莫斯科物理技术学院/
TH-03/26
FIAN/TD-03/26
ITEP/TH-03/26
IITP/TH-03/26

Baker-Akhiezer 函数的嵌套试探方法

A. Mironov[b,c,d,*], A. Morozov[a,c,d,†], A. Popolitov[a,c,d,‡]

[a] *MIPT, Dolgoprudny, 141701, Russia* [b] *Lebedev Physics Institute, Moscow 119991, Russia* [c] *NRC "Kurchatov Institute", 123182, Moscow, Russia* [d] *Institute for Information Transmission Problems, Moscow 127994, Russia*

arXiv:2601.17453v1 [hep-th] 24 Jan 2026

摘要

我们解释了 Noumi-Shiraishi 函数推导背后的逻辑可以直接应用于 Baker-Akhiezer函数（BAF）。这相当于将 BAF 的试探形式改为嵌套形式，其中 $N+1$ 变量的 BAF 递归地表示为对 N 变量的 BAF函数求和。这可以看作是 [1], 对称化技巧的推广，但适用于通常非对称的 BAF。我们证明，对于通常的非扭曲（$a=1$）BAF，该方法能够直接从线性方程中正确重现 Noumi-Shiraishi 公式，从而解决与非单根相关的歧义。对于第一个非平凡的扭曲情形（$N=3,\ a=2$），该方法同样消除了这一歧义；此外，前几层系数的答案具有 *direct quantization* 的 [1]形式。

1 引言

多变量 Baker-Akhiezer 函数（BAFs）由 O. Chalykh 在 [2,3] 引入，是一类特殊的 Ruijsenaars-Schneider（RS）哈密顿量的公共多项式特征函数，并具有双谱对称性。这些哈密顿量最近被证明 [4] 只是无穷多个可积系统中的一个，每个系统都对应于 Ding-Iohara-Miki（DIM）代数 [5,6] 中具有某个斜率（$a_1,\ a_2$）的一条算子射线。这一理论在 $W_{1+\infty}$ [7–10] 和仿射 Yangian 代数 [11,12], 的层面上实际上有更简单的体现，在那里，它与矩阵模型的超可积配分函数 [13–15] 的关系最为自然。不过，对于 BAF函数而言，最自然的似乎是 DIM 代数的完全（$q,\ t$）–变形层面，在这里，其与三元组结构 [16]（将 BAF函数 [2,17], 、Macdonald 多项式 [18] 和 Noumi-Shiraishi（NS）函数 [19] 相互联系起来）的联系表现得最为清晰。

在这一层次上，其他射线（不同于 RS 的射线）（$a_1,\ a_2$）对应的哈密顿系统由所谓的扭曲 BAF [17,20] 求解；而这些扭曲 BAF 反过来又应当属于各自的（$a_1,\ a_2$）三元组结构，并通过 Macdonald 多项式和 Noumi-Shiraishi 函数的适当（$a_1,\ a_2$）类似物将它们相互联系起来。

然而，（$a_1,\ a_2$）三元组结构的显式表达式尚未知晓（除最简单的 $N=2$、 $a_1=1$、$a_2=a=2$ 情形外）。[21], 其中的主要困难在于（扭曲）BAF 定义中的规范自由度；如果未能正确消除这一自由度，就会完全掩盖三元组结构。在本文中，我们提出一种以特定方式固定这一规范自由度的方法；借助**嵌套拟设**，该方法与非扭曲（$a=1$）情形相一致。

在 O. Chalykh [2], 的原始表述中，Baker-Akhiezer函数被定义为一种特殊的试探形式

$$\Psi\left(\underline{z},\underline{\lambda}\right)=q^{(\underline{\lambda}+m\underline{\rho},\underline{z})}\sum_{k_{ij}=0}^{m}q^{-\sum_{i<j}k_{ij}(z_i-z_j)}\psi_{\underline{k}}\left(\underline{\lambda}\right) \tag{1}$$

*mironov@lpi.ru,mironov@itep.ru
†morozov@itep.ru
‡popolit@gmail.com

满足一组线性方程（周期性条件 [22]）

$$\Psi\left(z_k+j,\underline{\lambda}\right)=\Psi\left(z_l-j,\underline{\lambda}\right),\ j=1..m,\ \ k<l,\ \ z_k=z_l \tag{2}$$

他证明了这样的 $\Psi(z,\ \lambda)$ 存在，且除归一化外唯一，它是 z 和 λ 的函数。

这种定义本身存在选择各个系数 ψ_k 时的歧义。当 $N=3, m=1$ 时，这一点首次显现。在这种情况下，有两个简单正根：$\alpha_{1,\ 2}$ 和 $\alpha_{2,\ 3}$，以及一个非简单根 $\tilde{\alpha}_{1,\ 3}=\alpha_{1,\ 2}+\alpha_{2,\ 3}$，因此，系数组合 $\psi_{1,\ 1,\ 0}=\psi_{1,\ 1,\ 0}+\psi_{0,\ 0,\ 1}$ 在所有方程中都以一个整体和的形式出现。因此，函数 Ψ 是明确确定的，而将 ψ_k 拆分为各个 ψ_k 则基本上是自由的。

在 [23], 中，我们展示了，在最简单的情形下，可以通过额外 要求各项 ψ_k 具有特定的极点结构，以巧妙地消除这一歧义。在 [16], 中，这一初步观察进一步促成了一项重要发现：一种将 BAF函数、Noumi-Shiraishi 函数和 Macdonald 多项式相互联系起来的三元组结构 。

然而，除了与 NS 函数的三元关系之外——NS 函数的$\tilde{}$系数确实具有优美的因式分解分拆公式——一般而言，似乎没有理由认为 BAF 的系数组 ψ 会分拆成优美的因式分解 q–Pochhammer 表达式。与此同时，我们在 [1] 中进行的案例分析表明，这正是所需的分解，因为它与直接量子化范式相一致。

正如我们在 [24], 中简要解释、并将在第 2 节中重述的那样，Macdonald（以及 NS）系数能够因式分解的技术原因在于，可以将两种独立的结构叠加起来：

- 一种是根格，由$\alpha_{i,\ j}=e_i-e_j$ 构成，相应地还有比值 $\binom{x_i}{x_j}$、 $i<j$
- 另一种是嵌套 置换群 $S_N\supset S_{N-1}\supset ...$ 的嵌套，相应地还有各个 $x_i,\ \ i=1..N$.

