arXiv:2601.17522v1 [math.AP] 24 Jan 2026

具有分片常系数的声学算子的预解式、谱与共振

A. MANTILE，A. POSILICANO

Abstract. 我们研究声学算子$A_{v,\rho} := v^2\rho\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla$，它在$\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$的边界上满足传输条件，其中诸$\Omega_\ell$为互不相交的连通开有界利普希茨区域，正函数 v 与 ρ 在Ω的每个连通分支上为常数，且 $v=\rho=1$ 在$\mathrm{R}^3\backslash\Omega$上为常数。借助预解式之差$(-A_{v,\rho}+z)^{-1}$ –$(-\Delta+z)^{-1}$的公式，我们给出极限吸收原理，确定谱为纯绝对连续，并在Ω的连通分支属于$\mathcal{C}^{1,\alpha}$类的情形下刻画共振集。本文第二部分讨论$\Omega=\Omega(\varepsilon)$连通且尺度较小 ε 、以及ε-解析函数 $v=v(\varepsilon)$和/或 $\rho=\rho(\varepsilon)$当 $\varepsilon\downarrow 0$时在$\Omega(\varepsilon)$内部收敛于 0_+ 的情形；在此，我们根据材料参数趋于零的收敛速率的不同选择，给出$A_{v,\rho}$ 之共振的解析 ε-展开式。

1. Introduction

我们考虑 $L^2(\mathrm{R}^3)$ 上的声学算子

$$A_{v,\rho} := v^2\rho\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla \tag{1.1}$$

其材料系数 v 和 ρ分别定义波的传播速度和介质密度，且是分片常数的正值函数。更准确地说，给定 $\Omega_1,\dots,\Omega_n$，它们是 R^3 中开、有界的连通利普希茨区域，并且满足

$$\overline{\Omega}_i\cap\overline{\Omega}_j=\varnothing\,,\quad i\neq j\,,$$

再给定严格正常数 $\rho_1,\dots,\rho_n$ 和 $v_1,\dots,v_n$，材料系数为

$$v := \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}}+\sum_{\ell=1}^n v_\ell\,\chi_{\Omega_\ell}\,,\qquad \rho := \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}}+\sum_{\ell=1}^n \rho_\ell\,\chi_{\Omega_\ell}\,, \tag{1.2}$$

其中，Ω_{ex} 是连通区域 $\Omega_{\mathrm{ex}}:=\mathrm{R}^3\backslash\Omega$，且 $\Omega\equiv\Omega_{\mathrm{in}}:=\overline{\Omega}_1\cup\cdots\cup\Omega_n$；$\chi_S$ 表示集合 S 的特征函数。

在由 Ω_ℓ 的边界构成的界面 Γ_ℓ' 上，我们要求满足传输条件

$$\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{ex}}u=\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u\,,\qquad \rho_\ell\,\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}u=\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u\,,\qquad \ell=1,...n\,, \tag{1.3}$$

其中 $\gamma_{0\,\ell}^{\mathrm{in/ex}}$、和 $\gamma_{1\,\ell}^{\mathrm{in/ex}}$、表示横向狄利克雷迹和诺伊曼迹（关于在相应函数空间中的更详细定义，请参见第 2 节和第 3 节）。这类边界条件保证了$A_{v、\,\rho}$ 在加权希尔伯特空间中的对称性（从巴拿赫空间的意义上等价于 $L^2(\mathrm{R}^3)$），该空间由 $L^2(\mathrm{R}^3$、$b^{-1})$ 给出，其中 $b:=v^2\rho=\chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}}+\sum_{\ell=1}^n v_\ell^2\rho_\ell\,\chi_{\Omega_\ell}$。

此外，参见定理 3.1，$A_{v,\rho}$ 在适当的区域上是 $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})$ 中的一个非正自伴算子。这一性质蕴含了波动方程柯西问题的解的存在性和唯一性

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_{v,\rho} u \tag{1.4}$$

它描述了体积模量为 b的介质中声波的动力学。事实上，例如，根据 [7, 命题 3.14.4、推论 3.14.8和例子 3.14.16]，，方程 (1.4) 在初始数据为 u_0 和 $\dot{u}_0$ 、属于 $L^2(\mathbb{R})$时，其柯西问题的唯一（温和）解为

$$u(t) = \cos(t(-A_{v,\rho})^{1/2})\, u_0 + (-A_{v,\rho})^{-1/2} \sin(t(-A_{v,\rho})^{1/2})\, \dot{u}_0 \,,$$

其中，正弦和余弦算子函数通过自伴$A_{v算子\rho}$的函数演算来定义。此外，根据算子值函数的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换的逆变换（参见例如 [7, 定理 2.3.4]），上述解可以用预解式 $(-A_{v算子\rho} - \kappa^2)^{-1}$表示。这个预解式，或者更确切地说，预解式之差的公式 $(-A_{v算子\rho} - \kappa^2)^{-1} - (-\Delta - \kappa^2)^{-1}$，将成为我们研究谱和共振的主要工具。该差值公式将在第 4 节中按以下步骤推导：启发式地重写

$$A_{v,\rho} = v^2 \rho \rho^{-1} \Delta u + v^2 \rho \nabla \rho^{-1} \cdot \nabla u = \Delta u + (v^2 - 1) \chi_\Omega \Delta + v^2 \rho \nabla \rho^{-1} \cdot \nabla u$$

这表明，$A_{v,\rho}$ 对应于自由拉普拉斯算子加上一个由正则分量和奇异分量组成的扰动：正则分量支撑在 Ω 上，奇异分量（由 ρ^{-1}的跳跃引起）支撑在其边界 Γ上。在分布框架下，这一图景可以更精确地呈现；利用格林恒等式和边界条件，可得

$$A_{v,\rho} u = \Delta u + (v^2 - 1) 1_\Omega^* \Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega u + 2 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\rho_\ell - 1}{\rho_\ell + 1}\, \gamma_{0,\ell}^* \, \gamma_{1,\ell} u \,, \tag{1.5}$$

