arXiv:2601.17479v1 [math.AG] 24 Jan 2026

具有有限同伦秩和的光滑仿射曲面的适当下降

Buddhadev Hajra

摘要。我们研究光滑复仿射曲面的同伦论性质在有限满射态射下的下降行为。首先考察 *Eilenberg– MacLane* 性质，并通过一个显式反例表明，该性质通常不能在适当态射下下降。这一否定结果促使我们引入一个较弱的概念，即有限同伦秩和性质。我们的主定理证明，对于对数 Kodaira 维数至多为零的光滑仿射曲面之间的适当态射，该性质确实能够下降。证明实质上依赖于近期对具有这两种性质的对数非一般型光滑复仿射曲面的分类。作为进一步应用，我们对被复代数二维环面真支配的光滑仿射曲面进行了分类，从而阐明了 M. Furushima 早先的一条评论。

目录

1.**引言** 2 2.**预备知识** 4 2.1. 记号与约定 5 2.2. 关于 Eilenberg-MacLane 光滑复代数簇的基础知识 6 2.3. M. Suzuki 的一个公式 6 2.4. Nori 引理与肖刚的推广 6 2.5. 分歧覆盖技巧 7 3. **主要结果的证明** 10 3.1. 关于 Eilenberg–MacLane 仿射曲面的下降，当 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$ 11 3.2. 关于有限同伦秩和的下降，如果 $\bar{\kappa}(X) = 0$. 17 4.**例子** 23 **致谢** 24 **声明** 24 参考文献 24

2020 数学主题分类。14F35, 14F45, 14J10, 55P20.关键词和短语。Eilenberg-MacLane 空间、Stein空间、开代数曲面、对数 Kodaira 维数。

1. 引言

我们首先说明研究同时也是 Eilenberg–MacLane 空间的光滑复代数曲面的缘由。若一个路径连通拓扑空间 X 满足：对于某个整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和一个群 G，则称其为*Eilenberg–MacLane* 空间，

$$\pi_k(X) = \begin{cases} G, & \text{for } k = n, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

并记为 $K(G,n)$。对于任意阿贝尔群 G 和任意整数 $n \in \mathbb{N}$，在 CW 复形范畴中，存在一个 Eilenberg–MacLane $K(G,n)$空间，且其在同伦意义下唯一（参见 [Spa66，第 8 章，§1，推论 5] and [MT68，推论 2]）。因此，我们使用相同的记号 $K(G,n)$ 来表示属于该同伦类的任意 CW 复形。

本文中，所有代数簇和态射均定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上。若存在一个真满射态射 $\varphi : V \to W$ 将 V 映到 W，则称仿射簇 V 被仿射簇 W 真支配。对于仿射簇，真性等价于有限性，因此真支配意味着存在有限满射态射。用交换代数的术语来说，记V = 谱B 且W = 谱A，这等价于B 在A上是整（或有限）的。

根据诺特正规化，任意维数为d 的仿射簇都存在一个到 $\mathbb{A}^d$的有限满射态射；特别地，每个仿射簇都被同维数的仿射空间真支配。

设$f : X \to Y$ 是光滑代数曲面之间的有限满射态射。J.-P. Serre 的一个经典结果表明，诱导同态f_*: $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 的像在 $\pi_1(Y)$中具有有限指数，而且该指数整除f的次数（参见 [Ser59]）。因此，若 $\pi_1(X)$ 有限，则 $\pi_1(Y)$ 也必定有限。这自然引出了以下问题。

问题 1.1. 设$f : X ! Y$ 是光滑仿射曲面之间的有限满射态射。若 $\pi_2(X)$有限，则 $\pi_2(Y)$ 也有限吗？

为探讨这个问题，考虑一个光滑仿射曲面V，使得 $\pi_2(V)$ <style id='11}有限。众所周~知，每个代数簇都存在万有覆盖空间。令p: $V \to V$ 表示万有覆盖映射。根据赫urewicz定理，[1]有$\pi_2(\tilde{V}) \cong H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$。由于$p$~是一个覆盖映射，因此对所有$i \geq 2$，都有 $\pi_i(V) \cong \pi_i(V)$。

~由于V 是光滑仿射曲面，V 是一个维数为2的复 Stein 流形。根据~A. Andreotti 和 T. Frankel 的经典结果，$H_2(V;\ \mathbb{Z})$是自由阿贝尔群，且$H_k(\tilde{V};\ \mathbb{Z}) = 0$对所有$k > 2$（参见 [AF59]）。因此，$\pi_2(V)$意味着 $\pi_2(V) =$

[1]对于任意路径连通空间 X 和正整数 n，都存在一个群同态 h_*: $\pi_n(X) ! H_n(X; \mathbb{Z})$，称为 Hurewicz 同态。Hurewicz 定理：若 $n \geq 2$ 且 X 是 $(n-1)$-连通的，则 h_*: $\pi_n(X) ! H_n(X; \mathbb{Z})$ 是同构，且 h_*: $\pi_{n+1}(X) ! H_{n+1}(X; \mathbb{Z})$ 是满射。关于此内容，可参阅 [MT68，第 8 章，定理 3] 和 [Hat02，第 4 节练习 232]。

(1)。反复应用赫urewicz定理和Andreotti–Frankel结果还可得出 $\pi_i(V) = (1)$ 对所有 $i \geq 2$ 均成立。因此，V 是一个 $K(G,\ 1)$空间，其中 $G = \pi_1(V)$。

因此，问题 1.1引出了下面这个更为广泛的问题，该问题最初由 R. V. Gurjar 教授向作者提出。

问题 1.2。 设 $f\colon\ X\ !Y$ 是光滑复仿射曲面之间的有限满射态射。若X 是一个 *Eilenberg–MacLane* 空间，那么Y 是否也是一个 *Eilenberg–MacLane* 空间?

这个问题的答案一般是否定的。问题提出后不久，R. V. Gurjar、S. R. Gurjar 和作者构造了一个反例，该反例出现在本文末尾（见例4.1）。为了进一步研究这个问题，需要有明确的光滑仿射Eilenberg–MacLane曲面实例，以检验在附加假设下该性质是否保持。这自然引出了以下问题:

哪些光滑仿射曲面是 *Eilenberg–MacLane* 空间?

在 [GGH23], 作者与 R. V. Gurjar 和 S. R. Gurjar 一起，对非一般型的光滑仿射 Eilenberg–MacLane曲面进行了分类，即对数 Kodaira 维数为 $\bar{\kappa}(X) \leq 1$的曲面，因为 $\bar{\kappa}(X) = 2$ 的情形（一般型曲面）仍未得到充分理解。

定理 1.3 （参见 [GGH23，结果 2。1]）。 设X 是一个不可缩的光滑复仿射$K(G,1)$-曲面。那么有以下结论:

(1) 若 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$，则 X 是一个 $\mathbb{A}^1$-丛，底空间为一条不同构于 $\mathbb{A}^1$或 $\mathbb{P}^1$的光滑代数曲线。*(2)* 若 $\bar{\kappa}(X) = 0$，则 $X \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 或 $X \cong H[-1,0,-1]$[2]。此外，若 $X \cong H[-1,0,-1]$，则存在一个与 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$同构的 X 的二重无分歧伽罗瓦覆盖。*(3)* 若 $\bar{\kappa}(X) = 1$，则 X 具有一个 $\mathbb{C}^*$-纤维化，其约化纤维均与 $\mathbb{C}^*$同构。因此，存在一个 X 的有限无分歧伽罗瓦覆盖，它是一个丛，底空间为一条不同构于 $\mathbb{P}^1$的光滑代数曲线。

在例子4.1中，我们将看到，Eilenberg–MacLane 曲面可以经由有限满射态射下降到一个与实2-球面同伦的光滑仿射曲面上。尽管如此，在本文中，我们将确定若干重要情形，在这些情形下，问题1.2的答案是肯定的。

最近，在 [BH25],中，作者们确立了以下相关结果。

定理 1.4 (参见 [BH25，定理 G])。 设X 是一个对数非一般型的光滑复仿射曲面，满足有限同伦秩和性质，即X 满足

$$\sum_{i\geq 2} \operatorname{rank} \pi_i(X) := \sum_{i\geq 2} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\right)$$

是有限的。那么X 是以下对象之一:

[2]曲面 $H[-1,0,-1]$ 最初由 T. Fujita 在其著名论文 [Fuj82]中定义。详细描述请参见 [GGH23]。

（1）一个 *Eilenberg–MacLane* $K(\pi,1)$-空间；（2）一个具有 $\pi_1(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的光滑 $\mathbb{Q}$-同调平面；（3）一个与 S^2 同伦的曲面。

根据 定理 1.4 和例 4.1，我们由此提出以下问题。

问题 1.5。 设$f: X \dashrightarrow Y$ 是光滑复仿射曲面之间的有限满射态射。若X 满足有限同伦秩和性质，那么Y 也满足该性质吗？

在本文中，对于 $\bar{\kappa}(X)\leq 0$ 的情形，我们肯定地回答了问题1.5 。一般情形仍未解决。

我们证明以下定理，说明在某些情况下，问题 1.2可能有肯定的答案。

定理 A (定理 3.3)。 设X 是一个位于光滑仿射不可约曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。假设$f: X \dashrightarrow Y$ 是到光滑仿射曲面的有限满射态射。那么Y 是一个位于光滑仿射不可约曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。

这一结果推广了 M. Furushima 早先的一条定理；他对所有被 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ 真支配的正规仿射曲面进行了分类（见 [Fur89] 中的主定理）。

我们还得到了以下关于被 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 真支配的光滑仿射曲面的分类结果。

定理 B （定理 3.14、3.16）。 设Y 是一个被$\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$真支配的光滑仿射曲面。

(1) 若 $\bar{\kappa}(Y)=-\infty$，则Y 同构于 $\mathbb{A}^2$ 或 $\mathbb{A}^1\times\mathbb{C}^*$。