因此，一个自然的问题是：这种结构的叠加是否可以直接在 Baker-Akhiezer函数的层面上进行，也就是说，在相应的试探形式和线性方程的层面上进行。这对于三元组图景尚未完全建立的情形应当很有用：扭曲 BAF是一个主要例子，而其他根系（除 A_{N-1} 外）的三元组则是另一个例子。

本文的主张 是，这确实是可能的。我们将在第3节中解释这对通常的 BAF如何实现，并展示 NS 展开确实可以通过这种方式正确地重现。

在第4节中，我们将这一推理应用于第一个非平凡的扭曲情形，即 $a=2$。已知的是（参见 [23]eqn.(49)），对于任意 m，都有 $N=2, a=2$ 扭曲 BAF；在本节中，我们使用嵌套试探方法，来获得 $N=3, a=2$ 情形下前几层系数的显式表达式。遗憾的是，即使要对足够高的 m 完整求解嵌套线性方程组（这是恢复或猜测一般 m 的公式所必需的，参见公式(38)–(46)），事实证明在计算上也颇具挑战；而且由于在这里（不同于 [1]）我们关注的是任意 λ 的答案，而不仅仅是特殊点 $\lambda=(0,m,\ldots,(N-1)m)$ 处的答案，这一困难就更加棘手。

St尽管如此，即使是目前已有的答案，也展现了这一新兴结构的冰山一角 ：

- 与 $N=2$、 $a=2$ 情形一样，答案是完全因式分解的 q-Pochhammer 类表达式之和（与原始 Noumi-Shiraishi 函数中出现的表达式相似）；
- 对 $\Lambda_i=q_i^{\lambda}$ 的依赖完全包含（隐藏）在特殊的齐次组合 $g_{i,\ j}(k)$ 之中（见式（25））；
- 除 $g_{i,\ j}(k)$ 因子外，所有其他因子都是对称的 q-数，其中 m线性地出现（例如见式（30））；
- 这后两项性质结合起来，意味着这些答案遵循 [1] 所倡导的直接量子化的一般理念。此外，这些答案可以直接解析延拓到任意 $t=q^{-m}$ 。

这些解的显著性质彰显了获得它们的方法的价值：**嵌套试探方法**。展示这种方法的实用性和优势，是这封短笺的主要目标。最后，我们在第5节中提出一些未来应用的可行方向。

记号 我们用下划线表示变量序列，例如

$$\underline{x} = x_1, \ldots, x_N; \quad \underline{\lambda} = \lambda_1, \ldots, \lambda_N \tag{3}$$

$(x;q)_n$ 是 q-Pochhammer 符号

$$(x;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - q^k x\right) = \frac{(x;q)_\infty}{(q^n x;q)_\infty} \tag{4}$$

$[n]$和 $[n]!$ （以及分别对应的 $\llbracket n \rrbracket$、 $\llbracket n \rrbracket!$ ）是通常（以及分别对应的对称）约定下的 q-数和 q-阶乘

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad [n]! = \prod_{k=1}^{n} [k]; \qquad \llbracket n \rrbracket = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \quad \llbracket n \rrbracket! = \prod_{k=1}^{n} \llbracket k \rrbracket \tag{5}$$

2 Macdonald 多项式与 NS 函数的嵌套拟设

我们回顾一下原始 Macdonald 显式公式 [18][eqns.(6.20),(6.24),(7.14')] 及其 Noumi-Shiraishi 推广 [19][eqn.(1.10,1.11)] 推广到非整数分拆 λ 情形的推导思路。

关键观察是，可以将关于 N 个变量 $x_1, \ldots, x_N$ 的 Macdonald 多项式展开为关于 $N-1$ 个变量 $x_2, \ldots, x_N$ 的 Macdonald 多项式，其系数依赖于 x_1

$$M_\lambda\left(x_1, \ldots, x_N\right) = \sum_\mu c_{\lambda,\mu}(x_1) M_\mu\left(x_2, \ldots, x_N\right) \tag{6}$$

其中 exp 展开系数 $c_{\lambda,\mu}(x_1)$不过是一元斜 Macdonald 多项式

$$c_{\lambda,\mu}(x_1) = M_{\lambda/\mu}(x_1) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\left(q^{\mu_j - \lambda_i + 1} t^{j-i-1}; q\right)_{\lambda_i - \mu_i}}{\left(q^{\mu_i - \lambda_j} t^{j-i}; q\right)_{\lambda_i - \mu_i}} \prod_{1 \le i \le j < n} \frac{\left(q^{\mu_i - \mu_j} t^{j-i+1}; q\right)_{\lambda_i - \mu_i}}{\left(q^{\mu_i - \mu_j + 1} t^{j-i}; q\right)_{\lambda_i - \mu_i}} \cdot x_1^{|\lambda| - |\mu|} \tag{7}$$

关键在于，这个公式以 λ、μ 和 x_1 表示得十分明确直观。

Noumi-Shiraishi 的发现是，公式 (7) 不仅对整数 $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ 有意义，对任意复数 λ 也成立。相应地，Noumi-Shiraishi 函数（此时包含对由 $\theta_{i,j}$ 为元素的上三角 $N \times N$ 矩阵 $\mathcal{M}_N$ 空间的无穷求和）

