\lambda \neq 0$。由于 ∇ 是张量性的，因此有 $\nabla_v v(p) = 0$。 □

因此，当 v的积分曲线被视为 $\mathbb{R}^{n+1}$中的曲线时， Φ_v 恰好在这些曲线的曲率为零时不是浸入。

命题 6. 设 Φ_v 是一个浸入，且 $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$ 是浸入的。 $\Phi_v(S)$的焦集包含 S。

证明。任取 $p \in S$，注意到 $p = \Psi(\Phi_v(p)\ \langle p, v(p)\rangle) \in \Psi(\Phi_v(S) \times \mathbb{R})$。令$X = \mathrm{d}\Phi_v(v(p)) \in T_{\Phi_v(p)}\Phi_v(S)$，由引理 5 可知它非零。容易证明

$$\langle p, v(p)\rangle \mathrm{d}\pi(X) + \mathcal{K}(X) = 0,$$

by 引理 3 的一个应用。应用命题即可完成证明。 □

主定理 1. 设 Φ_v 是一个浸入，且 $\Phi_v(S) \subset T\mathbb{S}^n$ 是浸入的。以下命题等价。

(a) $\Phi_v(S)$是各向同性的。*(b)* 每个 $p \in S$ 都属于一个开集 $U \subseteq S$，在该开集上 $v|_U = \mathit{grad}\ f$，其中 f 是某个光滑函数 $f : U \to \mathbb{R}$。若 S 是单连通的，我们可以取 $U = S$。*(c)* 分布 $v^\perp$ 是可积的，并且 v 是 S上的测地向量场

证明。 $(a) \implies (b)$: 定义 1-形式 $A: p \mapsto \langle \cdot, v(p)\rangle\Big|_{T_pS}$ 于 S上。由于 ∇ 是一Levi-Civita 联络，很容易证明对于 $X, Y \in \Gamma(TS)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A(X,Y) &= X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X,Y]) \\
&= \langle X, \overline{\nabla}_Y v\rangle - \langle Y, \overline{\nabla}_X v\rangle && \text{(Since } \overline{\nabla} \text{ is } \mathbb{R}^{n+1}\text{'s Levi-Civita connection.)} \\
&= \langle Y, \nabla_X v\rangle - \langle X, \nabla_Y v\rangle && \text{(Since } \nabla \text{ is } \overline{\nabla} \text{ restricted to } S) \\
&= -\Phi^*\Omega(X,Y). && \text{(By Lemma 4)}
\end{aligned}$$

因此，由于 Φ 是一个浸入

$$\Omega|_{\Phi_v(S)} = 0 \implies \Phi^*\Omega = 0 \implies \mathrm{d}A = 0.$$

Poincar´e 引理现在推出，对于每个 $p \in S$，都存在一个开邻域 U 和一个光滑函数 $f: U \to \mathbb{R}$，使得 $A|_U = \mathrm{d}f$，即 $v|_U = \mathbf{grad}\ f$。$(b) \implies (c)$: 首先证明 v 是 S 上的一个测地向量场。设 $p \in S$ 和 $v|_U = \mathbf{grad}\ f$，其中 U 且 $f: U \to \mathbb{R}$ 如上。于是对于任意 $X \in T_pS$,

$$\langle \nabla_v v(p), X\rangle = \mathrm{Hess}(f)_p(v(p), X) = \mathrm{Hess}(f)_p(X, v(p)) = \langle \nabla_X v(p), v(p)\rangle = 0,$$

由于 v 是单位向量。由于 p 和 X 是任意的，因此 $\nabla_v v = 0$。为证明

$$v^\perp : p \mapsto \{X \in T_pS \ :\ \langle X, v(p)\rangle = 0\},$$

可积，令 $c := f(p)$。由于 $||\mathbf{grad}\ f|| = ||v|| = 1$，可知 $\mathrm{d}f = 1$ 的秩为 c，且 c 是 f 的正则值。因此，$f^{-1}(c)$ 是 U 的一个维数为 $\dim S - 1$ 的嵌入子流形，且包含 p。容易验证，$T_p f^{-1}(c) = v^\perp(p)$。$(c) \implies (a)$: 由于 v 的性质，$v^\perp$ 和 $\mathrm{Span}\ v$ 都是 TS 的正则光滑子丛，并且我们有如下丛分裂

$$TS = v^\perp \oplus \mathrm{Span}\ v.$$

现在任取 X，$Y \in \Gamma(TS)$，并按上述方式将它们分解:

$$X = \widetilde{X} + \alpha v \qquad \text{and} \qquad Y = \widetilde{Y} + \beta v,$$

其中 $\widetilde{X}$，$\widetilde{Y} \in \Gamma(v^\perp)$，且 α，β 是 S 上的光滑函数。因此

$$\Phi^*\Omega(X,Y) = \Phi^*\Omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + \alpha\Phi^*\Omega(v, \widetilde{Y}) + \beta\Phi^*\Omega(\widetilde{X}, v).$$