其中，$\gamma_{0,\ell}^*$表示支撑在 Γ_ℓ 上的分布，它们对应于完整狄利克雷迹算子的对偶（更多记号与定义请参见第 2 节）。由 (1.5) 可知，$A_{v,\rho}$ 属于如下类型的算子类

$$\Delta + B_1 + (\gamma_0^* \oplus \gamma_1^*) B_2 (\gamma_0 \oplus \gamma_1) \tag{1.6}$$

其中，γ_0 和 γ_1 分别表示边界$\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$上的完整狄利克雷迹算子和诺伊曼迹算子，而 B_1和 B_2是在适当函数空间上的有界算子。在 B_1 和 B_2 为对称算子的情形下（$A_{v,\rho}$则不属于这种情形），文献 [24] 基于 [32] 中引入并在 [23]中发展的奇异扰动抽象迹映射方法，对 (1.6) 这类算子进行了构造和深入研究；该方法构造出自伴算子 A_{B}，它们是枢轴自伴算子 A_0 的混合扰动（即正则扰动与奇异扰动之和）（见 [24, 第 2]节）。值得注意的是，与 [24]中研究的情形不同，在本例中，$A_{v,\rho}$ 和自由拉普拉斯算子 Δ 在不同的希尔伯特空间中自伴。在 [24], 中，算子 A_{B} 通过如下类型的预解式公式构造

$$(-A_{\mathsf{B}} - \kappa^2)^{-1} = (-A_0 - \kappa^2)^{-1} + G_\kappa Q_\kappa^{-1} (B_1 \oplus B_2) G_{-\bar{\kappa}}^* \,,$$

其中

$$Q_\kappa := 1 - (B_1 \oplus B_2) \tau G_\kappa \,.$$

Q-函数 $\kappa \mapsto Q_\kappa$ 在 [24]中发挥着关键作用：它编码了扰动的所有谱性质，自然地涉及极限吸收原理（简称 LAP）的推导，以及散射对 (A_{B}, A_0) 的波算子渐近完备性的证明。特别是，散射振幅的显式公式（见 [24, 定理 3.10]）使我们能够将 A_{B} 的共振与亚纯映射 $\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$在非物理片 $\mathrm{Im}(\kappa) < 0$ 上的极点对应起来。

在我们工作的第一部分中，我们将 [24] 中的构造调整到声学算子的情形 $A_{v,\ \rho}$ 并将其视为自由拉普拉斯算子 Δ 的一种混合扰动。主要成果是定义了声学 Q-函数

$$Q_\kappa = \begin{bmatrix} v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\rho} := 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\rho_\ell - 1}{\rho_\ell + 1}\,\chi_{\Gamma_\ell} \tag{1.7}$$

该函数用于构造预解式之差的公式 $(-A_{v,\ \rho} - \kappa^2)^{-1} - (-\Delta - \kappa^2)^{-1}$，该公式对任意 $\mathrm{Im}\,\kappa > 0$ 均成立（见定理 4.3 和 4.6）。这为研究共振提供了直接框架。利用迹的映射性质以及 [34], 中的抽象结果，我们在定理 5.3 中推导出了声学预解式的极限吸收原理。第 6 节讨论了映射 $(v,\ \rho) \mapsto A_{v,\ \rho}$ 的连续性。

为方便读者，我们在以下定理中概述本文第一部分的主要结果；更多细节和证明请参见第 3 节至第 6 节，相关函数空间和算子的定义请参见第 2 节。

定理 1.1。

i）声 *elf-* $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})$ 中的声学算子的伴随表示为

$$A_{v,\rho} = (\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max} \oplus v^2 \Delta_\Omega^{\max})|\mathscr{D}_\rho\,,$$

其中

$$\mathscr{D}_\rho := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma) \,:\, \rho_\ell\, \gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}} u = \gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}} u\,,\ \ell = 1, \ldots, n \right\}.$$

其谱为

$$\sigma(A_{v,\rho}) = \sigma_{\mathrm{ac}}(A_{v,\rho}) = (-\infty, 0]\,.$$

ii) 对任意 $\kappa \in \mathbb{C}_+$，均有

$$(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - (-\Delta - \kappa^2)^{-1} = \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} Q_\kappa^{-1} \begin{bmatrix} (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

其中 Q_κ 由 (1.7) 定义。

iii) ***(LAP)*** 这些极限

$$\lim_{\delta \searrow 0} (-A_{v,\rho} + \lambda \pm i\delta)^{-1}\,,$$

对任意 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3))$ 以及任意 $\alpha > 1/2$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$，均存在；当 $\lambda = 0$ 且 $\alpha > 3/2$ 时，情况亦然。通过此类极限定义的两个 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3))$值广义预解算子，分别是 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}$ 上的连续映射。

iv）如果对于任意 $1 \le \ell \le n$，序列 $\{v_\ell\,(j)\ \ \rho_\ell\,(j)\}_{j=1}^{+\infty} \subset (0,\ +\infty) \times (0,\ +\infty)$ 收敛到 $(v_\ell,\ \rho_\ell) \in (0,\ +\infty) \times (0,\ +\infty)$，当 $j \to +\infty$ 时，则 $\{A_{v(j),\rho(j)}\}_{j=1}^{+\infty}$ 在范数预解式意义下收敛

意义下收敛至 $A_{v,\,\rho}$。如果 $\rho_\ell \to +\infty$，则范数预解式极限仍然作为定义良好的闭算子 $A_{v,\,+\infty}$ 而存在。

本文的第二部分致力于研究共振。不连续介质中声学算子的共振问题已在先前的研究中得到探讨；在这些研究中，散射共振是通过传输问题来定义的，其解即为系统的准模，参见 [29]及其中的参考文献。常见方法依赖于对传输问题进行微局部分析，以构造高能准模，并渐近刻画相应的共振；这通过准模到共振结果实现，例如参见 [30, 命题 2.1]。当 Ω 严格凸且边界光滑时，声学算子 (1.1) 符合此类研究的框架。特别地，当 $v^2\rho \in (0,1)$ [30, 定理 1.1] 预言存在一个趋近实轴的共振无穷序列 κ_j^2。相反，在 $v^2\rho > 1$ 的情形下，存在一个形如 $\{\kappa^2 :\ |\mathrm{Re}(\kappa)| > C_1\,,\, \mathrm{Im}(\kappa) \le -C_2/|\kappa|\}$ 的无共振区域，参见 [31, 定理 1.1]。此类结果已推广至利普希茨星形障碍物的情形，参见 [29]。