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{q,t}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}\right) = \prod_{i=1}^{N} \left(x_i^{\lambda_i - \beta\rho_i}\right) \sum_{\theta_{ij}=0}^{\infty} \Bigg(\prod_{n=2}^{N} \prod_{1 \le i < n} \prod_{s=0}^{\theta_{in}-1} \frac{\left(1 - q^{s+1-\theta_{in}} t^{-1}\right)\left(1 - t q^{s+\lambda_n - \lambda_i + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{nb})}\right)}{\left(1 - q^{s-\theta_{in}}\right)\left(1 - q^{s+1+\lambda_n - \lambda_i + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{nb})}\right)} \\ \times \prod_{n=2}^{N} \prod_{1 \le i < j < n} \prod_{s=0}^{\theta_{in}-1} \frac{\left(1 - t q^{s+\lambda_j - \lambda_i + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{jb})}\right)\left(1 - t^{-1} q^{s+1+\lambda_j - \lambda_i - \theta_{jn} + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{jb})}\right)}{\left(1 - q^{s+1+\lambda_j - \lambda_i + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{jb})}\right)\left(1 - q^{s+\lambda_j - \lambda_i - k_{jn} + \sum_{b>n}(\theta_{ib} - \theta_{jb})}\right)} \Bigg) \\ \prod_{1 \le i < j \le N} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\theta_{ij}},\end{aligned} \tag{8}$$

$\beta = \log_q(t)$，在 [19] 中被证明是所有 Ruijsenaars-Schneider 算子的同时特征函数。用 RS 算子的生成函数来表述，可得

$$D^x(u)\mathfrak{P}_{q,t}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}\right) = \mathfrak{P}_{q,t}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}\right) \cdot \prod_{i=1}^{N} (1 - u s_i) \tag{9}$$

关键在于，整个思路建立在展开式 (6) 的可行性之上——而之所以能够展开，是因为 Macdonald 多项式构成了任意个变量的对称多项式空间中的基底 x。

3 非扭曲 BAF 的嵌套拟设

在 [16] 中，我们发现，尽管 O.Chalykh 的 Baker-Akhiezer函数 (1)、(2) 是基于完全不同的考量定义的，但它与 Noumi-Shiraishi 函数 (8) 有着显著的联系

$$\Psi\left(\underline{x}, \underline{\lambda}\right) = \mathcal{N}_{\underline{\lambda}} \mathfrak{P}_{q,q^{-m}}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}\right) \tag{10}$$

$$\mathcal{N}_{\underline{\lambda}} = \prod_{k>l} \prod_{j=1}^{m} \left(q^{\frac{\lambda_k - \lambda_l}{2} - j} - q^{-\frac{\lambda_k - \lambda_l}{2}}\right)$$

此外，后者还是更复杂的三元组结构的一部分，将 BAF函数、Macdonald 多项式和 NS函数联系起来 [16,图1]。[1]

在这种三元逻辑中，一个自然的问题是：上一节中依赖于对 x_2、.....、x_N中的基进行分解的推理，是否可以经过某种调整，直接应用于 BAF“顶点”？这种分解存在于三元组的 Macdonald 和 NS“顶点”中。

回顾一下，按照 [2] 的定义（非扭曲）Baker-Akhiezer函数是一个关于变量x_1、.....、x_N和 λ_1、.....、λ_N的函数，其形式为

$$\Psi_m^{[N]}(\underline{z},\underline{\lambda}) = q^{(\underline{\lambda}+m\underline{\rho},\underline{z})}\sum_{k_{ij}=0}^{m} q^{-\sum_{i<j}k_{ij}(z_i-z_j)}\psi_{\underline{k}}(\underline{\lambda}), \quad q^{z_i}=x_i \tag{11}$$

其中，我们明确写出了 Ψ 对 m 和 N 的依赖关系；它满足一组线性差分方程

$$\Psi_m^{[N]}(z_k+j,\underline{\lambda}) = \Psi_m^{[N]}(z_l-j,\underline{\lambda}),\ j=1..m,\quad k<l,\quad z_k=z_l \tag{12}$$

让我们尝试将上一节的思路应用于这种情形。

注意，从 $N-1$ 变量转到 N 变量时，方程（12）中很大一部分保持不变（只需对 $x_i\to x_{i+1}$、$\lambda_i\to\lambda_{i+1}$ 作适当变换），新增的仅有关于根 $\alpha_{1,\ k}$、$k=2..N$ 的方程。

因此，将 $\Psi_m^{[N]}(x,\lambda)$ 分解为关于 $\Psi_m^{[N-1]}(x,\mu)$ 的和，并选取合适的 μ, λ是合理的：这样，关于根 $\alpha_{i,j}$, $i<j=2..N$ 的“旧”方程便会自动成立。

对原试探形式 (1) 中 x_i 和 $x_i^{\lambda_i}$ 的次数进行精确计算后可知，BAF 的嵌套拟设应为

$$\Psi_m^{[N]}(x_1,\dots,x_N|\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \tag{13}$$
$$x_1^{\lambda_1+m(N-1)/2}\sum_{k_{12},\dots,k_{1N}=0}^{m}\frac{\hat\psi_{m,k_{12},\dots,k_{1N}}}{x_1^{\sum_{i=2}^N k_{1i}}}\Psi_m^{[N-1]}\left(x_2,\dots,x_N|\lambda_2+k_{12}-\frac{m}{2},\dots,\lambda_N+k_{1N}-\frac{m}{2}\right)$$

即，对 $\mu=\lambda+\Delta$ 求和，其中整数平移 Δ 补偿每一项中 x_1 的幂次 .

