Dendriform D-双代数、李双代数及经典杨-巴克斯特方程解的仿射化

BO HOU

摘要。本文主要讨论如何利用 dendriform D-双代数构造李双代数，以及它们对应的杨-巴克斯特方程的解之间的关系。我们介绍两种利用 perm 代数的张量积从 dendriform 代数得到李代数的方法，一种借助结合代数，另一种借助前李代数。我们将这两种方法都提升到双代数层面，并证明通过这两种方法得到的李双代数相同。dendriform 代数中的 Dendriform 杨–巴克斯特方程的对称解，与由这些 dendriform 代数诱导的李代数中的经典杨-巴克斯特方程的某些斜对称解之间存在对应关系。我们详细讨论了三角双代数结构、与这些杨-巴克斯特方程解相关的 $\mathcal{O}$-算子之间的联系。在讨论过程中，我们还提出了一种利用 dendriform D-双代数的仿射化构造无限维反对称无穷小双代数的方法。

arXiv:2601.17456v1 [math.RA] 24 Jan 2026

目录

1. 引言 1
2. 前李代数和dendriform 代数预备知识 5
3. 由前李双代数诱导的拟三角李双代数 8
4. 通过ffinization 构造 dendriform D-双代数的无限维 ASI 双代数 15
4.1. Affinization 构造 dendriform 代数和 dendriform 余代数 15
4.2. 由 dendriform D-双代数得到的完备 ASI 双代数 18
4.3. 由三角 dendriform D-双代数得到的三角 ASI 双代数 21
5. 通过 dendriform D-双代数构造三角李双代数 25
参考文献 29

1. 引言

在给定的代数结构上，双代数结构是通过赋予一个余代数结构而得到的；该余代数结构在对偶空间上诱导出相同的代数结构，并且乘法与余乘之间满足一组相容条件。双代数的两个著名例子是李双代数 [13] 和反对称无穷小（简称 ASI）双代数 [36, 3]。李双代数可以看作泊松-李群的线性化。Drinfeld 首先在杨-巴克斯特方程和量子群理论的背景下引入了李双代数。后来，李双代数被应用于数学和数理物理的许多其他领域，例如泛包络代数的 Hopf代数变形理论 [15], 弦拓扑和辛场论 [11], 以及带边界黎曼曲面上自由环的 Goldman-Turaev理论 [17], 等。无穷小双代数最早出现在 Joni 和 Rota 的工作中，用于为差分微积分提供一个代数框架差分[22]。无穷小双代数的反对称版本由 [36] Zhelyabin 引入，他使用“结合D-双代数”这一名称，将其作为李双代数的结合类比。后来，Bai 以反对称无穷小双代数之名对这一结构进行了系统研究 [3]。

2020 数学主题分类。 17A30,17D25, 17B38, 17B62。关键词。 李双代数、前李双代数、反对称无穷小双代数、dendriform D-双代数、杨-巴克斯特方程、 $\mathcal{O}$-算子。

反对称无穷小双代数可以通过结合代数的著名匹配对以及弗罗贝尼乌斯代数的一个双重构造来刻画。近年来，各种代数结构的双代数理论得到了广泛发展，例如左对称双代数（也称前李双代数）[2], Jordan双代数 [36], Novikov双代数 [18], perm 双代数[21, 26], 雅可比-约当双代数 [9], dendriform D-双代数 [3], 等。这些双代数结构之间的关系，以及这些双代数与共形双代数之间的关系，已在 [18, 26, 25, 19, 20, 12]中进行了讨论。我们将详细讨论 dendriform D-双代数、前李双代数、反对称无穷小双代数和李双代数之间的关系，并进一步说明如何利用 dendriform D-双代数、前李双代数和反对称无穷小双代数构造李双代数。

1.1. **Dendriform D-双代数、前李双代数、反对称无穷小双代数和李双代数。对于 dendriform 代数、前李代数、结合代数和李代数，存在一个著名的交换图：**

$$\begin{array}{ccc} (D,\prec,\succ) & \xrightarrow{d_1*d_2=d_1\prec d_2+d_1\succ d_2} & (D,*) \\ \text{a dendriform algebra} & & \text{an associative algebra} \\ {\scriptstyle d_1\diamond d_2=d_1\succ d_2-d_2\prec d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [d_1,d_2]=d_1*d_2-d_2*d_1} \\ (D,\diamond) & \xrightarrow{[d_1,d_2]=d_1\diamond d_2-d_2\diamond d_1} & (D,[-,-]) \\ \text{a pre-Lie algebra} & & \text{a Lie algebra} \end{array}$$

对于 dendriform 代数、前李代数、结合代数和李代数的范畴，该图也是交换的 [27]。然而遗憾的是，前李双代数通常不具有李双代数结构，而 Dendriform D-双代数也不具有反对称无穷小双代数结构。详情请参阅 [3] 。因此，很难将这个交换图提升到双代数层面。注意，前李代数与置换代数的张量积上也存在李代数结构，而且 dendriform 代数与置换代数的张量积上也存在结合代数结构。因此，我们得到一个新的交换图：

$$\begin{array}{ccc} (D,\prec,\succ) & \xrightarrow{-\otimes B} & (D\otimes B,*) \\ \text{a dendriform algebra} & & \text{an associative algebra} \\ {\scriptstyle d_1\diamond d_2=d_1\succ d_2-d_2\prec d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [x_1,x_2]=x_1*x_2-x_2*x_1} \\ (D,\diamond) & \xrightarrow{-\otimes B} & (D\otimes B,[-,-]) \\ \text{a pre-Lie algebra} & & \text{a Lie algebra} \end{array}$$

其中 $(B,\cdot)$ 是一个置换代数。二次 perm 代数是指配备了反对称不变双线性型的置换代数。注意，二次 perm 代数 $(B,\cdot,\omega)$ 自然会在 B 上诱导出置换余代数结构。我们可以在 dendriform D-双代数与二次 perm 代数的张量积上赋予 ASI 双代数结构（事实上，这是 dendriform D-双代数仿射化的直接结果）。因此，我们可以将上述交换图提升到双代数层面，从而得出以下结论：

定理 I (定理 5.3) 设 $(D,\prec,\succ,\theta_\prec,\theta_\succ)$ 是一个 *dendriform* D-双代数，且 $(B,\cdot,\omega)$ 是一个二次 *perm* 代数。那么有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} (D,\prec,\succ,\theta_\prec,\theta_\succ) & \xrightarrow[\text{Cor. 4.14}]{-\otimes(B,\cdot,\omega)} & (D\otimes B,*,\Delta) \\ \textit{a dendriform bialgebra} & & \textit{an ASI bialgebra} \\ {\scriptstyle d_1\diamond d_2=d_1\succ d_2-d_2\prec d_1}\ \downarrow{\scriptstyle \text{Pro. 5.1}} & & {\scriptstyle \text{Pro. 5.1}}\ \downarrow{\scriptstyle [x_1,x_2]=x_1*x_2-x_2*x_1} \\ (D,\diamond,\vartheta) & \xrightarrow[\text{Thm. 3.2}]{-\otimes(B,\cdot,\omega)} & (D\otimes B,[-,-],\delta) \\ \textit{a pre-Lie bialgebra} & & \textit{a Lie bialgebra} \end{array}$$

1.2. **Dendriform D-双代数的仿射化：反对称无穷小双代数的构造。** 仿射**化是构造无限维李代数的一种重要方法。Balinsky 和 Novikov 表明，Novikov 代数的仿射**化自然地定义了一个李代数，这一性质实际上刻画了 Novikov 代数 [6]。最近，Hong、Bai 和 Guo 提出了

二次 $\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数的概念，并证明有限维 Novikov 双代数与二次 $\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数的张量积可以自然地赋予一个完备李双代数结构。当二次 $\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数是某种特殊右 Novikov 代数时，这一结果的逆命题也成立，从而得到了所需的 Novikov 双代数刻画：其仿射化是一个李双代数 [18]。perm 双代数通过二次分次前李代数进行仿射 $\mathbb{Z}$化，是另一个例子 [26]。所有这些例子都符合 Ginzburg-Kapranov 歌剧代数 Koszul 对偶的诠释 [16]。这里，我们给出一种不依赖于歌剧代数 Koszul 对偶的 dendriform D-双代数仿射化。

粗略地说，给定代数结构的仿射化，就是在 Laurent 多项式的向量空间上定义代数结构，并在张量积上得到另一种代数结构，而后者反过来可以刻画给定的代数结构。本文研究 dendriform D-双代数的仿射化。首先，我们证明，在 Laurent 多项式的向量空间上，由 dendriform 代数与特殊 perm 代数的张量积（其构造见 [26]）构成结合代数，这一性质刻画了 dendriform 代数。也就是说，我们通过 perm 代数对 dendriform 代数进行仿射化，得到结合代数，从而获得了 dendriform 代数的仿射化刻画。其次，我们针对 dendriform 余代数，研究 dendriform 代数仿射化的对偶版本。我们引入完备余结合余代数的概念，并证明 dendriform 余代数与 Laurent 多项式的完备 perm 余代数的张量积上存在自然的完备余结合余代数结构；事实上，这一性质刻画了 dendriform 余代数。最后，我们利用二次 $\mathbb{Z}$-分次 perm 代数，将 dendriform 代数和 dendriform 余代数的仿射化刻画提升到双代数层次。

定理 *II*（定理 *4.13*）设 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是一个有限维 *Dendriform D*-双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，而 $(D \otimes B, *)$ 是由 $(D, \prec, \succ)$ 通过 $(B, \cdot)$ 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次结合代数。定义线性映射 $\Delta: D \otimes B \to (D \otimes B) \otimes (D \otimes B)$，使得

$$\begin{aligned}\Delta(d \otimes b) &= \theta_\succ(d) \bullet v_\varpi(b) + \theta_\prec(d) \bullet \hat{\tau}(v_\varpi(b)) \\ &:= \sum_{[d]} \sum_{i,j,\alpha} (d_{[1]} \otimes b_{1,i,\alpha}) \otimes (d_{[2]} \otimes b_{2,j,\alpha}) + \sum_{(d)} \sum_{i,j,\alpha} (d_{(1)} \otimes b_{2,j,\alpha}) \otimes (d_{(2)} \otimes b_{1,i,\alpha}),\end{aligned}$$

对任意 $d \in D$ 和 $b \in B$，其中 $\theta_\prec(d) = \sum(d)\, d_{(1)} \otimes d_{(2)}$, $\theta_\succ(d) = \sum_{[d]} d_{[1]} \otimes d_{[2]}$ 采用斯威德勒记号，而 $v_\varpi(b) = \sum_{i,j,\alpha} b1_{,i,\alpha} \otimes b2_{,j,\alpha}$。那么 $(D \otimes B, *, \Delta)$ 是一个完备 *ASI* 双代数。

此外，如果 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是例 $\mathbb{Z}$*4.8*中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，那么$(D \otimes B, *, \Delta)$ 是完备 *ASI* 双代数，当且仅当 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是 *Dendriform* D-双代数。

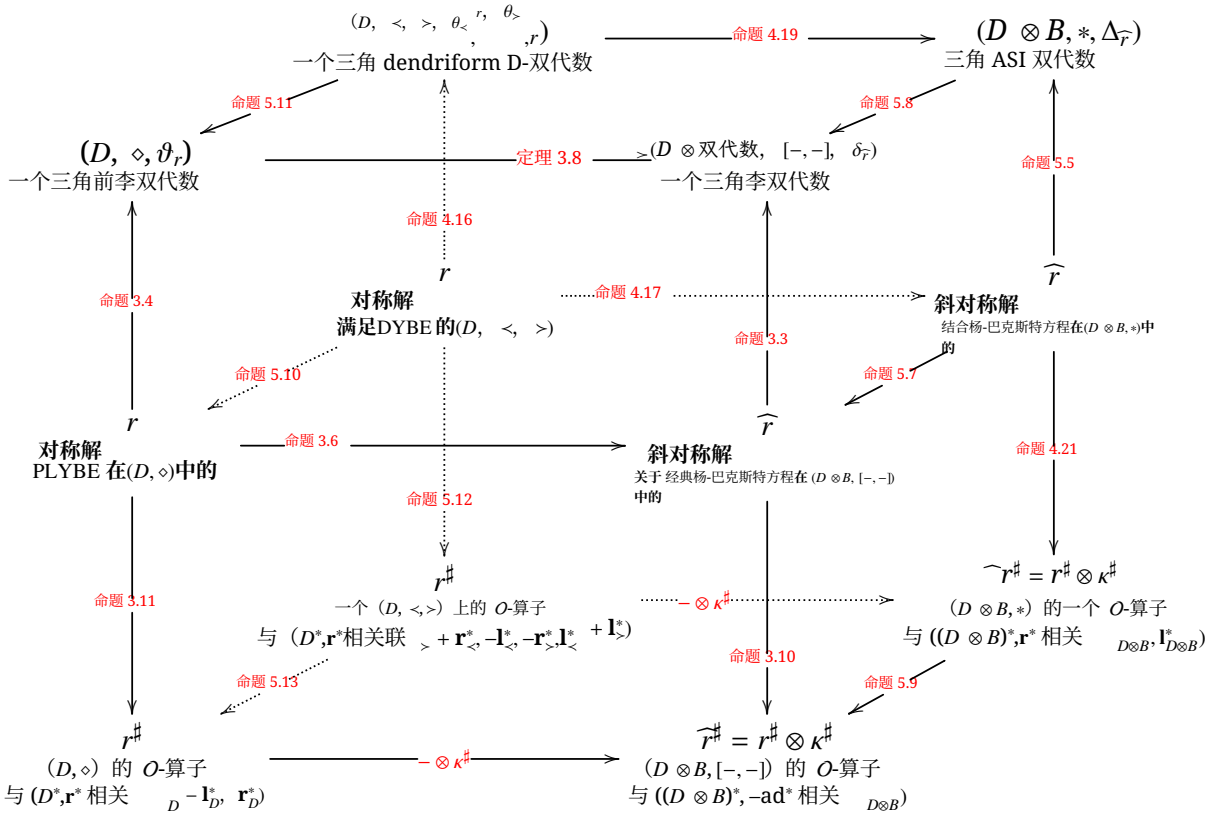
特别地，我们还考虑 Dendriform D-双代数与二次 perm 代数的张量积上的有限维 ASI 双代数结构。

1.3. **杨-巴克斯特方程的解、三角双代数结构及 *O*-算子**。经典杨-巴克斯特方程（简称经典杨-巴克斯特方程）源于20世纪80年代对逆散射理论的研究，后来被认为是量子杨-巴克斯特方程的半经典极限[35, 7]。李代数中的经典杨-巴克斯特方程研究具有深远影响，并在辛几何、量子群、可积系统和量子场论等领域有广泛应用 [8, 32]。Semenov-Tian-Shansky 发现，在二次李代数上，经典杨-巴克斯特方程的张量形式可以转化为权重为 0 [30] 的 Rota-Baxter 算子。随后，Kupershmidt 发现，一般李代数上的经典杨-巴克斯特方程张量形式也可以转化为一个 O与余伴随表示相关的算子 [23]。如今， O-算子被视为经典杨-巴克斯特方程解的一种算子形式。

在李双代数理论中，拟三角李双代数，尤其是三角李双代数，在数理物理 [30, 5, 29]中发挥着重要作用。可分解李双代数是拟三角李双代数的一个特殊子类，它将经典r矩阵与某些因子分解问题联系起来，并在可积系统中有诸多应用 [14, 24]。李代数 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 中经典杨-巴克斯特方程的解与 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 上的这些李双代数结构密切相关：

$(\mathfrak{g}, [-,-])$ 中的经典杨-巴克斯特方程斜对称解可导出 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 上的三角李双代数结构；$(\mathfrak{g}, [-,-])$ 中反对称部分不变的经典杨-巴克斯特方程的解可导出 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 上的拟三角李双代数结构。近年来，通过在各种代数结构中引入经典杨-巴克斯特方程，并考察该方程的一些特殊解，人们研究了多种拟三角双代数结构，例如拟三角 ASI 双代数 [31], 拟三角前李双代数 [34], 拟三角莱布尼茨双代数 [4],拟三角 Novikov 双代数 [12],等等。

本文提出了两种方法：从 dendriform 代数（D, $\prec$, $\succ$）中的 dendriform 杨-巴克斯特方程的一个解出发，利用置换代数（B, $\cdot$），在诱导李代数（$D \otimes B$, $[-,-]$）中构造一个经典杨-巴克斯特方程的解。这两种方法所得的解相同。此外，利用杨-巴克斯特方程的解与三角双代数结构、$\mathcal{O}$-算子之间的关系，我们将这一结果应用于三角双代数结构和 $\mathcal{O}$-算子层面，并得到以下交换图：



本文组织如下。在第 2 节中，我们回顾 Dendriform 代数、前李代数和 perm 代数的概念，以及 Dendriform 代数和前李代数上的双模。我们在命题 2.10中证明，Dendriform 代数、诱导前李代数、诱导结合代数以及李代数（由 perm 代数诱导）之间存在一个交换图。在第 3 节中，我们分析前李双代数与二次 perm 代数的张量积上的李双代数结构，并在定理 3.8 中证明：若原前李双代数是拟三角（分别为三角、可分解）的，则该张量积上的李双代数结构也是拟三角（分别为三角、可分解）的。在证明过程中，我们还证明了，前李代数 $(A, \diamond)$ 中的前李杨-巴克斯特方程的对称解（分别地，反对称部分不变的解），能够在张量积李代数 $(A \otimes B, [-,-])$ 中诱导出经典杨-巴克斯特方程的斜对称解（分别地，对称部分不变的解）。在第 4 节中，我们引入完备 ASI 双代数的概念，并证明有限维 Dendriform D-双代数与二次 $\mathbb{Z}$-分次 perm 代数的张量积上自然存在完备 ASI 双代数结构。特别地，当二次 $\mathbb{Z}$-分次 perm 代数定义在 Laurent 多项式空间上时，我们通过仿射化得到 Dendriform D-双代数的一个刻画。特别地

当二次 $\mathbb{Z}$-分次 perm 代数是有限维二次 perm 代数时，我们证明，Dendriform 代数（$D, \prec, \succ$）中的 Dendriform 杨–巴克斯特方程的对称解，能够在张量积结合代数（$D \otimes B, *$）中诱导出结合 Yang-Baxter 方程的斜对称解。在第 5 节中，我们给出定理 I（定理 5.3）的证明，并证明：结合代数中的结合 Yang-Baxter 方程的斜对称解（分别地，对称部分不变的解），也是诱导李代数（由交换子诱导）中的斜对称解（分别地，对称部分不变的解）；而 Dendriform 代数中的 Dendriform 杨–巴克斯特方程的对称解，也是诱导前李代数中的 Dendriform 杨–巴克斯特方程的对称解。除了前几节的结论外，我们还得到了上述三维交换图。

本文始终固定 $\mathbb{k}$ 为特征零域。除非另有说明，所有向量空间、代数均定义在 $\mathbb{k}$ 上，且均为有限维；所有张量积也均取在 $\mathbb{k}$上。对于任意向量空间V，我们用V^* 表示V的对偶空间。恒等映射记作 id。对于向量空间A 和V，我们固定以下记号：

(i) 设 $\mathrm{f}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ 为线性映射。定义线性映射 $\mathrm{f}^*: \mathrm{V}^* \to \mathrm{V}^*$，使得 $\langle \mathrm{f}^*(\xi), \mathrm{v}\rangle = \langle \xi, \mathrm{f}(\mathrm{v})\rangle$，其中 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 且 $\xi \in \mathrm{V}^*$任意。 (ii) 设 $\mu: \mathrm{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathrm{V})$ 为线性映射。定义线性映射 $\mu^*: \mathrm{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathrm{V}^*)$，使得$\langle \mu^*(\mathrm{a})(\xi), \mathrm{v}\rangle = \langle \xi, \mu(\mathrm{a})(\mathrm{v})\rangle$，其中 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$、$\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 且 $\xi \in \mathrm{V}^*$任意。 (iii) 对任意 $\mathrm{r} \in \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$，定义线性映射 $\mathrm{r}^\sharp: \mathrm{A}^* \to \mathrm{A}$，使得 $\langle \xi_2, \mathrm{r}^\sharp(\xi_1)\rangle = \langle \xi_1 \otimes \xi_2, \mathrm{r}\rangle$，其中$\xi_1$、$\xi_2 \in \mathrm{A}^*$任意。

2. 前李代数与 dendriform 代数的预备知识

本节回顾前李代数、dendriform 代数、前李代数与 dendriform 代数上的双模，以及前李代数与 dendriform 代数的 O-算子等概念。从一个 dendriform 代数出发，利用与置换代数的张量积，我们介绍两种构造李代数的方法，而这两种方法得到的李代数是一致的。Dendriform 代数由 Loday 引入。首先，我们回顾 dendriform 代数的定义。

定义 2.1. 一个**dendriform 代数** $(D, \prec, \succ)$ 是一个向量空间 D，带有两个双线性算子$\prec, \succ: D \otimes D \to D$，使得

$$\begin{aligned}(d_1 \prec d_2) \prec d_3 &= d_1 \prec (d_2 \prec d_3) + d_1 \prec (d_2 \succ d_3),\\ (d_1 \succ d_2) \prec d_3 &= d_1 \succ (d_2 \prec d_3),\\ d_1 \succ (d_2 \succ d_3) &= (d_1 \prec d_2) \succ d_3 + (d_1 \succ d_2) \succ d_3,\end{aligned}$$

