arXiv:2601.17505v1 [math.RA] 24 Jan 2026

李超代数的 HNN 扩张

M.LADRA，I. PÁEZ-GUILLÁN，和C. ZARGEH

摘要. 我们构造了李超代数的 HNN扩张，并证明每个李超代数都嵌入其任意一个HNN扩张中。作为应用，我们进一步证明，任何至多可数维的李超代数都可以嵌入一个由两个生成元生成的李超代数中。

引言

群的 Higman-Neumann-Neumann 扩张（HNN扩张）是在研究群的可嵌入性时引入的 [5] 。HNN扩张的构造思想已通过多种方式推广到其他代数结构，例如李代数 [8, 11], 、半群 [6], 、结合环[3, 8]以及莱布尼茨代数 [7]。HNN扩张是组合群论中引入嵌入定理的有力工具，因为它们可以用来证明每个可数群都能嵌入一个由两个生成元生成的群中。对于李代数和莱布尼茨代数，也存在类似群论中相应结论的嵌入定理，即每个至多可数维的李（莱布尼茨）代数都能嵌入一个由两个生成元生成的李（莱布尼茨）代数中。群与代数的 HNN扩张构造之间的主要区别在于：群的 HNN扩张由子群和同构定义，而代数的 HNN扩张则源自子代数和导子。此外，李（莱布尼茨）代数 HNN扩张的构造方法有所不同，它基于 Gröbner-Shirshov 基理论和组合-菱形引理（参见 [1]）。

本文采用 [2], 中引入的李超代数的 Gröbner-Shirshov 基和组合-菱形引理，构造李超代数的 HNN扩张，并证明每个李超代数都可以嵌入其 HNN扩张中。Mikhalev 在 [4] 中证明，可数维李超代数可以嵌入由两个元素生成的李超代数中。

本文结构安排如下。第 1 节回顾李超代数的一些必要概念和事实。第 2 节遵循关于李超代数的论文 [2], ，回顾李超代数的 Gröbner–Shirshov 基的构造及其性质。第 3 节构造李超代数的 HNN扩张，并证明每个李超代数都嵌入其任意一个HNN扩张中。最后，第 4 节利用 HNN扩张，给出一个不同的证明，证明可数维李超代数可嵌入由两个元素生成的李超代数。

日期：2018年。2010 数学主题分类。17A36, 17B01, 17B35, 16S15。关键词与短语。李超代数，HNN扩张，导子，Gröbner-Shirshov 基。

1. 预备知识

本节回顾李超代数的概念和性质。

若 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间，则 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$，其中 V 的偶子空间和奇子空间分别记为 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$。$V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$ 中的非零元素称为齐次元素。对于 V 中的齐次元素，考虑分次$|\ |\colon\ V \to \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$，定义如下：

$$|x| = \begin{cases} \bar{0}, & \text{if } x \in V_{\bar{0}}, \\ \bar{1}, & \text{if } x \in V_{\bar{1}}. \end{cases}$$

定义 1.1。李超代数 L 是一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$，配备有双线性超括号结构 $[\ ,\ ]\colon\ L \otimes L \to L$，该结构保持次数（即 $|a \otimes b| = |a| + |b|$），并满足分次反对称性和超雅可比恒等式，具体如下：

$$\begin{gathered} [x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x], \\ [x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]], \\ [x_{\bar{0}}, x_{\bar{0}}] = 0, \\ [x_{\bar{1}}, [x_{\bar{1}}, x_{\bar{1}}]] = 0, \end{gathered}$$

对于所有齐次元素 $x,\ y,\ z \in L$、$x_{\bar{0}} \in L_{\bar{0}}$和 $x_{\bar{1}} \in L_{\bar{1}}$。注意，当 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2,\ 3$ 时，后两个恒等式是前面恒等式的平凡推论。

设 $\{X_i\}_{i\in\Lambda} \subset L_{\bar{0}} \cup L_{\bar{1}}$ 是 L 的一组基，其结构常数给出为

$$[X_i, X_j] = \sum_{l\in\Lambda} \alpha_{ij}^l X_l.$$

将 $|X_i|$ 记为 $|i|$，显然当 $|i| + |j| \neq |l|$ 时有 $\alpha_{ij}^k = 0$。结构常数满足超雅可比恒等式：

$$\sum_{l\in\Lambda} (\alpha_{jk}^l \alpha_{il}^m - \alpha_{ij}^l \alpha_{lk}^m - (-1)^{|i||j|} \alpha_{ik}^l \alpha_{jl}^m) = 0, \tag{1.1}$$