现在从 $N=2$ BAF 开始（对于它，直接用原试探形式 (11) 求解线性方程 (12) 毫无歧义——不过，它同样可以表示为关于 $\Psi^{[1]}(x,\lambda)$ 的嵌套拟设）

$$\Psi_m^{[2]}(x_1,x_2|\lambda_1,\lambda_2) = x_1^{\lambda_1+m/2}\sum_{k_{12}=0}^{m}\frac{\hat\psi_{m,k_{12}}}{x_1^{k_{12}}}\cdot\underbrace{x_2^{\lambda_2+k_{12}-m/2}}_{\Psi_m^{[1]}\left(x_2|\lambda_2+k_{12}-\frac{m}{2}\right)} \tag{14}$$
$$\hat\psi_{m,k_{12}} = (-1)^{k_{12}}q^{-mk_{12}+k_{12}(k_{12}-1)/2}\frac{[m]!}{[m-k_{12}]![k_{12}]!}\prod_{i=1}^{k_{12}}\frac{\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}q^{m-i+1}-1\right)}{\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}q^{-i}-1\right)};\quad \Lambda_i=q^{\lambda_i}$$

用对称的 q-数表示，可以将其写成更简洁的形式（在 $a=2$ 情形下，这种形式仍然成立，见 (26)）；不难看出，此表达式等价于 NS公式系数 (8)

$$\hat\psi_{m,k_{12}} = (-1)^{k_{12}}\frac{[\![m]\!]!}{[\![m-k_{12}]\!]![\![k_{12}]\!]!}\prod_{i=0}^{k_{12}-1}\frac{[\![\lambda_2-\lambda_1-m+i]\!]}{[\![\lambda_2-\lambda_1+1+i]\!]} \tag{15}$$

现在可以求解关于 $\alpha_{1,\ k}$，$k=2..N$ 的“新”方程，从而显式且明确无误地得到 $N=3$

$$\hat\psi_{m,k_{12},k_{13}} = (-1)^{k_{12}+k_{13}}\frac{[\![m]\!]!}{[\![m-k_{12}]\!]![\![k_{12}]\!]!}\frac{[\![m]\!]!}{[\![m-k_{13}]\!]![\![k_{13}]\!]!}\prod_{i=0}^{k_{12}-1}\frac{[\![\lambda_2-\lambda_1+i-m]\!]}{[\![\lambda_2-\lambda_1+i+1]\!]}\prod_{i=0}^{k_{13}-1}\frac{[\![\lambda_3-\lambda_1+i-m]\!]}{[\![\lambda_3-\lambda_1+i+1]\!]} \tag{16}$$
$$\times\prod_{i=0}^{k_{13}-1}\frac{[\![\lambda_3-\lambda_2+i-m]\!][\![\lambda_3-\lambda_2+i+m+1-k_{12}]\!]}{[\![\lambda_3-\lambda_2+i+1]\!][\![\lambda_3-\lambda_2+i-k_{12}]\!]}$$

[1]注意，当研究双谱对偶时，会出现系数 $\mathcal{N}_\lambda$：$\Psi(x,\lambda)=\Psi(\lambda,x)$。实际上，人们通常采用非对称归一化，使 Ψ 的首个系数为 1：$\psi_0(\lambda)=1$。在这种归一化下，有 $\Psi(x,\lambda)=\mathfrak{P}_{q,q^{-m}}(x,\lambda)$。

ˆ 对于 $N=4$，也有类似的显式完全因式分解公式，即对于 $\psi_{m,\ k_{12},\ k_{13},\ k_{14}}$。注意，（16）中的第一行直接对应（8）中的第一行，第二行则对应第二行。只需对 λ 变量 $\lambda_i \leftrightarrow -\lambda_{N-i+1}$ 作简单的变换；换言之，这相当于在（13）中取 x_N 而非 x_1 作为特殊变量。

总而言之，t **he Noumi-Shiraishi 公式借助**嵌套拟设**得到了正确复现** .

4 扭曲 BAF 的嵌套拟设

在非扭曲的 $a=1$ 情形下验证了我们方法的一致性后，我们现在转而关注更有趣的扭曲 BAF（tBAF）情形

我们的方法以先前得到的 $N=2$ $a=2$ tBAF 为基础

$$\Psi_m^{(2)[2]}(x_1,x_2|\lambda_1,\lambda_2) = x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot x_1^m x_2^{-m}\cdot\sum_{k=0}^{2m}\psi_m^{(2)[2]}(\lambda_1,\lambda_2)\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k \tag{17}$$

$$\psi_m^{(2)[2]}(\lambda_1,\lambda_2) = \left(\sum_{r=\max(0,k-m)}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^r q^{(k-2r)(-m+\frac{1}{2}k)+\frac{1}{2}r(r+1)}(1-q)^{k-2r}\frac{[m+k-2r]!}{[m-k+r]!\,[k-2r]!\,[r]!}\right.$$
$$\left.(\Lambda_1\Lambda_2)^{k-2r}\,\frac{\prod_{i=1}^{r}\mathrm{ff}_{1,2}(i-1-m)\prod_{i=0}^{r-1}\mathrm{ff}_{1,2}(k-i)}{\prod_{i=1}^{k}\mathrm{ff}_{1,2}(i)}\right)$$

，其中 $x_i=q^{z_i/a}$ a 以及 $\Lambda_i=q^{\lambda_i}$ ——与 Chalykh 最初的定义相比。这个特殊因子是

$$\mathrm{ff}_{i,j}(k)=\left(\Lambda_i^a-q^k\Lambda_j^a\right) \tag{18}$$

嵌套拟设（13）的对应形式为

$$\boxed{\Psi_m^{(a)[N]}(x_1,\ldots,x_N|\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = x_1^{\lambda_1+am(N-1)/2}\sum_{k_{1,2},\ldots,k_{1,N}=0}^{ma}\frac{\tilde{\psi}^{(a)}_{m,k_{1,2},\ldots,k_{1,N}}}{x_1^{\sum_{i=2}^N k_{1,i}}}\Psi_m^{(a)[N-1]}\left(x_2,\ldots,x_N|\lambda_2+k_{1,2}-\frac{ma}{2},\ldots,\lambda_N+k_{1,N}-\frac{ma}{2}\right)} \tag{19}$$

而线性方程为（仅列出关于 N 变量的新方程）

$$\boxed{\Psi_m^{(a)[N]}\left(x_i\epsilon q^{-\frac{j}{2a}},\ldots,x_i q^{\frac{j}{2a}},\ldots\right)=\epsilon^j\Psi_m^{(a)[N]}\left(x_i\epsilon q^{\frac{j}{2a}},\ldots,x_i q^{-\frac{j}{2a}},\ldots\right)} \tag{20}$$