(2) 若 $\bar{\kappa}(Y)=0$，则Y 属于以下情形之一：

(2a) $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$；(2b) *Fujita* 曲面 $H[-1,0,-1]$；(2c) 与 S^2 同伦且属于 $\mathscr{S}_0$——该类定义于 [JSXZ24]；(2d) 一个光滑的 $\mathbb{Q}$-同调平面，且 $\pi_1(Y)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

最后，我们证明以下定理，该定理为问题 1.5 在 $\bar{\kappa}(X)\leq 0$ 情形下给出了肯定的答案，正如所期。

定理 C （定理 3.7、 3.17）。 设$f: X \dashrightarrow Y$ 是光滑仿射曲面之间的有限满射态射。若 $\bar{\kappa}(X)\leq 0$ 且X满足有限同伦秩和性质，则 Y也满足该性质。

2. 预备知识

[A] – 首先，我们将列出本文中始终采用的一些记号和约定。

2.1. **记号与约定**。

- 若X是一个单纯复形或有限 CW 复形，则我们分别用 $\pi_i(X)$、$H_i(X;G)$（$H_i(X;G)$）以及 $\tilde{H}_i(X;\mathbb{Z})$（当$i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$时）表示$i$阶同伦群、以$G$为系数的$i$阶同调群（分别为上同调群），以及$X$的$i$阶约化整系数同调群。
- 短语高阶同伦群X是指群 $\pi_i(X)$，其中$i \geq 2$取遍所有值。
- 在全文中，我们讨论定义在复数域上的光滑代数曲面及其态射 $\mathbb{C}$。
- 记 $\mathbb{C}$ 上的n维仿射空间和射影空间分别为 $\mathbb{A}^n$ 和 $\mathbb{P}^n$。
- 对于任意整数$N \geq 0$，记 $\mathbb{C}^{N*}$ 为去掉N 个点的复仿射直线。当$N = 0$时，有 $\mathbb{C}^{0*} = \mathbb{C}$。对于$N = 1$ 和$N = 2$，我们分别用 $\mathbb{C}^*$ 和 $\mathbb{C}^{**}$ 代替 $\mathbb{C}^{1*}$ 和 $\mathbb{C}^{2*}$。
- 对于光滑非完备曲面S，我们采用以下记号：

$$\bar{\kappa}(S)\text{: S 的对数 Kodaira 维数}S\text{。}$$

关于 $\bar{\kappa}$的定义，参见 [Iit82]。

- F对于光滑复代数簇X，我们采用以下记号 n:

$$b_i(X)\,(i \in \mathbb{Z}_{>0})\text{: the } i\text{-th Betti number } \dim_{\mathbb{C}} H_i(X,\mathbb{C}),$$

$$\infty e(X)\text{:}\quad X\text{的欧拉–庞加莱示性数，定义为}e(X) = \sum_{i=0}(-1)^i b_i(X)\text{。}$$

- 对于光滑复仿射簇X，我们保留以下记号：

$$\rho(X) := \operatorname{rank}\operatorname{Pic}(X) = \dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Pic}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}),$$

$$\gamma(X) := \operatorname{rank}(\Gamma(X,\mathcal{O}_X)^*/\mathbb{C}^*),$$

其中 $\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X)^*/\mathbb{C}^*$是一个有限秩自由阿贝尔群。

[B] – 在后面的证明中，我们将使用以下众所周知的结果。

引理 2.1 (J.P. Serre，参见 [Ser59]). 设 $\varphi : X \to Y$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的正规不可约代数簇之间的主导态射。那么有以下结论。

(1) 诱导映射 $\varphi_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 的像在 $\pi_1(Y)$中具有有限指数。事实上，若 φ 是拟有限的，则指数 $[\pi_1(Y)\colon \varphi_*(\pi_1(X))]$ 整除 度数 φ。(2) 若 φ 的一般纤维不可约，则 φ_* 是满射。

因此，若 X 是正规代数簇，且 Z 是 X 的真闭子簇，则自然同态 $\pi_1(X-Z) \to \pi_1(X)$是满射。此外，若 X是光滑的，且 余维$_X Z \geq 2$，则此同态是同构。

以下结果在我们后续的证明中会被隐式使用。该结果可由覆盖空间理论推出。

引理 *2.2.* 设 $f\colon (Z,z_0)!(W,w_0)$ 是连通拓扑流形之间的连续满射，且诱导同态 $f_*\colon \pi_1(Z,z_0)!\pi_1(W,w_0)$ 是满射。那么 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 对于任意连通拓扑覆盖 $p\colon (W,\widetilde{\ }w_0)!(W,w_0)$，诱导覆盖 $\widetilde{\ }p\colon (Z,\widetilde{\ }z_0)!\sim$ $\sim(Z,z_0)$ 也连通，其中 $Z:=Z\times_W W$。

[C] – 现在我们将回顾一些众所周知的结果，稍后证明时会经常用到它们。

2.2. **关于 Eilenberg-MacLane 光滑复代数簇的基础知识**。 以下关于 Eilenberg-MacLane 代数簇（或有限 CW 复形）的结果是众所周知的。稍后证明时我们将直接使用这些结果。

引理 2.3. 以下断言成立。

(1) 设 X 是一个 *Eilenberg-MacLane* 空间复代数簇。那么 X 是 $K(G,1)$，其中 $G=\pi_1(X)$。此外，若 X 单连通，则它是可缩的。*(2)* 对任意光滑 $K(G,1)$ 拟射影代数簇，群 G 都是无挠的。*(3)* 设 X、Y 是连通拓扑空间，且 $f\colon X!Y$ 是一个纤维为连通纤维 F 的纤维丛。若 Y 是 $K(G,1)$空间，且 F 是 $K(G',1)$空间，其中 $G=\pi_1(Y)$且 $G'=\pi_1(F)$，则 X 是 $K(G'',1)$空间，其中 $G''=\pi_1(X)$。*(4)* 光滑复代数 $K(G,1)$ 曲面都不能具有以 $\mathbb{P}^1$ 为底空间的 $\mathscr{C}^\infty$-光滑纤维丛结构。

2.3. **M. Suzuki 公式**。 M. Suzuki 证明了一个关于纤维化于光滑代数曲面的光滑仿射曲面的欧拉-庞加莱示性数的重要公式（参见[Suz77]）。

定理 2.4 (**Suzuki 公式**；参见 [Suz77])。 设$f:V!C$ 是从光滑仿射曲面V 到光滑代数曲面 C 的满射态射，且f 的一般纤维F 不可约。设C 中满足f在p_i $(1\le i\le n)$的某个邻域内不是 C^∞-局部平凡的所有点为$p_1,\dots,p_n$。则

$$e(V)=e(C)\cdot e(F)+\sum_{i=1}^{n}(e(F_i)-e(F)),$$

其中$F_i:=f^{-1}(p_i)$，其中 $1\le i\le n$。

此外，等式右侧任一括号中的差均为非负数。若对于某个i有$e(F_i)=e(F)$，则F同构于 $\mathbb{C}$，或者 $\mathbb{C}^*$，且 $(F_i)_{red}$同构于F。

该结论的证明运用了多重次调和函数理论。第一作者给出了一个代数几何证明（参见 [Gur97]）。

2.4. **Nori 引理和 Xiao Gang的推广**。 M. V. Nori 在 [Nor83],中证明了一个重要结果，该结果涉及光滑代数簇的基本群所构成的短正合列。

定理 2.5 (**Nori 引理**； [Nor83，引理 1。5])。设 X 和 Y 是光滑连通复代数簇，且 $f:X\ -!Y$ 是一个主导态射，其一般纤维 F 连通。

假设存在一个闭子集 $S \subset Y$，其余维至少为二，并且在该集合之外，f 的所有纤维都至少有一个光滑点（即，对于所有 $p \in Y \setminus S$，$f^{-1}(p)$ 在 $f^{-1}(p)$ 的至少一个不可约分支上是泛约化的）。那么基本群的自然正合列

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow (1)$$

是正合的。

另见 [GGH23，注记 3.13，3。14], 关于与上述引理相关的两个重要注记。这些注记在后续证明中被隐式使用。

下　面肖刚的结果是定理 2. 的一个有用推广。　5.

引理 *2.6*（参见 [*Xia91*，引理 2]）。设 $f: X \to C$ 是从光滑代数曲面到光滑代数曲线的满射态射，且 f 的一般纤维 F 光滑且不可约。设 $\{p_1, \cdots, p_r\} \subset C$ 是 f 的重纤维像，点 $\widetilde{p_i}$ 上方的纤维重数为 $m_i > 1, 1 \le i \le r$。设 C 是 C 的光滑完备化。令 $C \setminus C = \{p_{r+1}, \cdots, p_{r+\ell}\}$，且 $g =$ 为 C) 的(亏格。则存在正合列

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (1),$$

其中，Γ 是由以下生成元生成的群

$$\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{r+\ell}$$

并满足以下关系

$$[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \gamma_1 \cdots \gamma_r \cdot \gamma_{r+1} \cdots \gamma_{r+\ell} = 1 = \gamma_1^{m_1} = \cdots = \gamma_r^{m_r};$$

其中 $[a、b] = aba^{-1}b^{-1}$。如果 F-纤维化 f 中不存在重纤维，那么 Γ 就是 C 的基本群。

2.5. **分歧覆盖技巧**。我们首先回顾纤维化中一个纤维的总重数的定义。

定义 2.7。设 $\varphi: X \to C$ 是从光滑、连通曲面 X 到光滑代数曲线 C 上的一个纤维化。设 F 是 φ 的一个纤维，具有不可约分支 F_1，...，F_r，其中 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，其重数分别为 m_1，...，m_r。因此，在概形论意义下，F 可以写成

$$F = m_1 F_1 + m_2 F_2 + \cdots + m_r F_r.$$

总重数 F 定义为 $\mathrm{mult}(F) :=$ 最大公约数(m_1，...，m_r)。如果 F 满足 $mult(F) > 1$，则称纤维 F 为重纤维。

Fenchel 猜想的解决方案，即所谓的“Fenchel 引理”，对于下述关于在代数纤维化中消除多个纤维的分歧覆盖技巧的定理很有用。我们将 [Cha83]称为该猜想的解决方案。