我们详细阐述一种直接研究共振的方法，该方法依赖于预解式差公式 (1.8)。其理论框架见第7节，其中证明了在 Ω 属于 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ 类这一假设下，$\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$是一个极点为有限秩 $\kappa_\circ \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{C}^+$ 并满足条件 $\ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}$ 的算子值亚纯映射。接着，根据 [24], 的结果，其中逆 Q-函数决定散射振幅，我们由此将共振确定为满足 $\mathrm{Im}\,\kappa_\circ < 0$ 且 $\ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}$ 的那些 $\kappa_\circ^2$。事实证明，这一定义等价于黑箱形式体系给出的定义，见 [36],[13, 第 4] 章。事实上，由 (1.8) 可得，在 $\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$ 的极点之外，$\kappa \mapsto (-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1}$ 是从 $L^2_{comp}(\mathbb{R}^3)$ 到 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 的解析映射。关于这两种等价的共振定义之间的联系，[15] 已将其用于 δ 以及由边界支撑的 δ' 纯奇异扰动。此外，根据引理 7.2，$\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$ 的极点不可能位于实轴上，因此我们对共振集的定义可简化为

$$\kappa_\circ^2 \in \mathbb{C} \text{ is a resonance of } A_{v,\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}\,. \tag{1.9}$$

一种尺度相关的 材料设计在第8节中引入，其中假设

$$\Omega_\ell(\varepsilon) = y_\ell + \varepsilon\Omega_\circ\,, \qquad \varepsilon\Omega_\circ := \{\varepsilon x,\ x \in \Omega_\circ\}\,, \qquad \Omega_i(\varepsilon) \cap \Omega_j(\varepsilon) = \varnothing \text{ if } i \neq j\,, \tag{1.10}$$

$\Omega_\circ$是开、有界、连通且属于 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$，$y_1, \dots y_n$的一类区域；材料系数 $v = v(\varepsilon)$ 和 $\rho = \rho(\varepsilon)$ 依赖于 $\varepsilon \in (0,1]$。通过膨胀和平移，每个 $\Omega_\ell(\varepsilon)$ 都会变换为枢轴区域 $\Omega_\circ$，由此得到一种计算共振的方案，该方案涉及 $\Omega_\circ$ 的体算子和表面算子（见 (8.1)）。这为第9节所讨论的渐近状态做好了准备。在此，我们考虑一种更简单的介质，其中包含单个非均匀体 $\Omega(\varepsilon) = y + \varepsilon\Omega$，并满足尺度关系 (1.10)，而材料参数属于以下四种情况之一：

情况 1)

$$v^2(\varepsilon) = \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)} + \varepsilon^2\big(v^2 + v_1^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,, \quad \rho(\varepsilon) = \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)} + \big(1 + \rho_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)\big)\,\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,; \tag{1.11}$$

情形 2)

$$v^2(\varepsilon) = \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)} + \big(1 + v_1^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)\big)\,\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,, \qquad \rho(\varepsilon) = \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)} + \varepsilon^2\big(\rho + O(\varepsilon)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,; \tag{1.12}$$

情形 3)

$$(1.13)\quad v^2(\varepsilon)=\chi_{\Omega_{\rm ex}(\varepsilon)}+\varepsilon\big(v^2+v_1^2\varepsilon+O(\varepsilon^2)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,,\qquad \rho(\varepsilon)=\chi_{\Omega_{\rm ex}(\varepsilon)}+\varepsilon\big(\rho+\rho_1\varepsilon+O(\varepsilon^2)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,;$$

情形 4)

$$\textbf{(1.14)}\quad v^2(\varepsilon)=\chi_{\Omega_{\rm ex}(\varepsilon)}+\varepsilon^2\big(v^2+v_1^2\varepsilon+O(\varepsilon^2)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,,\quad \rho(\varepsilon)=\chi_{\Omega_{\rm ex}(\varepsilon)}+\varepsilon\big(\rho+\rho_1\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)\big)\chi_{\Omega(\varepsilon)}\,.$$

我们将对应于这些情形的依赖于 ε 的算子记为 $A(\varepsilon)$。我们的分析结果总结如下一个定理。

定理 1.2。当 ε 足够小时，存在共振 $\kappa_\pm^2(\varepsilon)$，属于 $A(\varepsilon)$，使得 $\mathbb{C}_-$ 值函数 $\varepsilon\mapsto\kappa_\pm(\varepsilon)$ $=\pm\kappa_0+\kappa_\pm^{(1)}\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ 是解析的，其中：

情形 *1)*

$$\kappa_0=\frac{v}{\lambda^{1/2}}\,,\qquad \kappa_\pm^{(1)}=\pm\left(\frac{v_1^2}{2v\lambda^{1/2}}-\frac{1}{2}\,\rho_1 v\lambda^{1/2}\,\langle\gamma_0^{\rm in}e_\lambda,\gamma_1^{\rm in}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)}\right)-i\,\frac{v^2}{8\pi\lambda^2}\,\langle 1,e_\lambda\rangle^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

$\lambda>0$ 是牛顿势算子 N_0 在 L^2（Ω）中的一个简单特征值，且 e_λ 是相应的特征函数；

情形 *2*)

$$\kappa_0=\rho^{1/2}\,\omega_M\,,\qquad \kappa_\pm^{(1)}=\pm\frac{v_1^2}{2}\,\rho^{1/2}\omega_M-i\,\frac{|\Omega|}{8\pi}\,\rho\,\omega_M^4\,,$$