4.1 $N=3$ $a=2$ 情形的特殊之处

嵌套拟设适用的最简单非平凡情形是 $N=3$、 $a=2$ 情形。本文将在此讨论答案的结构；在这一情形下，该结构已初现端倪[2]。

$N=3$ 未知系数有两个指标：分别对应于根的重数 $\alpha_{1,\ 2}$ 和 $\alpha_{1,\ 3}$。如同式（17）中，有些系数是因式分解的，有些则不是；我们现在按复杂度递增的顺序对它们进行描述。

[2]目前，即使在 $N=3$, $a=2$ 我们也无法得到 *generic* m的所有答案。不过，我们能够得到的答案具有特殊结构，我们希望对此加以描述。要得到一般的 m 答案并进一步研究 $N>3$ 和/或 $a>2$ 情形，可以说需要融合本文与 [1] 中的一些思想——这应该是可行的，因为答案似乎符合直接量子化处方。

˜第一个不可因子化系数是 $\psi_{m,\ 2,\ 0}$。对于后续的 m，它等于

$$\tilde{\psi}_{1,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot (-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-1)\mathrm{ff}_{1,2}(2) \tag{21}$$

$$\tilde{\psi}_{2,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot \left((-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-2)\mathrm{ff}_{1,2}(2) + \frac{[4][3](q-1)^2}{[2]q^2} \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^2\right)$$

$$\tilde{\psi}_{3,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot \left((-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-3)\mathrm{ff}_{1,2}(2) + \frac{[4][5](q-1)^2}{q^4} \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^2\right)$$

$$\tilde{\psi}_{4,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot \left((-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-4)\mathrm{ff}_{1,2}(2) + \frac{[6][5][3](q-1)^2}{[2]q^6} \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^2\right)$$

$$\tilde{\psi}_{5,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot \left((-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-5)\mathrm{ff}_{1,2}(2) + \frac{[6][7][4](q-1)^2}{[2]q^8} \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^2\right),$$

由此，我们一般可以得出

$$\tilde{\psi}_{m,2,0} = \frac{[m]}{\mathrm{ff}_{1,2}(1)\mathrm{ff}_{1,2}(2)} \cdot \left((-q) \cdot \mathrm{ff}_{1,2}(-m)\mathrm{ff}_{1,2}(2) + \frac{[m-1][m+1][m+2](q-1)^2}{[2]q^{2(m-1)}} \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^2\right) \tag{22}$$

这与 (17) 的结构相符。

˜经过类似的推导，可得$\psi_{m,\ n_1,\ 0}$

$$\tilde{\psi}_{m,n_1,0} = \left(\sum_{r=\max(0,n_1-m)}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (-1)^r q^{\frac{n_1^2}{2}+\frac{r^2}{2}-n_1 r+\frac{r}{2}} q^{-(n_1-2r)m} (1-q)^{n_1-2r} \frac{[m+n_1-2r]!}{[m-n_1+r]!\,[n_1-2r]!\,[r]!} \right. \tag{23}$$
$$\left. \left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^{n_1-2r} \frac{\prod_{i=1}^{r} \mathrm{ff}_{1,2}(i-1-m) \prod_{i=0}^{r-1} \mathrm{ff}_{1,2}(n_1-i)}{\prod_{i=1}^{n_1} \mathrm{ff}_{1,2}(i)} \right)$$

也就是说，在一天结束 时，该公式完全与 (17) 相同，只需将 $\Lambda_{2,\ 3} \to \Lambda_{1,\ 2}$作简单替换。

去量子化 Th事实上，公式 (23) 可以通过以下方式大幅简化：首先，使用对称的 q-数 rs

$$[\![n]\!] := \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \tag{24}$$

其次，考虑与对称的 根相关量，而不是不完全对称的 $\mathrm{ff}_{1,2}(k)$

$$\mathrm{gg}_{1,2}(k) := \frac{q^{-k/2}\mathrm{ff}_{1,2}(k)}{(q^{-1/2}-q^{1/2})\Lambda_1\Lambda_2} = \frac{\left(q^{-k/2}\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} - q^{k/2}\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)}{\left(q^{-1/2}-q^{1/2}\right)} \underset{\Lambda_l = q^{\lambda_l/2}}{=} [\![\lambda_2-\lambda_1+k]\!] =_{q\to 1} (\lambda_2-\lambda_1+k) \tag{25}$$

借助这两种方法，公式变为（注意，显式的 Λ_l 完全从公式中消失了——其中只出现“根相关”量$\mathrm{gg}_{i,\ j}(k)$）

$$(23) = \left(\sum_{r=\max(0,n_1-m)}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{[\![m+n_1-2r]\!]!}{[\![m-n_1+r]\!]![\![n_1-2r]\!]![\![r]\!]!} \frac{\prod_{i=1}^{r} \mathrm{gg}_{1,2}(i-1-m) \prod_{i=0}^{r-1} \mathrm{gg}_{1,2}(n_1-i)}{\prod_{i=1}^{n_1} \mathrm{gg}_{1,2}(i)} \right) \tag{26}$$

more其中没有特设的 q-因子；因此，经典极限 $q \to 1$ 也非常简 e

$$(23) \underset{\substack{\Lambda_l = q^{\lambda_l/2} \\ q\to 1}}{=} \left(\sum_{r=\max(0,n_1-m)}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{(m+n_1-2r)!}{(m-n_1+r)!\,(n_1-2r)!\,(r)!} \frac{\prod_{i=1}^{r} (\lambda_2-\lambda_1+i-1-m) \prod_{i=0}^{r-1} (\lambda_2-\lambda_1+n_1-i)}{\prod_{i=1}^{n_1} (\lambda_2-\lambda_1+i)} \right) \tag{27}$$

(27) 与 (26) 之间的关系，自然是一种去量子化处方——可用于更复杂的情形。换句话说，如果先设法得到经典答案，将其表示为 (27) 的形式，就能轻松地将其提升为完整的量子答案 (26)。这正体现了直接量子化范式的精神；其最初迹象见于 [1]，如今又有了进一步的证据。