应用引理 4以及 v 是单位测地线这一条件，可得

$$\Phi^*\Omega(v, \widetilde{Y}) = \langle \nabla_v v, \widetilde{Y}\rangle + \langle v, \nabla_{\widetilde{Y}} v\rangle = 0,$$

类似地，$\Phi^*\Omega(X, v) = 0$。此外，由于 $v^\perp$ 是闭合的，$[X,Y] \in v^\perp$，因此

$$\begin{aligned}
\Phi^*\Omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \langle \nabla_{\widetilde{X}} v, \widetilde{Y}\rangle - \langle \nabla_{\widetilde{Y}} v, \widetilde{X}\rangle && \text{(Lemma 4)} \\
&= \widetilde{X}(\langle v, \widetilde{Y}\rangle) - \widetilde{Y}(\langle v, \widetilde{X}\rangle) - \langle v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle && \text{(Since } \nabla \text{ is Levi-Civita)} \\
&= 0. && \text{(Since } \widetilde{X}, \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \in v^\perp)
\end{aligned}$$

它遵循满足 t 即 $\Phi^*\Omega(X,\ Y)\ =0$。由于 X 和 Y 是任意的，结论得证。 □

注 3。定理 1 中的函数 $f:\ U\to\mathbb{R}$ 满足 ||梯度 $f||=1$。这类函数称为局部距离函数。事实上，若 $c\in\mathbb{R}$ 满足 $f^{-1}(c)\neq\emptyset$，则对于所有足够接近 $f^{-1}(c)$ 的 $x\in U$，$|f(x)-c|$ 就是从 x 到 $f^{-1}(c)$ 的测地距离（在 U 中）（见 [25], 第 178 页）。

推论 3。 设 $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个曲面（即二维浸入的子流形），且二元组 $(S,\ v)$ 满足定理 *1* 的条件。 $\Phi_v(S)$ 是各向同性的，当且仅当 v 是 S上的测地向量场。如果 $n=2$，“各向同性”可以替换为“拉格朗日”。

证明。 根据假设， $v^\perp$ 的维数为 $\dim S-1=1$，因此是可积的。现在应用上述定理的（a）$\iff$（c）。如果 $n=2$，由于 Φ_v（S）是 TS^2 的二维子流形，因此它是各向同性的当且仅当它是拉格朗日的。□

6. The Curvatures of Focal Sheets

现在我们研究焦集的几何性质：当它们具有 a C^2-光滑流形结构，且其相关直线族是各向同性的时的情形。为此，我们考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中带有单位切向量场的两个浸入子流形，即对于 $i=1,2$，成对的 (S_i,v_i)，它们满足以下条件

(1) $\Phi_{v_1}(S_1)=\Phi_{v_2}(S_2)$，（2） $\Phi_{v_i}:\ S_i\to\Phi_{v_i}(S_i)$ 是微分同胚，（3） $\Phi_{v_i}(S_i)$ 是各向同性的。

条件 (1) 确保两对 (S_i,v_i) 生成相同的定向直线族，即对于 $i=1$ 或 2，均为 $\Phi_{v_i}(S_i)$。由于向量场 v_i 与 S_i 相切，命题 6 表明 S_1 和 S_2 均包含在 $\Phi_{v_i}(S_i)$ 的焦集中。条件 (2) 确保子流形 S_i 可通过它们在 Φ_{v_i} 下的公共像相互关联。事实上，在映射 $\Phi_{v_2}^{-1}\circ\Phi_{v_1}:\ S_1\to S_2$ 下，S_1 与 S_2 微分同胚；若 $p_i\in S_i$ 通过 $\Phi_{v_1}(p_1)=\Phi_{v_2}(p_2)$ 相关联，则

$$v_1(p_1)=v_2(p_2),\qquad\text{and}\qquad p_1-\langle p_1,v_1(p_1)\rangle=p_2-\langle p_2,v_2(p_2)\rangle, \tag{6.1}$$

根据 Φ_{v_i} 的定义。因此我们可以写成

$$p_1-p_2=\langle p_1-p_2,v_1(p_1)\rangle v_1(p_1),$$

其中 $\langle p_1-p_2,v_1(p_1)\rangle$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中沿直线 $v_1(p_1)$ 从 S_1 到 S_2 的有向距离。受此启发，我们定义有向距离函数

$$\begin{aligned}\mu_{12}:S_1&\to\mathbb{R}\\ p&\longmapsto\left\langle p-(\Phi_{v_2}^{-1}\circ\Phi_{v_1})(p),v_1(p)\right\rangle.\end{aligned} \tag{6.2}$$

从 S_1 到 S_2。由此可得 $(\Phi_{v_2}^{-1}\circ\Phi_{v_1})(p)\ =p-\mu_{12}(p)v(p)$，因此当且仅当 p和$(\Phi_{v_2}^{-1}\circ\Phi_{v_1})(p)$是直线 $\Phi_{v_1}(p)$上的不同焦点时，$\mu_{12}(p)\ \neq\ 0$。