对任意 $d_1, d_2, d_3 \in D$。

回顾一下，**结合 Rota-Baxter 代数**是一个结合代数（A，$*$），并赋有一个线性算子$R: A \to A$，满足以下关系：

$$R(a_1) * R(a_2) = R(R(a_1) * a_2 + a_1 * R(a_2)),$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$。

例 2.2。 (*i*) 设（A，$*$，R）是一个结合 *Rota-Baxter* 代数，并定义算子 $\prec$，$\succ$：$A \otimes A \to A$，如下：$a_1 \prec a_2 := a_1 * R(a_2)$ 以及 $a_1 \succ a_2 := R(a_1) * a_2$，对于任意 $a_1, a_2 \in A$。则（A，$\prec$，$\succ$）是一个 *dendriform* 代数。

(*ii*) 设 $(A, *)$ 是一个结合代数，且 $x \in A$ 是满足 $x^2 = 0$ 的元素。定义 $a_1 \prec a_2 := a_1 * (x * a_2)$ 以及 $a_1 \succ a_2 := a_1 * (a_2 * x)$，其中任意 $a_1, a_2 \in A$ 均成立。则 $(A, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数。

(*iii*) 最近，*Rakhimov* 和 *Bekbaev* 在 [28] 中给出了二维 *dendriform* 代数的分类。设向量空间 $D = \mathbb{k}\{e_1, e_2\}$。定义乘积为 $e_1 \succ e_1 = e_1$, $e_2 \prec e_1 = e_2$，其他乘积均为零。因此 $(D, \prec, \succ)$ 是一个二维 *dendriform* 代数。

定义 2.3。设 **双模** 是 *dendriform* 代数 $(D, \prec, \succ)$ 上的五元组 $(V, \mathrm{l}_\prec, \mathrm{r}_\prec, \mathrm{l}_\succ, \mathrm{r}_\succ)$，其中 V 是一个向量空间，且$\mathrm{l}_\prec$、$\mathrm{r}_\prec$、$\mathrm{l}_\succ$、$\mathrm{r}_\succ$：$A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ 是满足下列方程的线性映射：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{l}_\prec(d_1 \prec d_2) = \mathrm{l}_\prec(d_1)\mathrm{l}_\prec(d_2) + \mathrm{l}_\prec(d_1)\mathrm{l}_\succ(d_2), && \mathrm{l}_\prec(d_1 \prec d_2) = \mathrm{l}_\succ(d_1)\mathrm{l}_\prec(d_2),\\
&\mathrm{r}_\prec(d_1)\mathrm{l}_\prec(d_2) = \mathrm{l}_\prec(d_2)\mathrm{r}_\prec(d_1) + \mathrm{l}_\prec(d_2)\mathrm{r}_\succ(d_1), && \mathrm{r}_\prec(d_1)\mathrm{l}_\succ(d_2) = \mathrm{l}_\succ(d_2)\mathrm{r}_\prec(d_1),\\
&\mathrm{r}_\prec(d_1)\mathrm{r}_\prec(d_2) = \mathrm{r}_\prec(d_2 \prec d_1 + d_2 \succ d_1), && \mathrm{r}_\prec(d_1)\mathrm{r}_\succ(d_2) = \mathrm{r}_\succ(d_2 \prec d_1),\\
&\mathrm{r}_\succ(d_1)\mathrm{l}_\prec(d_2) + \mathrm{r}_\succ(d_1)\mathrm{l}_\succ(d_2) = \mathrm{l}_\succ(d_2)\mathrm{r}_\succ(d_1), && \mathrm{l}_\succ(d_1 \prec d_2 + d_1 \succ d_2) = \mathrm{l}_\succ(d_1)\mathrm{l}_\succ(d_2),\\
&\mathrm{r}_\succ(d_1)\mathrm{r}_\prec(d_2) + \mathrm{r}_\succ(d_1)\mathrm{r}_\succ(d_2) = \mathrm{r}_\succ(d_2 \succ d_1), &&
\end{aligned}$$

对任意 $d_1, d_2 \in D$

设 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 dendriform 代数。定义线性映射 $\mathrm{l}_\prec$、$\mathrm{r}_\prec$、$\mathrm{l}_\succ$、$\mathrm{r}_\succ : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(A)$，使得 $\mathrm{l}_\prec(d_1)(d_2) = d_1 \prec d_2$, $\mathrm{r}_\prec(d_1)(d_2) = d_2 \prec d_1$, $\mathrm{l}_\succ(d_1)(d_2) = d_1 \succ d_2$ 以及 $\mathrm{l}_\succ(d_1)(d_2) = d_2 \succ d_1$，其中 $d_1, d_2 \in D$。则 $(D, \mathrm{l}_\prec, \mathrm{r}_\prec, \mathrm{l}_\succ, \mathrm{r}_\succ)$ 是 $(D, \prec, \succ)$ 上的双模，称为 $(D, \prec, \succ)$ 上的正则双模。设 $(A, *)$ 是一个结合代数。回顾一下，$(A, *)$ 的正则双模 $(A, \mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A)$ 定义为：对任意 $a_1, a_2 \in D$，有 $\mathrm{l}_A(a_1)(a_2) = a_1 * a_2$，以及 $\mathrm{r}_A(a_1)(a_2) = a_2 * a_1$。容易看出，$(D, *)$ 的伴随结合代数 $(D, \mathrm{l}_D, \mathrm{r}_D)$ 的正则双模，也是由 $(D, \prec, \succ)$ 的正则双模 $(D, \mathrm{l}_\prec, \mathrm{r}_\prec, \mathrm{l}_\succ, \mathrm{r}_\succ)$ 诱导得到的，即 $\mathrm{l}_D = \mathrm{l}_\prec + \mathrm{l}_\succ$ 以及 $\mathrm{r}_D = \mathrm{r}_\prec + \mathrm{r}_\succ$。

Dendriform代数不仅与结合代数密切相关，也与前李代数密切相关。

定义 2.4. 前李代数 是一个二元组$(A, \diamond)$，其中 A 是一个向量空间，且 $\diamond : A \otimes A \to A$ 是一个双线性算子，满足：

$$a_1 \diamond (a_2 \diamond a_3) - (a_1 \diamond a_2) \diamond a_3 = a_2 \diamond (a_1 \diamond a_3) - (a_2 \diamond a_1) \diamond a_3,$$

对任意 $a_1, a_2, a_3 \in A$。

在 [1],A 中Guiar 指出，每个 dendriform 代数都具有前李代数结构。

命题 2.5 ([1, 3])。设$(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数。定义一个双线性算子 $\diamond : D \otimes D \to D$ 如下：

$$d_1 \diamond d_2 = d_1 \succ d_2 - d_2 \prec d_1,$$

对任意 $d_1, d_2 \in D$。因此$(D, \diamond)$ 是一个前李代数，称为由$(D, \prec, \succ)$诱导的**诱导 Pre-Lie 代数。**

回顾前李代数上的双模的概念。

定义 2.6。设$(A, \diamond)$ 是一个前李代数。关于$(A, \diamond)$ 的**双模**是一个三元组$(V, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$，其中 V 是一个向量空间，且$\mathfrak{l}, \mathfrak{r} : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ 是满足以下条件的线性映射

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}(a_1)\mathfrak{l}(a_2) - \mathfrak{l}(a_1 \diamond a_2) &= \mathfrak{l}(a_2)\mathfrak{l}(a_1) - \mathfrak{l}(a_2 \diamond a_1),\\
\mathfrak{l}(a_1)\mathfrak{r}(a_2) - \mathfrak{r}(a_2)\mathfrak{l}(a_1) &= \mathfrak{r}(a_1 \diamond a_2) - \mathfrak{r}(a_2)\mathfrak{r}(a_1),
\end{aligned}$$

对任意 $a_1, a_2 \in A$。

设 $(A, \diamond)$ 是一个前李代数。定义线性映射 $\mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(A)$，其中 $\mathrm{l}_A(a_1)(a_2) = a_1 \diamond a_2$，$\mathrm{r}_A(a_1)(a_2) = a_2 \diamond a_1$，对任意 $a_1, a_2 \in A$ 均成立。则 $(A, \mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A)$ 是 $(A, \diamond)$ 上的双模，称为 $(A, \diamond)$ 上的正则双模。

给定一个前李代数（$A, \diamond$），可以在A 上定义一个括号：$[a_1, a_2] = a_1 \diamond a_2 - a_2 \diamond a_1$，其中$a_1, a_2 \in A$任意。于是（$A, [-, -]$）是一个李代数，称为（$A, \diamond$）的伴随李代数。此外，由于前李代数的 Properad 与 perm代数的 Properad 互为 Koszul 对偶，我们还可以通过一个前李代数与一个perm代数的张量积得到一个李代数。

定义 2.7. 一个**置换代数** 是一个偶对$(B,\cdot)$，其中 B 是一个向量空间，且 $\cdot : B \otimes B \to B$ 是一个双线性算子，满足：

$$b_1(b_2b_3) = (b_1b_2)b_3 = (b_2b_1)b_3,$$

对于任意 $b_1,b_2,b_3 \in B$，其中 $b_1b_2 := b_1 \cdot b_2$。

命题 2.8 （[33, 26]）。设 $(A, \diamond)$ 是一个前李代数，且 $(B, \cdot)$ 是一个置换代数。定义括号 $[-,-] : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$ 如下：

$$[a_1 \otimes b_1,\ a_2 \otimes b_2] = (a_1 \diamond a_2) \otimes (b_1b_2) - (a_2 \diamond a_1) \otimes (b_2b_1),$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 和 $b_1, b_2 \in B$。则 $(A \otimes B,\ [-,-])$ 是一个李代数，称为由 $(A, \diamond)$ 和 $(B, \cdot)$ 诱导的**李代数**。

类似地，通过 dendriform 代数与置换代数的张量积，可以得到一个结合代数。

命题 2.9。设$(D, \prec, \succ)$是一个 *dendriform* 代数，$(B, \cdot)$是一个置换代数。定义双线性算子 $* : (D \otimes B) \otimes (D \otimes B) \to D \otimes B$ 如下：

$$(d_1 \otimes b_1) * (d_2 \otimes b_2) = (d_1 \succ d_2) \otimes (b_1b_2) + (d_1 \prec d_2) \otimes (b_2b_1),$$

对任意 $d_1, d_2 \in D$ 和 $b_1, b_2 \in B$。于是，$(D \otimes B, *)$是一个结合代数，称为由$(D, \prec, \succ)$通过$(B, \cdot)$诱导的结合代数。

证明。对于任意 $d_1, d_2, d_3 \in D$ 和 $b_1, b_2, b_3 \in B$,

$$\begin{aligned}
&((d_1 \otimes b_1) * (d_2 \otimes b_2)) * (d_3 \otimes b_3)\\
&= \big((d_1 \succ d_2) \otimes (b_1b_2) + (d_1 \prec d_2) \otimes (b_2b_1)\big) * (d_3 \otimes b_3)\\
&= ((d_1 \succ d_2) \succ d_3) \otimes ((b_1b_2)b_3) + ((d_1 \succ d_2) \prec d_3) \otimes (b_3(b_1b_2))\\
&\qquad + ((d_1 \prec d_2) \succ d_3) \otimes ((b_2b_1)b_3) + ((d_1 \prec d_2) \prec d_3) \otimes (b_3(b_2b_1))\\
&= (d_1 \otimes b_1) * \big((d_2 \succ d_3) \otimes (b_2b_3) + (d_2 \prec d_3) \otimes (b_3b_2)\big)\\
&= (d_1 \otimes b_1) * ((d_2 \otimes b_2) * (d_3 \otimes b_3)).
\end{aligned}$$

因此，$(D \otimes B, *)$ 是一个结合代数。 □

此外，注意到每个结合代数 $(A, *)$ 都可通过交换子赋予李代数结构，即括号 $[-,-] : A \otimes A \to A$ 由 $[a_1,a_2] = a_1 \diamond a_2 - a_2 \diamond a_1$ 给出，其中任意 $a_1,a_2 \in A$。这个李代数 $(A, [-,-])$ 称为 $(A, *)$ 的伴随李代数。我们有多种从 dendriform 代数构造李代数的方法。一种方法是与置换代数作张量积以得到结合代数，再利用交换子得到李代数；另一种方法是先得到一个前李代数，然后将前李代数与置换代数作张量积以得到李代数。事实上，通过这两种方法得到的李代数相同。

命题 2.10. 设$(D, \prec, \succ)$是一个 *dendriform* 代数，且$(B, \cdot)$是一个置换代数。那么我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\underset{\text{a dendriform algebra}}{(D, \prec, \succ)} & \xrightarrow{-\otimes B} & \underset{\text{an associative algebra}}{(D \otimes B, *)}\\
{\scriptstyle d_1 \diamond d_2 = d_1 \succ d_2 - d_2 \prec d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [x_1,x_2] = x_1 * x_2 - x_2 * x_1}\\
\underset{\text{a pre-Lie algebra}}{(D, \diamond)} & \xrightarrow{-\otimes B} & \underset{\text{a Lie algebra}}{(D \otimes B, [-,-])}
\end{array}$$

证明. 一方面，由命题 2.9，我们在 $D\otimes B$上得到一个李代数结构，其中括号由下式给出

$$\begin{aligned}&[d_1\otimes b_1,\ d_2\otimes b_2]\\&=(d_1\otimes b_1)*(d_2\otimes b_2)-(d_2\otimes b_2)*(d_1\otimes b_1)\\&=(d_1\succ d_2)\otimes(b_1b_2)+(d_1\prec d_2)\otimes(b_2b_1)-(d_2\succ d_1)\otimes(b_2b_1)-(d_2\prec d_1)\otimes(b_1b_2),\end{aligned}$$

对任意 $b_1,b_2\in B$和 $d_1,d_2\in D$。另一方面，由命题 2.8 和 2.5，可得一个李代数（$D\otimes B$，$[-,-]$），其中

$$\begin{aligned}&[d_1\otimes b_1,\ d_2\otimes b_2]\\&=(d_1\diamond d_2)\otimes(b_1b_2)-(d_2\diamond d_1)\otimes(b_2b_1)\\&=(d_1\succ d_2)\otimes(b_1b_2)-(d_2\prec d_1)\otimes(b_1b_2)-(d_2\succ d_1)\otimes(b_2b_1)+(d_1\prec d_2)\otimes(b_2b_1),\end{aligned}$$

对任意 $b_1,b_2\in B$和 $d_1,d_2\in D$。因此，该图表是交换的。 □

例 *2.11*。考虑例 *2.2* 中给出的二维 *dendriform* 代数 $(D=\mathbb{k}\{e_1,e_2\},\prec,\succ)$，即 $e_1\succ e_1=e_1$和 $e_2\prec e_1=e_2$。于是，$(D,\prec,\succ)$ 导出一个前李代数 $(D,\diamond)$，其非零乘积为 $e_1\diamond e_1=e_1$和 $e_1\diamond e_2=-e_2$。设 $(B=\mathbb{k}\{x_1,x_2\},\cdot)$ 是一个置换代数，其定义为 $x_2x_1=x_1$和 $x_2x_2=x_2$。那么，由命题 *2.8* 可得一个四维李代数 $(D\otimes B,[-,-])$，其中

$$[e_1\otimes x_1,e_1\otimes x_2]=-e_1\otimes x_1,\quad [e_1\otimes x_2,e_2\otimes x_1]=-e_2\otimes x_1,\quad [e_1\otimes x_2,e_2\otimes x_2]=-e_2\otimes x_2,$$

其余项均为零。另一方面，通过$(D,\prec,\succ)$与$(B,\cdot)$的张量积，我们得到一个 *4* 维结合代数$(D\otimes B,*)$，其中

$$\begin{aligned}&(e_1\otimes x_2)*(e_1\otimes x_1)=e_1\otimes x_1,\qquad (e_1\otimes x_2)*(e_1\otimes x_2)=e_1\otimes x_2,\\&(e_2\otimes x_1)*(e_1\otimes x_2)=e_2\otimes x_1,\qquad (e_2\otimes x_2)*(e_1\otimes x_2)=e_2\otimes x_2,\end{aligned}$$

其余项均为零。容易看出，对$(D\otimes B,*)$取交换子所得的李代数恰好是$(D\otimes B,[-,-])$。

本文将证明，这个交换图在双代数层面上同样成立。

3. 由前李双代数诱导的拟三角李双代数

在 [26], 前李双代数与二次 perm 代数的张量积上给出了李双代数结构。本节考虑一类特殊的李双代数，即拟三角李双代数。我们证明，拟三角前李双代数在该张量积上诱导出拟三角李双代数结构。

回顾一下，**前李余代数**是一个二元组（A,ϑ），其中A 是一个向量空间，且 $\vartheta:\ A\to A\otimes A$ 是满足以下条件的线性映射

$$(\mathrm{id}\otimes\vartheta)\vartheta-(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\vartheta)\vartheta=(\vartheta\otimes\mathrm{id})\vartheta-(\tau\otimes\mathrm{id})(\vartheta\otimes\mathrm{id})\vartheta,$$

其中 $\tau:\ A\otimes A\to A\otimes A$ 是由 $\tau(a_1\otimes a_2):=a_2\otimes a_1$ 定义的翻转算子，其中对所有$a_1,a_2\in A$.

定义 3.1（[2]）。设（A，$\diamond$）是一个前李代数，且（A，ϑ）是一个前李余代数。若对于任意 $a_1,a_2\in A$，满足以下相容条件：

$$\begin{aligned}&(\vartheta-\tau\vartheta)(a_1\diamond a_2)-(\mathbf{l}_A(a_1)\otimes\mathrm{id})((\vartheta-\tau\vartheta)(a_2))\\&\quad-(\mathrm{id}\otimes\mathbf{l}_A(a_1))((\vartheta-\tau\vartheta)(a_2))-(\mathrm{id}\otimes\mathbf{r}_A(a_2))(\vartheta(a_1))+(\mathbf{r}_A(a_2)\otimes\mathrm{id})(\tau(\vartheta(a_1)))=0,\\&\vartheta(a_1\diamond a_2-a_2\diamond a_1)-(\mathrm{id}\otimes(\mathbf{r}_A(a_2)-\mathbf{l}_A(a_2)))(\vartheta(a_1))\\&\quad-(\mathrm{id}\otimes(\mathbf{l}_A(a_1)-\mathbf{r}_A(a_1)))(\vartheta(a_2))-(\mathbf{l}_A(a_1)\otimes\mathrm{id})(\vartheta(a_2))+(\mathbf{l}_A(a_2)\otimes\mathrm{id})(\vartheta(a_1))=0,\end{aligned}$$

那么我们称 $(A,\diamond,\vartheta)$ 为一个**前李双代数**。

回顾一下，**李余代数** $(\mathfrak{g},\delta)$ 是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配有线性映射 $\delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$，使得$\tau\delta=-\delta$ 且 $(\mathrm{id}\otimes\delta)\delta-(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\delta)\delta=(\delta\otimes\mathrm{id})\delta$。**李双代数** 是一个三元组 $(\mathfrak{g},[-,-],\delta)$，满足 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 是李代数，$(\mathfrak{g},\delta)$ 是李余代数，并且满足以下相容条件：

$$\delta([g_1,g_2])=(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1))(\delta(g_2))-(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_2)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_2))(\delta(g_1)),$$

其中，对于所有 $g_1,g_2\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1)(g_2)=[g_1,g_2]$，。

定理 *3.2* ([26])。设 $(A,\diamond,\vartheta)$ 是一个前李双代数，$(B,\circ,\omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，且 $(A\otimes B,[-,-])$ 是由 $(B,\circ)$ 从 $(A,\diamond)$ 诱导得到的诱导李代数。定义一个线性映射 $\delta:A\otimes B\to(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)$，使得

$$\delta(a\otimes b)=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}-\tau)(\vartheta(a)\bullet\nu_\omega(b)):=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}-\tau)\Big(\sum_{(a)}\sum_{(b)}(a_{(1)}\otimes b_{(1)})\otimes(a_{(2)}\otimes b_{(2)})\Big),\tag{3.1}$$

对于任意 $a\in A$ 和 $b\in B$，其中 $\vartheta(a)=\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}$ 以及 $\nu_\omega(b)=\sum_{(b)}b_{(1)}\otimes b_{(2)}$ 采用斯威德勒记号。则 $(A\otimes B,[-,-],\delta)$ 是一个李双代数，称为由 $(B,\circ,\omega)$ 从 $(A,\diamond,\vartheta)$ 诱导得到的李双代数。

回顾一下，如果存在元素$r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$，使得 $\delta=\delta_r$，则称李双代数 $(\mathfrak{g},[-,-],\delta)$ 为**余边界** 李双代数，其中

$$\delta_r(g)=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)+\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)\otimes\mathrm{id})(r),\tag{3.2}$$

对于任意$g\in\mathfrak{g}$。设 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 是一个李代数。如果元素$r=\sum_i x_i\otimes y_i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 满足 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$**-不变**，即 $(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)+\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)\otimes\mathrm{id})(r)=0$，则称其为 ad-不变。方程

$$\mathbf{C}_r:=[r_{12},r_{13}]+[r_{13},r_{23}]+[r_{12},r_{23}]=0$$

称为 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 中的经典杨-巴克斯特方程（或 CYBE），其中 $[r_{12},r_{13}]=\sum i,j[x_i,x_j]\otimes y_i\otimes y_j$，$[r_{13},r_{23}]=\sum i,j\,x_i\otimes x_j\otimes[y_i,y_j]$ 以及 $[r_{12},r_{23}]=\sum i,j\,x_i\otimes[y_i,x_j]\otimes y_j$。