˜系数 $\psi_{m,0,n_2}$ 稍微复杂一些；在这里，良好的基函数开始出现额外因子，这正是 Noumi-Shiraishi答案的典型特征（公式的“核心”仍与根 $e_{1,3}$有关，但额外因子则与“旧”根 $N=2$ $e_{2,3}$有关）

$$\tilde{\psi}_{m,0,n_2}=\left(\sum_{r=\max(0,n_2-m)}^{\lfloor\frac{n_2}{2}\rfloor}(-1)^r q^{\frac{n_2^2}{2}+\frac{r^2}{2}-n_2r+\frac{r}{2}}q^{-(n_2-2r)m}(1-q)^{n_2-2r}\frac{[m+n_2-2r]!}{[m-n_2+r]!\,[n_2-2r]!\,[r]!}\right.\tag{28}$$
$$\left.(\Lambda_1\Lambda_3)^{n_2-2r}\,\frac{\prod_{i=1}^{r}\mathrm{ff}_{1,3}(i-1-m)\prod_{i=0}^{r-1}\mathrm{ff}_{1,3}(n_1-i)}{\prod_{i=1}^{n_2}\mathrm{ff}_{1,3}(i)}\right)$$
$$\times\left(\prod_{i=0}^{n_2-1}\frac{\mathrm{ff}_{2,3}\left(-m+i\right)}{\mathrm{ff}_{2,3}\left(i\right)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n_2}\frac{\mathrm{ff}_{2,3}\left(m+i\right)}{\mathrm{ff}_{2,3}\left(i\right)}\right)$$

借助类似引入的 $\mathrm{gg}_{1,3}(k)$ 和 $\mathrm{gg}_{2,3}(k)$，可将其写为

$$\tilde{\psi}_{m,0,n_2}=\left(\sum_{r=\max(0,n_2-m)}^{\lfloor\frac{n_2}{2}\rfloor}(-1)^r\frac{[\![m+n_2-2r]\!]!}{[\![m-n_2+r]\!]![\![n_2-2r]\!]![\![r]\!]!}\right.\tag{29}$$
$$\left.\frac{\prod_{i=1}^{r}\mathrm{gg}_{1,3}(i-1-m)\prod_{i=0}^{r-1}\mathrm{gg}_{1,3}(n_2-i)}{\prod_{i=1}^{n_2}\mathrm{gg}_{1,3}(i)}\right)$$
$$\times\left(\prod_{i=0}^{n_2-1}\frac{\mathrm{gg}_{2,3}\left(-m+i\right)}{\mathrm{gg}_{2,3}\left(i\right)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n_2}\frac{\mathrm{gg}_{2,3}\left(m+i\right)}{\mathrm{gg}_{2,3}\left(i\right)}\right)$$

注意这个公式的结构如何与 $a=1$ Noumi-Shiraishi公式（8）、（16）的一般结构相呼应：$\alpha_{2,3}$-根在分子中有相应的因子，其中涉及 m和 $-m$；而 $\alpha_{1,3}$-根则有一个含 $-m$的因子、一个含 $+1$的因子，以及与 λ无关的 q-多项式因子。因此，这种结构似乎是整个 Noumi-Shiraishi构造的关键，因为它在此处的扭曲情形以及下文更复杂的例子中仍然存在。今后需要弄清这一现象背后的原因。

齐次对称量（24）和（25）确实证明是恰当的项，因为更˜复杂的答案也同样简单。例如，$\psi_{m,1,1}$ 等于

$$\tilde{\psi}_{m,1,1}=[\![m]\!]^2[\![m+1]\!]\frac{1}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)}\cdot\frac{\mathrm{gg}_{1,3}(-m)}{1}\cdot\frac{1}{\mathrm{gg}_{2,3}(-1)\mathrm{gg}_{2,3}(1)}\tag{30}$$
$$+\quad[\![m]\!]^2[\![m+1]\!]\frac{\mathrm{gg}_{1,2}(-m)}{1}\cdot\frac{1}{\mathrm{gg}_{1,3}(1)}\cdot\frac{1}{\mathrm{gg}_{2,3}(-1)\mathrm{gg}_{2,3}(1)}$$
$$+\quad[\![m]\!]^3[\![m+1]\!]\qquad\frac{1}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)}\cdot\frac{1}{\mathrm{gg}_{1,3}(1)}\cdot\frac{\mathrm{gg}_{2,3}(-m-1)\mathrm{gg}_{2,3}(m+1)}{\mathrm{gg}_{2,3}(-1)\mathrm{gg}_{2,3}(1)}$$

此时，答案不再是关于 $\mathrm{gg}_{2,3}(\bullet)$ 的单项式。

R算子 此时，为了方便书写公式 (29) 和 (30)，我们引入以下“升算子” $R_{i,j}$。也就是说，算子 $R_{1,2}$ （类似地，$R_{1,3}$）的作用是依次从分母中移除具有最高 k 的 $\mathrm{gg}_{1,2}(k)$，并将相应的 $\mathrm{gg}_{1,2}(-m+k_{max}-k)$ 放入分子。例如

$$\frac{1}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)\mathrm{gg}_{1,2}(2)\mathrm{gg}_{1,2}(3)}\underset{R_{1,2}}{\to}\frac{\mathrm{gg}_{1,2}(-m)}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)\mathrm{gg}_{1,2}(2)}\underset{R_{1,2}}{\to}\frac{\mathrm{gg}_{1,2}(-m)\mathrm{gg}_{1,2}(-m+1)}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)}\underset{R_{1,2}}{\to}\frac{\mathrm{gg}_{1,2}(-m)\mathrm{gg}_{1,2}(-m+1)\mathrm{gg}_{1,2}(-m+2)}{1}\tag{31}$$

算子 $R_{2,\ 3}$ 稍微复杂一些。它取决于附加平移 δ，并通过“确定”分母中自变量最小（负）和最大（正）的 $\mathrm{gg}_{2,3}$，将相应的单项式乘以

$$\mathrm{gg}_{2,3}(-m-k_{min}+\delta)\mathrm{gg}_{2,3}(m+k_{max}-\delta)\tag{32}$$