命题 7。 令 ∇ 为由 ∇ 在 S_1 上诱导的联络，并定义 $\overline{\quad}$ e

$$E_2 := V_2 - \langle V_2, v_1\rangle v_1 \qquad where \qquad V_2 := \mathrm{d}(\Phi_{v_1}^{-1} \circ \Phi_{v_2})(v_2).$$

假设 μ_{12} 处处不为零。那么 E_2 非零，且满足

$$\nabla_{E_2} v_1 = \mu_{12}^{-1} E_2. \tag{6.3}$$

此外，若 $p \in \mathcal{M}$ 满足 $\mathcal{M}$ 是 $v_1^{\perp}$的可积流形，则 $E_2(p) \in T_p\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个主方向，对应的主曲率为 $1/\mu_{12}(p)$。

证明。 令 $p_i \in S_i$ 满足 $\Phi_{v_1}(p_1) = \Phi_{v_2}(p_2)$。根据定义，$\mathrm{d}\Phi_{v_1}|_{p_1}(V_2) = \mathrm{d}\Phi_{v_2}|_{p_2}(v_2)$成立。通过 $\mathrm{d}\pi$ 和 $\mathcal{K}$将其投影到 $T\mathbb{S}^n$ 上，引理3 给出

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_{V_2} v_1(p_1) = \overline{\nabla}_{v_2} v_2(p_2) \\ V_2(p_1) - \langle V_2(p_1), v_1(p_1)\rangle v_1(p_1) - \langle p_1, v_1(p_1)\rangle \overline{\nabla}_{V_2} v_1(p_1) = -\langle p_2, v_2(p_2)\rangle \overline{\nabla}_{v_2} v_2(p_2). \end{cases} \tag{6.4}$$

此外，将这些方程与方程（6.1）结合，可得

$$V_2(p_1) = \langle V_2(p_1), v_1(p_1)\rangle v_1(p_1) + \langle p_1 - p_2, v_1(p_1)\rangle \overline{\nabla}_{V_2} v_1(p_1),$$

这意味着$\nabla_{V_2} v_1(p_1) \in \overline{T_{p_1} S_1}$，因此 $\nabla_{V_2} v_1(p_1) = \overline{\nabla}_{V_2} v_1(p_1)$。上述结果将 V_2 分解为其相对于 v_1 的正交分量和平行分量；

$$V_2 = \langle V_2, v_1\rangle v_1 + \mu_{12} \nabla_{V_2} v_1. \tag{6.5}$$

于是，

$$\begin{aligned} E_2 &= V_2 - \langle V_2, v_1\rangle v_1 && \text{(By definition of } E_2\text{)} \\ &= \mu_{12} \nabla_{V_2} v_1 && \text{(Identity (6.5))} \\ &= \mu_{12}(\langle V_2, v_1\rangle \nabla_{v_1} v_1 + \nabla_{E_2} v_1) && \text{(By definition of } E_2\text{)} \\ &= \mu_{12} \nabla_{E_2} v_1. && \text{(Condition (3) and Main Theorem 1)} \end{aligned}$$

由于 $\mu_{12} \neq 0$，方程（6.3）即得。再由上述计算及方程（6.4）

$$E_2 = \mu_{12} \nabla_{V_2} v_1 = \mu_{12} \overline{\nabla}_{v_2} v_2.$$

由于 Φ_{v_2} 是一个微分同胚，$\overline{\ }$ $\nabla_{v_2} v_2 \neq 0$ 由引理 5可得 $E_2 \neq 0$。最后，若 $\mathcal{M}$ 是 $v_1^{\perp}$ 的一个积分流形（由主定理 1可知它存在），那么 $\mathcal{M}$是 S_1 中的一个超曲面，其单位法向量为 $v_1|_{\mathcal{M}}$，形算子为 $X \mapsto \nabla_X v_1$。若$p \in \mathcal{M}$，则 $E_2(p)$ $\in T_p\mathcal{M}$ 因为 $E_2 \perp v_1$。在 6.3处计算方程（ p ，证明完毕。 □

定理 2。 设 μ_{12} 处处不为0。 S_1 的截面曲率 K 满足

$$K(V_2, v_1) = \frac{\mathrm{d}\mu_{12}(v_1) - 1}{\mu_{12}^2}.$$

证明。 注意，由于 $v_1 \wedge V_2$ 和 $v_1 \wedge E_2$ 定义了同一个平面，因此有

$$K(V_2, v_1) = K(E_2, v_1).$$

此外，如有必要，经过重新缩放，我们可以假设 E_2 是单位向量——此时方程（6.3）仍然成立。因此， $\{E_2, v_1\}$ 是正交归一的，并且

$$\begin{aligned} K(E_2, v_1) &= \langle R(E_2, v_1)v_1, E_2\rangle && \text{(Where } R(\cdot,\cdot,\cdot)\text{) is the Riemann tensor)} \\ &= -\Big(\langle \nabla_{v_1}\nabla_{E_2} v_1, E_2\rangle + \langle \nabla_{[E_2,v_1]} v_1, E_2\rangle\Big). && \text{(Since } \nabla_{v_1} v_1 = 0 \text{ by Main Theorem 1)} \end{aligned}$$