定理 *2.8*（*Fenchel* 引理；参见 [*Cha83*]）。设 C 是亏格为 g 的光滑不可约拟射影曲线。设 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 是 C 中互不相同的点，$m_1, m_2, \ldots, m_r$ 是任意整数> 1，并假设若 $C \cong \mathbb{P}^1$，则 $r \ge 2$；进一步，若 $r = 2$，则 $m_1 = m_2$。那么存在一个有限伽罗瓦覆盖 $\pi: D \to C$，其分歧恰好发生在 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 上，并且对每个 i，p_i 上方的分歧指数为 m_i。

定理 *2.9*（分歧覆盖技巧；参见 [*Miy01, III, 3.2.*1]）。设 $f: X ! C$ 是一个满射态射，且一般纤维 F 不可约，其中 X 是光滑不可约代数曲面，C 是光滑不可约拟射影曲线。设 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 是 C 中满足 $f^*(p_i)$ 的纤维重数为 $m_i > 1$ 的点，并且对于 C 中任意不属于 p_i 的点 $p \in$，纤维 $f^*(p)$ 的总重数为 *1*。我们假设若 $C \cong \mathbb{P}^1$，则 $r \geq 2$；若 $r = 2$，则有 $m_1 = m_2$。设 $\pi: D ! C$ 为 *Fenchel* 引理 *2.8* 中所述的覆盖。则下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \overline{X \times_C D} & \xrightarrow{p_1} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow[\pi]{} & C \end{array}$$

并且满足以下断言。

(1) 正规化纤维积 $X \times_C D$ 是光滑的。(2) $p_1 : X \times_C D !$ X 是 X 的有限伽罗瓦 *étale* 覆盖。(3) $p_2 : X \times_C D !$ D 没有重纤维。

[D] – 以下标准结果将在后续论证中使用。为完整起见，我们简要概述其证明。

引理 2.10。设 X 和 Y 是连通 *CW* 复形，并设 $f : X ! Y$ 是纤维丛，其连通纤维为 F。若 F 是可缩的，则 f 是同伦等价。

证明。与纤维序列相关联的同伦长正合列

$$F \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

表示为

$$\cdots \to \pi_k(F) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\delta_k} \pi_{k-1}(F) \to \cdots \qquad (k \geq 1).$$

由于F 是连通且可缩的，我们有 $\pi_i(F) = 0$ 对所有$i \geq 0$均成立。因此，由正合性可知

$$f_*: \pi_i(X) \xrightarrow{\cong} \pi_i(Y)$$

对每个i都是同构。由此，结论可由怀特海德定理推出。该定理断言，在连通 CW 复形之间，若一个映射在所有同伦群上都诱导同构，则它是同伦等价（例如参见 [Whi49，定理 4。5]）。□

推论 2.11。设X是一个光滑复代数簇，且$f : X ! B$ 是光滑复代数曲线B上的一个代数 $\mathbb{A}^1$丛。那么$b_2(X) = 0$ 当且仅当B 是仿射的。

证明。由于 $\mathbb{A}^1$ 是可缩的，引理2.10 推出

$$f : X \to B$$

是同伦等价。特别地，诱导映射

$$f_*: H_2(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_2(B; \mathbb{Z})$$

是同构，因此 $b_2(X) = b_2(B)$。因此，$b_2(X) = 0$ 当且仅当 $b_2(B) = 0$，而这恰好发生在B 非完备时；等价地，B 是仿射的。□

引理 2.12. 设$f : X ! B$ 是从光滑仿射曲面X 到光滑代数曲线B的F-纤维化，其中F 是光滑仿射有理曲线。若X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，则有：

(1) B 是仿射的。(2) f 的所有
纤维均不可约。

证明。 设$f : X \to B$ 是命题所述的F-纤维化，其中X 是光滑仿射 $\mathbb{Q}$-阶乘曲面，且B 是光滑代数曲线。将X 嵌入光滑射影曲面V 的一个开子集中，使得f 可延拓为一个 $\mathbb{P}^1$-纤维化

$$\varphi : V \to \bar{B}$$

¯ ¯到光滑射影曲线B，其中$B \subset B$ 是光滑完备化。

由于X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，皮卡群Pic(V) 有限生成，因此$b_1(V) = 0$。 φ 的一般纤维同构于 $\mathbb{P}^1$，它是连通的，因此诱导映射¯ $\varphi_* : \pi_1(V) \to \pi_1(B)$，从而

$$\varphi_* : H_1(V;\mathbb{Z}) \to H_1(\bar{B};\mathbb{Z})$$

是满射。因此，$b_1(\bar{B}) \le b_1(V) = 0$，这意味着 $\bar{B} \cong \mathbb{P}^1$。故 B 是一条光滑有理曲线。

由于 $\bar{B} \cong \mathbb{P}^1$，$F$ 的一个一般纤维与一个截面（记作 S）以及每个奇异纤维中除一个不可约分支外的所有不可约分支，自由生成 Pic(V)。

若 B 是射影的，则 $\bar{B} \cong \mathbb{P}^1$。类似的论证表明，$f$ 的一般纤维与 f的每个奇异纤维中除一个不可约分支外的所有不可约分支，自由生成 Pic(X)。因此 $\rho(X) \ge 1$，且当且仅当f 没有可约纤维时等号成立。因此，Pic(X) 不可能是挠元，这与X的 $\mathbb{Q}$-唯一分解性矛盾。这个矛盾表明B 必为仿射的，从而证明了 **(1)**。

现在假设B 是光滑仿射有理曲线。由上述同样的推理可知，对于f 的每个奇异纤维，除一个不可约分支外，其余分支自由生成Pic(X)。因此，只要f有可约纤维，就有$\rho(X) \ge 1$，这再次与X的 $\mathbb{Q}$-唯一分解性矛盾。因此f 的所有纤维都不可约，从而证明了 **(2)**。□

现在我们将引用以下两个有用的结果，摘自 [JSXZ24]。

引理 2.13 (参见 [JSXZ24，引理 2.6，推论 2。7])。 设X 是光滑拟射影曲面，且 $\pi: X ! B$ 是光滑代数曲线B上的一个 $\mathbb{G}_m$-丛。则有：

(1) 存在一个次数为 ≤ 2 的有限 *étale* 覆盖$B' ! B$，它诱导出一个有限 *étale* 覆盖$X' := X \times_B B' ! X$ 以及一个非扭曲的 $\mathbb{G}_m$-丛$X' ! B'$。(2) 对数 *Kodaira* 维数满足

$$\bar{\kappa}(X') = \bar{\kappa}(X) = \bar{\kappa}(B) = \bar{\kappa}(B').$$

(3) 假设 π 是非扭曲的，且B 是光滑有理仿射曲线。那么 π 是一个平凡的$\mathbb{G}_m$-丛。

(4) 若X 是光滑仿射曲面，且 π 是一个 $\mathbb{G}_m$-丛，那么B 是仿射的。

引理 2.14 （参见 [JSXZ24，引理 2.14]）。 光滑仿射有理曲线上的任意 $\mathbb{A}^1$ 丛B 都是平凡的。

以下引理在光滑复代数簇的真（有限）下降问题中非常有用。

引理 2.15. 设$f : V \to W$ 是光滑不可约复代数簇之间的有限满射态射。则有以下结论：

(1) $\bar{\kappa}(V) \geq \bar{\kappa}(W)$。此外，若 f是 *étale*（*étale*），则 $\bar{\kappa}(V) = \bar{\kappa}(W)$（参见 [Iit82]）。(2) 诱导同态

$$f_*: H_i(V;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(W;\mathbb{Q})$$

对所有 i均为满射。特别地，$b_i(V) \geq b_i(W)$ 对所有 i（参见 [Gie64]）。

(3) 存在一个诱导单射同态

$$f^* \otimes Id_{\mathbb{Q}}: \mathrm{Pic}(W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

特别地，$\rho(W) \leq \rho(V)$(由投影公式得出)。

3. 主要结果的证明

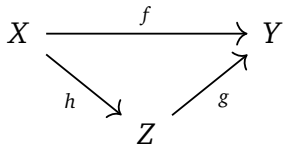
本节的结果旨在通过确立其成立所需的精确几何条件，阐明这一下降现象；我们从负对数 Kodaira 维数的情形出发，进而讨论更一般的情形。更确切地说，我们将探讨问题 1.2 和问题 1.5，这两个问题涉及 Eilenberg–MacLane 性质和有限同伦秩和性质在光滑仿射簇之间的有限态射下是否保持下降。我们的方法通过一系列约化和结构性结果逐步展开，首先提出一项关键观察；它使我们能够假设基本群层面的同态为满射，并由此为后续许多证明提供共同的出发点。

注记 3.1. 我们首先将问题约化到自然同态

$$f_*: \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$$

为满射的情形。

若 f_* 不是满射，则根据标准覆盖空间理论，我们可以找到一个光滑仿射簇 Z，使得 f 具有如下分解：



其中 h： $X \to Z$ 是有限态射，而 g： $Z \to Y$ 是有限覆盖映射，并满足$f = g \circ h$。此外，我们有

$$\pi_1(Z) \cong g_*(\pi_1(Z)) = f_*(\pi_1(X)),$$

使得 h_*： $\pi_1(X) \to \pi_1(Z)$ 是满射，并且 $\deg g \cdot \deg h = \deg f$。

现在，若Z 是 Eilenberg–MacLane 空间，或者具有有限同伦秩和，那么Y也具有相同性质，因为有限覆盖映射g 保持Z 和Y的高阶同伦群。因此，通过用有限满射态射g 代替f，并先对Z 证明该结论，我们可以将问题归结为诱导的基本群同态为满射的情形。

3.1. **关于在** $\bar{\kappa}(X) = -\infty$. 时 Eilenberg–MacLane 仿射曲面的下降。我们首先证明，对于 Zariski 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$丛，有限 étale 下降成立。