命题 3.3 ([29, 24])。设 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 为李代数，$r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$，且 $\delta_r:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 是由公式 (3.2)定义的线性映射。

（*i*）若 r 是 $(g,[-,-])$ 中的经典杨-巴克斯特方程的解，且 $r+\tau(r)$ 是 $ad_{\mathfrak{g}}$-不变的，则 $(g,[-,-],\delta_r)$ 是李双代数，称为与 r 相关的拟三角李双代数。（*ii*）若 r 是 $(g,[-,-])$ 中的斜对称解，则 $(g,[-,-],\delta_r)$ 是李双代数，称为与 r 相关的三角李双代数。（*iii*）若 $(g,[-,-],\delta_r)$ 是拟三角李双代数，且 $\mathcal{I}=r^\sharp+\tau(r)^\sharp:g^*\to g$ 是向量空间的同构映射，则称 $(g,[-,-],\delta_r)$ 为与 r 相关的可分解李双代数。

回忆一下，前 李双代数 $(A,\diamond,\vartheta)$ 称为**余边界**的，如果存在$r\in A\otimes A$，使得

$$\vartheta(a)=\vartheta_r(a):=(\mathbf{l}_A(a)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes(\mathbf{l}_A-\mathbf{r}_A)(a))(r),\tag{3.3}$$

对所有$a\in A$均成立。设 $(A,\diamond)$ 为一个前李代数，且$r\in A\otimes A$。如果r 是 $(A,\diamond)$ 中的**前李杨-巴克斯特方程**（或 PLYBE）的一个解，则称r 满足

$$\mathbf{PL}_r:=r_{13}\diamond r_{12}+r_{23}\diamond r_{12}+r_{21}\diamond r_{13}+r_{23}\diamond r_{13}-r_{23}\diamond r_{21}-r_{12}\diamond r_{23}-r_{13}\diamond r_{21}-r_{13}\diamond r_{23}=0,$$

其中 $r_{13}\diamond r_{12}:=\sum i,j(x_i\diamond x_j)\otimes y_j\otimes y_i$，$r_{23}\diamond r_{12}:=\sum i,j\,x_j\otimes(x_i\diamond y_j)\otimes y_i$，$r_{21}\diamond r_{13}:=\sum i,j(y_i\diamond x_j)\otimes x_i\otimes y_j$，$r_{23}\diamond r_{13}:=\sum i,j\,x_j\otimes x_i\otimes(y_i\diamond y_j)$，$r_{23}\diamond r_{21}:=\sum i,j\,y_j\otimes(x_i\diamond x_j)\otimes y_i$，$r_{12}\diamond r_{23}:=\sum i,j\,x_i\otimes(y_i\diamond x_j)\otimes y_j$，$r_{13}\diamond r_{21}:=\sum i,j(x_i\diamond y_j)\otimes x_j\otimes y_i$，$r_{13}\diamond r_{23}:=\sum i,j\,x_i\otimes x_j\otimes(y_i\diamond y_j)$。容易验证，$-r$ 和 $\tau(r)$ 是（A, $\diamond$）中的 PLYBE 解，当且仅当 $r\in A\otimes A$ 也是（A,$\diamond$）中的 PLYBE 解。回忆一下，若 $r\in A\otimes A$ 满足 $r=\tau(r)$，则称其为对称的；若 r 满足 $(\mathbf{l}_A,\mathrm{ad}_A)$-不变性，则称其为

$$(\mathbf{l}_A(a)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes(\mathbf{l}_A-\mathbf{r}_A)(a))(r)=0,$$

任意的 $\in A$。

命题 3.4 （[2, 34]）。 设 （A， $\diamond$）是一个前李代数，$r \in A \otimes A$，且 ϑ_r： $A \to A \otimes A$ 是由方程（3.3）定义的线性映射。那么，我们有

(i) 若 r 是 $(A, \diamond)$ 中 *PLYBE* 的一个对称解，则 $(A, \diamond, \vartheta_r)$ 是一个前李双代数，称为与 r 相关联的三角前李双代数；*(ii)* 若 r 是 $(A, \diamond)$ 中 *PLYBE* 的一个解，且 $r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，则 $(A, \diamond, \vartheta_r)$ 是一个前李双代数，称为与 r 相关联的拟三角前李双代数；*(iii)* 若 $(A, \diamond, \vartheta_r)$ 是一个拟三角前李双代数，且 $\mathcal{I} = r^\sharp - \tau(r)^\sharp : A^* \to A$ 是向量空间的一个同构，则 $(A, \diamond, \vartheta_r)$ 称为与 r 相关联的可分解前李双代数。

设（B， $\cdot$）是一个置换代数。在（B， $\cdot$）上的双线性型 $\omega(-,-)$ 称为**不变**的，若其满足

$$\omega(b_1 b_2,\ b_3) = \omega(b_1,\ b_2 b_3 - b_3 b_2),$$

对任意$b_1, b_2, b_3 \in B$均成立。一个二次 perm 代数记作（$B, \cdot, \omega$），它是一个置换代数（B， $\cdot$），并配备一个反对称不变非退化双线性型 $\omega(-,-)$。设（$B, \cdot, \omega$）是一个二次 perm 代数。那么，双线性型 $\omega(-,-)$ 可自然地扩张到张量积$B \otimes B \otimes \cdots \otimes B$上，即

$$\omega(-,-): \quad \underbrace{(B \otimes \cdots \otimes B)}_{k\text{-fold}} \otimes \underbrace{(B \otimes \cdots \otimes B)}_{k\text{-fold}} \longrightarrow \mathbb{k},$$

$\omega(\mathrm{b}_1 \otimes \mathrm{b}_2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{b}_k, \mathrm{b}'_1 \otimes \mathrm{b}'_2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{b}'\mathrm{k}) = \sum^k \mathrm{i}_{=1} \sum^k \mathrm{j}_{=1} \omega(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}'_j)$，对任意 $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}2, \cdots, \mathrm{b}_k, \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \cdots, \mathrm{b}'\mathrm{k} \in \mathrm{B}$ 均成立。于是，$\mathrm{B} \otimes \mathrm{B} \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}$ 上的 $\omega(-,-)$ 也是一个非退化双线性型。回顾一下，置换余代数（B, ν）是一个向量空间 B，配有满足 $(\vartheta \otimes \mathrm{id})\vartheta = (\mathrm{id} \otimes \vartheta)\vartheta = (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \vartheta)\vartheta$ 的线性映射 $\nu : \mathrm{B} \to \mathrm{B} \otimes \mathrm{B}$。

引理 *3.5*（[26]）。设 $(B, \cdot, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数。定义线性映射 $\nu_\omega : B \to B \otimes B$，使得$\omega(\nu_\omega(b_1), b_2 \otimes b_3) = -\omega(b_1, b_2 b_3)$，其中任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$。则 (B, ν_ω) 是一个置换余代数。

接下来，我们考察前李代数中 PLYBE 的解与诱导李代数中 CYBE 的解之间的关系。设 $(\mathrm{B}, \cdot, \omega)$ 是一个二次 perm 代数，且 $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}2, \cdots, \mathrm{e}_n\}$ be 是 B 的一个基。由于 $\omega(-,-)$ 是反对称非退化的，我们得到 B 的一个基 $\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}2, \cdots, \mathrm{f}_n\}$，称为关于 $\omega(-,-)$ 的 $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}2, \cdots, \mathrm{e}_n\}$ 的对偶基，其中$\omega(\mathrm{e}_i, \mathrm{f}j) = \delta_i \mathrm{j}$，$\delta_i \mathrm{j}$ 是克罗内克 delta。这里，对于前李代数中 PLYBE 的某些特殊解，我们有

命题 3.6。 设 $(A, \diamond)$ 是一个前李代数，$(B, \cdot, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，且$(A \otimes B, [-,-])$ 是诱导李代数。假设 $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ 是PLYBE在$(A, \diamond)$中的一个解，且 $r - \tau(r)$ 是$(\mathbf{l}_A, \mathrm{ad}_A)$-不变的。则

$$\widehat{r} = \sum_{i,j} (x_i \otimes e_j) \otimes (y_i \otimes f_j) \in (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \tag{3.4}$$

是经典杨-巴克斯特方程 在$(A \otimes B, [-,-])$ 中的一个解，且$\widehat{r} + \tau(\widehat{r})$ 是$\mathrm{ad}_{A \otimes B}$-不变的，其中 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 B 的一个基，而 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是相对于 $\omega(-,-)$的 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的对偶基。

证明。 首先，对于任意 $1 \le p, q \le n$，有

$$\begin{aligned}
&[\widehat{r}_{12}, \widehat{r}_{13}] + [\widehat{r}_{12}, \widehat{r}_{23}] + [\widehat{r}_{13}, \widehat{r}_{23}] \\
=& \sum_{i,j} \sum_{p,q} ((x_i \diamond x_j) \otimes y_i \otimes y_j) \bullet ((e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q) - ((x_j \diamond x_i) \otimes y_i \otimes y_j) \bullet ((e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q) \\
&+ (x_i \otimes (y_i \diamond x_j) \otimes y_j) \bullet (e_p \otimes (f_p e_q) \otimes f_q) - (x_i \otimes (x_j \diamond y_i) \otimes y_j) \bullet (e_p \otimes (e_q f_p) \otimes f_q) \\
&+ (x_i \otimes x_j \otimes (y_i \diamond y_j)) \bullet (e_p \otimes e_q \otimes (f_p f_q)) - (x_i \otimes x_j \otimes (y_j \diamond y_i)) \bullet (e_p \otimes e_q \otimes (f_q f_p)).
\end{aligned}$$

此外，对于给定的 $s, u, v \in \{1, 2, \cdots, n\}$，有

$$\omega\Big(e_s \otimes e_u \otimes e_v,\ \sum_{p,q}(e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q\Big) = \omega(e_s,\ e_u e_v),$$
$$\omega\Big(e_s \otimes e_u \otimes e_v,\ \sum_{p,q}(e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q\Big) = \omega(e_s,\ e_v e_u),$$
$$\omega\Big(e_s \otimes e_u \otimes e_v,\ \sum_{p,q} e_p \otimes (f_p e_q) \otimes f_q\Big) = \omega(e_s,\ e_v e_u - e_u e_v).$$

由 $\omega(-,-)$ 的非退化性，我们得到

$$\sum_{p,q} e_p \otimes (f_p e_q) \otimes f_q = \sum_{p,q}((e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q - (e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q).$$

类似地，我们也有 $\sum_{p,q} e_p \otimes e_q \otimes (f_p f_q) = \sum_{p,q}((e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q - (e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q)$, $\sum_{p,q} e_p \otimes (e_q f_p) \otimes f_q = \sum_{p,q}(e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q$ 以及 $\sum_{p,q} e_p \otimes e_q \otimes (f_q f_p) = -\sum_{p,q}(e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&[\widehat{r}_{12}, \widehat{r}_{13}] + [\widehat{r}_{12}, \widehat{r}_{23}] + [\widehat{r}_{13}, \widehat{r}_{23}] \\
&= \sum_{i,j}\sum_{p,q}\Big((x_i \diamond x_j) \otimes y_i \otimes y_j - x_i \otimes (y_i \diamond x_j) \otimes y_j - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \diamond y_j) \\
&\qquad + x_i \otimes x_j \otimes (y_j \diamond y_i)\Big) \bullet ((e_p e_q) \otimes f_p \otimes f_q) \\
&\quad - \Big((x_j \diamond x_i) \otimes y_i \otimes y_j - x_i \otimes (y_i \diamond x_j) \otimes y_j + x_i \otimes (x_j \diamond y_i) \otimes y_j \\
&\qquad - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \diamond y_j)\Big) \bullet ((e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q).
\end{aligned}$$

由于 $r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，我们得到 $PL_r = \sum_{i,j}((y_i \diamond x_j) \otimes x_i \otimes y_j + x_j \otimes x_i \otimes (y_i \diamond y_j) - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \diamond y_j) - y_j \otimes (x_j \diamond x_i) \otimes y_i) = \sum_{i,j}\Big((y_j \diamond y_i) \otimes x_j \otimes x_i + y_i \otimes x_j \otimes (y_j \diamond x_i) - y_i \otimes x_j \otimes (x_i \diamond y_j) - y_j \otimes (x_j \diamond x_i) \otimes y_i\Big)$，因此

$$\begin{aligned}
-(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathbf{PL}_r) &= \sum_{i,j}\Big((x_i \diamond x_j) \otimes y_i \otimes y_j - x_i \otimes (y_i \diamond x_j) \otimes y_j \\
&\qquad - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \diamond y_j) + x_i \otimes x_j \otimes (y_j \diamond y_i)\Big), \\
(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathbf{PL}_r) &= \sum_{i,j}\Big(x_j \otimes x_i \otimes (y_j \diamond y_i) + x_j \otimes (y_j \diamond x_i) \otimes y_i \\
&\qquad - x_j \otimes (x_i \diamond y_j) \otimes y_i - (x_j \diamond x_i) \otimes y_i \otimes y_j\Big).
\end{aligned}$$

因此，$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$，也就是说，$r$ 是（$A \otimes B$, $[-,-]$）中的经典杨-巴克斯特方程的解，当且仅当$A, \diamond$）中的r是 PLYBE 的解。

其次，我们证明 对于任意$a \in A$、$e_p \in B$、$p = 1$、2、$\cdots$、n，我们有$r + \tau(r)$ 是 $\mathrm{ad}_{A\otimes B}$-不变的

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a \otimes e_p) + \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a \otimes e_p) \otimes \mathrm{id})(\widehat{r} + \tau(\widehat{r})) \\
&= \sum_{i,j}\Big((x_i \otimes e_j) \otimes [a \otimes e_p,\ y_i \otimes f_j] + [a \otimes e_p,\ x_i \otimes e_j] \otimes (y_i \otimes f_j) \\
&\qquad + (y_i \otimes f_j) \otimes [a \otimes e_p,\ x_i \otimes e_j] + [a \otimes e_p,\ y_i \otimes f_j] \otimes (x_i \otimes e_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j}\Big((x_i \otimes (a \diamond y_i)) \bullet (e_j \otimes (e_p f_j)) - (x_i \otimes (y_i \diamond a)) \bullet (e_j \otimes (f_j e_p)) \\
&\qquad + ((a \diamond x_i) \otimes y_i) \bullet ((e_p e_j) \otimes f_j) - ((x_i \diamond a) \otimes y_i) \bullet ((e_j e_p) \otimes f_j) \\
&\qquad + (y_i \otimes (a \diamond x_i)) \bullet (f_j \otimes (e_p e_j)) - (y_i \otimes (x_i \diamond a)) \bullet (f_j \otimes (e_j e_p)) \\
&\qquad + ((a \diamond y_i) \otimes x_i) \bullet ((e_p f_j) \otimes e_j) - ((y_i \diamond a) \otimes x_i) \bullet ((f_j e_p) \otimes e_j).
\end{aligned}$$

对于给定的 s、$t \in \{1, 2, \cdots, n\}$，由于 $\omega(-,-)$ 是不变的，我们有

$$\omega\Big(e_s \otimes e_t,\ \sum_j e_j \otimes (f_j e_p)\Big) = \omega(e_s,\ e_p e_t - e_t e_p),$$
$$\omega\Big(e_s \otimes e_t,\ \sum_j (e_p e_j) \otimes f_j\Big) = \omega(e_s,\ e_p e_t), \qquad \omega\Big(e_s \otimes e_t,\ \sum_j (e_j e_p) \otimes f_j\Big) = \omega(e_s,\ e_t e_p).$$

因此，$\sum_j (e\ \ pe_j)\otimes f_j = \sum_j (e_j e\ \ p)\otimes f_j + \sum_j e_j \otimes (f_j e\ \ p)$，因为 $\omega(-,-)$ 是非退化的。同样，我们还有

$$\sum_j (f_j e_p)\otimes e_j = -\sum_j (e_j e_p)\otimes f_j, \qquad \sum_j f_j \otimes (e_j e_p) = -\sum_j e_j \otimes (f_j e_p),$$
$$\sum_j (e_p e_j)\otimes f_j = -\sum_j (e_p f_j)\otimes e_j = \sum_j -f_j \otimes (e_p e_j) = \sum_j (e_j e_p)\otimes f_j + \sum_j e_j \otimes (f_j e_p).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a\otimes e_p) + \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a\otimes e_p)\otimes \mathrm{id})(\widehat{r} + \tau(\widehat{r}))\\
&= \sum_{i,j}\Big(\big(x_i\otimes(a\diamond y_i) + (a\diamond x_i)\otimes y_i - y_i\otimes(a\diamond x_i) - (a\diamond y_i)\otimes x_i\\
&\qquad - x_i\otimes(y_i\diamond a) + y_i\otimes(x_i\diamond a)\big)\bullet(e_j\otimes(f_j e_p))\\
&\quad + \big(x_i\otimes(a\diamond y_i) + (a\diamond x_i)\otimes y_i - y_i\otimes(a\diamond x_i) - (a\diamond y_i)\otimes x_i\\
&\qquad - (x_i\diamond a)\otimes y_i + (y_i\diamond a)\otimes x_i\big)\bullet((e_p e_j)\otimes f_j)\Big).
\end{aligned}$$

由于 $r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，即 $\sum i(a\diamond x_i)\otimes y_i + x_i\otimes(a\diamond y_i) - x_i\otimes(y_i\diamond a) - (a\diamond y_i)\otimes x_i - y_i\otimes(a\diamond x_i) + y_i\otimes(x_i\diamond a) = 0$ 对于任意 $a\in A$，我们有 $(\mathrm{id}\otimes \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a\otimes e_p) + \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a\otimes e_p)\otimes \mathrm{id})(\widehat{r} + \tau(\widehat{r})) = 0$，即 $\widehat{r} + \tau(\widehat{r})$ 是 $\mathrm{ad}_{A\otimes B}$- 不变的。证明完毕。□

对于r 为对称的特殊情形，我们可以直接得到以下推论。

推论 3.7 ([26])。 设$(A,\diamond)$ 是一个前李代数，$(B,\cdot,\omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，并且$(A\otimes B, [-,-])$ 是诱导李代数。若 $r = \sum_i x_i\otimes y_i \in A\otimes A$ 是PLYBE 在$(A,\diamond)$中的对称解，则

$$\widehat{r} := \sum_{i,j}(x_i\otimes e_j)\otimes(y_i\otimes f_j)\in (A\otimes B)\otimes(A\otimes B)$$

是CYBE 在$(A\otimes B, [-,-])$中的斜对称解。

证明。 由于r 是对称的，因此有$r - \tau(r) = 0$ 是 $(\mathbf{l}_A, \mathrm{ad}_A)$-不变的，因此 $\widehat{r}$ 是 $(A\otimes B, [-,-])$ 中经典杨-巴克斯特方程的一个解，这是由命题3.6证明的第一部分得出的。此外，对于任意$s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$\omega\Big(e_s\otimes e_t, \sum_j e_j\otimes f_j\Big) = \omega(e_s,e_t) = -\omega(e_t,e_s) = -\omega\Big(e_s\otimes e_t, \sum_j f_j\otimes e_j\Big).$$

$\omega(-,-)$的非退化性推出$\sum_j e_j\otimes f_j = -\sum_j f_j\otimes e_j$。由于$r$是对称的，我们得到$\widehat{r}$是斜对称的。证明完毕。□

我们给出本节的主要结论。

定理 *3.8.* 设 $(A,\diamond,\vartheta)$ 是一个前李双代数，$(B,\cdot,\omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，且 $(A\otimes B, [-,-]_\delta)$ 是由 $(A,\diamond,\vartheta)$ 和 $(B,\cdot,\omega)$ 诱导的李双代数。若 $r\in A\otimes A$ 满足 $r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，且 $\vartheta = \vartheta_r$ 由方程 *(3.3)* 定义，则 $(A\otimes B, [-,-]_\delta) = (A\otimes B, [-,-]_{\delta_r})$ 作为李双代数同构，其中 δ 由方程 *(3.1)* 定义，且 $\widehat{r}$ 由方程 *(3.4)* 定义。因此，我们有

(i) 若 $(A\otimes B, [-,-]_\delta)$ 是拟三角的，则 $(A,\diamond,\vartheta)$ 是拟三角的；*(ii)* 若 $(A\otimes B, [-,-]_\delta)$ 是三角的，则 $(A,\diamond,\vartheta)$ 是三角的；*(iii)* 若 $(A\otimes B, [-,-]_\delta)$ 是可分解的，则 $(A,\diamond,\vartheta)$ 是可分解的。