计算这两项可得

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{v_1}\nabla_{E_2} v_1, E_2\rangle &= \langle \nabla_{v_1}(\mu_{12}^{-1} E_2), E_2\rangle && \text{(By Equation 6.3)} \\ &= \langle -\mu_{12}^{-2}\mathrm{d}\mu_{12}(v_1)E_2 + \mu_{12}^{-1}\nabla_{v_1} E_2, E_2\rangle \\ &= -\mu_{12}^{-2}\mathrm{d}\mu_{12}(v_1) + \mu_{12}^{-1}\langle \nabla_{v_1} E_2, E_2\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{[E_2,v_1]} v_1, E_2\rangle &= \langle \nabla_{E_2} v_1, [E_2, v_1]\rangle && \text{(By Lemma 4, since } \Omega|_{\Phi_{v_1}(S_1)} = 0\text{)} \\ &= \langle \nabla_{E_2} v_1, \nabla_{E_2} v_1\rangle - \langle \nabla_{E_2} v_1, \nabla_{v_1} E_2\rangle && (\nabla \text{ is torsion free}) \\ &= \mu_{12}^{-2} - \mu_{12}^{-1}\langle E_2, \nabla_{v_1} E_2\rangle. && \text{(By Equation (6.3))} \end{aligned}$$

将上述结果代入 $K(E_2, v_1)$ 的公式，得到

$$K(E_2, v_1) = \frac{\mathrm{d}\mu_{12}(v_1) - 1}{\mu_{12}^2}.$$

□

如果已知更多焦集的信息，就能进一步揭示 S_1 的几何性质。

定理 3。 设 $(S_1, v_1) \ldots, (S_k, v_k)$ 满足两两条件 (1) - (3)，其中维数 $S_i = k$。定义 μ_{ij} : $S_i \to \mathbb{R}$，从 S_i 到 S_j 的有向距离为

$$\mu_{ij}(q) = \left\langle q - (\Phi_{v_j}^{-1} \circ \Phi_{v_i})(q), v_i(q)\right\rangle, \qquad i, j \in \{1, \ldots, k\}. \tag{6.6}$$

假设 μ_{ij} 处处不为0，对于 $i \neq j$，并定义 $E_{ij}, V_{ij} \in \Gamma(TS_i)$ 为

$$E_{ij} := V_{ij} - \langle V_{ij}, v_i\rangle v_i \qquad \textit{where} \qquad V_{ij} := \mathrm{d}(\Phi_{v_i}^{-1} \circ \Phi_{v_j})(v_j).$$

a) 设 $\mathcal{M} \subset S_1$ 是$v_1^{\perp}$和 $p \in \mathcal{M}$的可积流形。那么， $\{E_{1j}(p)\}_{j=2}^k$是 $\mathcal{M}$ 在 p处对应不同主值 $\{1/\mu_{1j}(p)\}_{j=2}^k$的主方向。***b)*** 向量场集 $\{E_{1j}\}_{j=2}^k$ 构成 $v_1^{\perp}$的正交标架，且 S_1 的里奇曲率张量满足

$$Ric(v_1, v_1) = \sum_{j=2}^{k} K(v_1, E_{1j}) = \sum_{j=2}^{k} \frac{\mathrm{d}\mu_{1j}(v_1) - 1}{(\mu_{1j})^2}.$$

证明。(a)：设 $q \in S_1$，首先我们证明当 $i \neq j$ 时，$\mu_{1j}(q) \neq \mu_{1i}(q)$。定义$q_j = \Phi_{v_j}^{-1} \circ \Phi_{v_1}(q) \in S_j$和 $q_i = \Phi_{v_i}^{-1} \circ \Phi_{v_1}(q) \in S_i$，使得 $\Phi_{v_i}(q_i) = \Phi_{v_j}(q_j) = \Phi_v(q)$。于是 $v_1(q) = v_j(q_j) = v_i(q_i)$，根据 μ_{1j}, μ_{1i} 和 μ_{ij} 的定义可得

$$\mu_{1j}(q) - \mu_{1i}(q) = \mu_{ij}(q_i).$$

因此 $\mu_{1j}(q) \neq \mu_{1i}(q)$，否则 $\mu_{ij}(q_i) = 0$，这与 $0 \notin \mu_{ij}(S_i)$ 矛盾。设 $\mathcal{M}$ 和 $p \in \mathcal{M}$ 如上。根据定义，$E_{1j}(p) \in v_1^{\perp}(p) = T_p\mathcal{M}$。将命题 7 应用于对 (S_1, v_1)、(S_j, v_j)，取代 (S_1, v_1)、(S_2, v_2)，即可证明 (a)。