$\omega_M>0$ 由下式定义的“米纳特共振”

$$\omega_M^2:=\frac{1}{|\Omega|}\,\langle S_0^{-1}1,1\rangle_{-\frac12,\frac12}\,;$$

情形 *3*)

$\kappa_0=\rho^{1/2}\,\omega_M$，$\kappa_\pm^{(1)}$ 的表达式可以计算得出，但为简洁起见，此处不予明确写出；

情形 *4*)

$$\kappa_0=v\,\nu^{1/2}\,,\qquad \kappa_\pm^{(1)}=\pm\,\frac12\,\nu^{1/2}\left(\rho\,v\,\langle\gamma_0u_\nu,\phi_\nu\rangle_{\frac12,-\frac12}-v_1^2v^{-1}\right),$$

$\nu>0$ 是正 *Neumann* 拉普拉斯算子 $-\Delta_\Omega^N$ 在 L^2(Ω) 中的简单特征值，u_ν 是相应的归一化特征函数，且

$$\phi_\nu:=S_0^{-1}\gamma_0(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,.$$

此外，存在 $A(\varepsilon)$ 的共振 $\kappa_\pm^2(\varepsilon^{1/2})$，它们源自 $-\Delta_\Omega^N$ 的零特征值，使得这个取值于 $\mathbb{C}_-$ 的函数

$$\varepsilon^{1/2}\mapsto\kappa_\pm(\varepsilon^{1/2})=\pm\rho^{1/2}\omega_M(1+\kappa_1\varepsilon)\varepsilon^{1/2}+O(\varepsilon^2)$$

是解析的；常数 κ_1 可显式计算。

定理 1.2 中检测到的一些声学共振，在固定频率下相应的散射问题中也有对应现象。我们将固定频率下波在小尺度非均匀体附近散射时出现的这类局域化现象称为.....；在不同系统中，当非均匀体位置处的材料参数与背景相比

存在显著反差时，可以观察到这些现象，见 [12]。这类行为大致对应于准模，发生在特定的入射频率下，这些频率被称为微谐振器的“共振”。在声学中，特定的渐近假设可以激发局域准模，其支撑集中在谐振器的体积内或表面上。 [11] 等人研究了处于（1.11）情形下的定常声波方程（关于等价的介电问题，另见 [3]）；而（1.12）情形则由 [4], [11] 研究（并应用于声学成像）， [28] 也对此进行了研究（将局域化效应解释为频率依赖的预解算子的行为）。在第一种情形中，体积准模出现在频率 $\lambda^{-1/2}$ 处，对应于牛顿势算子 N_0 的特征值 λ 。在第二种情形中，则在米纳特频率 ω_M处检测到表面准模。定理 1.2 中情形 1 和 2 的结果证实了普遍观点：微谐振器系统中的局域化现象对应于动力学生成元的共振；据我们所知，定理 1.2 首次证明了这种对应关系。

关于微共振器准模稳态分析的若干研究采用 Gohberg-Sigal 方案，该方案基于针对亚纯算子值函数的广义 Rouch´e 定理。在第9节中，我们采用了不同的策略：将共振问题改写为适当的函数方程后，共振的定位依赖于隐函数论证；而在情形（1.14）中，为检测从 $0 \in \mathsf{R}$ 出现的共振，还需进一步进行 Lyapunov-Schmidt 约化。这种方法有一些新颖之处。首先，它给出的解关于小参数 ε （在零能量的情形（1.14）中则关于 $\sqrt{\varepsilon}$）是解析函数；_ 此外，它还提供了一种递归算法，可在任意阶计算解的解析展开系数。值得注意的是，尽管高阶修正项的计算可能很复杂，但这种复杂性仅源于计算过程冗长，并不存在超出一阶计算中已克服难题的技术困难。

在情形 (1.11) 和 (1.14) 中，我们的结果分别要求牛顿算子N_0 和诺伊曼拉普拉斯算子 Δ_Ω^N 具有单谱。众所周知，就 Δ_Ω^N 而言，这是一个泛型成立的假设；我们推测对于 N_0，情况也相同。我们预计，即使不对谱作此假设，仍可得到与定理 1.2 相同类型的结果：通过 Lyapunov-Schmidt 约化，并沿着我们证明零能量情形的情形 4 时所采用的思路进行（另请参见 [39, 第 32] 节中关于 Fredholm算子的特征值和特征向量分支的处理方法）。

微谐振器区域的一个特定特征是会出现渐近趋近于连续谱的有限能量共振。值得注意的是，这并不排除其他共振的存在。特别是，如上文所述， [30] 预言存在一族声学共振 κ_j^2，满足 $\mathrm{Re}(\kappa_j^2) \to +\infty$ 且 $|\mathrm{Im}(\kappa_j)| \leq C_N|\kappa_j|^{-N}$，其中任意 $N \gg 1$ 均成立。定理 1.2 中考虑的每种情形都适用这一结果。然而，由于尺度关系，这类共振的能量范围会在 $+\infty$ 处随 $\varepsilon \to 0$发生偏移。因此，我们认为，在渐近极限下，只有微谐振器的有限能量共振预计会对动力学产生显著贡献。

形如 $A_{v,1}$ 的算子的谱理论与散射理论已在 [41,第二部分第 II.5 节和第三部分第 III 节6], 中探讨；而具有 $v^2(\varepsilon) = \chi_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega(\varepsilon)} + \varepsilon^2\chi_{\Omega(\varepsilon)}$ 及 $\rho = 1$ 的相应微谐振器设置，则在 [25] 中进行了研究（该文并未对谱的简单性作出任何假设）。

假设 N_0 的谱是简单的）。构型 (1.11) 和 (1.12) 推广了此前若干关于声学准模的研究中所考虑的构型；同时我们指出，此前尚未有人研究过设置 (1.13) 和 (1.14) 中的共振或散射共振。特别是，当$v(\varepsilon)$ 和 $\rho(\varepsilon)$ 以相同速率趋于零时，出现一组趋于 $\sigma(-\Delta_\Omega^N)$ 的共振，这一现象此前尚未被观察到。我们不了解微谐振器设置下其他关于共振问题的研究，除了一篇预印本[22] ，该文讨论了米纳尔特机制 (1.12) 的一个简化版本；将 (1.7) 与 [22, 第 5], 节中的算子相比较可知，该文定义的散射共振与 (1.9) 定义的共振一致。