其中

$$\alpha_{ij}^l = -(-1)^{|i||j|} \alpha_{ji}^l.$$

此外，它们还满足

$$\alpha_{ii}^l = 0,$$

当 $|i| = \bar{0}$ 时，以及

$$\sum_{l\in\Lambda} \alpha_{ii}^k \alpha_{il}^m = 0,$$

如果 $|i| = \bar{1}$。

定义 1.2. 次数为 $|d|$ 的导子 d，$|d| \in \mathbb{Z}_2$，定义为满足下列条件的线性映射$d\colon\ L \to L$

$$d([a, b]) = [d(a), b] + (-1)^{|d||a|}[a, d(b)].$$

我们将次数为 i 的导子空间记为 $\mathrm{Der}_i(L)$，并将导子空间定义为

$$\mathrm{Der}(L) = \mathrm{Der}_{\bar{0}}(L) \oplus \mathrm{Der}_{\bar{1}}(L).$$

可以证明，$\mathrm{Der}(L)$ 是 $\mathrm{End}(L)$ 的分次李子代数。

例 1.3. 设 L 是一个李超代数，且 $a \in L$。由雅可比恒等式可知，$\mathrm{ad}_a\colon\ L \to L$，$b \mapsto [a, b]$是 L 的一个次数为 $|a|$ 的导子。

2. 李超代数的 Gröbner-Shirshov 基理论

本节回顾李超代数情形下 Gröbner-Shirshov 基理论和合成-菱形引理（参见 [2]）。事实上，合成-菱形引理是算法与组合代数中的一个强有力定理，它为由生成元和定义关系给出的代数提供线性基和标准形。

设有一个自由李超代数，以及由集合 S 生成的分次理想 Id(S)。若 S 是一个 Gröbner-Shirshov 基，则 Id(S) 中任意多项式 f 的首项 f 都包含 $\bar{s}$ 作为子词，其中某个 $s \in S$ （见下文引理 2.7）。接下来，我们将更详细地阐述这一思想。为此，我们需要一个有序生成元集以及一个单项式序。值得指出的是，某个集合是否为 Gröbner-Shirshov基，总是相对于特定的单项式序而言的。

设 $T = T_{\bar{0}} \cup T_{\bar{1}}$ 是一个带有线性序 $\prec$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次集合，并设 T^*（分别为 $T^{\#}$）是以 T 为字母的结合词半群（分别为以 T 为字母的非结合词群胚）。半群 T^* 和群胚 $T_{\#}$ 上都存在诱导的 $\mathbb{Z}_2$-分次：分别为 $T^* = T^*_{\bar{0}} \cup T^*_{\bar{1}}$ 和 $T_{\#} = T_{\#\bar{0}} \cup T^{\#}_{\bar{1}}$。指标 $\bar{0}$ 和 $\bar{1}$ 分别表示偶元素和奇元素。字 u 的长度记为 $l(u)$，空词记为 1。

注记 2.1。对于一个结合字 $u \in T^*$，存在一种特定的括号排列，记作 (u)，以及一个典范的去括号同态 ρ: $T_{\#} \to T^*$，其定义为 $\rho((u)) = u$ for $u \in T^*$。

我们定义**字典序** 和**长度字典序**，分别记作 $<$ 和 $\ll$，定义在 T^*上，如下:

(i) 对任意非空字 u, $u < 1$；并且归纳地，若 $u = x_i u'$、$v = x_j v'$，且 $x_i \prec x_j$ 或 $x_i = x_j$ 和 $u' < v'$，则 $u < v$。(ii) 若 $l(u) < l(v)$ 或 $l(u) = l(v)$，且 $u < v$，则 $u \ll v$。

注记 2.2。在 $T^{\#}$ 上，序关系 $<$ 和 $\ll$ 定义如下:

- $u < v$ 当且仅当 $\rho(u) < \rho(v)$。
- $u \ll v$ 当且仅当 $\rho(u) \ll \rho(v)$。

定义 2.3. 非空字 u 称为***Lyndon-Shirshov*字**，如果 $u \in T$，或者对于 $vw > wv$的任意分解 $u = vw$，若 v, $w \in T^*$，则成立；也就是说， u大于它的任意循环置换。非空字 u称为**超-*Lyndon-Shirshov*字**，如果它要么是一个Lyndon-Shirshov字，要么具有形式 $u = vv$，其中v是在 $T^*_{\bar{1}}$中的一个Lyndon-Shirshov字。

定义 2.4. 非空非结合字 u称为***Lyndon-Shirshov*单项式**，如果 u是 T 的一个元素，或者

(i) 若 $u = u_1 u_2$，则 u_1, u_2 是Lyndon-Shirshov单项式，且满足 $u_1 > u_2$; (ii) 若 $u = (v_1 v_2)w$，则 $v_2 \leq w$。

非空非结合字 u称为**超*Lyndon-Shirshov*单项式**，如果它要么是 Lyndon-Shirshov 单项式，要么具有 $u = vv$ 的形式，其中 v 是 $T^{\#}_{\bar{1}}$ 中的 Lyndon-Shirshov 单项式。

若将域 $\mathbb{K}$ 上以 T 为生成元的自由结合代数记为 $A\langle T\rangle$，其中 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$, 3，则可以在 $A\langle T\rangle$ 上定义李超代数结构，其

超括号

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx,$$

对于任意 x， $y \in A\langle T\rangle$。记 $L\langle T\rangle$ 为由 T生成的自由李超代数，它是带有上述超括号的 $A\langle T\rangle$ 的分次子代数。作为直接推论，展开超括号会得到属于 $A\langle T\rangle$的结合词。

超Lyndon-Shirshov字集合与超 Lyndon-Shirshov 单项式集合之间存在一一对应关系。下文将基于 Shirshov 特殊括号化 [10], 描述超Lyndon-Shirshov字的括号化。它在自由李超代数中多项式之间的合成定义中起着关键作用。

引理 2.5 ([2])。 设 u和 v 是超*Lyndon-Shirshov*字，且 v 包含在 u 中作为子词。写作 $u = avb$，其中 a、$b \in T^*$。那么，在 u 上存在一种括号排列 $[u] =(a[v]b)$，使得 $[v]$ 是超*Lyndon-Shirshov*单项式， $[u] = u$，且 $[u]$ 的首项系数为 1 或 2。

给定一个超Lyndon-Shirshov字 $u = avb$，其中 v 是另一个超Lyndon-Shirshov字，且 $a, b \in T^*$，相对于 v, $[u]_v$ 的括号化定义如下:

(i) 如果 $[u]$ 的首项系数为 1，则为 $[u]_v =(a[v]b)$;

(ii) 如果 $[u]$ 的首项系数为 2，则为 $[u]_v = \frac{1}{2}(a[v]b)$。

我们注意到 $[u]_v$ 是首一多项式，且 $\overline{[u]_v} = u$。再设 p 是 $L\langle T\rangle$中的首一多项式，使得 $\bar{p}$是一个超Lyndon-Shirshov字。相对于 p 的 u 上的括号化 $[u]_p$定义为在 $[u]_{\bar{p}}$ 中以 $\bar{p}$ 代入 p 所得的结果。同样， $[u]_p$是首一多项式，且 $[u]_p = u$。