命题 3.2。 设V 是一个光滑仿射曲面，具有在光滑仿射（分别为射影）曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$丛结构。设 $\varphi : W ! V$ 是光滑仿射曲面之间的有限 *étale* 覆盖。那么 W 也具有在光滑仿射（分别为射影）曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$丛结构。

证明。 首先假设 V 具有在光滑仿射曲线（或正亏格射影曲线）上的 Zariski 局部平凡 $\mathbb{A}^1$丛结构，记该曲线为 B。由引理2.10，纤维可缩意味着V 与B同伦等价，因此V 是一个$K(G,\ 1)$-空间。

由于 $\varphi :\ W \to V$ 是一个有限拓扑覆盖，W 也是一个 $K(G,1)$-空间。此外，$\kappa(V) = -\infty$ 蕴含 $\kappa(W) = -\infty$。因此，根据定理 1.3，曲面 W 具有一个以光滑代数曲线 $C \not\cong \mathbb{P}^1$为底空间的 Zariski 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛结构。同样，由引理 2.10 可知，W 与 C同伦等价。

情形 1. B 是仿射的。

假设 C 是射影的。那么，C 要么是椭圆曲线，要么其亏格$(C) \geq 2$。在后一种情况下，$\pi_1(C)$ 不是自由的，而 $\pi_1(B)$ 是自由的，因为B 是仿射的。诱导态射φ_*：$\pi_1(W) \hookrightarrow \pi_1(V)$是单射，且 $\pi_1(W) \cong \pi_1(C)$是 $\pi_1(V) \cong \pi_1(B)$的子群，因此必定是自由的。因此亏格$(C) \geq 2$ 不可能，故C 必定是椭圆曲线。

在这种情况下

$$e(W) = e(C) = 0, \qquad e(W) = \deg(\varphi) \cdot e(V), \qquad e(V) = e(B).$$

因此$e(B) = 0$。由于B 是光滑仿射曲线，可知$B \cong \mathbb{C}^*$ 且 $\pi_1(V) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$。但是 $\pi_1(W) \cong \pi_1(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，这与 φ_*的单射性矛盾。因此C不可能是射影的。仿射情形的证明至此完成。

情形 2. B 是正亏格射影曲线。

假设C是仿射的。则$b_2(W) = b_2(C) = 0$，而$b_2(V) = b_2(B) = 1$。这与引理2.15(2)矛盾，因为该引理排除了这种有限满射态射。因此，若B 是正亏格射影曲线，则C 也必定是正亏格射影曲线。

最后，若$B \cong \mathbb{P}^1$，则V 是单连通的。因此，任何有限 étale 覆盖 φ 都必定是一个同构。证明至此完成。□

现在我们继续讨论最简单的几何情形，即 X 的对数 Kodaira 维数为 $-\infty$。这一情形已经涵盖了下降问题的基本特征，并为我们的一般论证提供了基本机制。下面的定理

表明，在这种情形下，Eilenberg–MacLane 性质在任意有限满射态射下都具有下降性。

现在，我们推导出该定理的另一个重要推论，说明这一现象如何从平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛这一特殊情形扩展到更广泛的一类仿射曲面：在更一般的情形下，总空间本身可能具有非平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛结构。以下结果表明，在这一更广泛的背景下，Eilenberg–MacLane 性质仍然可以下降。

定理 3.3. 设 X 是光滑仿射不可约曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。假设 $f\colon X \to Y$ 是到光滑仿射曲面上的有限满射态射。那么，Y 是光滑仿射不可约曲线上的 *Zariski* 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。

证明。 采用注 3.1中的记号，我们先将 f 分解为 g 和 h。根据构造，诱导同态 $h_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Z)$ 是满射。由于 X是光滑仿射曲线上的一个 $\mathbb{A}^1$- 丛，由推论 2.11 可知 $b_2(X) = 0$ 。利用引理 2.15(2)，可推出 $b_2(Z) = 0$。

由 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$，再由 $\bar{\kappa}(Y) = \bar{\kappa}(Z) = -\infty$，利用引理 2.15(3)。因此，$Z$存在一个以光滑代数曲线 D 为底空间的 $\mathbb{A}^1$- 纤维化 $\varphi : Y \to D$。诱导映射 $\varphi_*\colon \pi_1(Z) \to \pi_1(D)$是满射，因此有 $b_1(Z) \geq b_1(D)$。

将 Suzuki 公式（引理 2.4）应用于 φ:

$$e(Z) = e(D) + s, \qquad s := \sum_{i=1}^{r} \big(e(F_i) - e(\mathbb{A}^1)\big),$$

其中，$\{F_i\colon 1 \leq i \leq r\}$ 是奇异纤维。利用 $b_2(Z) = 0$，得到:

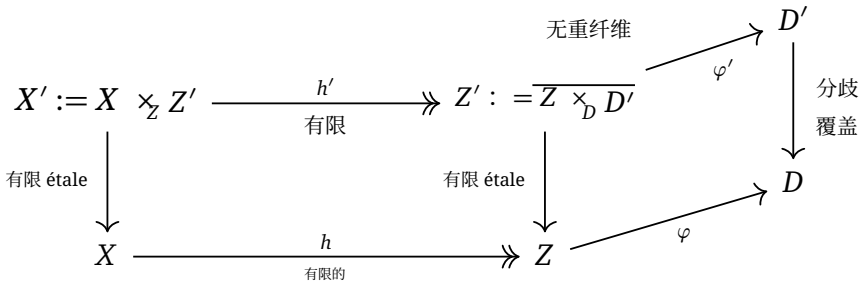
$$b_1(D) - b_1(Z) = b_2(D) + s.$$

由于 $b_1(Z) \geq b_1(D)$，我们得到

$$b_1(Z) = b_1(D), \qquad b_2(D) = 0 = s.$$

因此，D 是仿射的，并且不存在可约纤维；也就是说，φ的每个奇异纤维（若存在）都概形论同构于 $m\mathbb{A}^1$，其中整数 $m > 1$ 由 [Miy81，第一章，引理 44]）。

若 φ 有重纤维，我们便通过分歧覆盖技巧消去所有重数（参见引理 2.9）。因此，我们得到一个有限 étale 覆盖 $Z' \to Z$，使得 Z'具有一个$\mathbb{A}^1$-纤维化 $\varphi' : Z' \to D'$，其底空间为仿射曲线 D'，且没有重纤维。由于 h_* 是满射的，我们可以通过 h 将 étale 覆盖 $Z' \to Z$ 拉回，得到一个不可约的光滑仿射曲面 X'，其上有一个拉回的 étale 覆盖 $X' \to X$，并允许一个有限满射态射 $h'\colon X' \to Z'$。参见下面的交换图:



根据命题 3.2，X' 仍然是一个以光滑仿射曲线为底空间的 $\mathbb{A}^1$-丛——其结构与X相似。因此，根据我们上面的证明，φ' 不能有任何可约纤维。进而，φ 没有重纤维，因为消去重纤维的分歧覆盖技巧确保不可约重纤维（设为 $\varphi^*(p)$）分裂为可约纤维，其不可约分支是在 $\varphi'^*(q)$ 中赋予约化结构的仿射直线，并且分裂后各部分的重数的最大公约数变为1，从而纤维 $\varphi'^*(q)$ 变为非重纤维；其中q 是全分歧覆盖 $D' \to D$下p 的唯一原像。这意味着 φ 是扎里斯基局部平凡的。

因此，Y 作为 Z 的有限 étale 下降，首先在拓扑上是一个 $K(G,\ 1)$-空间，因此，根据定理 Y 具有一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛结构，其底空间是某条光滑代数曲线，记作 B。现在，由定理 1.3，$b_2(Z) = 0$ 可知，$b_2(Y) = 0$，因而 B 是仿射的，如所需。这由引理 2.15(2) 和推论 2.11即可得出。至此，证明完成。□

由定理 3.3，我们得到以下推论。该结果广为人知，且已在 [Miy86] 中利用消去定理关于 $\mathbb{A}^2$ 的证明得到；另见 [GS84，定理 3]，其中使用了 Mumford-Ramanujam 方法以及 Milnor 对自由作用于同伦3-球面上的有限群的分类。

推论 3.4. 设Y 是一个被 $\mathbb{A}^2$ 真支配的光滑仿射曲面。那么$Y \cong \mathbb{A}^2$。

证明。 定理3.3表明Y 必同构于一个 $\mathbb{A}^1$-丛，其底空间是某条光滑仿射曲线，记为C。因此，Y 与C 同伦等价，故由引理2.15(2)，可得

$$0 = b_1(\mathbb{A}^2) \geq b_1(Y) = b_1(C),$$

这进而意味着$C \cong \mathbb{A}^1$ 作为$b_1(C) = 0$，且C 是一条光滑仿射曲线。因此，我们得出$Y \cong \mathbb{A}^2$。□

我们的下一个结果表明，当底曲线为仿射有理曲线时，X 与 $\mathbb{A}^1$-因子的乘积结构在底曲线的穿孔数意义下保持不变。这推广了 M. Furushima 的一项经典结果（见 [Fur89，主定理，非奇异情形]）。

推论 3.5。 设$f : X \,!\, Y$ 是光滑仿射曲面之间的有限满射态射，且$X = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^{r*}$ 对某个$r \geq 0$成立。则$Y \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^{s*}$ 对某个 $0 \leq s \leq r$成立。

证明。 由于 $X = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^{r*}$ 对某个 $r \geq 0$成立，所以它是光滑有理曲面。因此，Y 是单有理曲面，进而根据 Castelnuovo 有理性判别准则是有理曲面。采用定理 3.3中的记号，我们看到Y 是光滑仿射曲面D上的局部平凡丛。由于Y 是有理的，D也是有理的，因此$D \cong \mathbb{C}^{s*}$ 对某个$s \geq 0$成立。由引理2.14可知，Y 是 $\mathbb{A}^1$上的 Zariski 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛，即$Y \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^{s*}$。