证明。 令 $r = \sum_i x_i\otimes y_i$。首先，对于任意 $a\in A$ 和 $b\in B$，有

$$\begin{aligned}
\delta(a\otimes b) = \sum_i\sum_{(b)}\Big(&((a\diamond x_i)\otimes y_i)\bullet(b_{(1)}\otimes b_{(2)}) + (x_i\otimes(a\diamond y_i))\bullet(b_{(1)}\otimes b_{(2)})\\
&-(x_i\otimes(y_i\diamond a))\bullet(b_{(1)}\otimes b_{(2)}) - (y_i\otimes(a\diamond x_i))\bullet(b_{(2)}\otimes b_{(1)})\\
&-((a\diamond y_i)\otimes x_i)\bullet(b_{(2)}\otimes b_{(1)}) + ((y_i\diamond a)\otimes x_i)\bullet(b_{(2)}\otimes b_{(1)})\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\vartheta_r(a) = (l_A(a) \otimes id + id \otimes (l_A - r_A)(a))(r) = \sum i((a \diamond x_i) \otimes y_i + x_i \otimes (a \diamond y_i) - x_i \otimes (y_i \diamond a))$ 并且$\nu_\omega(b) = \sum(b)\, b_{(1)} \otimes b_{(2)}$。设 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$ 是 B 的一组基，$\{f_1, f2, \cdots, f_n\}$ 是 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$ 的对偶基（相对于 $\omega(-,-)$），即 $\omega(e_i, f_j) = \delta_i j$，其中 $\delta_i j$ 是克罗内克 delta。那么

$$\begin{aligned}\delta_{\widehat{r}}(a \otimes b) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a \otimes b) + \mathrm{ad}_{A\otimes B}(a \otimes b) \otimes \mathrm{id})(\widehat{r}) \\ &= \sum_{i,j} \Big((x_i \otimes (a \diamond y_i)) \bullet (e_j \otimes (bf_j)) - (x_i \otimes (y_i \diamond a)) \bullet (e_j \otimes (f_j b)) \\ &\quad + ((a \diamond x_i) \otimes y_i) \bullet ((be_j) \otimes f_j) - ((x_i \diamond a) \otimes y_i) \bullet ((e_j b) \otimes f_j)\Big),\end{aligned}$$

其中 $\widehat{r} = \sum_{i,j}(x_i \otimes e_j) \otimes (y_i \otimes f_j)$。对于两个基元素 $e_s, e_t \in B$，由于

$$\omega\Big(e_s \otimes e_t, \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}\Big) = \omega(e_s, be_t - e_t b) = \omega\Big(e_s \otimes e_t, \sum_j e_j \otimes (f_j b)\Big),$$

且 $\omega(-,-)$ 非退化，因此得到 $\sum(b)\, b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum j\, e\, j \otimes (f_i b)$。类似地，我们还有 $\sum(b)\, b_{(2)} \otimes b_{(1)} = -\sum j(e\, jb) \otimes f\, j$ 和 $\sum j(be\, j) \otimes f\, j = \sum j\, e_j \otimes (b\, f\, j) = \sum(b)\, (b_{(1)} \otimes b_{(2)} - b_{(2)} \otimes b_{(1)})$。因此，

$$\begin{aligned}\delta(a \otimes b) - \delta_{\widehat{r}}(a \otimes b) = \sum_i \sum_{(b)} \Big&((y_i \diamond a) \otimes x_i + x_i \otimes (a \diamond y_i) - y_i \otimes (a \diamond x_i) \\ &- (a \diamond y_i) \otimes x_i + (a \diamond x_i) \otimes y_i - (x_i \diamond a) \otimes y_i\Big) \bullet (b_{(2)} \otimes b_{(1)}).\end{aligned}$$

若 $r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，即 $\sum i(a \diamond x_i) \otimes y_i + x_i \otimes (a \diamond y_i) - x_i \otimes (y_i \diamond a) - (a \diamond y_i) \otimes x_i - y_i \otimes (a \diamond x_i) + y_i \otimes (x_i \diamond a) = 0$ 对任意 $a \in A$ 均成立，则对任意 $a \in A$ 和 $b \in B$，有 $\delta(a \otimes b) = \delta_{\widehat{r}}(a \otimes b)$。因此，$(A \otimes B, [-,-], \delta) = (A \otimes B, [-,-], \delta_{\widehat{r}})$ 作为李双代数同构。

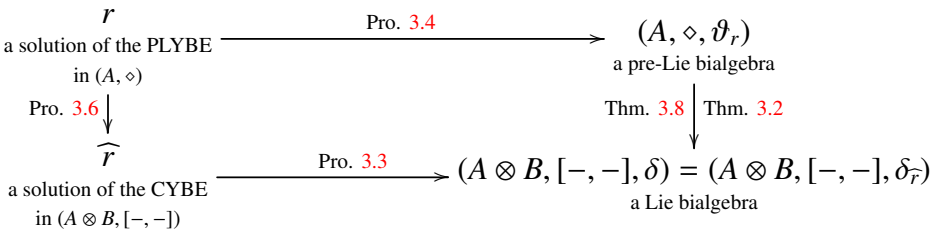
其次，(i) 和 (ii) 由命题 3.6 和推论 3.7 得出。最后，若 $(A, \diamond, \vartheta_r)$ 是可分解的，即 r 是 $(A, \diamond)$ 中 PLYBE 的解，$r - \tau(r)$ 是 (l_A, ad_A)-不变的，并且映射 $\mathcal{I} = r^\sharp - \tau(r)^\sharp : A^* \to A$ 是向量空间同构。我们需要证明 $\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{r}^\sharp + \tau(\widehat{r})^\sharp : (A \otimes B)^* \to A \otimes B$ 是向量空间同构。记 $\kappa := \sum j\, e_j \otimes f\, j \in B \otimes B$。定义 $\kappa^\sharp : B^* \to B$，使得$\langle \eta_2, \kappa^\sharp(\eta_1)\rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \kappa\rangle$，对任意 $\eta_1, \eta_2 \in B^*$均成立。接下来可验证 $\kappa^\sharp$ 是线性同构，且 $\langle \eta_2, \kappa^\sharp(\eta_1)\rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \kappa\rangle = -\langle \eta_2 \otimes \eta_1, \kappa\rangle = -\langle \eta_1, \kappa^\sharp(\eta_2)\rangle$。因此，对任意 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ 和$\eta_1, \eta_2 \in B^*$,

$$\begin{aligned}\langle \xi_2 \otimes \eta_2, \tau(\widehat{r})^\sharp(\xi_1 \otimes \eta_1)\rangle &= \sum_{i,j} \langle (\xi_2 \otimes \eta_2) \otimes (\xi_1 \otimes \eta_1), (x_i \otimes e_j) \otimes (y_i \otimes f_j)\rangle \\ &= \Big(\sum_i \langle \xi_2, x_i\rangle\langle \xi_1, y_i\rangle\Big)\Big(\sum_j \langle \eta_1, f_j\rangle\langle \eta_2, e_j\rangle\Big) \\ &= -\langle \xi_2, \tau(r)^\sharp(\xi_1)\rangle\langle \eta_1, \kappa^\sharp(\eta_2)\rangle \\ &= -\langle \xi_2 \otimes \eta_2, \tau(r)^\sharp(\xi_1) \otimes \kappa^\sharp(\eta_1)\rangle.\end{aligned}$$

也就是说，$\tau(\widehat{r})^\sharp = -\tau(r)^\sharp \otimes \kappa^\sharp$。类似地，我们有$\widehat{r}^\sharp = r^\sharp \otimes \kappa^\sharp$。因此，$\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{r}^\sharp + \widehat{r}^\sharp = (r^\sharp - r^\sharp) \otimes \kappa^\sharp = \mathcal{I} \otimes \kappa^\sharp$是一个向量空间同构。因此，若 $(A, \diamond, \vartheta)$ 是可分解前李双代数，则 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$ 是可分解李双代数。证明完毕。□

注 *3.9*。定理 *3.8* 中的结论 *(ii)* 是 *(i)* 的一个特例，已在 [26] 中考察。此外，[26] 中引入了完备李双代数和 *CYBE* 的完备解的概念。在定理 *3.8* 中，若将二次 *perm* 代数 $(B, \cdot, \omega)$ 替换为二次$\mathbb{Z}$-分次的置换代数 $(B, \cdot, \varpi)$（见定义 *4.1*），则 $(A \otimes B, [-,-], \delta) = (A \otimes B, [-,-], \delta_{\widehat{r}})$ 作为完备李双代数同构。与定理 *3.8* 的证明类似，可以证明：若 $(A, \diamond, \vartheta)$ 是拟三角的，则完备李双代数 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$ 是拟三角的。

设（A，$\diamond$）为一个前李代数，且 $r \in A \otimes A$。若 r 是（A，$\diamond$）中的 PLYBE 的一个解，且$r - \tau$（r）是（$\mathbf{l}_A$，ad_A）-不变的，那么定理 3.8 还给出了如下交换图：



O-算子被认为是杨-巴克斯特方程解的算子形式。现在我们考察前李代数的 O-算子与诱导李代数之间的关系。设（g，$[-,-]$）为一个李代数，且（V，ρ）是（g，$[-,-]$）的一个表示。回忆一下，若对任意 $v_1, v_2 \in V$，则线性映射 $P: V \to \mathfrak{g}$ 称为（g，$[-,-]$）的一个 **O-算子**，其与（V，ρ）相关联，

$$[P(v_1), P(v_2)] = P(\rho(P(v_1))(v_2) - \rho(P(v_2))(v_1)).$$

李代数的 O-算子由 Kupershmidt 在 [23], 中引入，被认为是（$\mathfrak{g}$，$[-,-]$）中经典杨-巴克斯特方程解的算子形式。

命题 *3.10*（[23, 10]）。设 $(g, [-,-])$ 是一个李代数，$r \in g \otimes g$ 为斜对称的。那么，r 是 $(g, [-,-])$ 中经典杨-巴克斯特方程的解，当且仅当 $r^\sharp$ 是与余伴随表示 $(g^*, -ad^* g)$, *where* $ad_{g_1}(g_2) = [g_1, g_{12}]$ *for any* $g_1, g_2 \in g$ 相关联的 $(g, [-,-])$ 的 O-算子。

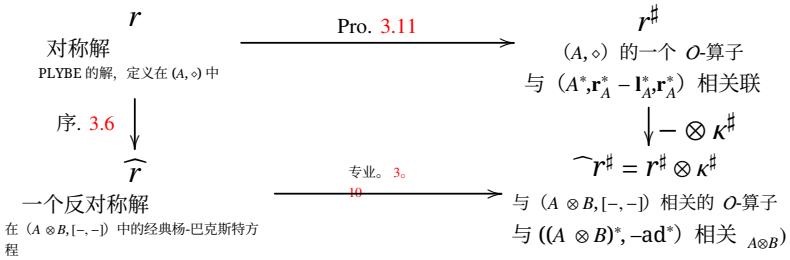
前李代数的 O-算子在 [2] 中已有讨论。回顾一下，与双模 $(V, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ 相关联的前李代数 $(A, \diamond)$ 的一个**-算子**是一个线性映射 $P: V \to A$，满足

$$P(v_1) \diamond P(v_2) = P(\mathfrak{l}(P(v_1))(v_2) + \mathfrak{r}(P(v_2))(v_1)),$$

对任意$v_1, v_2 \in V$。

命题 3.11 ([2]). 设$(A, \diamond)$ 是一个前李代数，$r \in A \otimes A$ 是对称的。当且仅当 $r^\sharp$ 是与余正则双模 $(A^*, \mathbf{r}_A^* - \mathbf{l}_A^*, \mathbf{r}_A^*)$相关联的$(A, \diamond)$ 的 O-算子时，r 才是$(A, \diamond)$ 中的PLYBE 的解。

根据定理 3.8的证明，我们还可以得到如下交换图：



例 *3.12*。定义二维向量空间 $A = \Bbbk\{e_1, e_2\}$ 上的双线性算子 $\diamond$，满足 $e_1 \diamond e_1 = e_1$, $e_1 \diamond e_2 = -e_2$ 以及 $e_2 \diamond e_1 = e_2 \diamond e_2 = 0$。那么 $(A, \diamond)$ 是一个前李代数。可以验证，$r = e_1 \otimes e_1$ 是 $(A, \diamond)$ 中 *PLYBE* 的一个对称解。因此，由命题 *3.4*，r 诱导出一个线性映射 $\vartheta: A \to A \otimes A$, $\vartheta(e_1) = e_1 \otimes e1$, $\vartheta(e_2) = e_1 \otimes e_2$, , 使得 $(A, \diamond, \vartheta)$ 是一个三角前李双代数。设 $(B = \Bbbk\{x_1, x_2\}, \cdot, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，其中 $x_2 x_1 = x_1, x_2 x_2 = x_2, x_1 x_1 = 0 = x_1 x_2$ 且 $\omega(x_1, x_2) = 1$。那么，由定理 *3.2* 可得一个李双代数 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$。记 $y_1 := e_1 \otimes x_1$, $y_2 := e_1 \otimes x_2$, $y_3 := e_2 \otimes x_1$ 以及 $y_4 := e_2 \otimes x_2$。那么 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$ 中非零的括号和余乘如下：

$$[y_1, y_2] = -y_1, \qquad [y_2, y_3] = -y_3, \qquad [y_2, y_4] = y_4,$$
$$\delta(y_2) = y_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes y_2, \qquad \delta(y_3) = y_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes y_3, \qquad \delta(y_4) = y_4 \otimes y_1 - y_1 \otimes y_4.$$

另一方面，根据定理 *3.8*，我们得到一个反对称解 $\widehat{r} = y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1$，它是经典杨-巴克斯特方程在李代数$(A \otimes B, [-,-])$中的解。可以验证，与$\widehat{r}$ 相关联的三角李双代数恰好就是上面给出的李双代数 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$。

此外，若将 $\{e_1,e_2\}$ 的对偶基记为 $\{\xi_1,\xi_2\}$，并将 $\{x_1,x_2\}$ 的对偶基记为 $\{\eta_1,\eta_2\}$，那么 $\{\xi_1\otimes\eta_1,\xi_1\otimes\eta_2,\xi_2\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\}$ 就是 $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ 的对偶基。根据命题 *3.11* 和 *3.10*，我们得到一个 O-算子 $r^\sharp: A^* \to A$，$r^\sharp(\xi_1) = e_1$，$r^\sharp(\xi_2) = 0$，以及一个 O-算子 $\frown r^\sharp: (A\otimes B)^* \to A\otimes B$，$\frown r^\sharp(\xi_1\otimes\eta_1) = y_2$，$r^\sharp(\xi_1\otimes\eta_1) = -y_1$，其余项均为零。注意，线性映射 $\kappa^\sharp: B^* \to B$ 由 $\kappa^\sharp(\eta_1) = x_2$ 和 $\kappa^\sharp(\eta_2) = -x_1$ 给出。我们得到 $\frown r^\sharp = r^\sharp\otimes\kappa^\sharp$。

4. 通过仿射化 dendriform D-双代数得到的无限维 ASI 双代数

本节回顾二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的概念，即配备了不变双线性型的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。我们证明，有限维 Dendriform D-双代数与二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的张量积可以自然地赋予一个完备 ASI 双代数结构。当二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数是特殊的时，该结果的逆命题也成立，从而给出了 dendriform D-双代数的所需刻画：其仿射化是一个完备 ASI 双代数。

4.1. Affinization of dendriform algebrasand dendriform coalgebras. 为了给出 dendriform 代数的仿射化刻画，我们首先回顾 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的概念。

定义 4.1。A **$\mathbb{Z}$-分次的结合代数**（分别为 **$\mathbb{Z}$-分次的置换代数**）是一个结合代数 $(A, *)$（分别为置换代数 $(B, \cdot)$），具有线性分解 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$（分别为 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$），使得每个 A_i（分别为 B_i）都是有限维的，并且对于所有 $i, j \in \mathbb{Z}$，$A_i * A_j \subseteq A_{i+j}$（分别为 $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j}$）。

例 4.2（[26]）。令 $B = \{f_1\partial_1 + f_2\partial_2 \mid f_1, f_2 \in \Bbbk[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]\}$ 并定义一个二元运算 $\cdot$：$B\otimes B \to B$ 为：

$$(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_s)\cdot(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_t) := \delta_{s,1}x_1^{i_1+j_1+1}x_2^{i_2+j_2}\partial_t + \delta_{s,2}x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2+1}\partial_t,$$

对于任意 $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ 以及 $t \in \{1,2\}$。则 $(B, \cdot)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次的置换代数，其线性分解为 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$，其中

$$B_i = \Big\{ \sum_{k=1}^{2} f_k\partial_k \mid f_k \textit{ is a homogeneous polynomial with } \deg(f_k) = i-1,\ k = 1,2 \Big\}$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$。

根据命题 2.9，我们有以下命题。

命题 4.3. 设 $(D, \prec, \succ)$ 是一个有限维二分代数，且 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。在 $D\otimes B$ 上定义二元运算如下：

$$(d_1\otimes b_1) * (d_2\otimes b_2) = (d_1 \succ d_2)\otimes(b_1b_2) + (d_1 \prec d_2)\otimes(b_2b_1),$$

对任意 $d_1, d_2 \in D$ 和 $b_1, b_2 \in B$。于是 $(D\otimes B, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次结合代数，称为由 $(D, \prec, \succ)$ 经 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 得到的仿射结合代数。此外，若 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 是例 *4.2* 中给出的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，则 $(D\otimes B, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次结合代数，当且仅当 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数。

证明。由命题 2.9，$(D\otimes B, *)$ 是一个结合代数。由于 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的，$(D\otimes B, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次的结合代数。如果 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 是例 $\mathbb{Z}$4.2 中给出的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，则有

$$\begin{aligned}\Big((d_1\otimes\partial_1) * (d_2\otimes\partial_2)\Big) * (d_3\otimes\partial_1) &= \Big((d_1\succ d_2)\otimes x_1\partial_2) + (d_1\prec d_2)\otimes x_2\partial_1\Big) * (d_3\otimes\partial_1)\\ &= ((d_1\succ d_2)\succ d_3)\otimes x_1x_2\partial_1 + ((d_1\succ d_2)\prec d_3)\otimes x_1^2\partial_2\\ &\quad + ((d_1\prec d_2)\succ d_3)\otimes x_1x_2\partial_1 + ((d_1\prec d_2)\prec d_3)\otimes x_1x_2\partial_1,\end{aligned}$$

and

$$(d_1\otimes\partial_1)*\Big((d_2\otimes\partial_2)*(d_3\otimes\partial_1)\Big)=(d_1\otimes\partial_1)*\Big((d_2\succ d_3)\otimes x_2\partial_1+(d_2\prec d_3)\otimes x_1\partial_2\Big)$$
$$=(d_1\succ(d_2\succ d_3))\otimes x_1x_2\partial_1+(d_1\prec(d_2\succ d_3))\otimes x_1x_2\partial_1$$
$$+(d_1\succ(d_2\prec d_3))\otimes x_1^2\partial_2+(d_1\prec(d_2\prec d_3))\otimes x_1x_2\partial_1.$$

比较 $x_1^2\partial_2$ 的系数，得到 $(d_1\succ d_2)\prec d_3=d_1\succ(d_2\prec d_3)$。类似地，比较方程 $((d_1\otimes\partial_1)*(d_2\otimes\partial_1))*(d_3\otimes\partial_2)=(d_1\otimes\partial_1)*((d_2\otimes\partial_1)*(d_3\otimes\partial_2))$ 和 $((d_1\otimes\partial_2)*(d_2\otimes\partial_1))*(d_3\otimes\partial_1)=(d_1\otimes\partial_2)*((d_2\otimes\partial_1)*(d_3\otimes\partial_1))$ 中 $x_1^2\partial_2$ 的系数，分别得到 $(d_1\prec d_2)\prec d_3=d_1\prec(d_2\prec d_3)+d_1\prec(d_2\succ d_3)$ 和 $d_1\succ(d_2\succ d_3)=(d_1\prec d_2)\succ d_3+(d_1\succ d_2)\succ d_3$。因此，$(D,\prec,\succ)$ 是一个 dendriform 代数。证明完毕。 □

回忆一下，**dendriform 余代数** 是一个三元组 $(D,\theta_\prec,\theta_\succ)$，其中$D$是一个向量空间，且 $\theta_\prec,\theta_\succ: D\to D\otimes D$ 是线性映射，并满足以下条件：

$$(\theta_\prec\otimes\mathrm{id})\theta_\prec=(\mathrm{id}\otimes\theta_\prec)\theta_\prec+(\mathrm{id}\otimes\theta_\succ)\theta_\prec,$$
$$(\theta_\succ\otimes\mathrm{id})\theta_\prec=(\mathrm{id}\otimes\theta_\prec)\theta_\succ,\qquad(\mathrm{id}\otimes\theta_\succ)\theta_\succ=(\theta_\prec\otimes\mathrm{id})\theta_\succ+(\theta_\succ\otimes\mathrm{id})\theta_\succ.$$

为了进行 dendriform 余代数仿射化，我们需要扩展余乘法 $\theta_\prec,\theta_\succ$的陪域，以允许无限和。设$U=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}U_i$和$V=\oplus_{j\in\mathbb{Z}}V_j$为 $\mathbb{Z}$-分次向量空间。我们称**completed tensor product** 的U 与V 为向量空间

$$U\hat{\otimes}V:=\prod_{i,j\in\mathbb{Z}}U_i\otimes V_j.$$

若 U 和 V 是有限维的，则 U ˆ⊗V 就是通常的张量积 U ⊗ V。一般而言，U ˆ⊗V 中的一个元素是无限形式和 $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}X_{ij}$，其中 $X_{ij}\in U_i\otimes V_j$。因此，对于纯张量 $u_{i,\alpha}\otimes v_{j,\alpha}\in U_i\otimes V_j$，$X_{ij}=\sum_\alpha u_{i,\alpha}\otimes v_j$，其中 α属于一个有限指标集。由此，U ˆ⊗V 的一般项是一个可能无限的和$\sum_{i,j,\alpha}u_{i\alpha}\otimes v_{j\alpha}$，其中 $i,j\in\mathbb{Z}$，且 α属于一个有限指标集（该指标集可能依赖于 i, j）。使用这些记号，对于线性映射 $f:U\to U'$ 和 $g:V\to V'$，定义

$$f\hat{\otimes}g:U\hat{\otimes}V\to U'\hat{\otimes}V',\qquad\sum_{i,j,\alpha}u_{i,\alpha}\otimes v_{j,\alpha}\mapsto\sum_{i,j,\alpha}f(u_{i,\alpha})\otimes g(v_{j,\alpha}).$$