多项式的组合。

(1) **结合组合**。设 f, g 是自由结合代数 $A\langle T\rangle$ 中的首一元素，其首项分别为 f 和 $\bar{g}$。

若存在 $w = f a = b\bar{g}$ 且 $a, b \in T^*$ 满足 $l(f) > l(b)$，则交叠合成为

$$(f, g)_w = fa - bg.$$

若 $w = f = a\bar{g}b$，则 包含合成为

$$(f, g)_w = f - agb.$$

注意到 $(f, \overline{g})_w \ll w$。

（2）**李合成**。设 f， g 是自由李超代数 $L\langle T\rangle$ 中的首一多项式，其中首项分别为 f 和 $\bar{g}$。

若存在 a， $b \in T^*$，使得 $fa = b\bar{g} = w$ 满足 $l(f) > l(b)$，则定义交合成 为

$$\langle f, g\rangle_w = [w]_f - [w]_g.$$

若存在 a， $b \in T^*$，使得 $f = a\bar{g}b = w$，则定义 包含合成 为

$$\langle f, g\rangle_w = f - [w]_g.$$

我们注意到 $\langle f, \overline{g}\rangle \ll w$。

结合合成与李合成密切相关，正如 [2, 引理 2.7 和定理 2.8]所示。事实上，这两类合成之间存在等价关系。下文中，我们将只称其为李合成。

为了定义 Gröbner-Shirshov 基，必须给出合成的平凡性判据。在文献中，合成的平凡性有时也称为对合成封闭或对合成完备。

平凡性判据。设 S 是 $L\langle T\rangle \subset A\langle T\rangle$ 中首一多项式构成的集合，Id(S) 是由自由李超代数 $L\langle T\rangle$ 中的 S 生成的分次理想。

若对于任意 $f, g \in S$，只要相对于某个 $w \in T^*$ 定义了李合成 $\langle f, g\rangle_w$，我们就有

$$\langle f, g\rangle_w = \sum \alpha_i a_i s_i b_i,$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{K}$、 $a_i, b_i \in T^*$ 和 $s_i \in S$，且 $a_i s_i b_i \ll w$，我们称 S 在李合成下平凡。

定义 2.6. 如果一组首一多项式 S 对分次理想 Id(S) 关于李合成为平凡，则称其为该分次理想的 Gröbner-Shirshov基。

文献 [2] 介绍了如何为 $L\langle T\rangle$ 的任意分次理想 Id(S) 构造 Gröbner-Shirshov基。

下一个引理基于希尔绍夫引理。根据该引理，由 S 生成的分次理想中每个首一多项式的首项都可以关于 S 中的一个元素进行约化。该引理的主要推论是，我们可以通过取不可约单项式集合，为商代数 $L\langle T\rangle / \mathrm{Id}(S)$ 确定一个线性基。

引理 2.7 ([10])**.** 若 S 是分次理想$\mathrm{Id}(S)$的 *Gröbner-Shirshov*基，¯ ¯那么对于任意 $f \in \mathrm{Id}(S)$，我们可以将字 f 表示为 $f = a\bar{s}b$，其中 $s \in S$ 且a， $b \in T^*$。

3. HNN 扩张的构造

本节构造李超代数的 HNN 扩张。设 L 是域 $\mathbb{K}$ 上的李超代数，且 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$,3， A 是一个分次子代数。假设 d: $A \to L$ 是定义在分次子代数 A 上的导子。我们可以只考虑齐次导子。我们将 HNN 扩张定义为李超代数

$$H \coloneqq \langle L, t : d(a) = [t, a],\ a \in A\rangle.$$

这里 t 是一个新的次数为 $|t| = |d|$ 的符号，不属于 L，并被添加到 L 的表示中。我们还添加关系 $[t, a] = d(a)$（其中 $a \in A$）。接下来，我们给出一个关于结构常数的等价表示，并检查新定义的表示中多项式组合的平凡性判据。

我们考虑 X 的一个线性基，其中包括 A 的一个基，记为 B，以及一个全序 $B < X \setminus B < t$。我们还考虑以下超括号:

$$[x, y] = \sum_{v \in X} \alpha_{xy}^{v} v$$

对于 $x,\ y \in X$。由于 A 是一个子代数，因此对于 $a,\ b \in B$ 和 $v \notin B$，有 $\alpha_{ab}^{v} = 0$。此外，我们有

$$d(a) = \sum_{v \in X} \beta_a^v v$$

对于 $a \in B$。因此，我们得到李超代数 L的 HNN扩张的如下表示

$$\begin{aligned} H := \langle X, t \mid & [x,y] = \sum_{v\in X} \alpha_{xy}^{v} v,\ [x_{\bar{1}}, x_{\bar{1}}] = \sum_{v\in X} \alpha_{x_{\bar{1}}x_{\bar{1}}}^{v} v, \\ & [t,a] = \sum_{v\in X} \beta_a^v v, \quad x, x_{\bar{1}}, y \in X,\ x > y,\ |x_{\bar{1}}| = \bar{1},\ a \in B \rangle. \end{aligned}$$

现在，我们研究该表示可能的组合，并检查它们是否平凡。首先，回顾第 1 节，由于雅可比恒等式，结构常数满足

$$\sum_{v\in X} (\alpha_{yz}^{v}\alpha_{xv}^{u} - \alpha_{xy}^{v}\alpha_{vz}^{u} - (-1)^{|x||y|}\alpha_{xz}^{v}\alpha_{yv}^{u}) = 0, \tag{3.1}$$