(b) 正交性成立，因为 $\{E_{1j}\}_{j=2}^{k}$ 是 $\mathcal{M}$ 的（逐点）主方向，且对应不同的主值。由于这样的方向共有 $k-1$ 个，它们张成 $v^{\perp}$。里奇曲率表达式可直接由定理 2 得出。□

7. The Hypersurface case

给定一个超曲面 Σ，现在应用上一节的结果来研究其焦叶的曲率。关于这一问题的一个经典结果是

定理 A (Bianchi，1874年)。 [9] 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 C^3-光滑、有向、无脊且严格凸的曲面。假设 Σ 的曲率半径满足 $r_2 - r_1 \equiv s$，其中 $s \neq 0$ 为常数。那么 Σ 的两个焦叶具有高斯曲率 $-1/s^2$。

有必要对上述术语作一些说明。一般而言，焦叶是奇异的，关于这一问题的最新研究见 [11] 。在曲率半径r_i： $\Sigma \to \mathbb{R}$ 重数为 ≥ 1的点处，函数 r_i 通常不可微，焦叶也因此是奇异的。

定义 3。 给定一个超曲面 Σ，函数

$$\begin{aligned} s_{ij} : \Sigma &\to \mathbb{R} \\ p &\to r_i(p) - r_j(p), \end{aligned}$$

其中 $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ 称为 Σ的散光度 。

点 $p \in \Sigma$ 处所有曲率半径的重数均为 1，当且仅当 $s_{ij}(p) \neq 0$ 对所有$i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$均成立。因此，Bianchi 定理中要求 $s \neq 0$。

定义 4. 设 Σ 为一个超曲面，具有单位法向量场 ν，且 r_i： $\Sigma \to \mathbb{R}$ 是 Σ的一个曲率半径。若点 $q \in \Sigma$ 满足

$$r_i(q)\overline{\nabla}_X \nu = X \text{ 且 } \qquad \mathrm{d}r_i(X) = 0, \tag{7.1}$$

对某个非零的 $X \in T_q\Sigma$成立，则称 Σ 为无脊，即它没有脊点。

Bianchi 定理中的无脊条件确保映射 $\mathcal{Y}_i$ 是浸入，换言之，曲面在局部微分同胚于其焦叶。

引理 6。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 C^3-光滑超曲面。设 ν 是一个单位法向量场，且 $r_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个重数为 1 的曲率半径。若 $X \in T_q\Sigma$ 则

$$\mathrm{d}\mathcal{Y}_i(X) = X - \mathrm{d}r_i(X)\nu(q) - r_i(q)\overline{\nabla}_X\nu(q). \tag{7.2}$$

特别地， $\mathcal{Y}_i$ 在 q 处是浸入，当且仅当 q 不是脊点。

证明。 由于 Σ是 C^3-光滑且没有脐点，曲率半径函数 $r_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 可微。$\mathrm{d}\mathcal{Y}_i$ 的表达式可由方程（1.2）直接得到。又由于 $\nu(q)$ 与 X 和$\nabla_X\nu(q)$ 正交，容易证明，$\mathrm{d}\mathcal{Y}_i|_q$ 有非零核，当且仅当 q 是脊点。□

即使满足无脊条件，焦叶仍可能自相交。因此，对映射 $\mathcal{Y}_i$ 施加单射条件是自然的做法，以确保具有流形结构。由于要讨论焦集的曲率性质，假定这两个条件都成立——也就是说，映射 $\mathcal{Y}_i$ 是到其像上的微分同胚。

命题 8。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 C^3-光滑的严格凸超曲面，其单位法向量为 ν ，曲率半径$(r_i)_{i=1}^n$ 的重数为1。设 $S_i := \mathcal{Y}_i(\Sigma)$是一个焦叶，且 $\mathcal{Y}_i$ 是微分同胚。定义 $X_i \in \Gamma(T\Sigma)$ 如下：

$$r_i\overline{\nabla}_{X_i}\nu = X_i \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{d}r_i(X_i) = 1,$$

因此， X_i 是一个主向量场。于是， $v_i := -\mathrm{d}\mathcal{Y}_i(X_i)$ 是定义在 S_i 上的单位测地向量场，而 $v_i^\perp$是可积的。此外， $\Phi_{v_i} \circ \mathcal{Y}_i = \Phi_\nu$、 $v_i \circ \mathcal{Y}_i = \nu$ 和 Φ_{v_i} 是浸入。

证明。 首先注意到， X_i 是良定义的，因为曲率半径的重数为 1，且 Σ 无脊。此外，v_i 也是良定义的。上述断言就是将定理 c1 的第 部分应用于（S_i， v_i）。因此，我们只需证明第 a部分成立（即$\Phi_{v_i}(S)$ 是各向同性的），并证明 v_i 满足定理 1 的前提条件，也就是说， v_i 是一个单位向量场，且 Φ_{v_i} 是浸入。利用引理 6 可验证，若 $q \in \Sigma$,

$$(v_i \circ \mathcal{Y}_i)(q) = -\mathrm{d}\mathcal{Y}_i\big|_q(X_i) = -X_i(q) + \mathrm{d}r_i|_q(X_i)\nu(q) + r_i(q)\overline{\nabla}_{X_i}\nu(q) = \nu(q),$$