此外，扭转映射 τ有其完备化 $\hat{\tau}: V\hat{\otimes}V\to V\hat{\otimes}V, \sum_{i,j,\alpha}u_{i,\alpha}\otimes v_{j,\alpha}\mapsto\sum_{i,j,\alpha}v_{j,\alpha}\otimes u_{i,\alpha}$. 此外，我们将（完备）余乘法定义为线性映射 $\Delta:V\to V\hat{\otimes}V$，$\Delta(v):=\sum_{i,j,\alpha}v1_{i,\alpha}\otimes v2_{j,\alpha}$. 于是我们有定义良好的映射

$$(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})\Delta(v)=(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})\Big(\sum_{i,j,\alpha}v_{1,i,\alpha}\otimes v_{2,j,\alpha}\Big):=\sum_{i,j,\alpha}\Delta(v_{1,i,\alpha})\otimes v_{2,j,\alpha}\in V\hat{\otimes}V\hat{\otimes}V.$$

D定义 4.4. (*i*) *A* **完备余结合余代数** 是一个有序对 (A,Δ)，其中 $A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$ 是一个$\mathbb{Z}$-分次的向量空间，且 $\Delta:A\to A\hat{\otimes}A$ 是一个线性映射，满足

$$(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})\Delta=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\Delta)\Delta.$$

(*ii*) *A* **完备 perm 余代数** 是一个有序对 (B,ν)，其中 $B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次的向量空间，且 $\nu:B\to B\hat{\otimes}B$ 是一个线性映射，满足

$$(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)\nu=(\tau\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu.$$

例 4.5 ([26])。 考虑 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $B=\{f_1\partial_1+f_2\partial_2\mid f_1,f_2\in\Bbbk[x_1^\pm,\ x_2^\pm]\}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i$，它在例 *4.2*中给出。定义一个线性映射 $\nu:B\to B\hat{\otimes}B$ 如下：

$$\nu(x_1^mx_2^n\partial_1)=\sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}}\Big(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1\otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_1-x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2\otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_1\Big),$$
$$\nu(x_1^mx_2^n\partial_2)=\sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}}\Big(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1\otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_2-x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2\otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_2\Big),$$

对任意 $m,\ n\in\mathbb{Z}$。那么$(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\ \nu)$是一个完备 *perm* 余代数。

现在，对于 dendriform 余代数，我们来考虑 dendriform 代数仿射化的对偶版本。我们给出命题 4.3 的对偶版本。

命题 4.6。 设$(D,\theta_{\prec},\theta_{\succ})$是一个有限维树状余代数，且$(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\nu)$是一个完备置换余代数。定义线性映射 $\Delta: D\otimes B\to (D\otimes B)\hat{\otimes}(D\otimes B)$ 如下：

$$\begin{aligned}\Delta(d\otimes b)&=\theta_{\succ}(d)\bullet\nu(b)+\theta_{\prec}(d)\bullet\hat{\tau}(\nu(b))\\&:=\sum_{[d]}\sum_{i,j,\alpha}(d_{[1]}\otimes b_{1,i,\alpha})\otimes(d_{[2]}\otimes b_{2,j,\alpha})+\sum_{(d)}\sum_{i,j,\alpha}(d_{(1)}\otimes b_{2,j,\alpha})\otimes(d_{(2)}\otimes b_{1,i,\alpha}),\end{aligned}$$

对任意 $d\in D$ 和 $b\in B$，其中 $\theta_{\prec}(d)=\sum(d)\, d_{(1)}\otimes d_{(2)}$, $\theta_{\succ}(d)=\sum_{[d]} d_{[1]}\otimes d_{[2]}$ 采用斯威德勒记号表示，且 $\nu(b)=\sum i,j,_{\alpha} b1,_{i,\alpha}\otimes b2,_{j,\alpha}$。则 $(D\otimes B,\Delta)$ 是一个完备余结合余代数。此外，若 $(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\nu)$ 是例 4.5 中给出的完备置换余代数，则 $(D\otimes B,\Delta)$ 是完备余结合余代数，当且仅当 $(D,\theta_{\prec},\theta_{\succ})$ 是一个 dendriform 余代数。

证明。对于任意 $\sum_l d'_l\otimes d''_l\otimes d'''_l\in D\otimes D\otimes D$ 和 $\sum_{i,\,j,\,k,\,\alpha} b'_{i,\,\alpha}\otimes b''_{j,\,\alpha}\otimes b'''_{k,\,\alpha}\in B\hat{\otimes}B\hat{\otimes}B$，记作

$$\Big(\sum_l d'_l\otimes d''_l\otimes d'''_l\Big)\bullet\Big(\sum_{i,j,k,\alpha} b'_{i,\alpha}\otimes b''_{j,\alpha}\otimes b'''_{k,\alpha}\Big)=\sum_l\sum_{i,j,k,\alpha}(d'_l\otimes b'_{i,\alpha})\otimes(d''_l\otimes b''_{j,\alpha})\otimes(d'''_l\otimes b'''_{k,\alpha}).$$

那么，使用上述记号，由于 (B,ν) 是置换余代数，且 $(D,\theta_{\prec},\theta_{\succ})$ 是 dendriform 余代数，对于任意 $d\otimes b\in D\otimes B$，我们有

$$\begin{aligned}&(\theta_{\prec}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))))\\&=(\mathrm{id}\otimes\theta_{\prec})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))))\\&\quad+(\mathrm{id}\otimes\theta_{\succ})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b)))),\\&(\mathrm{id}\otimes\theta_{\succ})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))=(\theta_{\succ}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))\\&\qquad+(\theta_{\prec}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))),\\&(\mathrm{id}\otimes\theta_{\prec})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b)))=(\theta_{\succ}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b)))).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\hat{\otimes}\Delta)(\Delta(d\otimes b))\\&=(\mathrm{id}\otimes\theta_{\succ})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))+(\mathrm{id}\otimes\theta_{\prec})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(b)))))\\&\quad+(\mathrm{id}\otimes\theta_{\prec})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b)))+(\mathrm{id}\otimes\theta_{\succ})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(b))))\\&=(\theta_{\succ}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(b))+(\theta_{\prec}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b)))))\\&\quad+(\theta_{\prec}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\succ}(d))\bullet(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(b)))+(\theta_{\succ}\otimes\mathrm{id})(\theta_{\prec}(d))\bullet(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})((\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(b))))\\&=(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(d\otimes b)),\end{aligned}$$

因为 $(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})=(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\hat{\otimes}\hat{\tau})(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})$。因此，$(D\otimes B,\Delta)$ 是一个完备余结合余代数。

此外，若 $(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\nu)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，如例4.5所示，则有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(\partial_1))\\&=\sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}}\sum_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}\Big(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1\otimes\Big(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1\otimes x_1^{-i_1-j_1}x_2^{1-i_2-j_2+1}\partial_1-x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_2\otimes x_1^{-i_1-j_1+1}x_2^{1-i_2-j_2}\partial_1\Big)\\&\qquad-x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2\otimes\Big(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1\otimes x_1^{1-i_1-j_1}x_2^{-i_2-j_2+1}\partial_1-x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_2\otimes x_1^{1-i_1-j_1+1}x_2^{-i_2-j_2}\partial_1\Big)\Big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(\partial_1))\\&=\sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}}\sum_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}\Big(\Big(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1\otimes x_1^{i_1-j_1}x_2^{i_2-j_2+1}\partial_1-x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1\otimes x_1^{i_1-j_1+1}x_2^{i_2-j_2}\partial_1\Big)\otimes x_1^{-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1\\&\qquad-\Big(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1\otimes x_1^{i_1-j_1}x_2^{i_2-j_2+1}\partial_2-x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_2\otimes x_1^{i_1-j_1+1}x_2^{i_2-j_2}\partial_2\otimes x_1^{1-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1\Big)\Big).\end{aligned}$$

比较等式 $(\mathrm{id}\hat{\otimes}\Delta)(\Delta(\mathrm{d}\otimes\partial_1)) = (\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(\mathrm{d}\otimes\partial_1))$ 中 $\partial_2\otimes\partial_2\otimes\partial_1$ 和 $\partial_1\otimes\partial_1\otimes\partial_1$ 的系数，得到 $(\mathrm{id}\otimes\theta_\succ)\theta_\succ = (\theta_\prec\otimes\mathrm{id})\theta_\succ + (\theta_\succ\otimes\mathrm{id})\theta_\succ$ 和 $(\theta_\succ\otimes\mathrm{id})\theta_\prec = (\mathrm{id}\otimes\theta_\prec)\theta_\succ$。类似地，比较等式 $(\mathrm{id}\hat{\otimes}\Delta)(\Delta(\mathrm{d}\otimes\partial_2)) = (\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(\mathrm{d}\otimes\partial_2))$ 中 $\partial_1\otimes\partial_1\otimes\partial_2$的系数，得到 $(\theta_\prec\otimes\mathrm{id})\theta_\prec = (\mathrm{id}\otimes\theta_\prec)\theta_\prec + (\mathrm{id}\otimes\theta_\succ)\theta_\prec$。因此，$(\mathrm{D}, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是一个 dendriform 余代数。证明完毕。□

4.2. **由 dendriform 构造完备 ASI 双代数D-双代数。** 在引理 3.5中，我们已经证明，二次 perm 代数可以诱导出一个 perm 余代数。现在我们将这一结果推广到完备情形。

定义 4.7。 设 $\varpi(-,-)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 *perm* 代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$上的双线性型。$(i)$ $\varpi(-,-)$ 称为**不变**的，如果对于任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$，都有 $\varpi(b_1b_2, b_3) = \varpi(b_1, b_2b_3 - b_3b_2)$；

(ii) $\varpi(-,-)$ 称为**分次的**，如果存在某个 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varpi(B_i, B_j) = 0$ 当 $i + j + m \neq 0$。一个**二次 $\mathbb{Z}$-分次 perm 代数**，记作$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$，是一个 $\mathbb{Z}$-分次 *perm* 代数，并带有一个反对称不变非退化分次双线性形式。特别地，如果 $B = B_0$，，它就是二次 *perm* 代数。

例 *4.8*（[26]）。设 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 是例 *4.2* 中给出的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，其中 $B = \{f_1\partial_1 + f_2\partial_2 \mid f_1, f_2 \in \Bbbk[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]\} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$。在 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 上定义反对称双线性型 $\varpi(-,-)$，使得

$$\varpi(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1) = -\varpi(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1,\ x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2) = \delta_{i_1+j_1,0}\delta_{i_2+j_2,0},$$
$$\varpi(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1) = \varpi(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_2) = 0,$$

对任意 $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ 均成立。则$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。此外，$\{x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2, -x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1 \mid i_1, i_2 \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 \mid i_1, i_2 \in \mathbb{Z}\}$ 关于 $\varpi(-,-)$ 的对偶基，由齐次元素组成。

对于二次 $\mathbb{Z}$ 分次置换代数（$B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi$），对任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$，有 $\varpi(b_1b_2, b_3) = \omega(b_2, b_1b_3)$。此外，反对称非退化双线性形式 $\varpi(-,-)$ 诱导出双线性形式

$$(\underbrace{B\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}B}_{n\text{-fold}}) \otimes (\underbrace{B\otimes B\otimes\cdots\otimes B}_{n\text{-fold}}) \longrightarrow \Bbbk,$$

对所有 $n \geq 2$，记为 $\hat{\varpi}(-,-)$，其定义为

$$\hat{\varpi}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big) = \sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha}\prod_{j=1}^{n}\varpi(x_{j,i_j,\alpha},\ y_j).$$

接着可以验证，$\hat{\varpi}(-,-)$ 是**左非退化**的，即，若

$$\hat{\varpi}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big) = \hat{\varpi}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} z_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes z_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big),$$

对所有齐次元素 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in B$，则

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha} = \sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} z_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes z_{n,i_n,\alpha}.$$

类似于引理3.5，有

引理 4.9。 设$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$ 分次置换代数。定义线性映射$\nu_\varpi : B \to B\otimes B$，使其满足$\hat{\varpi}(\nu_\omega(b_1), b_2\otimes b_3) = -\varpi(b_1, b_2b_3)$，对任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$。则(B, ν_ω) 是一个完备 *perm* 余代数。

例 *4.10*（[26]）。考虑例 *4.8* 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$。那么诱导出的完备 *perm* 余代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \nu_\omega)$ 正是例 *4.5* 中给出的完备 *perm* 余代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \nu)$。

接下来，我们将 dendriform 代数的余分代数仿射化和 dendriform 余代数的余余代数仿射化推广到 dendriform D-双代数。

定义 4.11 ([3])。 一个 **dendriform D-双代数** 是一个五元组 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$，其中 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数，$(D, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是一个 *dendriform* 余代数，且满足以下相容条件：

$$\theta_\prec(d_1 \prec d_2 + d_1 \succ d_2) = (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d_1))(\theta_\prec(d_2)) + ((\mathbf{r}_\prec + \mathbf{r}_\succ)(d_2) \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d_1)), \tag{4.1}$$

$$\theta_\succ(d_1 \prec d_2 + d_1 \succ d_2) = (\mathrm{id} \otimes (\mathbf{l}_\prec + \mathbf{l}_\succ)(d_1))(\theta_\succ(d_2)) + (\mathbf{r}_\prec(d_2) \otimes \mathrm{id})(\theta_\succ(d_1)), \tag{4.2}$$

$$\theta_\prec(d_1 \prec d_2) + \theta_\succ(d_1 \prec d_2) = (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\prec(d_1))(\theta_\succ(d_2)) + (\mathbf{r}_\prec(d_2) \otimes \mathrm{id})((\theta_\prec + \theta_\succ)(d_1)), \tag{4.3}$$

$$\theta_\prec(d_1 \succ d_2) + \theta_\succ(d_1 \succ d_2) = (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\prec(d_1))((\theta_\prec + \theta_\succ)(d_2)) + (\mathbf{r}_\prec(d_2) \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d_1)), \tag{4.4}$$

$$((\mathbf{l}_\prec + \mathbf{l}_\succ)(d_1) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_\prec(d_1))(\theta_\prec(d_2)) = -\tau((\mathbf{l}_\succ(d_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (\mathbf{r}_\prec + \mathbf{r}_\succ)(d_2))(\theta_\succ(d_1))), \tag{4.5}$$

$$(\mathbf{l}_\succ(d_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_\prec(d_2))((\theta_\prec + \theta_\succ)(d_1)) = \tau((\mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_\succ(d_2))(\theta_\succ(d_2)) - (\mathbf{l}_\prec(d_2) \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d_2))), \tag{4.6}$$

对于任意 $d_1, d_2 \in D$。

回顾一下，**反对称无穷小双代数**，或简称 ASI 双代数，是一个三元组（A，$*$，Δ），由一个向量空间 A 和线性映射 $*: A \otimes A \to A$ 以及 $\Delta: A \to A \otimes A$ 组成，使得（A，$*$）是一个结合代数，（A，Δ）是一个余结合余代数，并且对于任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$\Delta(a_1 * a_2) = (\mathbf{r}_A(a_2) \otimes \mathrm{id})(\Delta(a_1)) + (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_A(a_1))(\Delta(a_2)),$$

$$(\mathbf{l}_A(a_1) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_A(a_1))(\Delta(a_2)) = \tau((\mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_A(a_2) - \mathbf{l}_A(a_2) \otimes \mathrm{id})(\Delta(a_1))).$$

下面给出完备 ASI 双代数的概念及相关结果。

定义 4.12 ([26])。 一个**完备 ASI 双代数** 是一个三元组$(A, *, \Delta)$，由一个向量空间 A 及线性映射 $*: A \otimes A \to A$ 和 $\Delta: A \to A \otimes A$ 组成，并满足

(*i*) $(A, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次的结合代数；(*ii*) (A, Δ) 是一个完备余结合余代数；(*iii*) 对任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$\Delta(a_1 * a_2) = (\mathbf{r}_A(a_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\Delta(a_1)) + (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{l}_A(a_1))(\Delta(a_2)), \tag{4.7}$$

$$(\mathbf{l}_A(a_1) \hat{\otimes} \mathrm{id} - \mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_A(a_1))(\Delta(a_2)) = \hat{\tau}((\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_A(a_2) - \mathbf{l}_A(a_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\Delta(a_1))). \tag{4.8}$$

定理 *4.13.* 设 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是一个有限维 *Dendriform D*-双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次的置换代数，并且 $(D \otimes B, *)$ 是由 $(D, \prec, \succ)$ 通过 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot)$ 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次结合代数。定义线性映射 $\Delta: D \otimes B \to (D \otimes B) \otimes (D \otimes B)$，使得

$$\begin{aligned}\Delta(d \otimes b) &= \theta_\succ(d) \bullet \nu_\varpi(b) + \theta_\prec(d) \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(b)) \\ &:= \sum_{[d]} \sum_{i,j,\alpha} (d_{[1]} \otimes b_{1,i,\alpha}) \otimes (d_{[2]} \otimes b_{2,j,\alpha}) + \sum_{(d)} \sum_{j,i,\alpha} (d_{(1)} \otimes b_{2,j,\alpha}) \otimes (d_{(2)} \otimes b_{1,i,\alpha}),\end{aligned}$$

对于任意 $d \in D$ 和 $b \in B$，其中在斯威德勒记号下，$\theta_\prec(d) = \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes d_{(2)}$，$\theta_\succ(d) = \sum_{[d]} d_{[1]} \otimes d_{[2]}$，且 $\nu_\varpi(b) = \sum_{i,j,\alpha} b_{1,i,\alpha} \otimes b_{2,j,\alpha}$。那么 $(D \otimes B, *, \Delta)$ 是一个完备 *ASI* 双代数，称为由 $(B, \cdot, \varpi)$ 对 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 诱导的完备 *ASI* 双代数。

此外，如果 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是例 $\mathbb{Z}$*4.8* 中给出的二次 -分次置换代数，那么（$D \otimes B$，$*$，Δ）是完备 *ASI* 双代数，当且仅当 （D，$\prec$，$\succ$，$\theta_\prec$，$\theta_\succ$） 是一个丛林 D- 双代数。

证明。 由命题 4.6 和引理 4.9，可得 $(D \otimes B, \Delta)$ 是一个完备余结合余代数。因此，我们只需证明等式 (4.7) 和 (4.8) 成立。对于任意 d，$d' \in D$ 和 b，$b' \in B$，有

$$\begin{aligned}&\Delta((d \otimes b) * (d' \otimes b')) - (\mathbf{r}_{D\otimes B}(d' \otimes b') \hat{\otimes} \mathrm{id})(\Delta(d \otimes b)) - (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{l}_{D\otimes B}(d \otimes b))(\Delta(d' \otimes b')) \\ &= \Delta((d \succ d') \otimes (bb') + (d \prec d') \otimes (b'b)) - (\mathbf{r}_{D\otimes B}(d' \otimes b') \hat{\otimes} \mathrm{id})(\theta_\succ(d) \bullet \nu_\omega(b) + \theta_\prec(d) \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(b))) \\ &\quad - (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{l}_{D\otimes B}(d \otimes b))(\theta_\succ(d') \bullet \nu_\varpi(b') + \theta_\prec(d') \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(b'))) \\ &= \theta_\succ(d \succ d') \bullet \nu_\varpi(bb') + \theta_\prec(d \succ d') \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) + \theta_\succ(d \prec d') \bullet \nu_\varpi(b'b) + \theta_\prec(d \prec d') \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(b'b))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{[d]} \sum_{i,j,\alpha} \Big(((d_{[1]} \succ d') \otimes (b_{1,i,\alpha} b')) \otimes (d_{[2]} \otimes b_{2,j,\alpha}) + ((d_{[1]} \prec d') \otimes (b' b_{1,i,\alpha})) \otimes (d_{[2]} \otimes b_{2,j,\alpha}) \Big) \\
&- \sum_{(d)} \sum_{i,j,\alpha} \Big(((d_{(1)} \succ d') \otimes (b_{2,j,\alpha} b')) \otimes (d_{(2)} \otimes b_{1,i,\alpha}) + ((d_{(1)} \prec d') \otimes (b' b_{2,j,\alpha})) \otimes (d_{(2)} \otimes b_{1,i,\alpha}) \Big) \\
&- \sum_{[d']} \sum_{i,j,\alpha} \Big((d'_{[1]} \otimes b'_{1,i,\alpha}) \otimes ((d \succ d'_{[2]}) \otimes (b b'_{2,j,\alpha})) + (d'_{[1]} \otimes b'_{1,i,\alpha}) \otimes ((d \prec d'_{[2]}) \otimes (b'_{2,j,\alpha} b)) \Big) \\
&- \sum_{(d')} \sum_{i,j,\alpha} \Big((d'_{(1)} \otimes b'_{2,j,\alpha}) \otimes ((d \succ d'_{(2)}) \otimes (b b'_{1,i,\alpha})) + (d'_{(1)} \otimes b'_{2,j,\alpha}) \otimes ((d \prec d'_{(2)}) \otimes (b'_{1,i,\alpha} b)) \Big).
\end{aligned}
$$