最后，不等式 $r \geq s$ 由 $b_1(X) \geq b_1(Y)$ 得出。 □

前述定理给出了一个具体例子，说明 Eilenberg-MacLane 性质的下降成立。

在证明本节的主要结果之前，我们需要以下定理。该定理最近由作者与 A. Maharana 和 A. J. Parameswaran 在另一项研究中合作证明，并将在其他地方发表。此处陈述该结果，但不提供证明。

定理 3.6. 设 $f : X \to Y$ 是复光滑仿射曲面之间的有限满射态射。假设 X 与 S^2 同伦。那么，Y 是以下光滑仿射曲面之一：

(1) 一个拓扑可缩曲面；(2) 再次与 S^2 同伦；(3) 一个基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Q}$-同调平面。

接下来，我们以证明一项关键结果来结束本节。

定理 3.7. 设$f : X \to Y$ 是光滑仿射曲面之间的有限满射态射。若 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$ 且X 满足有限同伦秩和性质，则Y也满足该性质。

证明。 首先注意，由于X真支配Y且 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$，根据引理2.15(3)，可得 $\bar{\kappa}(Y) = -\infty$ 。由于X 满足有限同伦秩和性质且$\bar{\kappa}(X) = -\infty$，由定理1.4 和定理1.3 可知$X$ 同构于下列曲面之一：

(1) 覆盖于一个不同构于$\mathbb{P}^1$的光滑代数曲线上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛；(2) 与S^2同伦；(3) 一个基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的 $\mathbb{Q}$-同调平面。

注意，基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Q}$同调平面的万有覆盖是仿射的，且拓扑上是 Moore $M(\mathbb{Z}, 2)$-空间，也就是说，它与S^2同伦。因此，不失一般性，我们可以假设X 要么是一个在不与 $\mathbb{P}^1$ 同构的光滑代数曲线上扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$丛，要么与S^2同伦。我们首先考虑一些简单情形，这些情形可直接应用先前的结果加以解决。

— 若X 是光滑仿射曲线上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$丛，则定理3.3 表明Y 是一个$K(G, 1)$-空间。特别是，在这种情况下，Y 满足有限同伦秩和性质。— 若X 与S^2, 同伦，则由定理3.6可知，Y 具有有限同伦秩和性质。

现在，下面的命题完成了证明。 □

命题 3.8。沿用定理3.7中的记号，假设存在一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$丛结构 $\varphi: X ! C$，其中C 是亏格为正的光滑射影曲线。那么Y 具有有限同伦秩和性质。

证明。利用注记 3.1，不失一般性，可假设诱导同态 $f_*: \pi_1(X) ! \pi_1(Y)$ 是满射。由于 X 是光滑射影曲线上的一个 $\mathbb{A}^1$丛，根据推论 2.11 的证明，我们有 $b_2(X) = 1$。利用引理 2.15(2)，可推出 $b_2(Y)$ 只能是 0 或 1。由于 $\bar{\kappa}(Y) = -\infty$，因此 Y 具有一个 $\mathbb{A}^1$纤维化 $\psi : Y ! D$，其底空间 D 是光滑代数曲线。因此，诱导同态 $\psi_*: \pi_1(Y) ! \pi_1(D)$ 是满射，从而 $b_1(Y) \geq b_1(D)$。对φ应用 Suzuki 公式（参见定理 2.4）：

$$e(Y) = e(D) + s, \qquad s := \sum_{i=1}^{r} \big(e(F_i) - e(\mathbb{A}^1)\big),$$

其中$\{F_i : 1 \leq i \leq r\}$ 是 ψ 的奇异纤维。由此可得：

$$b_1(D) - b_1(Y) = s + b_2(D) - b_2(Y). \tag{3.1}$$

情形 1. 假设D 不同构于 $\mathbb{A}^1$ 或 $\mathbb{P}^1$。

由于 $\mathbb{A}^1$ 除 $\mathbb{A}^1$ 和 $\mathbb{P}^1$ 外不能支配任何光滑代数曲线，因此 φ 的任何纤维都不会相对于纤维化 ψ 经由 f 水平映射。因此，f 是逐纤维定义的。取任意一个正则纤维，例如 ψ 在 $q \in D$ 上方的 F。由于 f 是满射，$f^{-1}(F)$ 非空，且是 φ 在 S 上的纤维的不交并：$= \{p_1, \ldots, p_k\} \subset C$。因此，f 将其限制为光滑仿射曲面之间的有限满射态射 $X \setminus f^{-1}(F) ! Y \setminus F$，使得 φ 和 ψ 分别限制为 $C \setminus S$ 上的 $\mathbb{A}^1$- 丛以及 $D \setminus \{q\}$ 上的 $\mathbb{A}^1$- 纤维化。注意，由于 $S \neq \emptyset$，$C \setminus S$ 是一条光滑仿射曲线，而 $D \setminus \{q\}$ 也是仿射的。现在，定理 3.3 表明，ψ 限制为 $D \setminus \{q\}$ 上扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。因此，ψ 也扎里斯基局部平凡。因此，在此情形下，Y 是一个 K(G, 1)-空间。

情形 2. 假设$D \cong \mathbb{P}^1$。

现在，若 $b_2(Y) = 0$，则 $e(Y) = 1 - b_1(Y) \leq 1$。但另一方面，Suzuki 公式（参见定理 2.4）给出 $e(Y) \geq e(\mathbb{P}^1) = 2$，矛盾。因此，$b_2(Y)$ 必为 1，从而 $e(Y) = 2 - b_1(Y)$。注意，方程（3.1）意味着在此情形下 $s + b_1(Y) = 0$，进而意味着 $b_1(Y) = 0 = s$，即 $e(Y) = 2$，且 ψ 没有可约纤维。因此，若存在奇异纤维，则每个奇异纤维在概形论意义下都同构于某个整数 $m\mathbb{A}^1$ 对应的 $m > 1$。

若 ψ 没有奇异纤维，则它是一个以 $\mathbb{P}^1$为底的 $\mathbb{A}^1$-丛，即Y 利用引理2.10 与 $\mathbb{P}^1$ 同伦，并且 $\mathbb{P}^1$ 进一步与S^2同胚。

假设 ψ要么有至少三个重纤维，要么恰有两个重纤维，其重数为 m_1, m_2，且 $\gcd(m_1, m_2) > 1$。我们得到一个非平凡的有限 étale 覆盖$Y' \to Y$，其次数为 $d > 1$（使用定理 2.9 中的分歧覆盖技巧）。在分歧覆盖过程中，我们得到一个 $\mathbb{A}^1$-纤维化 $\psi' : Y' \to D'$，其底空间是光滑射影曲线。通过

拉回有限 étale 覆盖 $Y' ! Y$，我们构造一个有限 étale 覆盖 $X' := X \times_Y Y' ! X$，并有一个自然有限满射态射 $X' ! Y'$。注意，由于 f_* 是满射，X' 是不可约光滑仿射曲面。根据命题 3.2，X' 再次是一个 $\mathbb{A}^1$-丛，底空间为正亏格光滑射影曲线——这是一个结构上与 X 相似的曲面。因此，若 D' 不同构于 $\mathbb{P}^1$，则根据上文情形 1，可知 ψ' 是一个在 D' 上的 Zariski–局部平凡 $\mathbb{A}^1$- 丛，这将意味着 $e(Y') = e(D') = 2 - 2g(D') \leq 0$。另一方面，$e(Y') = d \cdot e(Y) = 2d$。然而，这与 $d > 1$矛盾。因此 $D' \cong \mathbb{P}^1$，于是根据我们上文已证明的结论，可得 $b_1(Y') = 0$ 且 $b_2(Y') = 1$，从而 $e(Y') = 2$。然而，这再次与 $e(Y') = 2d$ 且 $d > 1$矛盾。

由此可知，φ 至多有两个重纤维；若恰有两个重纤维，且它们分别同构于$m_1\mathbb{A}^1$，$m_2\mathbb{A}^1$，则这两个重数m_1,m_2 必互素。在上述所有情形中，利用引理2.6可知Y 是单连通的。此外，由于$b_2(Y) = 1$，我们得到Y 与S^2, 同伦等价，正如前文所述。

情形 3. 假设$D \cong \mathbb{A}^1$。

我们继续证明，分为两个子情形——$b_2(Y)$ 为0 或1。

子情形 3a. 假设 $b_2(Y) = 0$

于是，方程（3.1）再次推出$s + b_1(Y) = 0$，从而$b_1(Y) = 0 = s$。因此，$e(Y) = 1$，且 ψ 没有可约纤维。因此，若存在奇异纤维，则每个奇异纤维在概形意义下均同构于 $m\mathbb{A}^1$，其中$m > 1$为某个整数。注意，在此情形下Y 是一个 $\mathbb{Q}$-同调平面。

假设 ψ 有重纤维。那么我们得到一个次数为 d 的非平凡有限 étale 覆盖 $Y' ! Y > 1$（利用定理 2.9 中的分歧覆盖技巧）。在分歧覆盖过程中，我们得到一个在光滑仿射曲线上方的 $\mathbb{A}^1$-纤维化 $\psi' : Y' ! D'$。通过拉回有限 étale 覆盖 $Y' ! Y$，我们构造出一个有限 étale 覆盖 $X' := X \times_Y Y' ! X$，其上有一个自然有限满射态射 $X' ! Y'$。注意，由于 f_* 是满射，X' 是不可约光滑仿射曲面。根据命题 3.2，X' 再次是一个在正亏格光滑射影曲线上方的 $\mathbb{A}^1$-丛——这是一个在结构上与 X 相似的曲面。因此，若 D' 不与 $\mathbb{A}^1$ 同构，那么由上面的情形 1 可知，ψ' 是一个在 D' 上扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，这将意味着 $e(Y') = e(D') \leq 0$。另一方面，$e(Y') = d \cdot e(Y) = d$。然而，这与 $d > 1$ 矛盾。因此 $D' \cong \mathbb{A}^1$。于是，根据 GGH23、注记 3.13、3.14] ，由 Nori 引理（参见定理 2.5）可知 Y'是单连通的。此外，若 $b_2(Y') = 0$，则 $e(Y') = 1$；这与我们先前注意到 $e(Y') = d$ 且 $d > 1$相矛盾。由此可知，ψ 是一个在 $\mathbb{A}^1$上扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，即 $Y \cong \mathbb{A}^2$。