˜借助这一记号 $\psi_{m,\ 0,\ n2}$ 便可简写为

$$\tilde{\psi}_{m,0,n_2} = \left(\prod_{i=0}^{n_2-1} \frac{\mathrm{gg}_{2,3}\left(-m+i\right)}{\mathrm{gg}_{2,3}\left(i\right)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n_2} \frac{\mathrm{gg}_{2,3}\left(m+i\right)}{\mathrm{gg}_{2,3}\left(i\right)}\right) \left(\sum_{r=\max(0,n_2-m)}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{[\![m+n_2-2r]\!]!}{[\![m-n_2+r]\!]![\![n_2-2r]\!]![\![r]\!]!} R_{1,3}^r\right) \frac{1}{\prod_{i=1}^{n_2} \mathrm{gg}_{1,3}(i)} \tag{33}$$

˜而更复杂的 $\psi_{m,1,1}$ 写作

$$\tilde{\psi}_{m,1,1} = \left([\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,2} + [\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,3} + [\![m]\!]^3[\![m+1]\!]R_{2,3}(0)\right) \frac{1}{\mathrm{gg}_{1,2}(1)\mathrm{gg}_{1,3}(1)\mathrm{gg}_{2,3}(-1)\mathrm{gg}_{2,3}(1)} \tag{34}$$

请注意，直接量子化/反量子化仍然成立。

˜**.....的一般结构**ψ_{m,n_1,n_2} 一般而言，考察许多具体例子后，可以得出结论：˜ψ_{m,n_1,n_2} 具有以下结构

$$\tilde{\psi}_{m,n_1,n_2} = \mathrm{Pol}_{m,n_1,n_2}\left(R_{1,2}, R_{1,3}, R_{2,3}(\delta)\right) \frac{1}{\mathrm{Denom}(m,n_1,n_2)} \tag{35}$$

其中，Pol_{m,n_1,n_2} **(**$R_{1,2}$**,**$R_{1,3}$**,**$R_{2,3}$**)** 是符号 $R_{1,2}$, $R_{1,3}$, $R_{2,3}$ 的某个多项式，其系数依赖于 m（由对称的 q-数构成）。

$\mathrm{Denom}(m,n_1,n_2)$ 是一个简单且显式的表达式

$$\mathrm{Denom}(m,n_1,n_2) = \prod_{i=1}^{n_1} \mathrm{gg}_{1,2}(i) \prod_{j=1}^{n_2} \mathrm{gg}_{1,3}(j) \prod_{k=0}^{n_2-1} \left(\mathrm{gg}_{2,3}(-n_1+k)\mathrm{gg}_{2,3}(n_2-k)\right) \tag{36}$$

˜**层级** $n_2 = 1$**的答案：** $\psi_{m,n_1,1}$ 显然，此处的 Denom 函数等于

$$\mathrm{Denom}(m,n_1,1) = \left(\prod_{i=1}^{n_1} \mathrm{gg}_{1,2}(i)\right) \cdot \mathrm{gg}_{1,3}(1) \cdot \left(\mathrm{gg}_{2,3}(-n_1)\mathrm{gg}_{2,3}(1)\right) \tag{37}$$

相应的算子多项式 $\mathrm{Pol}_{m,\ n_1,\ 1}$ 在最初的几种情况下恰好等于

$$\mathrm{Pol}_{m,0,1} = [\![m]\!][\![m+1]\!]R_{2,3}(0) \tag{38}$$

$$\mathrm{Pol}_{m,1,1} = [\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,2} + [\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,3} + [\![m]\!]^3[\![m+1]\!]R_{2,3}(0) \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,2,1} =& (-1)[\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,2}R_{2,3}(1) \\ &+ [\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]R_{1,2} + [\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2R_{1,3} + \frac{[\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]}R_{2,3}(0)\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,\ 3,\ 1} =& (-1)[\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,\ 2}^2 + (-1)[\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]R_{1,\ 2}R_{1,\ 3} + (-1)[\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]R_{1,\ 2}R_{2,\ 3}(1) \\ &+ \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]}R_{1,2} + \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!]}{[\![2]\!]}R_{1,3} \\ &+ \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]}R_{2,3}(0)\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,4,1} =& \frac{[\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}^2 R_{2,3}(2) \\ &+(-1)[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]R_{1,2}^2 + (-1)[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2 R_{1,2}R_{1,3} \\ &+ (-1)\frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]} R_{1,2}R_{2,3}(1) \\ &+\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2} + \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!][\![m+3]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,3} \\ &+ \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!][\![m+3]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!][\![4]\!]} R_{2,3}(0)\end{aligned} \tag{42}$$

˜此时我们已经可以看出，对于 $\psi_{m,\ n1,\ 1}$，较小的、依赖于 m 的 q-数是 $[\![m-n1+1]\!]$，因此，对于接下来的那些，我们无法仅凭现有数据恢复所有系数。

不过，该表达式的某些部分可以确定。具体而言，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,5,1} =& \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}^3 + \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}^2 R_{1,3} + \frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}^2 R_{2,3}(2) \\ &+ (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]} R_{1,2}^2 + (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}R_{1,3} \\ &+ (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2[\![m+2]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2}R_{2,3}(1) \\ &+[\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_4\end{aligned} \tag{43}$$