对于 $x,\ y,\ z,\ v,\ u \in X$，且由于反对称性，$\alpha_{xy}^{v} = -(-1)^{|x||y|}\alpha_{yx}^{v}$。特别地，注意当 $|x| = 0$ 时，$\alpha_{xx}^{v} = 0$。此外，导子条件 $\bar{d}([x,y]) = [d(x),\ y] + (-1)^{|x||y|}[x, d(y)]$ 用结构常数表示为

$$\sum_{c\in B} \alpha_{ab}^{c}\beta_c^u = \sum_{v\in X} (\beta_a^v \alpha_{vb}^{u} + (-1)^{|d||a|}\beta_b^v \alpha_{av}^{u}), \tag{3.2}$$

对于 $a,\ b,\ c \in B$ 和 $v,\ u \in X$。

我们记

$$f_{xy} = [x,y] - \sum_{v\in X} \alpha_{xy}^{v} v,$$
$$f_{xx} = [x,x] - \sum_{v\in X} \alpha_{xx}^{v} v,$$

and

$$g_a = [t,a] - \sum_{v\in X} \beta_a^v v.$$

注意，只有当 $|x| = 1$ 时，考虑 f_{xx} 才有意义。我们还将 S 视为 $L\langle X \cup \{t\}\rangle$ 中的如下首一多项式集合：

$$S = \{f_{xy}, f_{xx}, g_a \mid x, y \in X, a \in B\}.$$

现在，让我们检查李多项式 f_{xy}, f_{xx}, g_a 的所有可能合成。令 $x > y > z$ and $a > b$，显然这些多项式在 $A\langle X \cup \{t\}\rangle$ 中的首项分别为 $f_{xy} = xy$、$f_{xx} = 2xx$ 和 $g_a = ta$。因此，唯一的李合成如下：$\langle f_{xy}, f_{yz}\rangle_{xyz}$、$\langle f_{xy}, f_{yy}\rangle_{xyy}$、$\langle f_{xx}, f_{xy}\rangle_{xxy}$、$\langle g_a, f_{ab}\rangle_{tab}$、$\langle g_a, f_{aa}\rangle_{taa}$。注意，它们全都是交叠合成。如下文所示，这五种合成中只有两种是平凡的。

$$\begin{aligned}
\langle f_{xy}, f_{yz}\rangle_{xyz} &= [f_{xy}, z] - [x, f_{yz}] \\
&= [[x,y],z] - \sum_{v\in X}\alpha_{xy}^{v}[v,z] - [x,[y,z]] + \sum_{v\in X}\alpha_{yz}^{v}[x,v] \\
&= -(-1)^{|x||y|}[y,[x,z]] - \sum_{v\in X}\alpha_{xy}^{v}[v,z] + \sum_{v\in X}\alpha_{yz}^{v}[x,v] \\
&= -(-1)^{|x||y|}[y,[x,z] - \sum_{v\in X}\alpha_{xz}^{v}v] - (-1)^{|x||y|}\sum_{v\in X}\alpha_{xz}^{v}([y,v] - \sum_{u\in X}\alpha_{yv}^{u}u) \\
&\quad - \sum_{v\in X}\alpha_{xy}^{v}([v,z] - \sum_{u\in X}\alpha_{vz}^{u}u) + \sum_{v\in X}\alpha_{yz}^{v}([x,v] - \sum_{u\in X}\alpha_{xv}^{u}u) \\
&\quad - \sum_{u\in X}\Big(- (-1)^{|x||y|}\sum_{v\in X}\alpha_{xz}^{v}\alpha_{yv}^{u} + \sum_{v\in X}\alpha_{xy}^{v}\alpha_{vz}^{u} + \sum_{v\in X}\alpha_{yz}^{v}\alpha_{xv}^{u}\Big)u \\
&= -(-1)^{|x||y|}[y, f_{xz}] - (-1)^{|x||y|}\sum_{v\in X}\alpha_{xz}^{v}f_{yv} - \sum_{v\in X}\alpha_{xy}^{v}f_{vz} + \sum_{v\in X}\alpha_{yz}^{v}f_{xv}.
\end{aligned}$$