子情形 3b。 设 $b_2(Y) = 1$

那么，方程（3.1）蕴含 $s + b_1(Y) = 1$，因此元组 $(s, b_1(Y))$ 的取值为 $(0,1)$ 或 $(1,0)$。

— 若 $(s, b_1(Y)) = (0,1)$，则在此情形下$e(Y) = 1$。显然，ψ 必有一个奇异纤维，在概形论意义下同构于$m\mathbb{A}^1$，其中$m > 1$是一个整数，因为$s = 0$。这是因为，

否则，$s = 0$ 便会再次推出 ψ 是 Zariski 局部平凡的，因此$Y \cong \mathbb{A}^2$，这与假设 $b_1(Y) = 1$相矛盾。因此，仿照子情形3a 中的类似论证，对 ψ应用分歧覆盖技巧，并沿用子情形 3a中的记号。利用引理2.15(2)，可得

$$1 = b_2(X') \geq b_2(Y') \geq b_2(Y) = 1,$$

因此 $b_2(Y') = 1$。若 $D' \ncong \mathbb{A}^1$，则根据上面的情形 1，可知 $\psi' : Y' ! D'$是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，这将进一步推出 $b_2(Y') = 0$，矛盾。因此 $D' \cong \mathbb{A}^1$，从而 [GGH23，注记 3.13，3.14] 根据 Nori 引理（参见定理 2.5）可知，Y' 是单连通的。然而引理 2.15(2)蕴含 $b_1(Y') \geq b_1(Y)$，这与 Y' 是单连通的且 $b_1(Y) = 1$相矛盾。因此在此情形下，$(s, b_1(Y)) = (0, 1)$ 永远不会发生。

— 若 $(s, b_1(Y)) = (1, 0)$，则在此情形下 $e(Y) = 2$。假设 ψ 具有重纤维。再次对 ψ 应用与子情形 3a 中类似的论证，其中采用分歧覆盖技巧，并沿用子情形 3a 中的记号。如上所述，$b_2(Y') = 1$，从而 $D' \cong \mathbb{A}^1$。因此，正如我们上面所注意到的，Y' 是单连通的，进而 Y'同伦于 S^2。由于 $e(Y) = e(Y') = 2$，其中 $e(Y') = d \cdot e(Y)$ 且 $d > 1$，这就导致矛盾。因此 ψ 没有重纤维。于是，根据 GGH23，注记 3.13，3.14] 以及 Nori 引理（参见定理 2.5），可知 Y 是单连通的。因此，如前所示，Y 同伦于 S^2。

这就完成了该命题的证明。 □

3.2. **当 $\bar{\kappa}(X) = 0$ 时有限同伦秩和的下降**。

同样，在这种情况下，我们先讨论有限 étale 下降的情形。事实上，下面这个更一般的陈述成立。

命题 3.9. 设 $S := \{p_1, \ldots, p_k\}$ $(k \geq 0)$ 是 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 中一组k 个点，其中当$k = 0$ 时$S = \emptyset$。设V 是一个光滑开代数曲面，且 $\varphi : V ! \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus S$ 是有限 *étale* 覆盖。那么存在有限 *étale* 覆盖 $\Phi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* ! \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$，使得$V \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus \Phi^{-1}(S)$。

特别地，若$k = 0$，则$V \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$。

证明。 证明思路与 [Fur89 引理 3 的证明相同。3]。 □

我们首先证明以下结果，这对后续讨论很有帮助。

命题 3.10。 设Y是一个光滑仿射曲面，由 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配，且满足 $\bar{\kappa}(Y) = 0$。若 $\pi_1(Y)$ 有限，则Y 是以下光滑仿射曲面之一：

(1) 与S^2同伦；(2) 一个 $\mathbb{Q}$-同调平面，且满足 $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。 设$X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$通过有限满射态射$Y$ 占优，记该态射为$f : X \to Y$。若$\deg(f) = 1$，则 f 作为双有理满射态射，根据 Zariski 主定理可知它是一个同构。于是 $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X) = \mathbb{Z}^2$，这与假设 $\pi_1(Y)$ 是有限的矛盾。因此$\deg(f) > 1$。

采用备注3.1中的记号，我们先将f分解为g和h。根据构造，诱导同态$h_*\colon \pi_1(X)\to\pi_1(Z)$是满射。由于$\pi_1(X)$是有限的，$\pi_1(Z)$也~是有限的。现在考虑有限（等价地，适当的）万有覆盖映射$p\colon Z\to Z$，于是得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} := X\times_Z \widetilde{Z} & \xrightarrow{h'} & \widetilde{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[h]{} & Z \end{array}$$

~使得 X 也是光滑且不可约的，因为 $f_*\colon \pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ 是满射，而~$q : X \to X$ 是一个有限覆盖映射，本质上是通过 $h : X \to Z$ 将万有覆盖 $p : \tilde{Z} \to Z$ 拉回所得。因此，$h' : \tilde{X} \to \tilde{Z}$ 是一个具有有限~纤维的适当态射，因而是有限满射态射。由于 $X = \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 且 q 是有限覆盖，X 同构于 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$。所以 h' 又是一个与 h 类似的有限满射态射。由于 ~X 同构于 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 是唯一分解的，且 h' 是有限满射，因此利用 [GMM21],可得

$$\rho(\widetilde{Z}) \le \rho(\widetilde{X}) = 0,$$

~ ~为唯一分解的~ ~由此可知 $\rho(Z)=0$，即Z 是 $\mathbb{Q}$-唯一分解的。于是Z 的单连通性使其成~，其中 $\Gamma(Z,\ \mathcal{O}_{\widetilde{Z}})^* = \mathbb{C}^*$。还要注意，由于$p : Z\to Z$和$g : Z\to Y$都是有限 étale 覆盖，

$$\bar{\kappa}(\widetilde{Z}) = \bar{\kappa}(Z) = \bar{\kappa}(Y) = 0.$$

这意味着 ~$Z \in \mathcal{S}_0$——即 [JSXZ24]中定义的类。因此 ~Z 与S^2 同伦，依据[JSXZ24，定理 4.2]。现在 $2 = e(\widetilde{Z}) = \deg p\cdot e(Z)$，因此数对 $(\deg p,\ e(Z)) \in \mathbb{N}^2$取值为 $(2,1)$ 或 $(1,2)$。

~还要注意，由于$p\colon Z\to Z$ 和$g : Z\to Y$ 都是有限 étale 覆盖，因此~$\pi := g\circ p : Z\to Y$是次数为$d = \deg p\cdot\deg g$的万有覆盖映射。现在我们考虑以下两种情形。

情形 1. 假设 $(\deg p, e(Z)) = (2,1)$。

由于 $1 = e(Z) =$映射 g 的次数 $\cdot\ e(Y)$，因此 $e(Y) = 1 =$映射 g 的次数，进而 $Z = Y$；在这种情形下，存在~$\pi : Z \to Y$，其为次数 $d = 2$的万有覆盖。因此 $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。由于 $e(Y) = 1$，可知 $H_2(Y;\mathbb{Q}) = (0)$。此外，Y 是光滑仿射曲面，由 AF59 定理 1] 可知，对所有 $i > 2$，$H_i(Y;\mathbb{Q}) = (0)$。因此，Y 是一个 $\mathbb{Q}$-同调平面，其基本群为$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

情形 2. 假设 $(\deg p, e(Z)) = (1,2)$。

~首先，$\deg p = 1$ 意味着$Z = Z$，因此 $\pi = g : Z\to Y$ 是一个万有覆盖。由于 $2 = e(Z) = \deg g\cdot e(Y)$，所以 $(\deg g, e(Y)) = (1,2)$ 或 $(2,1)$。

— 若 $(\deg g, e(Y)) = (1,2)$，则$Y = Z =$ ~Z，因此Y与S^2同伦，因为 ~Z也是如此。

— 若 $(\deg g, e(Y)) = (2,1)$，则再次由同一论证可知，Y 是一个 $\mathbb{Q}$-同调平面，其基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

这两种情况合在一起便完成了证明。 □

注记 3.11. 在命题 中，我们看到，在 Y 与S^2, 同伦等价的情况下，结果表明$Y \in \mathscr{S}_0$——在 [JSXZ24]中定义的类。

命题 3.12. 任何基本群同构于 $\mathbb{Z}$ 且具有正欧拉示性数的光滑仿射曲面，都不可能被 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配。

证明。 若可能，假设 $X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 通过有限满射态射真支配一个光滑仿射曲面 Y，其中 $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$ 且 $e(Y) > 0$，该态射记为 $f\colon X \to Y$。

若 $\deg(f) = 1$，则由 Zariski 主定理，f 是一个同构。因此

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X) = \mathbb{Z}^2,$$

这与假设 $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$ 矛盾。因此，不存在这样的 f 使$\deg(f) = 1$。取一个整数 $d > 1$，并假设对每个次数 $d' < d$，都不存在这样的 f。

假设存在一个次数为d 的有限满射态射$f : X \to Y$，映到一个光滑仿射曲面Y，且 $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$，并且$e(Y) > 0$。

断言。 这只有在诱导同态$f_*\colon \pi_1(X) ! \pi_1(Y)$ 为满射时才可能。

断言的证明。 — 原因如下。假设$f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 不是满射。

沿用注记 3.1 中的记号，我们先将 f 分解为 g 和 h。根据构造，诱导同态 $h_*\colon \pi_1(X) ! \pi_1(Z)$ 是满射；由于 f_* 不是满射，这个分解是非平凡的。这意味着映射 g 的次数 > 1，从而映射 h 的次数 $<$ 映射 f 的次数。注意，$\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}$ 如同 $[\pi_1(Y) : f_*(\pi_1(X))] < \infty$，由引理 2.1 及 $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$可得。此外，$e(Z) = \deg(g) \cdot e(Y) > 0$。然而，根据归纳假设，不存在这样的 h，因为映射 h 的次数 $<$ 映射 f 的次数 $= d$。由此矛盾可知，若这样的 f 存在，则 $f_*\colon \pi_1(X) ! \pi_1(Y)$ 必为满射；因此断言成立。□