2. Notation and definitions

这里介绍一些记号与定义；关于索伯列夫空间、迹映射和层算子，请参见 [21] 。

- $R_\kappa \equiv (-\Delta - \kappa^2)^{-1}$ 表示核为 $\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ 的自由预解算子。 ———
- $\Omega \equiv \Omega_{内} = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$，其中 Ω_ℓ 是互不相交、连通、有界的开利普希茨区域，且 $\Omega_{外} := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$。$\Omega$ 的边界记为 Γ ，而 Γ_ℓ 表示 Ω_ℓ 的边界。
- $\gamma_{内/外\,0}$ 和 $\gamma_{内/外\,1}$ 分别表示 $\Omega_{内}$ 和 $\Omega_{外}$边界处的侧向狄利克雷迹映射与诺伊曼迹映射； $\gamma_0 := \frac{1}{2}(\gamma_{外0} + \gamma_{内0})$、 $\gamma_1 := \frac{1}{2}(\gamma_{外1} + \gamma_{内1})$分别表示相应的全局迹。
- $[\gamma_0] := \gamma_{外0} - \gamma_{内0}$ 和 $[\gamma_1] := \gamma_{外1} - \gamma_{内1}$ 表示狄利克雷和诺伊曼迹映射在边界处的跳跃。
- SL_κ 和 DL_κ 表示单层算子和双层算子。
- $S_0 := \gamma_0 SL_0$, $K_0 := \gamma_0 DL_0$, $K_0^* = \gamma_1 SL_0$。
- $DN_0 = (\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0) S_0^{-1}$表示狄利克雷到诺伊曼算子。
- 1_Ω： $L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\Omega)$ 表示到 Ω 的限制算子；其伴随算子 1^*_Ω： $L^2(\Omega) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ 表示零延拓。
- $N_\kappa := 1_\Omega R_k 1^*_\Omega$；特别地， $N_0 := 1_\Omega R_0 1^*_\Omega$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的牛顿势算子。
- $\Delta_{\mathcal{O}}$ 表示开集 $\mathcal{O}$ 上的分布拉普拉斯算子；当 $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$ 时，我们使用简写记号 Δ。
- $H^s(\mathcal{O})$ 表示开集 $\mathcal{O}$ 上的索伯列夫空间尺度。
- $H^s(\Gamma)$， $|s| \le 1$，表示利普希茨区域 Ω 的边界 Γ 上的索伯列夫空间尺度。
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s,\, s}$ 表示对偶配对，该配对由 $L^2(\Gamma)$-内积诱导，并且关于第一个变量反线性，定义于 $H^{-s}(\Gamma)$ 与 $H^s(\Gamma)$ 之间。
- $H^s_\Delta(\mathcal{O}) := \{u \in H^s(\mathcal{O}) : \Delta_{\mathcal{O}} u \in L^2(\mathcal{O})\}$； $L^2_\Delta(\mathcal{O}) := H^0_\Delta(\mathcal{O})$。
- $H^s_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma) := H^s_\Delta(\Omega) \oplus H^s_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega})$； $L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma) := H^0_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)$.

• $\Delta_{\text{极小}\mathcal{O}} := \overline{\Delta_{\mathcal{O}}|\mathcal{C}^\infty_{comp}(\mathcal{O})}$ 表示 $L^2(\mathcal{O})$ 中的极小拉普拉斯算子。

• $\Delta_{\max\mathcal{O}} := \Delta_{\mathcal{O}}|L^2_\Delta(\mathcal{O})$ 表示 $L^2(\mathcal{O})$ 中的极大拉普拉斯算子。

• 给定两个巴拿赫空间（X_1，$\|\cdot\|_1$）和（X_2，$\|\cdot\|_1$），$X_1 \cong X_2$ 表示 $X_1 = X_2$，并且存在 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 使得 $c_1\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le c_2\|\cdot\|_1$。

• $\mathscr{B}(X, Y)$ 表示从巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的有界线性算子所构成的巴拿赫空间；$\mathscr{B}(X) \equiv \mathscr{B}(X, X)$。$\|B\|_{X,Y}$ 表示 $B \in \mathscr{B}(X, Y)$ 的算子范数；在不会引起混淆时，我们使用简写记号 $\|B\|$。

• $\mathfrak{S}_\infty(X, Y) \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$ 表示紧算子的集合。

• $\varrho(A)$ 和 $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\varrho(A)$ 分别表示自伴算子 A 的预解集和谱；$\sigma_p(A)$、$\sigma_{pp}(A)$、$\sigma_{ac}(A)$、$\sigma_{sc}(A)$、$\sigma_{ess}(A)$、$\sigma_{discr}(A)$ 分别表示点谱、纯点谱、绝对连续谱、奇异连续谱、本质谱和离散谱。

• χ_S 表示集合 S的特征函数。

• $a \lesssim b$ 表示对于某个常数 c，有 $a \le c\,b$。

• 设映射 $0 < \varepsilon \mapsto u(\varepsilon) \in X$，其中 X 为巴拿赫空间，则 $u(\varepsilon) = O(\varepsilon^\lambda)$ 表示 $\|u(\varepsilon)\|_X \lesssim \varepsilon^\lambda$。

• $\mathbb{C}_\pm := \{z \in \mathbb{C} : \pm\mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3. The domain of self-adjointness

设 $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中如引言所述的开、连通且有界的利普希茨区域。注意，

$$H^s(\Omega) = H^s(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus H^s(\Omega_n)\,, \tag{3.1}$$

$$H^s_\Delta(\Omega) = H^s_\Delta(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus H^s_\Delta(\Omega_n)\,, \tag{3.2}$$

and

$$H^s(\Gamma) = H^s(\Gamma_1) \oplus \cdots \oplus H^s(\Gamma_n)\,. \tag{3.3}$$

此外，

$$\gamma_k^{\mathrm{in/ex}} u = \gamma_{k,1}^{\mathrm{in/ex}} u \oplus \cdots \oplus \gamma_{k,n}^{\mathrm{in/ex}} u\,, \quad k = 0, 1\,,$$