由于 $(B, \cdot)$ 上的 $\varpi(-,-)$ 是不变的，因此有

$$
\begin{aligned}
\hat{\varpi}(\nu_\varpi(bb'),\ e \otimes f) &= -\varpi(bb',\ ef) = -\varpi(b',\ b(ef)), \\
\hat{\varpi}\Big(\sum_{i,j,\alpha} ((bb'_{1,i,\alpha}) \otimes b'_{2,j,\alpha}),\ e \otimes f \Big) &= -\varpi(b',\ (be)f) = -\varpi(b',\ b(ef)),
\end{aligned}
$$

对于任意b，b'，e，$f \in B$。由于 $\hat{}\varpi(-,-)$ 是左非退化的，我们得到 $\nu_\varpi(bb') = \sum_{i,\ j,\ \alpha} ((bb'_{1,\ i,\ \alpha}) \otimes b'_{2,\ j,\ \alpha})$。类似地，我们还有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,\alpha} ((b_{1,i,\alpha} b') \otimes b_{2,j,\alpha}) &= \sum_{i,j,\alpha} (b'_{2,j,\alpha} \otimes (b'_{1,i,\alpha} b)) = 0, \\
\hat{\tau}(\nu_\varpi(b'b)) = \sum_{i,j,\alpha} ((b' b_{2,j,\alpha}) \otimes b_{1,i,\alpha}) &= \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) - \Phi, \\
\hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) = \sum_{i,j,\alpha} ((b_{2,j,\alpha} b') \otimes b_{1,i,\alpha}) &= \sum_{i,j,\alpha} (b'_{2,j,\alpha} \otimes (b b'_{1,i,\alpha})), \\
\nu_\varpi(b'b) = \sum_{i,j,\alpha} ((b' b_{1,i,\alpha}) \otimes b_{2,j,\alpha}) &= \sum_{i,j,\alpha} (b_{1,i,\alpha} \otimes (b' b_{(2,j,\alpha)})) = \nu_\varpi(bb') - \Phi,
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi \in B \otimes B$，使得 $\hat{}\varpi(\Phi, e \otimes f) = \varpi(b', e(fb))$。因此，

$$
\begin{aligned}
&\Delta((d \otimes b) * (d' \otimes b')) - (\mathbf{r}_{D\otimes B}(d' \otimes b') \hat{\otimes} \mathrm{id})(\Delta(d \otimes b)) - (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{l}_{D\otimes B}(d \otimes b))(\Delta(d' \otimes b')) \\
&= \theta_\succ(dd') \bullet \nu_\varpi(bb') + \theta_\prec(d \succ d') \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) + \theta_\succ(d \prec d') \bullet (\nu_\varpi(bb') - \Phi) \\
&\quad + \theta_\prec(d \prec d') \bullet (\hat{\tau}(\nu_\varpi(bb') - \Phi)) - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\succ(d)) \bullet (\nu_\varpi(bb') - \Phi) \\
&\quad - (\mathbf{r}_\succ(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d)) \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d)) \bullet (\hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) - \Phi) \\
&\quad - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d))(\theta_\succ(d')) \bullet \nu_\varpi(bb') - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\prec(d))(\theta_\succ(d')) \bullet (\nu_\varpi(bb') - \Phi) \\
&\quad - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d))(\theta_\prec(d')) \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) \\
&= \Big(\theta_\succ(d \succ d') + \theta_\succ(d \prec d') - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\succ(d)) \\
&\qquad - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d))(\theta_\succ(d')) - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\prec(d))(\theta_\succ(d')) \Big) \bullet \nu_\varpi(bb') \\
&\quad + \Big(\theta_\prec(d \succ d') + \theta_\prec(d \prec d') - (\mathbf{r}_\succ(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d)) \\
&\qquad - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d)) - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d))(\theta_\prec(d')) \Big) \bullet \hat{\tau}(\nu_\varpi(bb')) \\
&\quad - \Big(\theta_\succ(d \prec d') + \theta_\prec(d \prec d') - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\succ(d)) \\
&\qquad - (\mathbf{r}_\prec(d') \otimes \mathrm{id})(\theta_\prec(d)) - (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\prec(d))(\theta_\succ(d')) \Big) \bullet \Phi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

类似地，我们还有 $(\mathrm{l}_{D\otimes B}(\mathrm{d}\otimes\mathrm{b})\ \hat{}\otimes \mathrm{id} - \mathrm{id}\ \hat{}\otimes \mathrm{r}_{D\otimes B}(\mathrm{d}\otimes\mathrm{b}))(\Delta(\mathrm{d}'\otimes\mathrm{b}')) = \tau((\mathrm{id}\ \hat{}\otimes \mathrm{r}_{D\otimes B}(\mathrm{d}'\otimes\mathrm{b}') - \mathrm{l}_{D\otimes B}(\mathrm{d}'\otimes\mathrm{b}')\ \hat{}\otimes \mathrm{id})(\Delta(\mathrm{d}\otimes\mathrm{b})))$，对于任意 d、$\mathrm{d}' \in D$ 和 b、$\mathrm{b}' \in B$。因此，$(D \otimes B, *, \Delta)$ 是一个完备 ASI 双代数。

反过来，若 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \cdot, \varpi)$ 是例 4.8 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，且 $(D \otimes B, *, \Delta)$ 是完备 ASI 双代数，则根据命题 4.3 和 4.6，$(D, \prec, \succ)$ 是 dendriform 代数，而 $(D, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是 dendriform 余代数。现在我们只需证明 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是 Dendriform D-双代数。由于 $(D \otimes B, *, \Delta)$ 是完备 ASI 双代数，我们

have

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta((d\otimes\partial_1)*(d'\otimes\partial_1)) - (\mathbf{r}_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(d\otimes\partial_1)) - (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_{D\otimes B}(d\otimes\partial_1))(\Delta(d'\otimes\partial_1))\\
&= \Delta((d\succ d')\otimes(x_1\partial_1) + (d\prec d')\otimes(x_1\partial_1)) - (\mathbf{r}_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\theta_\succ(d)\bullet\nu_\omega(\partial_1)\\
&\quad + \theta_\prec(d)\bullet\hat{\tau}(\nu_\omega(\partial_1))) - (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_{D\otimes B}(d\otimes\partial_1))(\theta_\succ(d')\bullet\nu_\omega(\partial_1) + \theta_\prec(d')\bullet\hat{\tau}(\nu_\omega(\partial_1)))\\
&= (\theta_\succ(d\succ d') + \theta_\succ(d\prec d'))\bullet\nu_\varpi(x_1\partial_1) + (\theta_\prec(d\succ d') + \theta_\prec(d\prec d'))\bullet\hat{\tau}(\nu_\varpi(x_1\partial_1))\\
&\quad - \sum_{[d]}\sum_{i_1,i_2}\Big(\big((d_{[1]}\succ d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1) + (d_{[1]}\prec d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1)\big)\otimes(d_{[2]}\otimes(x_1^{-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1))\\
&\qquad - \big((d_{[1]}\succ d')\otimes(x_1^{i_1}x_2^{i_2+1}\partial_1) + (d_{[1]}\prec d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_2)\big)\otimes(d_{[2]}\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1))\Big)\\
&\quad - \sum_{(d)}\sum_{i_1,i_2}\Big(\big((d_{(1)}\succ d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1) + (d_{(1)}\prec d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1)\big)\otimes(d_{(2)}\otimes(x_1^{-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1))\\
&\qquad - \big((d_{(1)}\succ d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1) + (d_{(1)}\prec d')\otimes(x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}\partial_1)\big)\otimes(d_{(2)}\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2))\Big)\\
&\quad - \sum_{[d']}\sum_{i_1,i_2}\Big((d'_{[1]}\otimes(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1))\otimes\big((d\succ d'_{[2]})\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1) + (d\prec d'_{[2]})\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1)\big)\\
&\qquad - (d'_{[1]}\otimes(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2))\otimes\big((d\succ d'_{[2]})\otimes(x_1^{2-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1) + (d\prec d'_{[2]})\otimes(x_1^{2-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1)\big)\Big)\\
&\quad - \sum_{(d')}\sum_{i_1,i_2}\Big((d'_{(1)}\otimes(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1))\otimes\big((d\succ d'_{(2)})\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1) + (d\prec d'_{(2)})\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1)\big)\\
&\qquad - (d'_{(1)}\otimes(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1))\otimes\big((d\succ d'_{(2)})\otimes(x_1^{2-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2) + (d\prec d'_{(2)})\otimes(x_1^{1-i_1}x_2^{1-i_2}\partial_1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

比较上式中 $\partial_2\otimes\partial_1$ 和 $\partial_1\otimes\partial_2$ 的系数，可得公式（4.1）和（4.2）成立。同理，比较方程 $\Delta((d\otimes\partial_1)*(d'\otimes\partial_2)) - (r_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(d\otimes\partial_1)) - (\mathrm{id}\hat{\otimes}l_{D\otimes B}(d\otimes\partial_1))(\Delta(d'\otimes\partial_2)) = 0$ 中 $\partial_1\otimes\partial_1$ 和 $\partial_2\otimes\partial_2$ 的系数，可得公式（4.3）和（4.4）成立。比较方程 $(l_{D\otimes B}(d\otimes\partial_1)\hat{\otimes}\mathrm{id} - \mathrm{id}\hat{\otimes}r_{D\otimes B}(d\otimes\partial_1))(\Delta(d'\otimes\partial_1)) = \hat{\tau}((\mathrm{id}\hat{\otimes}r_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1) - l_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(d\otimes\partial_1)))$ 中 $\partial_1\otimes\partial_2$ 的系数，可得公式（4.5）成立。比较方程 $(l_{D\otimes B}(d\otimes\partial_2)\hat{\otimes}\mathrm{id} - \mathrm{id}\hat{\otimes}r_{D\otimes B}(d\otimes\partial_2))(\Delta(d'\otimes\partial_1)) = \hat{\tau}((\mathrm{id}\hat{\otimes}r_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1) - l_{D\otimes B}(d'\otimes\partial_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta(d\otimes\partial_2)))$ 中 $\partial_2\otimes\partial_2$ 的系数，可得公式（4.6）成立。因此，在这种情况下，$(D,\prec,\succ,\theta_\prec,\theta_\succ)$ 是 Dendriform D-双代数。□

我们利用 dendriform 双代数的仿射化构造了一个无限维 ASI 双代数。现在让我们回到有限维 ASI 双代数。首先，对于定理4.13的一个特殊情形，其中（$B = B_0$，$\cdot$，ω）是一个有限维二次 perm 代数，我们有

推论 *4.14.* 设（D, $\prec$，$\succ$，$\theta_\prec$，$\theta_\succ$）是一个 *dendriform D*-双代数，（B, $\cdot$，ω）是一个二次 *perm* 代数，并且（$D\otimes B$，$*$）是由（D, $\prec$，$\succ$）通过（B, $\cdot$）诱导的结合代数。定义线性映射 $\Delta: D\otimes B\to(D\otimes B)\otimes(D\otimes B)$，其定义为

$$\begin{aligned}
(4.9)\qquad \Delta(d\otimes b) &= \theta_\succ(d)\bullet\nu_\omega(b) + \theta_\prec(d)\bullet\tau(\nu_\omega(b))\\
&:= \sum_{[d]}\sum_{(b)}(d_{[1]}\otimes b_{(1)})\otimes(d_{[2]}\otimes b_{(2)}) + \sum_{(d)}\sum_{(b)}(d_{(1)}\otimes b_{(2)})\otimes(d_{(2)}\otimes b_{(1)}),
\end{aligned}$$

对于任意 $d\in D$ 和 $b\in B$，其中 $\theta_\prec(d) = \sum(d)\, d_{(1)}\otimes d_{(2)}$，$\theta_\succ(d) = \sum_{[}d_{]}\, d_{[1]}\otimes d_{[2]}$，且 $\nu_\omega(b) = \sum(b)\, b_{(1)}\otimes b_{(2)}$采用斯威德勒记号。于是，$(D\otimes B, *, \Delta)$ 是一个 *ASI* 双代数，称为由 $(B, \cdot, \omega)$ 从 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 诱导的 *ASI* 双代数。

4.3. **由三角 dendriform D-双代数得到的三角 ASI 双代数**。回顾一下，若存在元素 $r = \sum_i x_i\otimes y_i\in A\otimes A$ 使得$\Delta = \Delta_r$，则称 ASI 双代数 $(A, *, \Delta)$ 为**余边界**，其中

$$(4.10)\qquad \Delta_r(a) = (\mathrm{id}\otimes\mathbf{l}_A(a) - \mathbf{r}_A(a)\otimes\mathrm{id})(r),$$

对于任意 $a\in A$。该方程

$$\mathbf{A}_r := r_{12}*r_{13} + r_{13}*r_{23} - r_{23}*r_{12} = 0$$

称为（A, $*$）中的结合 Yang-Baxter 方程（或 AYBE），其中 $r_{12}*r_{13} = \sum i,j(x_i*x\ j)\otimes y_i\otimes y\ j$，$r_{23}*r_{13} = \sum i,j\ x_j\otimes x_i\otimes(y_i*y\ j)$，以及 $r_{23}*r_{12} = \sum i,j\ x\ j\otimes(x_i*y\ j)\otimes y_i$。

命题 *4.15*（[3]）。设（$A, *$）是一个结合代数，且 $r \in A \otimes A$。由方程（*4.10*）定义线性映射$\Delta_r: A \to A \otimes A$。若 r 是（$A, *$）中结合杨-巴克斯特方程的斜对称解，则（$A, *, \Delta_r$）是一个 *ASI* 双代数，称为与 r 相关的三角 *ASI* 双代数。

若存在两个元素 $r_\prec$、$r_\succ \in D \otimes D$，使得 $\theta_\prec$ 和 $\theta_\succ$ 由下式给出，则称 Dendriform D-双代数（D, $\prec$, $\succ$, $\theta_\prec$, $\theta_\succ$）为**余边界**

$$\theta_\prec(d) = \theta_{\prec,r}(d) := ((\mathbf{r}_\prec + \mathbf{r}_\succ)(d) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_\succ(d))(r_\prec), \tag{4.11}$$

$$\theta_\succ(d) = \theta_{\succ,r}(d) := (\mathbf{r}_\prec(d) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (\mathbf{l}_\prec + \mathbf{l}_\succ)(d))(r_\succ), \tag{4.12}$$

对任意 $d \in D$。该方程

$$\mathbf{D}_r := r_{12} \prec r_{13} + r_{12} \succ r_{13} - r_{13} \prec r_{23} - r_{23} \succ r_{12} = 0$$

称为（D, $\prec$, $\succ$）中的 Dendriform 杨–巴克斯特方程（或 DYBE），其中 $\mathrm{r}_{12} \prec \mathrm{r}_{13} = \sum \mathrm{i,j}(\mathrm{x}_i \prec \mathrm{x}j) \otimes \mathrm{y}_i \otimes \mathrm{y\,j}$，$\mathrm{r}_{12} \succ \mathrm{r}_{13} = \sum \mathrm{i,\,j}(\mathrm{x}_i \succ \mathrm{x\,j}) \otimes \mathrm{y}_i \otimes \mathrm{y\,j}$，$\mathrm{r}_{13} \prec \mathrm{r}_{23} = \sum \mathrm{i,\,j\,x}_i \otimes \mathrm{x\,j} \otimes (\mathrm{y}_i \prec \mathrm{y\,j})$ 和 $\mathrm{r}_{23} \succ \mathrm{r}_{12} = \sum \mathrm{i,\,j\,x\,j} \otimes (\mathrm{x}_i \succ \mathrm{y}j) \otimes \mathrm{y}_i$，若记 $\mathrm{r} = \sum \mathrm{i\,x}_i \otimes \mathrm{y}_i \in \mathrm{D} \otimes \mathrm{D}$。

命题 *4.16*（[3]）。设 *(D, $\prec$, $\succ$)* 是一个 *dendriform* 代数，且 $r \in D \otimes D$。由公式（*4.11*）和（*4.12*）定义线性映射$\theta_{\prec,r}, \theta_{\succ,r}: D \to D \otimes D$，其中 $r_\prec = r$ 且 $r_\succ = -\tau(r)$。若 r 是 *(D, $\prec$, $\succ$)* 中 *DYBE* 的对称解，则 *(D, $\prec$, $\succ$, $\theta_{\prec,r}, \theta_{\succ,r}$)* 是一个 *Dendriform D*-双代数，称为与 r 相关的三角 *dendriform D*-双代数。

三角 ASI 双代数（分别地，三角 dendriform D-双代数）是与杨-巴克斯特方程的解相关的一类特殊 ASI 双代数（分别地，dendriform D-双代数）。接下来，我们考察 dendriform 代数中 DYBE 的解与诱导结合代数中结合杨-巴克斯特方程的解之间的关系。

命题 4.17. 设$(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数，$(B, \cdot, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，且$(D \otimes B, *)$ 是诱导结合代数。假设 $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in D \otimes D$ 是DYBE 在$(D, \prec, \succ)$中的一个解。若 r 是对称的，则

$$\widehat{r} := \sum_{i,j} (x_i \otimes e_j) \otimes (y_i \otimes f_j) \in (D \otimes B) \otimes (D \otimes B) \tag{4.13}$$

是结合杨-巴克斯特方程 在$(D \otimes B, [-,-])$中的一个斜对称解，其中 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 B 的一组基，且$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 关于 $\omega(-,-)$的对偶基。

证明。 首先，对任意 $1 \le p,q \le n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\widehat{r}_{12} * \widehat{r}_{13} + \widehat{r}_{13} * \widehat{r}_{23} - \widehat{r}_{23} * \widehat{r}_{12} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \Big(((x_i, e_p) * (x_j, e_q)) \otimes (y_i, f_p) \otimes (y_j, f_q) + (x_i, e_p) \otimes (x_j, e_q) \otimes ((y_i, f_p) * (y_j, f_q)) \\
&\qquad - (x_j, e_q) \otimes ((x_i, e_p) * (y_j, f_q)) \otimes (y_i, f_p) \Big) \\
&= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \Big(((x_i \succ x_j) \otimes (e_p e_q)) \otimes (y_i, f_p) \otimes (y_j, f_q) + ((x_i \prec x_j) \otimes (e_q e_p)) \otimes (y_i, f_p) \otimes (y_j, f_q) \\
&\qquad + (x_i, e_p) \otimes (x_j, e_q) \otimes ((y_i \succ y_j) \otimes (f_p f_q)) + (x_i, e_p) \otimes (x_j, e_q) \otimes ((y_i \prec y_j) \otimes (f_q f_p)) \\
&\qquad - (x_j, e_q) \otimes ((x_i \succ y_j) \otimes (e_p f_q)) \otimes (y_i, f_p) - (x_j, e_q) \otimes ((x_i \prec y_j) \otimes (f_q e_p)) \otimes (y_i, f_p) \Big).
\end{aligned}$$

此外，对于给定的s、u、$v \in \{1, 2, \cdots, n\}$，我们有

$$\omega\Big(e_s \otimes e_u \otimes e_v, \sum_{p,q} (e_q e_p) \otimes f_p \otimes f_q\Big) = \omega(e_s, e_v e_u) = \omega\Big(e_s \otimes e_u \otimes e_v, \sum_{p,q} e_q \otimes (e_p f_q) \otimes f_p\Big).$$

由 $\omega(-,-)$ 的非退化性，我们得到 $\sum \mathrm{p,q(e}_q \mathrm{e}_p) \otimes \mathrm{f}_p \otimes \mathrm{f}_q = \sum \mathrm{p,q\,e}_q \otimes (\mathrm{e}_p\,\mathrm{f}_q) \otimes \mathrm{f}_p$。类似地，我们还有 $\sum \mathrm{p,q\,e}_q \otimes \mathrm{e}_p \otimes (\mathrm{f}_p \mathrm{f}_q) = -\sum \mathrm{p,q(e}_p \mathrm{e}_q) \otimes \mathrm{f}_p \otimes \mathrm{f}_q$ 以及 $\sum \mathrm{p,q\,e}_q \otimes (\mathrm{f}_q \mathrm{e}_p) \otimes \mathrm{f}_p = \sum \mathrm{p,q\,e}_q \otimes \mathrm{e}_p \otimes (\mathrm{f}_q \mathrm{f}_p) =$

$\sum_{p,q}(e_{\quad q}e_p)\otimes f_p\otimes f_q-\sum_{p,q}(e_{\quad p}e_q)\otimes f_p\otimes f_q$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\widehat{r}_{12}*\widehat{r}_{13}+\widehat{r}_{13}*\widehat{r}_{23}-\widehat{r}_{23}*\widehat{r}_{12}\\
&=\sum_{i,j}\sum_{p,q}\Big((x_i\succ x_j)\otimes y_i\otimes y_j-x_i\otimes x_j\otimes(y_i\succ y_j)-x_i\otimes x_j\otimes(y_i\prec y_j)\\
&\qquad+x_j\otimes(x_i\prec y_j)\otimes y_i\Big)\bullet((e_pe_q)\otimes f_p\otimes f_q)\\
&\quad+\Big((x_i\prec x_j)\otimes y_i\otimes y_j+x_i\otimes x_j\otimes(y_i\succ y_j)-x_j\otimes(x_i\succ y_j)\otimes y_i\\
&\qquad-x_j\otimes(x_i\prec y_j)\otimes y_i\Big)\bullet((e_qe_p)\otimes f_p\otimes f_q).
\end{aligned}$$