我们看到 $\langle \overline{f_{xy}, f_{yz}\rangle_{xyz}} = xzy < xyz$，因此该合成是平凡的。

$$\begin{aligned}
\langle g_a, f_{ab}\rangle_{tab} &= [g_a, b] - [t, f_{ab}] \\
&= [[t,a],b] - \sum_{v\in X}\beta_{a}^{v}[v,b] - [t,[a,b]] + \sum_{v\in B}\alpha_{ab}^{v}[t,v] \\
&= -(-1)^{|t||a|}[a,[t,b]] - \sum_{v\in X}\beta_{a}^{v}[v,b] + \sum_{v\in B}\alpha_{ab}^{v}[t,v] \\
&= -(-1)^{|t||a|}[a,[t,b] - \sum_{v\in X}\beta_{b}^{v}v] - (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_{b}^{v}([a,v] - \sum_{u\in X}\alpha_{av}^{u}u) \\
&\quad - \sum_{v\in X}\beta_{a}^{v}([v,b] - \sum_{u\in X}\alpha_{vb}^{u}u) + \sum_{v\in B}\alpha_{ab}^{v}([t,v] - \sum_{u\in X}\beta_{v}^{u}u) \\
&\quad + \sum_{u\in X}\Big(- (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_{b}^{v}\alpha_{av}^{u} - \sum_{v\in X}\beta_{a}^{v}\alpha_{vb}^{u} + \sum_{v\in B}\alpha_{ab}^{v}\beta_{v}^{u}\Big)u \\
&= -(-1)^{|t||a|}[a, g_b] - (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_{b}^{v}f_{av} - \sum_{v\in X}\beta_{a}^{v}f_{vb} + \sum_{v\in B}\alpha_{ab}^{v}g_{v}.
\end{aligned}$$

同样，我们有 $\langle g_a,\ \overline{f_{ab}\rangle_{tab} = tb}a < tab$，因此这个合成也是平凡的。

然而，如果 $|x| = 1$，则成立，

$$
\begin{aligned}
\langle f_{xx}, f_{xy}\rangle_{xxy} &= \frac{1}{2}[f_{xx}, y] - [x, f_{xy}] \\
&= \frac{1}{2}[[x,x],y] - \frac{1}{2}\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}[v,y] - [x,[x,y]] + \sum_{v\in V}\alpha^v_{xy}[x,v] \\
&= -\frac{1}{2}[[x,x],y] + [x,[x,y]] - \frac{1}{2}\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}[v,y] + \sum_{v\in V}\alpha^v_{xy}[x,v] \\
&= [-\frac{1}{2}[x,x] + \frac{1}{2}\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}v, y] - \frac{1}{2}\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}([v,y] - \sum_{u\in X}\alpha^u_{vy}u) \\
&\quad + [x, [x,y] - \sum_{v\in X}\alpha^v_{xy}v] + \sum_{v\in X}\alpha^v_{xy}([x,v] - \sum_{u\in X}\alpha^u_{xv}u) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}([v,y] - \sum_{u\in X}\alpha^u_{vy}u) + \sum_{v\in V}\alpha^v_{xy}([x,v] - \sum_{u\in X}\alpha^u_{xv}u) \\
&\quad + \sum_{u\in X}\Big(-\sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}\alpha^u_{vy} + \sum_{v\in X}\alpha^v_{xy}\alpha^u_{xv} + \sum_{v\in V}\alpha^v_{xy}\alpha^u_{xv}\Big)u \\
&= -\frac{1}{2}[f_{xx}, y] + [x, f_{xy}] - \sum_{v\in X}\alpha^v_{xx}f_{vy} + 2\sum_{v\in X}\alpha^v_{xy}f_{xv};
\end{aligned}
$$

首项单项式为 $\langle f_{xx}, f_{xy}\rangle_{xxy} = \overline{xxy}$，因此该合成并非平凡。同样，如果 $|y| = 1$，我们有

$$
\langle f_{xy}, f_{yy}\rangle_{xyy} = [x, \frac{1}{2}f_{yy}] - (-1)^{|x||y|}[y, f_{xy}] - 2\sum_{v\in X}\alpha^v_{xy}f_{vy} + \sum_{v\in X}\alpha^v_{yy}f_{xv}.
$$