其中，$\gamma_k^{\mathrm{in/ex}}$ 和 $\gamma_{k\,\ell}^{\mathrm{in/ex}}$，分别表示 Ω 和 Ω_ℓ 边界上的侧向迹映射（当 $k = 0$ 时为狄利克雷，当 $k = 1$时为诺伊曼）。

给定严格正常数 $\rho_1, \dots, \rho_n$和 $v_1, \dots, v_n$，我们按照式 (1.2) 定义分段常函数 v 和 ρ。

我们的首要目标是为式 (1.1) 中的声学算子 $A_{v,\rho}$ 构造自伴实现，并赋予式 (1.3) 所给出的跨越 Γ_ℓ，$\ell = 1, \dots, n$的传输边界条件。

下文中，我们用记号 $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})$ 表示平方可积函数构成的希尔伯特空间，其内积为

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})} := \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f}(x) g(x)\, b(x)^{-1} dx\,, \qquad b := v^2\rho = \chi_{\Omega_{\mathrm{ex}}} + \sum_{\ell=1}^n v_\ell^2 \rho_\ell\, \chi_{\Omega_\ell}\,.$$

注意，作为巴拿赫空间，$L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1}) \cong L^2(\mathbb{R}^3)$。

定理 3.1. 声学算子 $A_{v,\rho}$ 具有区域

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\rho :=&\big\{u\in H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\,:\,\gamma_0^{\mathrm{ex}}u=\gamma_0^{\mathrm{in}}u\,,\ \rho_\ell\,\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}u=\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u\,,\ \ell=1,\dots,n\big\}\\ \equiv&\big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\,:\,\rho_\ell\,\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}u=\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u\,,\ \ell=1,\dots,n\big\}\end{aligned}$$

是 $L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})$ 中的非正自伴算子。

证明。 我们引入半双线性型

$$\mathscr{Q}: H^1(\mathbb{R}^3)\times H^1(\mathbb{R}^3)\subseteq L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})\times L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})\to\mathbb{C}\,,\quad \mathscr{Q}(u_1,u_2):=\langle\nabla u_1,\rho^{-1}\nabla u_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Since

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\lesssim\mathscr{Q}(u,u)\lesssim\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,, \tag{3.4}$$

二次型 $u\mapsto\mathscr{Q}(u,u)$ 是闭且非负的。相应的非负自伴算子 A in $L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})$ 定义为

$$\begin{cases}\mathrm{dom}(A):=\big\{u_1\in H^1(\mathbb{R}^3):\exists\, w\in L^2(\mathbb{R}^3)\text{ s.t. }\mathscr{Q}(u_1,u_2)=\langle w,u_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})}\ \forall\, u_2\in H^1(\mathbb{R}^3)\big\},\\ Au_1:=w\,.\end{cases}$$

根据第一格林恒等式（例如参见 [21, 定理 4.4]），对于任意 $u_1\in\mathrm{dom}(A_{v,\rho})$ 和 $u_2\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\begin{aligned}&\langle -A_{v,\rho}u_1,u_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})}\\ =&\langle-\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_1,1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_2\rangle_{L^2(\Omega_{\mathrm{ex}})}+\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\langle-\Delta^{\max}_{\Omega_\ell}1_{\Omega_\ell}u_1,1_{\Omega_\ell}u_2\rangle_{L^2(\Omega_\ell)}\\ =&\langle\nabla 1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_1,\nabla 1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_2\rangle_{L^2(\Omega_{\mathrm{ex}})}+\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\langle\nabla 1_{\Omega_\ell}u_1,\nabla 1_{\Omega_\ell}u_2\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &+\langle\gamma_1^{\mathrm{ex}}u_1,\gamma_0^{\mathrm{ex}}u_2\rangle_{-\frac12,\frac12}-\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\langle\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u_1,\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u_2\rangle_{-\frac12,\frac12}\\ =&\mathscr{Q}(u_1,u_2)+\sum_{\ell=1}^n\langle(\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}-\rho_\ell^{-1}\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}})u_1,\gamma_{0,\ell}u_2\rangle_{-\frac12,\frac12}\\ =&\mathscr{Q}(u_1,u_2)\end{aligned}$$

因此 $-A_{v,\rho}\subseteq A$。现在，我们证明反向包含。根据

$$\Delta^{\min}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}\oplus v_1^2\Delta^{\min}_{\Omega_1}\oplus\cdots\oplus v_n^2\Delta^{\min}_{\Omega_n}\subseteq A_{v,\rho}\,,$$

可得[1]

$$A=A^*\subseteq -A^*_{v,\rho}\subseteq(-\Delta^{\min}_{\Omega_{\mathrm{ex}}})^*\oplus(-v_1^2(\Delta^{\min}_{\Omega_1})^*)\oplus\cdots\oplus(-v_n^2(\Delta^{\min}_{\Omega_n})^*) \tag{3.5}$$

$$=(-\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}})\oplus(-v_1^2\Delta^{\max}_{\Omega_1})\oplus\cdots\oplus(-v_n^2\Delta^{\max}_{\Omega_n}) \tag{3.6}$$

因此

$$\mathrm{dom}(A)\subseteq H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma) \tag{3.7}$$

[1]由于函数 b 在任意 Ω_ℓ 和 Ω_{ex}上都是常数，直和$\Delta^{\min}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}\oplus v_1^2\Delta^{\min}_{\Omega_1}\oplus\cdots\oplus v_n^2\Delta^{\min}_{\Omega_n}$在 $L^2(\mathbb{R}^3,b^{-1})$ 中的伴随算子与其在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的伴随算子一致。

and

$$A\subseteq -A_{v,\rho}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{dom}(A)\subseteq\mathscr{D}_\rho\,.$$