考虑 Y 的二重覆盖 Y'。那么 Y' 是光滑仿射曲面，且 $\pi_1(Y') \cong \mathbb{Z}$。因此，$e(Y') = b_2(Y')$。此外，$e(Y') = 2e(Y) \geq 2$。因此，$b_2(Y') \geq 2$。由于 $f_*\colon \pi_1(X) ! \pi_1(Y)$ 是满射，f 诱导出一个有限满射态射 $f' : X' ! Y'$，其中 $X' := X \times_Y Y'$，而态射 $X' ! X$ 是伽罗瓦有限覆盖映射 $Y' ! Y$ 的拉回，因此是一个有限无分歧伽罗瓦覆盖。因此，$X' \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 再次成立。但这样的 f' 不可能存在，因为 $b_2(X') = 1 < 2 \leq b_2(Y')$。证毕。□

作为命题3.12的直接推论，我们可得到以下结果。

推论 3.13。 没有任何基本群秩为1 且具有正欧拉示性数的光滑仿射曲面能够被 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配。

现在，我们可以证明本小节的一个主要结果了。

定理 3.14。 设Y 是一个由 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配的光滑仿射曲面，且满足 $\bar{\kappa}(Y) = 0$。那么Y 是以下光滑仿射曲面之一：

(1) $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$; (2) *Fujita* 的$H[-1,0,-1]$;
(3) 与S^2, 同伦，且$Y\in\mathscr{S}_0$; (4) 一个 $\mathbb{Q}$-同调平面，且满足 $\pi_1(Y)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。 设 $X:=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 通过有限满射态射支配 Y，记该态射为 $f:X\to Y$。我们采用与上文相同的方法。若 $\deg(f)=1$，则由 Zariski 主定理，f 是同构。因此，设 $d:=\deg f>1$。

采用注 3.1中的记号，我们先将 f 分解为 g 和 h。根据构造，诱导同态 $h_*:\pi_1(X)\to\pi_1(Z)$ 是满射的。

设 Z' 是一个光滑强极小曲面，且 $Z\prime$ 作为仿射开子空间嵌入 Z 中。众所周知，$\bar{\kappa}(Z)=\bar{\kappa}(Z')=0$。因此，$Z\prime$ 是 [Koj99，表 1]中列出的曲面之一。

情形 1。 假设 $\pi_1(Z)$ 是有限的。

由于 $g:Z\to Y$ 是一个有限覆盖，因此 $[\pi_1(Y):g_*(\pi_1(Z))]=\deg g$ 是有限的，由此可知 $\pi_1(Y)$ 在这种情况下也是有限的。因此，命题 3.11 蕴含 Y 要么与 S^2 同伦，要么是一个 $\mathbb{Q}$-同调平面，且满足 $\pi_1(Y)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

情形 2。 假设 $\pi_1(Z)$ 是无限的。

由于 $Z\prime\subset Z$ 是一个 Zariski 开子集，由该开浸入诱导的同态 $\pi_1(Z')\to\pi_1(Z)$ 必定是满射，因此 $\pi_1(Z')$ 在这种情况下是无限的。于是，由 [Koj99，表 1]可知，Z' 是五个曲面之一——$O(4,1)$、$O(2,2)$、$O(1,1,1)$、$H[-1,0,-1]$ 和 $H[0,0]$。现在，本情形证明的其余部分将分为以下两个断言。

断言 2a. Z' 同构于 $O(1,1,1)$ 或 $H[-1,0,-1]$。

断言 2a 的证明。— 假设 Z′是以下三个曲面之一——O(4,1)、O(2,2)和 H[0,0],，那么 $\pi_1(Z')\cong\mathbb{Z}$。由于 $\pi_1(Z')!\ \pi_1(Z)$ 是满射，且 $\pi_1(Z)$ 是一个无限群，因此，当 Z′是 O(4,1)、O(2,2)和 H[0,0]之一时，$\pi_1(Z)\cong\mathbb{Z}$。此外，注意到 e(Z)≥e(Z′)，因为

$$e(Z)=e(Z')+e(Z\setminus Z')$$

且 Z \ Z′是仿射直线的不交并（并集可能为空）（参见 [Koj99，引理 1.4]）。因此，e(Z)>0为正，因为 Z′是 O(4,1)、O(2,2)和 H[0,0]之一，具有正欧拉示性数。然而，这与存在这样的有限态射 h : X ! Z 相矛盾；换言之，这与这样的 Z 被 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$真支配相矛盾，根据命题 3.12。因此，Z′只能是 O(1,1,1)（它还同构于 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$）或 H[−1,0,−1]，断言得证。□

断言 2b. $Z=Z'=O(1,1,1)$.

断言 *2b* 的证明。 — 显然，正如我们之前注意到的，$e(Z)\geq e(Z\prime)=0$并利用 [Koj99，引理 1.4]可知，$e(Z)=e(Z\prime)$当且仅当$Z=Z\prime$。设$e(Z)>0$。由于

h_*： $\pi_1(X)$！ $\pi_1(Z)$是满射，且 $\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^2$，因此 $\pi_1(Z)$是阿贝尔群，并且同构于以下对象之一：

(1) $\mathbb{Z}^2$；(2) $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，其中某个 $m > 1$；(3) $\mathbb{Z}$；(4) $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，其中某个 $m > 1$；(5) $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，其中某些 $m,n > 1$；(6) (1)——平凡群。

在此情形下，由于 $\pi_1(Z)$是无限的，最后三种可能性被排除，因此 $\pi_1(Z)$同构于 $\mathbb{Z}^2$、某个 $m > 1$ 的 $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，或 $\mathbb{Z}$。由于我们假设 $e(Z) > 0$，命题 3.12 和推论 3.13 一起推出 $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}^2$。现在，$\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}^2$ 且 $e(Z) > 0$，可得 $b_2(Z) \geq 2$，这再次与存在这样的有限态射 $h : X \to Z$ 矛盾，因为

$$1 = b_2(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) = b_2(X) < b_2(Z).$$

这意味着 $e(Z) = 0 = e(Z')$因此 $Z = Z'$。我们已经观察到$\pi_1(Z)$必定是阿贝尔的，而由于 $\pi_1(H[-1,0,-1])$ 是非阿贝尔的（参见 [Koj99，表 1]），Z' 因此 Z必定同构于 $O(1,1,1)$，而后者又同构于 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$。至此，上述断言得证。□

显然 Z同构于 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$是 Eilenberg-MacLane。因而，$Y$也是 Eilenberg-MacLane，因为 Z 是 Y的一个拓扑覆盖。由定理 1.3 可知，在代数簇同构的意义下，$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$和$H[-1,0,-1]$是仅有的两种具有 $\bar{\kappa} = 0$ 的光滑仿射 Eilenberg-MacLane 曲面。因此，Y 同构于这两种光滑仿射曲面之一。至此，本情形的证明以及定理的证明均告完成。□

注记 3.15. 在 [Fur89], M. Furushima 在其论文末尾指出（未给出证明），$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 是唯一一个具有 $\bar{\kappa} = 0$、且可被 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配的光滑仿射曲面。据我们所知，此后文献中尚未出现对这一断言的详细证明。定理 3.14 中的结果提供了更全面的图景，表明 Furushima 的断言并非在一般情况下都成立。事实上，$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$是 Fujita 曲面 2重 étale（étale）有限覆盖$H[-1,0,-1]$（见 [GGH23，命题 5.8] 及其中的证明）。此外，我们的定理表明，与 S^2 同伦的光滑仿射曲面有可能被 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配。然而，目前我们尚不知道如何构造从 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$到这样一个曲面的有限满射态射。

本小节的另一个主要结果如下。

定理 3.16。 设Y是由 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配且满足 $\bar{\kappa}(Y) = -\infty$ 的光滑仿射曲面。那么Y 同构于 $\mathbb{A}^2$ 或 $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^*$。

证明。 设$X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$通过有限满射态射支配$Y$，记该态射为$f : X \to Y$。我们从与上文相同的步骤开始。若$\deg(f) = 1$，则由 Zariski 主定理，$f$是一个同构；但这不可能，因为 $\bar{\kappa}(Y) = -\infty$，而 $\bar{\kappa}(X) = 0$。因此，$\deg f > 1$。

沿用备注3.1中的记号，我们先将f分解为g和h。根据构造，诱导同态h_*： $\pi_1(X) \to \pi_1(Z)$是满射。由于 $\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}^2$，因此 $\pi_1(Z)$ 必为阿贝尔的。

首先，注意到 $\bar{\kappa}(Z) = \bar{\kappa}(Y) = -\infty$，因为 g : Z ! Y 是有限 étale 态射。根据 Fujita–Miyanishi–Sugie 的一个著名结果（参见 [Fuj79], 参见 [MS80], 参见 [Sug80]），Z 具有一个 $\mathbb{A}^1$-纤维化，记作 $\varphi : Z ! B$，其像为光滑代数曲线 B。由于 Z 是光滑仿射曲面，按约化结构计算时， φ 的每个纤维都是仿射直线的不交并（参见 [Miy81]）。由于 X 是有理簇，且 Y 和 Z 受 X 支配，因此它们是单有理的，进而是有理的，因为根据 Castelnuovo 有理性判别准则，它们是定义在 $\mathbb{C}$上的代数曲面。同理可知，曲线 B 也是有理的。正如命题 3.11 的证明中所观察到的，任何被 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 真支配的光滑仿射曲面都是 $\mathbb{Q}$-唯一分解的；因此 Z 是 $\mathbb{Q}$-唯一分解的，由此引理 2.12 蕴含 B 是光滑仿射曲线，且 φ 没有可约纤维。由于 φ 是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维化，诱导同态 φ_*： $\pi_1(Z) ! \pi_1(B)$ 是满射。由于 $\pi_1(Z)$ 是阿贝尔的， $\pi_1(B)$也是如此。因此 B 是一条光滑仿射有理曲线，且 $\pi_1(B)$阿贝尔，故 B 同构于 $\mathbb{A}^1$ 或 $\mathbb{C}^*$。