由于r是对称的且$\mathbf{D}_r=0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\Big((x_i\succ x_j)\otimes y_i\otimes y_j-x_i\otimes x_j\otimes(y_i\succ y_j)-x_i\otimes x_j\otimes(y_i\prec y_j)+x_j\otimes(x_i\prec y_j)\otimes y_i\Big)=0,\\
&\sum_{i,j}\Big((x_i\prec x_j)\otimes y_i\otimes y_j+x_i\otimes x_j\otimes(y_i\succ y_j)-x_j\otimes(x_i\succ y_j)\otimes y_i-x_j\otimes(x_i\prec y_j)\otimes y_i\Big)=0.
\end{aligned}$$

因此，我们得到$\widehat{r}_{12}*\widehat{r}_{13}+\widehat{r}_{13}*\widehat{r}_{23}-\widehat{r}_{23}*\widehat{r}_{12}=0$，$\widehat{r}$是$(D\otimes B,[-,-])$中结合杨-巴克斯特方程的解。最后，注意到$\sum e_j\otimes f_j=-\sum f_j\otimes e_j$（见推论 3.7 的证明）。我们得到，$\widehat{r}$在$r$对称时是斜对称的。证明完毕。□

备注 *4.18.* 类似于 [18]，，我们可以在一个 $\mathbb{Z}$-分次的结合代数中定义结合杨-巴克斯特方程。更确切地说，设$(A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i,*)$是一个 $\mathbb{Z}$-分次的结合代数，且$r=\sum_{i,j,\alpha}x_{i,\alpha}\otimes y_{j,\alpha}$。方程$r_{12}*r_{13}+r_{13}*r_{23}-r_{23}*r_{12}=0$称为$(A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i,*)$中的结合杨-巴克斯特方程，其中$r_{12}*r_{13}=\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta}(x_{i,\alpha}*x_{k,\beta})\otimes y_{j,\alpha}\otimes y_{l,\beta}$，$r_{23}*r_{13}=\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta}x_{k,\beta}\otimes x_{i,\alpha}\otimes(y_{j,\alpha}*y_{l,\beta})$以及$r_{23}*r_{12}=\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta}x_{k,\beta}\otimes(x_{i,\alpha}*y_{l,\beta})\otimes y_{j,\alpha}$。可以验证，$(A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i,*)$中的一个斜对称解诱导出$A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$上的完备 *ASI* 双代数结构。在命题 *4.17* 中，若将二次 *perm* 代数$(B,\cdot,\omega)$替换为一个二次 $\mathbb{Z}$-分次 *perm* 代数$(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\cdot,\varpi)$，并定义$\widehat{r}:=\sum_{p\in\Phi}\sum_i(x_i\otimes e_p)\otimes(y_i\otimes f_p)\in(D\otimes B)\hat{\otimes}(D\otimes B)$，其中$\{e_p\}_{p\in\Phi}$是$B$的一个齐次基，$\{f_p\}_{p\in\prod}$是与$\varpi(-,-)$相关联的齐次对偶基，那么可以验证，当$r$是$(D,\prec,\succ)$中 *DYBE* 的对称解时，$\widehat{r}$是 $\mathbb{Z}$-分次结合代数$(D\otimes B,*)$中结合杨-巴克斯特方程的斜对称解。

命题 *4.19.* 设$(D,\prec,\succ,\theta_\prec,\theta_\succ)$是一个 *Dendriform D*-双代数，$(B,\cdot,\omega)$是一个二次 *perm* 代数，$(D\otimes B,*)$是诱导结合代数。若$r\in D\otimes D$是对称的，且$\theta_\prec=\theta_{\prec,r}$和$\theta_\succ=\theta_{\succ,r}$由$r_\prec=r$和$r_\succ=-\tau(r)$根据公式（*4.11*）和（*4.12*）定义，则$(D\otimes B,*,\Delta)=(D\otimes B,*,\Delta_{\widehat{r}})$是 *ASI* 双代数，其中$\Delta$由$\theta_\prec=\theta_{\prec,r}$根据公式（*4.9*）定义，而$\theta_\succ=\theta_{\succ,r}$，$\widehat{r}$由公式（*4.13*）给出。

因此，我们得到，当$(D\otimes B,*,\Delta)$是一个三角 *ASI* 双代数时，$(D,\prec,\succ,\theta_{\prec,r},\theta_{\succ,r})$是一个三角 *dendriform*D-双代数。

证明。令$r=\sum_i x_i\otimes y_i$。对于任意$b\in B$和$d\in D$，有

$$\begin{aligned}
\Delta(d\otimes b)&=\theta_{\succ,r}(d)\bullet\nu_\omega(b)+\theta_{\prec,r}(d)\bullet\tau(\nu_\omega(b))\\
&=\sum_i\sum_{(b)}\Big((x_i\otimes b_{(1)})\otimes((d\prec y_i)\otimes b_{(2)})+(x_i\otimes b_{(1)})\otimes((d\succ y_i)\otimes b_{(2)})\\
&\qquad-((x_i\prec d)\otimes b_{(1)})\otimes(y_i\otimes b_{(2)})-(x_i\otimes b_{(2)})\otimes((d\succ y_i)\otimes b_{(1)})\\
&\qquad+((x_i\prec d)\otimes b_{(2)})\otimes(y_i\otimes b_{(1)})+((x_i\succ d)\otimes b_{(2)})\otimes(y_i\otimes b_{(1)})\Big),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Delta_{\widehat{r}}(d\otimes b)&=(\mathrm{id}\otimes\mathbf{l}_A(d\otimes b)-\mathbf{r}_A(d\otimes b)\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{i,j}(x_i\otimes e_j)\otimes(y_i\otimes f_j)\Big)\\
&=\sum_{i,j}\Big((x_i\otimes e_j)\otimes((d\succ y_i)\otimes(bf_j))+(x_i\otimes e_j)\otimes((d\prec y_i)\otimes(f_jb))\\
&\qquad-((x_i\succ d)\otimes(e_jb))\otimes(y_i\otimes f_j)-((x_i\prec d)\otimes(be_j))\otimes(y_i\otimes f_j)\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\frown r = \sum i,j(x_i \otimes e\ j)\ \otimes(y_i \otimes f\ j)$，$\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$是 B 的一组基，而 $\{f_1, f2, \cdots, f_n\}$是 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$关于 $\omega(-,-)$ 的对偶基。与定理 3.8 的证明类似，利用 $\omega(-,-)$ 的非退化性，可得 $\sum(b)\ b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum j\ e\ j\ \otimes(\ f\ jb)$, $\sum(b)\ b_{(2)} \otimes b_{(1)} = -\sum j(e\ jb) \otimes f_j$以及 $\sum j(be\ j)\ \otimes f_j = \sum j\ e\ j\ \otimes(b\ f\ j) = \sum(b)\ (b_{(1)} \otimes b_{(2)} - b_{(2)} \otimes b_{(1)})$。因此，$\Delta(d \otimes b) = \Delta_{\frown r}(d \otimes b)$，从而 $(D \otimes B, *, \Delta) = (D \otimes B, *, \Delta_{\frown r})$ 是 ASI 双代数。最后，根据命题 4.17，可得：若 $(D, \prec, \succ, \theta_{\prec,r}, \theta_{\succ,r})$ 是三角 dendriform D-双代数，则 $(D \otimes B, *, \Delta)$ 是三角 ASI 双代数。□

设 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 dendriform 代数，$(V, l_\prec, r_\prec, l_\succ, r_\succ)$ 是其上的一个双模。若对任意 $d_1, d_2 \in D$，线性映射$P : V \to D$称为与 $(V, l_\prec, r_\prec, l_\succ, r_\succ)$ **相关联的** $(D, \prec, \succ)$ 的 ***O*-算子**，则

$$P(d_1) \prec P(d_2) = P(l_\prec(P(d_1))(d_2) + r_\prec(P(d_2))(d_1)),$$
$$P(d_1) \succ P(d_2) = P(l_\succ(P(d_1))(d_2) + r_\succ(P(d_2))(d_1)).$$

命题 *4.20* ([3])。设 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数，$r \in g \otimes g$ 是对称的。那么，r 是 $(D, \prec, \succ)$ 中 *DYBE* 的解，当且仅当 $r^\sharp$ 是与余正则双模 $(D^*, r^*_\succ + r^*_\prec, -l^*_\prec, -r^*_\succ, l^*_\prec + l^*_\succ)$ 相关联的 $(D, \prec, \succ)$ 的 *O*-算子。

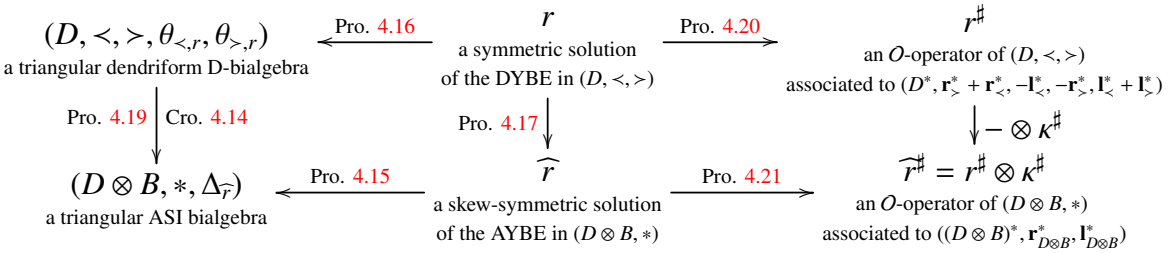
结合代数（$A, *$）关于（V, l_A, r_A）的 ***O*-算子** 是一个线性映射 $P : V \to A$，满足

$$P(a_1) * P(a_2) = P(l_A(P(a_1))(a_2) + r_A(P(a_2))(a_1)),$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$,

命题 4.21 ([3])**.** 设 $(A, *)$ 是一个结合代数，$r \in A \otimes A$ 是斜对称的。那么，r 是结合代数结合杨-巴克斯特方程 的解，当且仅当 $r^\sharp$ 是与余正则双模 $(A^*, \mathbf{r}^*_A, \mathbf{l}^*_A)$相关联的 $(A, *)$ 的 *O*-算子。

类似于定理 3.8的证明，可以验证$\frown r^\sharp : (D \otimes B)^* \to D \otimes B$ 等于 $r^\sharp \otimes \kappa^\sharp$。因此，我们还有如下交换图：



例 *4.22.* 考虑二维 *dendriform* 代数 $(D = \mathbb{k}\{e_1, e_2\}, \prec, \succ)$，其非零乘积为 $e_1 \succ e_1 = e_1$ 和 $e_2 \prec e_1 = e_2$。可以验证，$(D, \prec, \succ)$ 中 *DYBE* 的对称解为 $\alpha e_1 \otimes e_1$ 或 $\beta(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \gamma e_2 \otimes e2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$。令 $r = e_1 \otimes e_1$。则我们得到与 r 相关联的三角 *dendriform* D-双代数 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$，其中 $\theta_\succ(e_1) = e_1 \otimes e1$, $\theta_\succ(e_2) = e_1 \otimes e_2$，其余均为零。令 $(B = \mathbb{k}\{x_1, x_2\}, \cdot, \omega)$ 为例 *3.12* 中给出的二次 *perm* 代数。根据推论 *4.14*，我们得到一个 *ASI* 双代数 $(D \otimes B, *, \Delta)$，其非零乘积和余乘为

$$y_2 y_1 = y_1, \quad y_2 y_2 = y_2, \quad y_3 y_2 = y_3, \quad y_4 y_2 = y_4,$$
$$\Delta(y_1) = -y_1 \otimes y_1, \quad \Delta(y_2) = -y_1 \otimes y_2, \quad \Delta(y_3) = -y_1 \otimes y_3, \quad \Delta(y_4) = -y_1 \otimes y_4,$$

$y_1 := e_1 \otimes x_1$, $y_2 := e_1 \otimes x_2$, $y_3 := e_2 \otimes x_1$ 和 $y_4 := e_2 \otimes x_2$。另一方面，由命题 *4.17* 可知，我们得到结合代数 $(D \otimes B, *)$ 中经典杨-巴克斯特方程的一个反对称解 $\frown r = y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1$。可以验证，与$\frown r$相关联的三角 *ASI* 双代数正是上文给出的 *ASI* 双代数 $(D \otimes B, *, \Delta)$。此外，对于 *O*-算子 $r^\sharp$ 和$\frown r^\sharp$，与例 *3.12* 类似，我们也有$\frown r^\sharp = r^\sharp \otimes \kappa^\sharp$。

5. 通过 dendriform D-双代数构造三角李双代数

本节中，我们证明命题 2.10 中的交换图在双代数层面上是正确的。此外，通过考察邓福德代数、前李代数、结合代数和李代数中的一些杨-巴克斯特方程的特殊解，证明该交换图在三角双代数层面上同样正确。

给定一个结合代数，我们可以通过交换子得到一个李代数。考虑对偶情形，对于一个余结合余代数 (A, Δ)，我们也可以在 A 上定义李余代数结构，方法是设定余乘法 $\delta = \Delta - \tau\Delta : A \to A \otimes A$。类似地，对于任意 dendriform 余代数 $(D, \theta_\prec, \theta_\succ)$，都有一个前李余代数 (D, ϑ)，其中 $\vartheta = \theta_\succ - \tau\theta_\prec$。此外，对于 ASI 双代数和 dendriform D-双代数，我们有如下命题。

命题 5.1([3, 推论 5.3.4]). 沿用上述记号，我们有

(i) 如果 $(A, *, \Delta)$ 是 *ASI* 双代数，那么 $(A, [-,-], \delta)$ 是李双代数，称为由 $(A, *, \Delta)$ 诱导的李双代数，其中 $(A, [-,-])$ 是由 $(A, *)$ 诱导的李代数；*(ii)* 如果 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是 *Dendriform D*-双代数，那么 $(D, \diamond, \delta)$ 是前李双代数，称为由 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 诱导的前李双代数，其中 $(D, \diamond)$ 是由 $(D, \prec, \succ)$ 诱导的前李代数。

注 5.2。 事实上，根据方程 $\delta = \Delta - \tau\Delta$，完备 *ASI* 双代数同样诱导出一个完备李双代数。

因此，对于 dendriform D-双代数、前李双代数、ASI 双代数和李双代数，我们有以下定理。

定理 5.3。 设 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$ 是一个 *dendriform* D-双代数，且 $(B, \cdot, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数。则有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\underset{\text{a dendriform bialgebra}}{(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)} & \xrightarrow{-\otimes(B,\circ,\omega)} & \underset{\text{an associative bialgebra}}{(D\otimes B, *, \Delta)} \\
{\scriptstyle d_1 \diamond d_2 = d_1 \succ d_2 - d_2 \prec d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1} \\
\underset{\text{a pre-Lie bialgebra}}{(D, \diamond, \vartheta)} & \xrightarrow{-\otimes(B,\circ,\omega)} & \underset{\text{a Lie bialgebra}}{(D\otimes B, [-,-], \delta)}
\end{array}$$

证明。 一方面，根据命题 5.1 和定理 3.2，我们可以将一个李双代数 $(D \otimes B, [-,-]_1, \delta_1)$ 构造成一个 dendriform D-双代数 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$：

$$\underset{\text{a dendriform bialgebra}}{(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)} \xrightarrow{\text{Pro. 5.1}} \underset{\text{a pre-Lie bialgebra}}{(D, \diamond, \vartheta)} \xrightarrow{\text{Thm. 3.2}} \underset{\text{a Lie bialgebra}}{(D\otimes B, [-,-]_1, \delta_1)}.$$

另一方面，根据推论 4.14 和命题 5.1，我们可以将一个李双代数 $(D\otimes B, [-,-]_2, \delta_2)$ 构造成一个 dendriform D-双代数 $(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)$：

$$\underset{\text{a dendriform bialgebra}}{(D, \prec, \succ, \theta_\prec, \theta_\succ)} \xrightarrow{\text{Cor. 4.14}} \underset{\text{an ASI bialgebra}}{(D\otimes B, *, \Delta)} \xrightarrow{\text{Pro. 5.1}} \underset{\text{a Lie bialgebra}}{(D\otimes B, [-,-]_2, \delta_2)}.$$

在命题 2.10中，我们已得到 $[-,-]_1 = [-,-]_2$。现在需要证明 $\delta_1 = \delta_2$。任取 $b \in B$和$d \in D$,

$$\begin{aligned}
\delta_1(d\otimes b) &= (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id} - \tau)((\theta_\succ - \tau\theta_\prec)(d) \bullet \nu_\omega(b)) \\
&= \sum_{[d]}\sum_{(b)} (d_{[1]}\otimes b_{(1)})\otimes(d_{[2]}\otimes b_{(2)}) - \sum_{(d)}\sum_{(b)} (d_{(2)}\otimes b_{(1)})\otimes(d_{(1)}\otimes b_{(2)}) \\
&\quad - \sum_{[d]}\sum_{(b)} (d_{[2]}\otimes b_{(2)})\otimes(d_{[1]}\otimes b_{(1)}) + \sum_{(d)}\sum_{(b)} (d_{(1)}\otimes b_{(2)})\otimes(d_{(2)}\otimes b_{(1)}) \\
&= \Delta(d\otimes b) - \tau(\Delta(d\otimes b)) \\
&= \delta_2(d\otimes b),
\end{aligned}$$

其中 $\theta_{\prec}(\mathrm{d}) = \sum(\mathrm{d})\ \mathrm{d}_{(1)} \otimes \mathrm{d}^{(2)}$, $\theta_{\succ}(\mathrm{d}) = \sum_{[\mathrm{d}]}\ \mathrm{d}_{[1]} \otimes \mathrm{d}^{[2]}$ 且 $\nu_{\omega}(\mathrm{b}) = \sum(\mathrm{b})\ \mathrm{b}_{(1)} \otimes \mathrm{b}^{(2)}$ 采用斯威德勒记号。因此，$(\mathrm{D} \otimes \mathrm{B},\ [-,-]_1, \delta_1) = (\mathrm{D} \otimes \mathrm{B}, [-,-]_2, \delta_2)$ 是李双代数，故该图表是交换的。□

例 *5.4.* 设 $(D, \prec, \succ, \theta_{\prec}, \theta_{\succ})$ 为例 *4.22* 中给出的三角 *dendriform D*-双代数，$(B, \cdot, \omega)$ 为例 *3.12* 中给出的二次 *perm* 代数。由推论 *4.14*，我们由 $(D, \prec, \succ, \theta_{\prec}, \theta_{\succ})$ 和 $(B, \cdot, \omega)$ 得到一个 *ASI* 双代数 $(D \otimes B, *, \Delta)$，它在例 *4.22* 中给出。由命题 *5.1*，我们得到一个李双代数 $(D \otimes B, [-,-], \delta)$，其中括号 $[-,-]$ 和余乘法 δ 正是例 *3.12* 中给出的括号和余乘法。

另一方面，注意，由 $(D, \prec, \succ, \theta_{\prec}, \theta_{\succ})$ 诱导的前李双代数 $(D, \diamond, \vartheta)$ 正是例 *3.12* 中的前李双代数 $(A, \diamond, \vartheta)$；而由 $(D, \diamond, \vartheta)$ 和 $(B, \cdot, \omega)$ 得到的李双代数 $(D \otimes B, [-,-], \delta)$，正是例 *3.12* 中的李双代数 $(A \otimes B, [-,-], \delta)$。

接下来，我们考虑一些特殊的双代数，例如拟三角双代数、三角双代数和可分解双代数。设 $(A, *)$ 是一个结合代数。回顾一下，若一个元素 $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ 满足以下条件，则称其为 **$(\mathbf{l}_A, \mathbf{r}_A)$-不变**： 对任意 $a \in A$,

$$(\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_A(a) - \mathbf{r}_A(a) \otimes \mathrm{id})(r) = 0.$$

命题*5.5*（[31]）。设 $(A, *)$ 是一个结合代数，$r \in A \otimes A$，且 $\Delta_r : A \to A \otimes A$ 由方程（*4.10*）定义。若 r 是 $(A, *)$ 中结合杨-巴克斯特方程的解，且 $r + \tau(r)$ 是 (l_A, r_A)-不变的，则 $(A, *, \Delta_r)$ 是一个 *ASI* 双代数，称为与 r 相关联的拟三角 *ASI* 双代数。

定义*5.6*（[31]）。设（A，$*$）是一个结合代数，$r \in A \otimes A$，且（A，$*$，Δ_r）是与 r 相关的拟三角 *ASI* 双代数。若 $\mathcal{I} = r^{\sharp} + \tau(r)^{\sharp} : A^* \to A$ 是向量空间同构，则称（A，$*$，Δ_r）为可因子化*ASI*双代数。

这些ASI双代数与结合杨-巴克斯特方程的解密切相关。下面，我们将考察结合杨-巴克斯特方程的解与诱导李代数中经典杨-巴克斯特方程的解之间的关系，从而揭示这些特殊ASI双代数与诱导李双代数之间的联系。

命题*5.7*。设（A，$*$）是一个结合代数，且（A，$[-,-]$）是由（A，$*$）诱导的李代数。假设 $r = \sum i\ x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ 是（A，$*$）中的结合杨-巴克斯特方程的解。若 $r + \tau(r)$ 是（l_A，r_A）-不变的，则 r 是（A，$[-,-]$）中的经典杨-巴克斯特方程的解，并且 $r + \tau(r)$ 是 ad_A-不变的。