包含关系 (3.7) 允许对任意 $u_1\in\mathrm{dom}(A)$ 和 $u_2\in H^1(\mathbb{R}^3)$ 使用第一格林恒等式。因此，由包含关系 (3.5),

$$\begin{aligned}0&=\langle Au_1,u_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3,\,b^{-1})}-\mathscr{Q}(u_1,u_2)\\&=\big\langle-\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_1,1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_2\big\rangle_{L^2(\Omega_{\mathrm{ex}})}+\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\big\langle-\Delta^{\max}_{\Omega_\ell}1_{\Omega_\ell}u_1,1_{\Omega_\ell}u_2\big\rangle_{L^2(\Omega_\ell)}\\&\quad-\big\langle\nabla1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_1,\nabla1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}u_2\big\rangle_{L^2(\Omega_{\mathrm{ex}})}-\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\big\langle\nabla1_{\Omega_\ell}u_1,\nabla1_{\Omega_\ell}u_2\big\rangle_{L^2(\Omega_\ell)}\\&=-\big\langle\gamma_1^{\mathrm{ex}}u_1,\gamma_0^{\mathrm{ex}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}+\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\big\langle\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u_1,\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}\,.\end{aligned}$$

根据 $u_2\in H^1(\mathbb{R}^3)$，有 $\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u_2=\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{ex}}u_2=\gamma_0u_2|\Gamma_\ell$ 因此，每当 $u_1\in\mathrm{dom}(A)$ 时,

$$\begin{aligned}0&=\sum_{\ell=1}^n\rho_\ell^{-1}\big\langle\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u_1,\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}-\big\langle\gamma_1^{\mathrm{ex}}u_1,\gamma_0^{\mathrm{ex}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}\\&=\sum_{\ell=1}^n\Big(\rho_\ell^{-1}\big\langle\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u_1,\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{in}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}-\big\langle\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}u_1,\gamma_{0,\ell}^{\mathrm{ex}}u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}\Big)\\&=\big\langle(\rho_1^{-1}\gamma_{1,1}^{\mathrm{in}}-\gamma_{1,1}^{\mathrm{ex}})u_1\oplus\cdots\oplus(\rho_n^{-1}\gamma_{1,n}^{\mathrm{in}}-\gamma_{1,n}^{\mathrm{ex}})u_1,\gamma_0u_2\big\rangle_{-\frac12,\frac12}\,.\end{aligned}$$

由 $\gamma_0\in\mathscr{B}(H^1(\mathbb{R}^3)\ H^{1/2}(\Gamma))$ 的满射性可知，这意味着 $\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{ex}}u_1=\rho_\ell^{-1}\gamma_{1,\ell}^{\mathrm{in}}u_1$ 对任意指标ℓ均成立。由于 $\mathrm{dom}(A)\subseteq H^1(\mathbb{R}^3)$，对任意 $u\in\mathrm{dom}(A)$，均有 $\gamma_0^{\mathrm{in}}u=\gamma_0^{\mathrm{ex}}u$，最终可得 $\mathrm{dom}(A)\subseteq\mathrm{dom}(A_{v,\rho})$。□

注 3.2. 注意以下算子包含关系

$$\Delta^{\min}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}\oplus v^2\Delta^{\min}_\Omega\subseteq A_{v,\rho}\subseteq\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}\oplus v^2\Delta_\Omega\tag{3.8}$$

以及以下算子恒等式

$$v^2\Delta^{\min}_\Omega=v_1^2\Delta^{\min}_{\Omega_1}\oplus\cdots\oplus v_n^2\Delta^{\min}_{\Omega_n}\,,\qquad v^2\Delta^{\max}_\Omega=v_1^2\Delta^{\max}_{\Omega_1}\oplus\cdots\oplus v_n^2\Delta^{\max}_{\Omega_n}\,.$$

根据前述定理，声学算子的自伴实现由以下限制算子给出

$$A_{v,\rho}=(\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}}\oplus v^2\Delta^{\max}_\Omega)|\mathscr{D}_\rho\,.$$

显然，$A_{1,\ 1}$ 与 $L^2(\mathbb{R}^3)$上的自由拉普拉斯算子重合，其自伴性定义域为$H^2(\mathbb{R}^3)$。

4. Resolvents difference

现在，我们来求$A_{v,\ \rho}$的预解式；特别地，我们关注差值 $(-A_{v,\ \rho}-\kappa^2)^{\ -1}-R_\kappa$的公式。

按照 [24], 中的方案，我们引入有界算子

$$\tau:H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\to H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\oplus H^{1/2}(\Gamma)\oplus H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

$$\tau u := \tau_1 u \oplus \tau_2 u\,, \qquad \tau_1 u := u\,, \qquad \tau_2 u := \gamma_0 u \oplus \gamma_1 u\,,$$
$$G_\kappa : L^2(\mathbb{R}^3) \oplus H^{-1/2}(\Gamma) \oplus H^{1/2}(\Gamma) \to H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\,,$$
$$G_\kappa(u \oplus \varphi \oplus \phi) := R_\kappa u + SL_\kappa \varphi + DL_\kappa \phi\,,$$
$$\tau G_\kappa : L^2(\mathbb{R}^3) \oplus H^{-1/2}(\Gamma) \oplus H^{1/2}(\Gamma) \to H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma) \oplus H^{1/2}(\Gamma) \oplus H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$
$$\tau G_\kappa := \begin{bmatrix} R_\kappa & SL_\kappa & DL_\kappa \\ \gamma_0 R_\kappa & \gamma_0 SL_\kappa & \gamma_0 DL_\kappa \\ \gamma_1 R_\kappa & \gamma_1 SL_\kappa & \gamma_1 DL_\kappa \end{bmatrix}.$$

那么，给定两个有界算子

$$B_1 : H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma) \to L^2(\mathbb{R}^3)\,,$$
$$B_2 : H^{1/2}(\Gamma) \oplus H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma) \oplus H^{1/2}(\Gamma)\,,$$