根据 X_i的定义。因此， $v_i \circ \mathcal{Y}_i = \nu$ ，所以 v_i 是单位的。若 $p \in S_i$ 和 $q \in \Sigma$ 满足 $p = \mathcal{Y}_i$（q），则

$$\begin{aligned}
\Phi_{v_i}(p) &= (v_i(p), p - \langle p, v_i(p)\rangle v_i(p)), && \text{(By definition of } \Phi_{v_i}) \\
&= (\nu(q), \mathcal{Y}_i(q) - \langle \mathcal{Y}_i(q), \nu(q)\rangle\nu(q)), && \text{(By definition of } p \text{ and } v_i \circ \mathcal{Y}_i = \nu) \\
&= (\nu(q), q - \langle q, \nu(q)\rangle), && \text{(By definition of } \mathcal{Y}_i) \\
&= \Phi_\nu(q).
\end{aligned}$$

因此， $\Phi_{v_i} \circ \mathcal{Y}_i = \Phi_\nu$ 从而 $\Phi_{v_i}(S_i) = \Phi_\nu(\Sigma)$。然而， Σ 是 $\Phi_\nu(\Sigma)$ 的正交子流形，因此 $\Phi_\nu(\Sigma)$，从而 $\Phi_{v_i}(S_i)$ 是各向同性的。由上述结论还可得$\Phi_{v_i} = \Phi_\nu \circ \mathcal{Y}_i^{-1}$ 。因此，Φ_{v_i} 是一个浸入，因为 Φ_ν 是（根据引理 3）。□

定理 2 和命题 8共同使我们能够将同一超曲面的不同焦叶的几何联系起来，如下所述。

主定理 2。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 C^3-光滑的严格凸超曲面，其单位法向量场为 ν，且其曲率半径 $(r_i)_{i=1}^n$ 的重数为 1。对于 $i=1,\ 2$令 $S_i := \mathcal{Y}_i(\Sigma)$ 为焦叶，且 $\mathcal{Y}_i$ 为一个微分同胚。如果 $X_i \in \Gamma(T\Sigma)$ 满足

$$r_i \overline{\nabla}_{X_i} \nu = X_i \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{d}r_i(X_i) = 1,$$

S_1 的截面曲率记为 K_1，满足

$$(\mathcal{Y}_1^* K_1)\big(X_1, X_2\big) = \frac{\mathrm{d}s_{12}(X_1) - 1}{(s_{12})^2}. \tag{7.3}$$

证明。 对每个焦集 $S_i := \mathcal{Y}(\Sigma)$ 应用命题 $i=1,\ 2$ 得到一对 (S_i, v_i)，其中 $v_i \in \Gamma(TS_i)$ 是由 $v_i := -\mathrm{d}\mathcal{Y}_i(X_i)$ 定义的单位向量场，并满足 $\Phi_{v_i} \circ \mathcal{Y}_i = \Phi_\nu$， $v_i \circ \mathcal{Y}_i = \nu$ 且对每个 Φ_{v_i} 都是浸入。我们首先证明这对对象满足第 6节开头提出的条件；

(1) $\Phi_{v_1}(S_1) = \Phi_{v_2}(S_2)$。 （2）$\Phi_{v_i} : S_i \to \Phi_{v_i}(S_i)$ 是一个微分同胚。 （3） $\Phi_{v_i}(S_i)$ 是各向同性的。

首先注意到，由于 $\Phi_{v_i} \circ \mathcal{Y}_i = \Phi_\nu$ 我们有 $\Phi_{v_1} \circ \mathcal{Y}_1 = \Phi_{v_2} \circ \mathcal{Y}_2$。因此$\Phi_{v_1}(S_1) = \Phi_{v_2}(S_2)$，这就是 (1)。对于 (2)，我们注意到曲率是一个局部概念，因此要推导方程 (7.3)，只需推导

$$K_1\big(\mathrm{d}\mathcal{Y}_1(X_1), \mathrm{d}\mathcal{Y}_1(X_2)\big) = \frac{\mathrm{d}s_{12}(X_1) - 1}{(s_{12})^2},$$