特别地，结合杨-巴克斯特方程 在$(A, *)$ 中的每个斜对称解，也是经典杨-巴克斯特方程 在$(A, [-,-])$ 中的斜对称解。

证明。首先，注意到 $\mathrm{C}_r := [\mathrm{r}_{12}, \mathrm{r}_{13}] + [\mathrm{r}_{13}, \mathrm{r}_{23}] + [\mathrm{r}_{12}, \mathrm{r}_{23}] = \mathrm{r}_{12} * \mathrm{r}_{13} - \mathrm{r}_{13} * \mathrm{r}_{12} + \mathrm{r}_{13} * \mathrm{r}_{23} - \mathrm{r}_{23} * \mathrm{r}_{13} + \mathrm{r}_{12} * \mathrm{r}_{23} - \mathrm{r}_{23} * \mathrm{r}_{12}$。若 $\mathrm{r} + \tau(\mathrm{r})$ 是 (l, r)-不变的，即对任意 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$，有 $\sum \mathrm{i}\ \mathrm{x}_i \otimes (\mathrm{a} * \mathrm{y}_i) + \mathrm{y}_i \otimes (\mathrm{a} * \mathrm{x}_i) = \sum \mathrm{i}(\mathrm{x}_i * \mathrm{a}) \otimes \mathrm{y}_i + (\mathrm{y}_i * \mathrm{a}) \otimes \mathrm{x}_i$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_r &= \mathbf{A}_r - \sum_i \Big((x_i * x_j) \otimes y_j \otimes y_i + x_i \otimes x_j \otimes (y_j * y_i) - x_j \otimes (y_j * x_i) \otimes y_i \Big) \\
&= \mathbf{A}_r - \sum_i \Big((x_i * x_j) \otimes y_j \otimes y_i + x_i \otimes (y_i * y_j) \otimes x_j - x_i \otimes y_j \otimes (x_j * y_i) \Big) \\
&= \mathbf{A}_r - (\mathrm{id} \otimes \tau)(\mathbf{A}_r).
\end{aligned}$$

也就是说，若r是A与$*$中的结合杨-巴克斯特方程的解，且$r + \tau(r)$是$(\mathbf{l}_A, \mathbf{r}_A)$-不变的，则$r$是$A$与$[-,-]$中的经典杨-巴克斯特方程的解。此外，注意到对任意 $a \in A$,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_A(a) + \mathrm{ad}_A(a) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) \\
&= \sum_i \Big((a * x_i) \otimes y_i - (x_i * a) \otimes y_i + x_i \otimes (a * y_i) - x_i \otimes (y_i * a) \\
&\qquad + (a * y_i) \otimes x_i - (y_i * a) \otimes x_i + y_i \otimes (a * x_i) - y_i \otimes (x_i * a) \Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因为$r + \tau(r)$是$(\mathbf{l}_A, \mathbf{r}_A)$-不变的。也就是说，$r + \tau(r)$是$\mathrm{ad}_A$-不变的。

特别地，如果r是$(A,*)$中的结合杨-巴克斯特方程的斜对称解，那么$r+\tau(r)=0$是$(\mathbf{l}_A,\mathbf{r}_A)$-不变的，因此$r$是$(A,[-,-])$中的经典杨-巴克斯特方程的斜对称解。□

命题*5.8.* 设 $(A,*)$ 为结合代数，且 $r\in A\otimes A$。假设 $(A,*,\Delta_r)$ 是一个 *ASI* 双代数，而 $(A,[-,-],\delta)$ 是由 $(A,*,\Delta_r)$ 诱导的李双代数，其中 Δ_r 由方程（*4.10*）给出。若 $r+\tau(r)$ 是 (l_A,r_A)- 不变的，则 $(A,[-,-],\delta)=(A,[-,-],\delta_r)$ 作为李双代数同构，其中 δ_r由方程（*3.2*）定义。因此，我们有

(i) $(A,[-,-],\delta)$ 是拟三角的，当且仅当$(A,*,\Delta)$ 是拟三角的；(ii) $(A,[-,-],\delta)$ 是三角的，当$(A,*,\Delta)$ 是三角的；(iii) $(A,[-,-],\delta)$ 是可分解的，当$(A,*,\Delta)$是可分解的。

证明。 设$r=\sum_i x_i\otimes y_i$。若$r+\tau(r)$是$(\mathbf{l}_A,\mathbf{r}_A)$-不变的，即对任意$a\in A$,

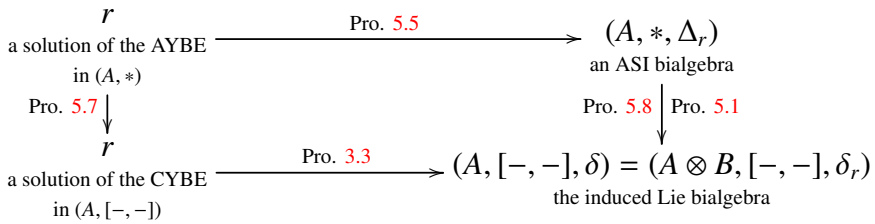
$$\sum_i\Big((a*x_i)\otimes y_i-x_i\otimes(y_i*a)\Big)=\sum_i\Big(y_i\otimes(x_i*a)-(a*y_i)\otimes x_i\Big).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\delta(a)&=\Delta_r(a)-\tau(\Delta_r(a))\\&=\sum_i\Big(x_i\otimes(a*y_i)-x_i\otimes(y_i*a)+(a*x_i)\otimes y_i-(x_i*a)\otimes y_i\Big)\\&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_A(a)+\mathrm{ad}_A(a)\otimes\mathrm{id})(r)\\&=\delta_r(a),\end{aligned}$$

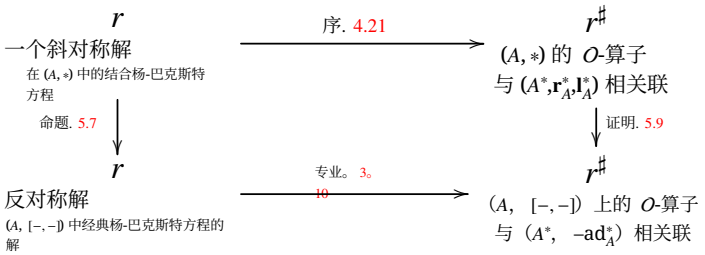
对任意 $a\in A$。因此，$(A,[-,-],\delta)=(A,[-,-],\delta_r)$是李双代数。最后，由命题 5.7，我们得到$(i)$和$(ii)$。注意，结合代数$(\mathcal{I}\mathrm{A},*)$对应的映射与李代数$(\mathcal{I}\mathrm{A},[-,-])$对应的映射相同。因此，$(iii)$成立。□

设$(A,*)$是一个结合代数，且$\mathrm{r}\in A\otimes A$。若r是$(A,*)$中的结合杨-巴克斯特方程的解，并满足$\mathrm{r}+\tau(r)$是$(\mathbf{l}_A,\mathrm{ad}_A)$-不变的，则命题 5.8 也给出以下交换图：



命题*5.9.* 设 $(A,*)$ 是一个结合代数，且 $(A,[-,-])$ 是由 $(A,*)$ 诱导的李代数。若 $P:A\to A$ 是 $(A,*)$ 的一个 O-算子，且与 (A^*,r_A^*,l_A^*) 相关联，则 P 也是 $(A,[-,-])$ 的一个 O-算子，且与 $(A^*,-ad^*A)$ 相关联。

特别地，考虑 $(A,*)$ 中结合杨-巴克斯特方程的斜对称解，可得以下交换图：



接下来，我们考察 dendriform 代数中 DYBE 的解与诱导 Pre-Lie 代数中 PLYBE 的解之间的关系。

命题 5.10. 设$(D, \prec, \succ)$是一个 *dendriform* 代数，$(D, \diamond)$是由$(D, \prec, \succ)$诱导的前李代数。假设$r = \sum_i x_i \otimes y_i \in D \otimes D$是DYBE在$(D, \prec, \succ)$中的一个对称解。那么，$r$也是PLYBE在$(D, \diamond)$中的一个对称解。

证明。 首先，注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_r &= r_{12} \prec r_{13} + r_{12} \succ r_{13} - r_{13} \prec r_{23} - r_{23} \succ r_{12} \\ &= \sum_{i,j} \Big((x_i \prec x_j) \otimes y_i \otimes y_j + (x_i \succ x_j) \otimes y_i \otimes y_j - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \prec y_j) - x_j \otimes (x_i \succ y_j) \otimes y_i \Big).\end{aligned}$$

由于r是对称的，即$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i y_i \otimes x_i$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{PL}_r &= r_{13} \diamond r_{12} + r_{23} \diamond r_{12} + r_{21} \diamond r_{13} + r_{23} \diamond r_{13} - r_{23} \diamond r_{21} - r_{12} \diamond r_{23} - r_{13} \diamond r_{21} - r_{13} \diamond r_{23} \\ &= \sum_{i,j} \Big((x_i \succ x_j) \otimes y_j \otimes y_i - (x_j \prec x_i) \otimes y_j \otimes y_i + x_j \otimes (x_i \succ y_j) \otimes y_i - x_j \otimes (y_j \prec x_i) \otimes y_i \\ &\quad + (y_i \succ x_j) \otimes x_i \otimes y_j - (x_j \prec y_i) \otimes x_i \otimes y_j + x_j \otimes x_i \otimes (y_i \succ y_j) - x_j \otimes x_i \otimes (y_j \prec y_i) \\ &\quad - y_j \otimes (x_i \succ x_j) \otimes y_i + y_j \otimes (x_j \prec x_i) \otimes y_i - x_i \otimes (y_i \succ x_j) \otimes y_j + x_i \otimes (x_j \prec y_i) \otimes y_j \\ &\quad - (x_i \succ y_j) \otimes x_j \otimes y_i + (y_j \prec x_i) \otimes x_j \otimes y_i - x_i \otimes x_j \otimes (y_i \succ y_j) + x_i \otimes x_j \otimes (y_j \prec y_i) \Big) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \tau)((\tau \otimes \mathrm{id})((\mathrm{id} \otimes \tau)(\mathbf{D}_r))) - (\tau \otimes \mathrm{id})((\mathrm{id} \otimes \tau)(\mathbf{D}_r)).\end{aligned}$$

因此，若r是（D，$\prec$，$\succ$）中的 DYBE 对称解，则r也是（D，$\diamond$）中的 PLYBE 对称解。□

命题 *5.11.* 设（D，$\prec$，$\succ$）是一个 *dendriform* 代数，且$r \in D \otimes D$是对称的。假设（D，$\prec$，$\succ$，$\theta_{\prec,r}$，$\theta_{\succ,r}$）是与r相关联的三角 *dendriform D*-双代数，并且（D，$\diamond$，ϑ）是由（D，$\prec$，$\succ$，$\theta_{\prec,r}$，$\theta_{\succ,r}$）诱导的前李双代数。那么，作为前李双代数，我们有（D，$\diamond$，ϑ）=（D，$\diamond$，ϑ_r），其中ϑ_r由方程 *(3.3)*定义。

因此，若$(D, \prec, \succ, \theta_{\prec,r}, \theta_{\succ,r})$是三角 *dendriform* D-双代数，则$(D, \diamond, \vartheta)$是三角前李双代数。

证明。 设$r = \sum_i x_i \otimes y_i$。由于$r$是对称的，对于任意$d \in D$，我们有

$$\begin{aligned}\vartheta_r(d) &= (\mathbf{l}_A(d) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes (\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(d))(r) \\ &= \sum_i \Big((d \succ x_i) \otimes y_i - (x_i \prec d) \otimes y_i + x_i \otimes (d \succ y_i) \\ &\quad - x_i \otimes (y_i \prec d) - x_i \otimes (y_i \succ d) + x_i \otimes (d \prec y_i) \Big) \\ &= \sum_i \Big(y_i \otimes (d \prec x_i) + y_i \otimes (d \succ x_i) - (y_i \prec d) \otimes x_i \\ &\quad + (d \succ y_i) \otimes x_i - y_i \otimes (x_i \prec d) - y_i \otimes (x_i \succ d) \Big) \\ &= \theta_{\succ,r}(d) - \tau(\theta_{\prec,r}(d)) \\ &= \vartheta(d).\end{aligned}$$

也就是说，$(D, \diamond, \vartheta) = (D, \diamond, \vartheta_r)$作为前李双代数同构。因此，若$(D, \prec, \succ, \theta_{\prec,r}, \theta_{\succ,r})$是一个三角 dendriform D-双代数，即 r 是$(D, \prec, \succ)$中 DYBE 的对称解，根据命题 3.4 和 5.10，我们得到$(D, \diamond, \vartheta) = (D, \diamond, \vartheta_r)$是一个三角前李双代数。□

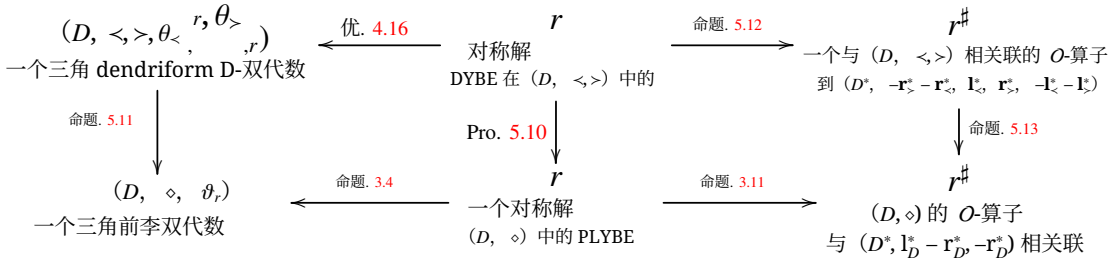
设$(D, \prec, \succ)$是一个 dendriform 代数。$(D, \prec, \succ)$中 DYBE 的对称解与$(D, \prec, \succ)$的 O-算子之间存在密切关系。

命题 *5.12 ([3])*。设 *(D, ≺, ≻)* 是一个 *dendriform* 代数，且 $r \in A \otimes A$ 是对称的。那么，r 是 *(D, ≺, ≻)* 中 *DYBE* 的解，当且仅当 $r^\sharp$ 是 *(D, ≺, ≻)* 的一个 *O*-算子，该算子对应于余正则双模 $(D^*, r^*_{\succ} + r^*_{\prec}, -l^*_{\prec}, -r^*_{\succ}, l^*_{\prec} + l^*_{\succ})$。

此外，经过直接计算，我们得到以下命题。

命题 *5.13.* 设 $(D, \prec, \succ)$ 是一个 *dendriform* 代数，$(D, \diamond)$ 是由 $(D, \prec, \succ)$ 诱导的 诱导 *Pre-Lie* 代数。若 $P : D^* \to D$ 是 $(D, \prec, \succ)$ 的一个 O-算子，且与 $(D^*, r^*_{\succ} + r^*_{\prec}, -l^*_{\prec}, -r^*_{\succ}, l^*_{\prec} + l^*_{\succ})$ 相关联，则 P 也是 $(D, \diamond)$ 的一个 O-算子，且与 $(D^*, r^*_D - l^*_D, r^*_D)$ 相关联。

因此，对于 dendriform 代数（$D, \prec, \succ$）中的 DYBE 对称解，我们有如下交换图：



因此，我们得到了引言中的三维交换图。

例 5.14. 设 $(D, \prec, \succ)$ 为例 *4.22* 中给出的二维 *dendriform* 代数，且 $r = e_1 \otimes e_1$。则 r 是 DYBE 在 $(D, \prec, \succ)$中的对称解。由例 *4.22*，可知三维图的后侧可交换。由例 *3.12*，可知三维图的前侧可交换。由例 *5.4*，可知三维图的顶侧可交换。此外，根据例 *3.12* 和 *4.22* 的计算结果，可以直接验证三维图的左侧、右侧和底侧也都可交换。

致谢。 本研究得到国家自然科学基金（编号：11771122）的资助。

利益声明。 作者没有需要披露的利益冲突 e.

数据可用性。 由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] M. Aguiar，Per-Poisson 代数，《数学物理快报》**54** (2000), 263–277。[2] C. Bai，左对称双代数与经典杨-巴克斯特方程的一种类似物，《当代数学通讯》**10**(2008), 221–260。[3] C. Bai，Frobenius 代数的双构造、Connes 余循环及其对偶性，《非交换几何杂志》**4**(2010), 475–530。[4] C. Bai, G. Liu, Y. Sheng, R. Tang，拟三角可分解 Leibniz 双代数与相对 Rota-Baxter 运算子，《数学论坛》**37**(2025), 1083–1101。[5] C. Bai, L. Guo, X. Ni，非阿贝尔广义 Lax 对、经典杨-巴克斯特方程与 post-Lie 代数，《数学物理通讯》**297**(2010), 553–596。[6] A. Balinsky, S. Novikov，流体动力学型泊松括号、弗罗贝尼乌斯代数与李代数，《苏联数学文献》**32** (1985), 228–231。[7] R.J. Baxter，八顶点格点模型的配分函数，《物理年鉴》**70** (1972), 193–228。[8] A.A. Belavin, V. G. Drinfeld，单李代数的经典杨-巴克斯特方程的解，《泛函分析及其应用》**16**(1982), 1–29。[9] K. Benali, T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk，mock-Lie 代数的双代数、杨-巴克斯特方程与 Manin 三元组，《塔尔图大学数学学报与评论》**27** (2023), 211–233。[10] V. Chari, A. Pressley，《量子群导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[11] K. Cieliebak, K. Fukaya, J. Latschev，与带边界曲面相关的同调代数，《量子拓扑》**11**(2020), 691–837。[12]Z. Cui, B. Hou，拟三角 Novikov 双代数及其诱导的拟三角李双代数，arXiv: 2505.19579[13] V.G. Drinfeld，李群的哈密顿结构、李双代数及经典杨-巴克斯特方程的几何意义，《苏联数学文献》**27** (1983), 68–71。

[14] V. Drinfeld，量子群，载于：国际数学家大会论文集，第1卷，第798–820页，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛），1987。[15] P. Etingof, O. Schiffmann，量子群讲义，International Press Inc.，剑桥，1998。[16] V. Ginzburg, M. Kapranov，运算子的 Koszul 对偶性，《杜克数学杂志》6 (1994), 203–272。[17] W. Goldman，李群上的不变函数与曲面群表示的哈密顿流，《数学发明》85 (1986), 263–302。[18] Y. Hong, C. Bai, L. Guo，通过 Novikov 双代数的仿射化与 Koszul 对偶性构造无限维李双代数，《数学物理通讯》401 (2023), 2011–2049。[19] Y. Hong, C. Bai, L. Guo，通过微分反对称无穷小双代数构造 Novikov 双代数的变形族，arXiv: 2402.16155。[20] Y. Hong, C. Bai, L. Guo，Gel'fand-Dorfman 代数的双代数理论及其在李共形双代数中的应用，arXiv: 2401.13608。[21] B. Hou，perm 代数与 perm 双代数的扩张结构，《代数杂志》649 (2024), 392–432。[22] S.A. Joni, G.C. Rota，组合学中的余代数与双代数，《应用数学研究》61 (1979), 93–139。[23] B.A. Kupershmidt，经典 r 矩阵的本质，《非线性数学物理杂志》6 (1999), 448–488。[24] H. Lang, Y. Sheng，可分解李双代数、二次Rota-Baxter李代数与Rota-Baxter李双代数，《数学物理通讯》397 (2023), 763–791。[25] Y. Lin, X. Liu, C. Bai，微分反对称无穷小双代数、相容导子与泊松双代数，《对称性、可积性与几何方法及其应用》19 (2023), 018, 47页。[26] Y. Lin, P. Zhou, C. Bai，通过 perm 双代数与前李双代数的仿射化构造无限维李双代数，《代数杂志》663 (2025), 210–258。[27] J.L. Loday, A. Frabetti, F. Chapoton, F. Goichot，二代数及相关运算子，《数学讲义》1763，施普林格出版社，柏林，2001。[28] I. S. Rakhimov, U. Bekbaev，任意基域上的二维树状代数结构，《马来西亚数学科学杂志》19 (2025), 891–920。[29] N. Reshetikhin, M.A. Semenov-Tian-Shansky，量子R矩阵与因子分解问题，《几何物理杂志》5 (1988), 533–550。[30] M.A. Semenov-Tian-Shansky，什么是经典 r 矩阵？《泛函分析及其应用》17 (1983), 259–272。[31] Y. Sheng, Y. Wang，拟三角与可分解反对称无穷小双代数，《代数杂志》628(2023), 415–433。[32] A. Stolin，经典杨-巴克斯特方程的有理解与拟Frobenius李代数，《纯粹与应用代数杂志》137 (1999), 285–293。[33] B. Vallette，PROP 的 Koszul 对偶性，《美国数学会汇刊》359 (2007), 4865–4943。[34] Y. Wang, C. Bai, J. Liu, Y, Sheng，拟三角前李双代数、可因子化前李双代数与 Rota-Baxter 前李代数，《几何物理杂志》199 (2024), 105146, 22页。[35] C.N. Yang，一维排斥性 δ 函数相互作用多体问题的一些精确结果，《物理评论快报》19 (1967), 1312–1314。[36] V.N. Zhelyabin，Jordan双代数及其与李双代数的关系，《代数与逻辑》36 (1997), 1–15。

河南大学数学与统计学院，河南开封 475004，中国电子邮箱地址</style：
houbo@henu.edu.cn, bohou1981@163.com