首项单项式为 $\langle f_{xy}, f_{yy}\rangle_{xyy} = \overline{xyy}$，因此合成仍然不平凡。最后，我们研究最后一个合成 $\langle g_a, f_{aa}\rangle_{taa}$，其中 $|a| = 1$。

$$
\begin{aligned}
\langle g_a, f_{aa}\rangle_{taa} &= [g_a, a] - \frac{1}{2}[t, f_{aa}] \\
&= [[t,a],a] - \sum_{v\in X}\beta_a^v[v,a] - \frac{1}{2}[t,[a,a]] + \frac{1}{2}\sum_{v\in B}\alpha_{aa}^v[t,v] \\
&= \frac{1}{2}[t,[a,a]] - (-1)^{|t||a|}[a,[t,a]] - \sum_{v\in X}\beta_a^v[v,a] + \frac{1}{2}\sum_{v\in B}\alpha_{aa}^v[t,v] \\
&= \frac{1}{2}[t,[a,a] - \sum_{v\in X}\alpha_{aa}^v v] + \frac{1}{2}\sum_{v\in B}\alpha_{aa}^v([t,v] - \sum_{u\in X}\beta_v^u u) \\
&\quad - (-1)^{|t||a|}[a,[t,a] - \sum_{v\in X}\beta_a^v v] - (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_a^v([a,v] - \sum_{u\in X}\alpha_{av}^u u) \\
&\quad - \sum_{v\in X}\beta_a^v([v,a] - \sum_{u\in X}\alpha_{va}^u u) + \frac{1}{2}\sum_{v\in B}\alpha_{aa}^v([t,v] - \beta_v^u u) \\
&\quad + \sum_{u\in X}\Big(\sum_{v\in B}\alpha_{aa}^v\beta_v^u - (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_a^v\alpha_{av}^u - \sum_{v\in X}\beta_a^v\alpha_{va}^u\Big)u \\
&= \frac{1}{2}[t,f_{aa}] - (-1)^{|t||a|}[a,g_a] - (-1)^{|t||a|}\sum_{v\in X}\beta_a^v f_{av} - \sum_{v\in X}\beta_a^v f_{va} + \sum_{v\in X}\alpha_{aa}^v g_v.
\end{aligned}
$$

由于首项单项式为 $\langle g_a,\ f_{aa}\rangle_{taa} = \overline{taa}$，因此该合成并非平凡。

计算李超代数 HNN扩张表示中的多项式可能产生的组合，有助于我们提炼出其 Gröbner-Shirshov基中多项式次数的一般规律。事实上，这是一种基于 Shirshov算法 [10]的实验性方法，它表明，将 S 扩展为更大的集合后，新多项式的次数至少为二。这证明李超代数 L 嵌入于 H。因此，根据我们的计算，可以直接得到以下定理。

定理3.1. 每个李超代数都嵌入其 *HNN*扩张中。

4. 应用

Mikhalev [9] 的工作给出了一个李超代数的嵌入性定理，其对应于群论中的一个已知定理（见 [5]）。Mikhalev 证明，任何至多可数维的李超代数都能嵌入到一个由两个生成元生成的李超代数中。下文将说明，Mikhalev 的方法与李超代数 HNN扩张的概念相容。

对于下一个引理，我们使用李超代数的半直积（见 [4]）。

引理4.1。 设 L是一个李超代数， A 是 L 的一个分次子代数，且在子集 Z上自由生成。那么每个映射 d: $Z \to L$ 都可以扩展为从 A到 L的一个导子。

证明。 设 L' 是一个阿贝尔李超代数，其底层线性空间为 L。由于L'是阿贝尔的，因此 $L'_{\bar{0}} = 0$，即对于所有 $x, y \in L'$，都有 $[x, y] = 0$。定义态射 h: $A \to \mathrm{Der}(L')$，使得 $h(a)(l) = [l, a]$。考虑 $A \ltimes L'$（A通过态射 h作用于 L'）以及李超代数同态 f: $A \to A \ltimes L'$，其定义为对每个 $z \in Z$， $f(z) = (z, d(z))$。对于任意的 $a \in A$，令 $f(a) = (u(a)\ D(a))$。