其中，我们用 smth_4 表示无法还原/验证的部分

此外，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,6,1} =& (-1)\frac{[\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2}^3 R_{2,3}(3) \\ &+ \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]}{[\![2]\!]} R_{1,2}^3 + \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]} R_{1,2}^2 R_{1,3} \\ &+ \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]^2}{[\![2]\!]^2} R_{1,2}^2 R_{2,3}(2) \\ &+ [\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_4 + [\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_5\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,7,1} =& (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2}^4 + (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^2[\![m+1]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2}^3 R_{1,3} \\ &+ (-1)\frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^3[\![m+1]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!]} R_{1,2}^3 R_{2,3}(3) \\ &+[\![m-4]\!]\cdot \text{某物}_4 + [\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \text{某物}_5 + [\![m-6]\!][\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \text{某物}_6\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{m,8,1} =& \frac{[\![m-3]\!][\![m-2]\!][\![m-1]\!][\![m]\!]^4[\![m+1]\!]}{[\![2]\!][\![3]\!][\![4]\!]} R_{1,2}^4 R_{2,3}(4) \\ &+[\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_4 + [\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_5 + [\![m-6]\!][\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_6 \\ &+[\![m-7]\!][\![m-6]\!][\![m-5]\!][\![m-4]\!]\cdot \mathrm{smth}_7\end{aligned} \tag{46}$$

所有这些答案继续证实了直接量子化原理。此外请注意，从整数 m 推广到一般的 $t = q^{-m}$，并分别针对每个 $[\![m+\bullet]\!]$ 和 $\mathrm{gg}_{i,\ j}(k)$ 因子进行推广，这一点显而易见。目前，我们暂不为 $\mathrm{Pol}_{n_1,\ 1}$ 写出或猜测一般公式，对于 $\mathrm{Pol}_{n_1,\ n_2}$ 更是如此，直到我们收集到更多实验数据。不过，即使是目前给出的部分答案，也说明了本文的核心观点：嵌套试探方法：

1. 可直接应用于（扭曲）BAF；

2 ˜ ˆ. 得出明确无歧义的答案（即解决了将 psi 拆分为 ψ 的问题）；

3. 这些显然属于直接量子化，其意义甚至比 [1], 所述的更强，因为无需插入特设的 $q^{\bullet}$–因子：只需考虑对称的 q-数，一切便都得到了解释。

5 结论

在本文中，我们介绍了 O. Chalykh [2] 意义下、适用于各种设置的嵌套试探方法，用于计算 Baker-Akhiezer 函数。当三元组图景尚未完全建立时，该方法尤其有用；我们通过在 $N = 3,\ a = 2$的首个未知非平凡情形中获得扭曲 BAF 系数的前几个答案，展示了这一点。

至关重要的是，这些答案继续证实了 [1] 最初的合理猜想：适当 BASIS 中的完整量子答案，只需将数改为 q-数，并将 Pochhammer 符号改为 q-Pochhammer 符号，便可由其经典对应物恢复出来：这就是所谓的直接量子化。

一般而言，该方法是对初始试探形式 (1) 的改进，并且在所有出现 BAF 类似物的情形中都可能取得成功。眼下最直接、也最富有成果的研究方向似乎包括：

- 将 NS 公式推广至其他根系；
- 构 从椭圆 NS 函数的形式出发，构造椭圆线性方程的形式 n;
- 理解为何 gg$_{i,\ j}(k)$ 因子这些看似奇特的组合，恰恰是直接量子化所需的项；
- 结合 [1] 与本文中的关键思想，以获得 tBAF 的一般公式。

致谢

我们感谢 L. Bishler、N. Tselousov、M. Sharov、M. Chepurnoi、I. Ryzhkov 和 A. Oreshina 的启发性讨论。

A.P. 谨此感谢俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助（协议编号：075-03-2025-662）。我们的工作还部分获得了亚美尼亚 SCS 项目 24WS-1C031（A.Mir.）以及理论物理与数学发展基金会“BASIS”的资助。

参考文献

[1] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, arXiv:2601.10500[2] O. Chalykh, 《**数学进展**》166(2) (2002) 193-259, math/0212313[3] P. Etingof, K. Styrkas, **Compositio Math.** 114 (1998) 125-152, q-alg/9603022[4] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, **JHEP** 2024 (2024) 200, arXiv:2406.16688[5] J. Ding, K. Iohara, **Lett. Math. Phys.** 41 (1997) 181-193, q-alg/9608002[6] K. Miki, **J. Math. Phys.** 48 (2007) 123520[7] C.N. Pope, L.J. Romans, X. Shen, **Phys.Lett.** B236 (1989) 173-178; **Nucl.Phys.** B339 (1990) 191-221;**Phys.Lett.** B242 (1990) 401-406; **Phys.Lett.**B245 (1990) 72-78[8] E. Frenkel, V. Kac, A. Radul, W. Wang, **Comm.Math.Phys.** 170 (1995) 337-358, hep-th/9405121[9]H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo, S. Odake, **Prog.Theor.Phys.Suppl.** 118 (1995) 343-374, hep-th/9408158[10] V.G. Kac, A. Radul, **Transformation groups** 1 (1996) 41-70, hep-th/9512150[11] A. Tsymbaliuk, 《**数学进展**》304 (2017) 583-645, arXiv:1404.5240[12] T. Proch´azka, **JHEP** 10 (2016) 077, arXiv:1512.07178

[13] A. Mironov, A. Oreshina, A. Popolitov, **JETP Letters** 120 (2024) 62, arXiv:2404.18843[14] A. Mironov, A. Oreshina, A. Popolitov, **EPJC** 84 (2024)705,arXiv:2403.05965[15] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, **JHEP**09 (2023) 65, arXiv:2306.06623[16] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, **Phys.Lett. B869** (2025) 139840, arXiv:2411.16517[17] O. Chalykh, P. Etingof, 《**数学进展**》238 (2013) 246-289,arXiv:1111.0515[18] I.G. Macdonald, 对称函数 *and* 霍尔多项式, 牛津大学出版社, 1995[19] M. Noumi, J. Shiraishi, arXiv:1206.5364[20] O. Chalykh, M. Fairon, **J. Geom.Phys.** 121 (2017) 413-437,arXiv:1704.05814[21] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, **Phys.Lett.** B863 (2025) 139380,arXiv:2410.10685[22] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, Z. Zakirova, **Phys.Lett.**B865 (2025) 139467,arXiv:2412.19588[23] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, **Phys.Lett.** B863 (2025) 139380,arXiv:2410.10685[24] A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, **Nucl.Phys.** B1012 (2025) 116809,arXiv:2411.14194