令 φ 具有重纤维。则这些重纤维是概形论意义下的加厚仿射直线，即同构于$m\mathbb{A}^1$，其中$m > 1$是某个整数。然后，应用分歧覆盖技巧，我们得到一个有限 étale 覆盖$p : Z' \to Z$，使得Z'是一个具有 $\mathbb{A}^1$-纤维化的光滑仿射曲面，记为$\varphi' : Z' \to C$，其映到光滑仿射曲面C上。还要注意， φ' 没有重纤维，但它具有可约纤维，这些纤维是取约化结构的仿射直线的不交并。由于h_*： $\pi_1(X) \to \pi_1(X)$ 是满射态射，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X' := X \times_Z Z' & \xrightarrow{h'} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array}$$

其中 X′是不可约的光滑仿射曲面，且 q : X ′ ! X 是一个连通覆盖，它是覆盖 p : Z′ ! Z 沿 h : X ! Z 的拉回，而诱导映射，记为 h′: X′! Y ′，是一个有限满射态射。由于 X = $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 且 q 是有限覆盖，X′ ≅ $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$。因此，h′再次是一个类似于 h 的有限满射态射。但是，由于 Z′具有一个 $\mathbb{A}^1$-纤维化φ': Z ′ ! C，且该纤维化具有可约纤维，根据引理 2.12，我们得出 Z′必定不是 $\mathbb{Q}$-唯一分解的。然而，这与 Z ′ 被一个唯一分解曲面（例如 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$）真支配这一事实相矛盾。这意味着 φ: Z ! B 没有重纤维，且所有纤维都是不可约的。因此，事实证明 $\varphi : Z ! B$ 是 B 上的一个 $\mathbb{A}^1$-丛。

情形 1. 设 $B \cong \mathbb{A}^1$。

由此可知，在这种情形下， φ： $Z \to B$ 是 $\mathbb{A}^1$上的一个丛，因此$Z \cong \mathbb{A}^2$。由于g： $Z \to Y$ 是一个有限 étale 态射，因此$Y \cong \mathbb{A}^2$。

情形 2. 设$B \cong \mathbb{C}^*$。

在此情形下，$\varphi\colon Z \to B$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-丛，定义在 $\mathbb{C}^*$上。因此，根据引理 $Z \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^*$ 可得2.14。由于$g\colon Z \to Y$ 是一个有限 étale 覆盖，由推论3.5 可知$Y \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^*$。

证明至此完成。 □

现在，利用此前证明的所有结果，我们已准备好证明主要结论。

定理 3.17. 设$f\colon X ! Y$ 是光滑仿射曲面之间的有限满射态射。若$\bar{\kappa}(X) = 0$ 且X 具有有限同伦秩和性质，则Y 也具有该性质。

证明。 首先注意到，由于Y 被X 真支配，且 $\bar{\kappa}(X) = 0$，因此 $\bar{\kappa}(Y)$ 要么是$-\infty$，要么是0。由于X 具有有限同伦秩和性质，且 $\bar{\kappa}(X) = 0$，由定理1.4和定理1.3 可知X 同构于下列曲面之一：

(1) $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$；(2) 藤田的$H[-1,0,-1]$；(3) 与$S^2$同伦；
(4) 基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 a $\mathbb{Q}$-同调平面。

注意，$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 是$H[-1,0,-1]$的2重 étale（étale）覆盖。还要注意，基本群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Q}$-同调平面的万有覆盖与S^2同伦。因此，不失一般性，我们可以假设X 要么是 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$，要么与$S^2$同伦。

— 如果$X \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$，那么定理3.14 和定理3.16 共同推出$Y$ 具有有限同伦秩和性质。— 如果 X 与 S^2，同伦，那么利用定理 3.6 可知，Y 具有有限同伦秩和性质。

证明至此完成。 □

4. 例子

我们以一个例子结束本文，该例表明，一般而言，光滑仿射曲面之间的有限满射态射下的 Eilenberg–MacLane 下降并不成立。

例 4.1. 设 $Y := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$，其中 $\Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$ 表示对角子簇。由于 $\Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$ 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的丰沛除子，可知 Y 是一个光滑仿射曲面。另请注意，Y 具有作为 $B = \mathbb{P}^1$ 上的 $\mathbb{A}^1$-丛的结构。

现在考虑一个有限分歧态射 $C \to B$，其中 C 是光滑非有理曲线，并令 X 为拉回的 $\mathbb{A}^1$-丛，定义在 C 上。于是诱导态射

$$f : X \longrightarrow Y$$

是有限的。由于Y 是仿射的，X 也同样是仿射的。曲面X 根据引理2.3(3) 是 Eilenberg–MacLane 空间，而Y 根据引理2.3(4) 则不是。

不过，值得注意的是，根据引理 2.10，Y 与 $\mathbb{P}^1$ 同伦等价，因此也与S^2同伦等价。

致谢

作者谨向 R. V. Gurjar 教授表示诚挚感谢，感谢他提出了启发本项工作的主要问题之一。作者还要深深感谢 Sudarshan R. Gurjar 教授，感谢他进行多次富有帮助的讨论，仔细审阅论文初稿，并提出许多宝贵建议，从而显著改善了文章的阐述。作者感谢他们二位慷慨地允许他以单作者论文的形式发表本稿。他感谢印度政府科学技术部通过 INSPIRE 教师奖学金（编号：DST/INSPIRE/04/2024/003379）提供的资金支持。

声明与陈述

本稿件不存在利益冲突，亦未获得外部资助。本文未生成或使用任何数据。

参考文献

[AF59] Aldo Andreotti 和 Theodore Frankel。超平面截面的 Lefschetz 定理。《数学年刊》（第 2 辑），69：713–717，1959。2，18[BH25] Indranil Biswas 和 Buddhadev Hajra。关于具有有限同伦秩和的 Stein 空间。《数学论坛》，2025。3[Cha83] T. C. Chau。关于 Fox 关于 Fenchel 猜想的论文的一则注记。《美国数学会会刊》，88(4)：584–586，1983。7[Fuj79] Takao Fujita。关于 Zariski 问题。《日本学士院纪要 A 辑数学科学》，55(3)：106–110，1979。22[Fuj82] Takao Fujita。关于非完备代数曲面的拓扑。《东京大学理学部纪要 IA 辑数学》，29(3)：503–566，1982。3[Fur89] Mikio Furushima。被 $C \times C^*$ 真支配的正规仿射曲面。《数学年鉴》，285(3)：353–368，1989。4，13，17，21[GGH23] R. V. Gurjar、S. R. Gurjar 和 B. Hajra。代数曲面理论中的 Eilenberg-MacLane 空间。《几何专论》，217(2)：第 31 号论文，27 页，2023。3，7，16，17，21[Gie64] Burghart Giesecke。可数解析空间的单纯分解。《数学杂志》，83：177–213，1964。10[GMM21] Rajendra Vasant Gurjar、Kayo Masuda 和 Masayoshi Miyanishi。仿射空间纤维化，De Gruyter 数学研究丛书第 79 卷。De Gruyter，柏林，2021。18[GS84] R. V. Gurjar 和 A. R. Shastri。仿射曲面无穷远处的基本群。《海尔维蒂数学评论》，59(3)：459–484，1984。13[Gur97] R. V. Gurjar。Suzuki 公式的新证明。《印度科学院数学科学会刊》，107(3)：237–242，1997。6[Hat02] Allen Hatcher。代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2002。2[Iit82] Shigeru Iitaka。代数几何，北荷兰数学文库第 24 卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1982。代数簇双有理几何导论，数学研究生教材第 76 卷。5，10[JSXZ24] Jia Jia、Takahiro Shibata、Junyi Xie 和 De-Qi Zhang。拟射影簇的自同态：迈向 Zariski 稠密轨道与 Kawaguchi–Silverman 猜想。《数学研究快报》，31(3)：701–746，2024。4，9，10，18，19[Koj99] Hideo Kojima。对数 Kodaira 维数为零的开有理曲面。《国际数学杂志》，10(5)：619–642，1999。20，21

[Miy81] Masayoshi Miyanishi。非完备代数曲面，数学讲义第 857 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1981。12，22[Miy86] Masayoshi Miyanishi。多项式环的正规仿射子代数。载于《代数与拓扑理论》（城崎，1984），第 37–51 页。纪伊国屋书店，东京，1986。13[Miy01] Masayoshi Miyanishi。开代数曲面，CRM 专著丛书第 12 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。8[MS80] Masayoshi Miyanishi 和 Tohru Sugie。含有柱状开集的仿射曲面。《京都大学数学杂志》，20(1)：11–42，1980。22[MT68] Robert E. Mosher 和 Martin C. Tangora。上同调运算及其在同伦论中的应用。哈珀与罗出版社，纽约—伦敦，1968。2[Nor83] Madhav V. Nori。扎里斯基猜想及相关问题。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），16(2)：305–344，1983。6[Ser59] J.-P. Serre。关于单有理簇的基本群。《伦敦数学会杂志》，34：481–484，1959。2，5[Spa66] Edwin H. Spanier。代数拓扑。麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多—伦敦，1966。2[Sug80] Tohru Sugie。关于含有柱状开集的曲面的刻画。《大阪数学杂志》，17(2)：363–376，1980。22[Suz77] Masakazu Suzuki。关于复二维空间上复加法群的全纯作用。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），10(4)：517–546，1977。6[Whi49] J. H. C. Whitehead。组合同伦。II。《美国数学会通报》，55：453–496，1949。8[Xia91] Gang Xiao。 π_1 椭圆曲面和超椭圆曲面的。《国际数学杂志》，2(5)：599–615，1991。7

统计数学部，印度统计研究所加尔各答分部，印度加尔各答巴拉纳加尔 B. T. 路 203 号，邮编 700108电子邮件地址： hajrabuddhadev92@gmail.com