那么对于 $a_1, a_2 \in A$，我们有

$$\begin{aligned}(u([a_1,a_2]), D([a_1,a_2])) &= f([a_1,a_2]) \\ &= [f(a_1), f(a_2)] \\ &= [(u(a_1), D(a_1)), (u(a_2), D(a_2))] \\ &= ([u(a_1), u(a_2)], [D(a_1), D(a_2)] - (-1)^{|D(a_1)||u(a_2)|}[u(a_2), D(a_1)] \\ &\quad + [u(a_1), D(a_2)]).\end{aligned}$$

由于 L' 是阿贝尔的，$[D(a_1)\ D(a_2)] = 0$。此外，上述计算表明，对于所有 a，$u(a) = a$。因此，如果我们使用 $[a_1, a_2] = -(-1)^{|a_1||a_2|}[a_2, a_1]$，则有

$$D([a_1,a_2]) = [D(a_1), a_2] + (-1)^{|D(a_2)||a_1|}[a_1, D(a_2)],$$

因此 D 是一个导子，并且扩张了 d。

□

引理 4.2 ([9])。元素 $[y, \dots [y, [y, x]], \dots]$ 构成自由李超代数 $L(x, y)$。

定理 4.3 ([9])。设 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2, 3$。每个在 $\mathbb{K}$ 上至多可数维的李超代数 L 都可以嵌入到一个由两个生成元生成的李超代数中。

证明。考虑自由积 $L_1 = L * L(a, b)$，其中 $L(a, b)$ 是由 a, b 生成的自由李超代数。元素

$$[b, \dots, [b, [b, a]], \dots]$$

是某个分次子代数 $A$of L_1 的自由基 Z。我们考虑映射d: $Z \to L_1$，满足 $d(a) = b$ 且 $d([b^n, a]) = c_n$（$[b^n, a]$ 表示 $[b, \dots, [b, a] \dots]$，其中 b 出现 n 次），其中 c_n 构成 L 的生成集。接着，此映射 d 可扩张为一个导子。现在，HNN扩张定义如下

$$\langle L_1, t \mid [t, [b^n, a]] = c_n, [t, a] = b \rangle.$$

它是由 a 和 t 生成且包含 L 的李超代数。 □

致谢

作者受到西班牙 Agencia Estatal de Investigación 的资助，资助项目为 MTM2016-79661-P（包含欧洲 FEDER 和欧盟 UE 的资助）。第一作者还获得了 USC 访问项目的部分资助。P. Páez-Guillán 还获得了 Ministerio de Educación, Cultura y Deporte（西班牙）提供的 FPU 奖学金资助。

参考文献

[1] L. A. Bokut、Y. Chen，Gröbner-Shirshov 基及其计算，*Bull. Math. Sci.* **4** (3) (2014) 325–395。[2] L. A. Bokut、S-J. Kang、K-H. Lee、P. Malcolmson，李超代数及其泛包络代数的 Gröbner–Shirshov 基，*J. Algebra* **217** (2) (1999) 461–495。[3] W. Dicks，环的 HNN 构造，*J. Algebra* **81** (1983) 434–487。[4] X. García-Martínez、E. Khmaladze、M. Ladra，李超代数的非阿贝尔张量积与同调，*J. Algebra* **440** (2015) 464–488。[5] G. Higman、B. H. Neumann、H. Neumann，群的嵌入定理，*J. London. Math. Soc.* **24** (1949) 247–254。[6] J. M. Howie，半群的嵌入定理，*Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **14** (1963) 254–258。

[7] M. Ladra、M. Shahryari、C. Zargeh，莱布尼茨代数的 HNN 扩张，已投稿。[8] A. I. Lichtman、M. Shirvani，李代数的 HNN 扩张，*Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (12) (1997) 3501–3508。[9] A. A. Mikhalev，将可数秩李超代数嵌入具有两个生成元的李超代数，*Russian Math. Surveys* **45** (6) (1990) 162–163。[10] A. I. Shirshov，《李代数的一些算法问题》，Sibirsk. Mat. Z. 3 (1962) 292–296（俄文）。英文译文：SIGSAM Bull. **33** (2) (1999) 3–6。[11] A. Wasserman，李代数的导子 HNN 构造，*Israel J. Math.* **106** (1998) 76–92。

[M. Ladra] 数学系，数学研究所，圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙电子邮箱: manuel.ladra@usc.es[P. Páez-Guillán] 数学系，数学研究所，圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙电子邮箱: pilar.paez@usc.es[C. Zargeh]数学系，数学研究所，圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙电子邮箱: chia.zargeh@usc.es