在 S_1任意一点的某个开邻域上。因此，通过局部考察，我们可以假设适当限制定义域后，Φ_{v_1} 是一个微分同胚。由于 $\Phi_{v_2} = \Phi_{v_1} \circ \mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2^{-1}$，同一定义域可在 $\mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2^{-1}$下拉回，在该定义域上 Φ_{v_2} 是一个微分同胚，于是得到 (2)。(3) 由 (1) 得出，因为 $\Phi_\nu(\Sigma)$ 是各向同性的。为了计算 S_1 与 S_2 之间的有向距离（参见方程 (6.2)），令 $p \in S_1$ 和 $q \in \Sigma$ 满足关系 $p = \mathcal{Y}_1(q)$。于是

$$\begin{aligned}
\mu_{12}(p) &:= \langle p - (\Phi_{v_2}^{-1} \circ \Phi_{v_1})(p), v_1(p)\rangle, \\
&= \langle \mathcal{Y}_1(q) - (\Phi_{v_2}^{-1} \circ \Phi_{v_1} \circ \mathcal{Y}_1)(q), \nu(q)\rangle, && (\text{Using } v_1 \circ \mathcal{Y}_1 = \nu) \\
&= \langle \mathcal{Y}_1(q) - \mathcal{Y}_2(q), \nu(q)\rangle, && (\text{Using } \Phi_{v_2}^{-1} \circ \Phi_{v_1} = \mathcal{Y}_2 \circ \mathcal{Y}_1^{-1}) \\
&= r_1(q) - r_2(q) && (\text{Using the definition of } \mathcal{Y}_i) \\
&= -s_{12}(q).
\end{aligned}$$

因此 $\mu_{12} \circ \mathcal{Y}_1 = -s_{12}$。由于 Σ 其曲率半径的重数为 1，s_{12}，因此 μ_{12}处处不为 0。因此，我们应用定理 2 得到

$$K(V_2, v_1) = \frac{\mathrm{d}\mu_{12}(v_1) - 1}{\mu^2},$$

其中 $V_2 = \mathrm{d}(\Phi_{v_1}^{-1} \circ \Phi_{v_2})(v_2)$。然而，

$$v_2 = \mathrm{d}(\Phi_{v_1}^{-1} \circ \Phi_{v_2})(v_2) = \mathrm{d}(\mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2^{-1})(v_2) = -\mathrm{d}\mathcal{Y}_1(X_2),$$

根据 v_2 的定义以及 Φ_{v_i} 与 $\mathcal{Y}_i$之间的推导关系。结合上述内容以及 $v_1 = -\mathrm{d}\mathcal{Y}_1(X_1)$ 和 $\mu_{12} \circ \mathcal{Y}_1 = -s_{12}$，可以将上述截面曲率公式写成方程（ 7.3 ）。□

主定理 3。设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 C^3-光滑的严格凸超曲面，具有单位法向量场 ν，其曲率半径 $(r_i)_{i=1}^n$ 的重数为 1。设$S_j := \mathcal{Y}_j(\Sigma)$ 为焦叶，且对于所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$\mathcal{Y}_j$ 为微分同胚。若$X_j \in \Gamma(T\Sigma)$ 满足

$$r_j \overline{\nabla}_{X_j} \nu = X_j \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{d}r_j(X_j) = 1,$$

$S_i (i \in \{1, \ldots, n\})$ 的里奇曲率满足

$$(\mathcal{Y}_i^* \mathrm{Ric})(X_i, X_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X_i(s_{ij}) - 1}{(s_{ij})^2},$$

证明。固定定理陈述中的 i。我们沿用与定理 2 中类似的思路，但现在应用定理 3，而不是定理 2。对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，令 $v_j := -\mathrm{d}\mathcal{Y}_j(X_j)$。则 (S_1, v_1).....、(S_n, v_n) 满足定理 3 的前提条件，即 $v_j \in \Gamma(TS_j)$ 是单位的，且条件 (1)–(3) 均得到满足。此外，$\mu_{ij} \circ \mathcal{Y}_i = -s_{ij}$，因此 μ_{ij} 处处不为 0。于是根据定理 3（以 (S_i, v_i) 代替 (S_1, v_1) ）可得

$$\mathrm{Ric}(v_i, v_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\mathrm{d}\mu_{ij}(v_i) - 1}{(\mu_{ij})^2}.$$

将 $v_i = -\mathrm{d}\mathcal{Y}_i(X_i)$ 和 $\mu_{ij} \circ \mathcal{Y}_i = -s_{ij}$ 代入上式，即完成证明。 □

注 4. 我们指出，当 Σ 的余维大于 1 时，稍微调整上述证明，也能得到类似的结果。特别是，不存在优选的单位法向量场 $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$，而向量场 $X_i \in \Gamma(T\Sigma)$ 和函数$r_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 现在只是 Σ上的以下特征值问题的解。

$$r_i \overline{\nabla}_{X_i} \nu = X_i \qquad \text{and} \qquad X_i(r_i) = 1.$$

我们注意到，若假设 Σ满足无脊条件（该条件可直接推广到高余维），且 $s_{ij} := r_i - r_j$ 不为零，则解是存在的，因此上述特征值问题的重数为 1。

References

[1] D. V.Alekseevsky、B.Guilfoyle 和 W. Klingenberg，《有向测地线空间的几何》，《Ann. Global Anal. Geom.》40 (2011) 389–409。

[2] D.V. Alekseevsky、B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg，勘误：关于有向测地线空间的几何，《Ann. Global Anal. Geom.》50.1 (2016) 97–99。[3]Y.A. Aminov，多维罗巴切夫斯基空间区域的 Bianchi 变换，《乌克兰几何文集》21 (1978) 3–5。[4] Y.A. Aminov，《欧几里得空间中负曲率子流形》，《数学成果》60 (2011) 117—131。[5] H. Anciaux 和 P. Bayard，欧几里得空间子流形的仿射高斯映射，《筑波数学杂志》42 (2018) 397—415。[6] V. I. Arnol'd，《焦散与波前的奇点》，《数学及其应用》（苏联系列），第62卷，克鲁维尔学术出版集团，多德雷赫特，1990年。[7] V.I. Arnol'd，《平面曲线与焦散的拓扑不变量》，《美国数学学会大学讲座系列》5，普罗维登斯，1994年。[8] V.I. Arnol'd，球面曲线的几何与四元数代数，《俄罗斯数学调查》50.1 (1995) 1。[9] L. Bianchi，关于负常曲率曲面，《纯粹与应用数学年刊》第二辑，7 (1874年) 55–77。[10] J.W. Bruce 和 T.C.Wilkinson，折叠映射与焦集，《奇点理论及其应用》，第一部分（考文垂，1988/1989），《数学讲义》，第1462卷，施普林格，柏林，1991年，第63–72页。[11] J.W. Bruce 和 F. Tari，直线全等族的仿射几何，arXiv 预印本 2307.02311 (2023)[12] T.E. Cecil 和 P.J. Ryan，子流形的焦集，《太平洋数学杂志》78 (1978) 27–39。[13] M.P. do Carmo，《黎曼几何》，《数学：理论与应用》，Birkh¨auser 波士顿公司，马萨诸塞州波士顿，1992年。由 Francis Flaherty 根据葡萄牙文第二版翻译。[14] P. Dombrowski，切丛的几何，《纯粹与应用数学杂志》210 (1962) 73–88。[15] M. Dunajski，有向直线与扭量对应，《几何奉献》112 (2005)，239–247。[16] N. Georgiou 和 B. Guilfoyle，切丛上的一种新几何结构，《几何与物理杂志》172 (2022) 104415。[17] V. Gorkavyy，E^4中的 Bianchi 变换示例，《数学物理、分析与几何杂志》8.3 (2012) 240–247。[18] V. Gorkavyy，伪球面 Bianchi–B ¨acklund 变换的推广，《数学科学杂志》（纽约）207.3 (2015) 467–484。[19] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg，有向直线空间上的不定 K ¨ahler 度量，《伦敦数学会杂志》72 (2005) 497–509。[20] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg，Joachimsthal 经典结果的一个整体版本，《休斯敦数学杂志》45 (2019) 455–467。[21] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg，一种在几何光学中有应用的中性 K ¨ahler 曲面，欧洲数学学会出版社，苏黎世 (2008) 149–178。[22] M.Harrison，斜平坦纤维化，《数学杂志》282 (2016)，203–221。[23] C. Huygens，《摆钟论》，1673年。[24] O. Kowalski，黎曼流形切丛上诱导黎曼度量的曲率，《纯粹与应用数学杂志》250 (1971) 124–129。[25] J.M. Lee，《黎曼流形导论》，第2版，《数学研究生教材》176，施普林格，查姆 (2018)。

[26] *R. L´opez* 和 *A. P´ampano*，《空间形式中的常散光差旋转曲面》，数学分析与应用杂志 *483 (2020), 123602*。[27] *I.R. Porteous*，《子流形的法向奇点》，微分几何杂志 *5 (1971)*。[28] *I.R. Porteous*，《几何微分：为了理解曲率》，剑桥大学出版社，剑桥，*1994*。[29] *C. Rogers* 和 *W.F. Shadwick*，《*B¨acklund* 变换及其应用》，学术出版社 *(1982)*。[30] *M. Salvai*，《欧几里得空间中有向直线空间的几何》，数学手稿 *118 (2005) 181—189*。[31] *K. Tenenblat* 和 *C.-L. Terng*，《正弦-戈登方程的高维推广及其 *B¨acklund* 变换》，美国数学会通报 *(*新系列*) 1.3 (1979) 589–593*。[32] *C.-L. Terng*，《正弦-戈登方程的高维推广及其孤子理论》，数学年刊 *111.3 (1980) 491–510*。[33] *E.J. Wilczynski*，《关于平面曲线微分几何的历史发展与未来前景的一些看法》，美国数学会通报 *22.7 (1916) 317-329*。

Nikos Georgiou, Department of Mathematics, South East Technological University, Waterford, Co. Waterford, Ireland.电子邮箱地址: nikos.georgiou@setu.ie

Brendan Guilfoyle, Faculty of Science and Informatics, Munster Technological University, Kerry, Tralee, Co. Kerry, Ireland.电子邮箱地址: brendan.guilfoyle@mtu.ie

Morgan Robson, Department of Mathematics, South East Technological University, Waterford, Co. Waterford, Ireland.电子邮箱地址: morgan.robson@setu.ie