我们定义集合

$$Z_{\mathsf{B}} := \{\kappa \in \mathbb{C}_+ : (1 - (B_1 \oplus B_2)\tau G_\kappa)^{-1} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus H^{-1/2}(\Gamma) \oplus H^{1/2}(\Gamma))\}\,.$$

注记 4.1。 注意到，集合 Z_{B} （可能为空）由于映射$\kappa \mapsto \tau G_\kappa$的连续性是开集。

参见 [24],，这里我们有 $\mathsf{B} = (1,\ B_1,\ B_2)$。即使算子 $B_0 = 1$、 B_1和 B_2 不满足 [24], 中的关系式 (2.4)，且空间 $H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^3)$不构成对偶对（它们应当对应于 [24] 中的对偶对 $(\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_1^*)$），[24, 第 2], 节中的大多数结果，尤其是 [24, 定理 2.1 和 2.6、引理 2.4 和 2.5], ，同样适用于我们的情形（除了 [24, 定理 2.1]中的自伴性问题）。

定理 4.2。 假设 $Z_{\mathsf{B}} \neq \varnothing$; 则存在一个闭算子

$$A_{\mathsf{B}} : \mathrm{dom}(A_{\mathsf{B}}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$$

使得

$$(-A_{\mathsf{B}} - \kappa^2)^{-1} = R_\kappa + G_\kappa\big(1 - (B_1 \oplus B_2)\tau G_\kappa\big)^{-1}(B_1 \oplus B_2)G^*_{-\bar\kappa}\,, \quad \kappa \in Z_{\mathsf{B}}\,. \tag{4.1}$$

证明。 沿用证明 [24, 定理 2.1] （该证明基于[32, 定理 2.1]）中的相同论证即可。注意到，附加条件 [24, 假设 (2.4)] 仅用于说明 [24, 定理 2.1] 中的预解式是某个自伴算子的预解式，因此在我们的情形下，只需证明 (4.1) 中的算子是单射伪预解式（因而是某个闭算子的预解式）。这一结论的证明与 [24, 定理 2.1] 中的证明完全相同，此处不再赘述[2]。□

现在，我们确定 B_1 和 B_2，使得 $A_{\mathsf{B}} = A_{v,\ \rho}$。

定理 4.3. 设

$$B_1 = B_v := (v^2 - 1)1^*_\Omega \Delta^{\max}_\Omega 1_\Omega\,, \tag{4.2}$$

$$B_2 = B_\rho := \begin{bmatrix} 0 & \widetilde\rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde\rho := 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\rho_\ell - 1}{\rho_\ell + 1}\,\chi_{\Gamma_\ell}\,. \tag{4.3}$$

如果对于这样的选择有 $Z_{\mathsf{B}} \neq \varnothing$，那么

$$A_{\mathsf{B}} = A_{v,\rho}\,.$$

[2]关于单射性的类似证明，参见下文引理 6.2。

证明。下文中，我们取 $\kappa\in Z_{\mathsf B}$；记 (4.1) 中的预解式为 R_κ。于是，

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(A_{\mathsf B}) &= \widehat{R}_\kappa(L^2(\mathbb{R}^3))\\ &=\big\{u\in H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\,:\;\; u=u_\kappa+G_\kappa\big(1-\;(B_1\oplus B_2)\;\tau G_\kappa\big)^{-1}\;(B_1\oplus B_2)\;\tau u_\kappa\,,\quad u_\kappa\in H^2\;(\mathbb{R}^3)\;\big\}\,.\end{aligned}$$

此外，根据

$$\widehat{R}_\kappa(-\Delta-\kappa^2)u_\kappa=u_\kappa+G_\kappa\big(1-(B_1\oplus B_2)\tau G_\kappa\big)^{-1}(B_1\oplus B_2)\tau u_\kappa=u\,,$$

可得

$$(\widehat{R}_\kappa)^{-1}u=(-A_{\mathsf B}-\kappa^2)u=(-\Delta-\kappa^2)u_\kappa\,. \tag{4.4}$$

根据 [24,引理 2.4]，线性映射[3]

$$q_{\mathsf B}:\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})\to L^2(\mathbb{R}^3)\oplus H^{-1/2}(\Gamma)\oplus H^{1/2}(\Gamma)\,,$$

$$q_{\mathsf B}(u):=\big(1-(B_1\oplus B_2)\tau G_\kappa\big)^{-1}(B_1\oplus B_2)\tau u_\kappa\equiv q_\circ(u)\oplus q_-(u)\oplus q_+(u)\,,$$

定义良好，因此

$$\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})=\big\{u\in H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma):u=u_\kappa+R_\kappa q_\circ(u)+SL_\kappa q_-(u)+DL_\kappa q_+(u)\,,\;u_\kappa\in H^2(\mathbb{R}^3)\big\}\,.$$

此外，根据 [24,引理 2.5],

$$u\in\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}B_1u=q_\circ(u)\\ B_2(\gamma_0u\oplus\gamma_1u)=q_-(u)\oplus q_+(u)\,.\end{cases} \tag{4.5}$$

由 $\mathrm{ran}(B_1)\subseteq L^2(\mathbb{R}^3)$，可得

$$\mathrm{ran}(R_\kappa B_1)\subseteq H^2(\mathbb{R}^3)\subseteq\ker([\gamma_0])\cap\ker([\gamma_1])\,.$$

因此，根据映射性质、单层算子和双层算子的跳跃关系以及 (4.5),

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})=&\big\{u\in H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma):u_\kappa:=u-R_\kappa B_1u+SL_\kappa[\gamma_1]u-DL_\kappa[\gamma_0]u\in H^2(\mathbb{R}^3)\big\}\\ \equiv&\big\{u\in H^1_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma):\widetilde{u}_\kappa:=u+SL_\kappa[\gamma_1]u-DL_\kappa[\gamma_0]u\in H^2(\mathbb{R}^3)\big\}\,,\end{aligned}$$

$$u\in\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})\quad\Rightarrow\quad B_2(\gamma_0u\oplus\gamma_1u)=(-[\gamma_1]u)\oplus[\gamma_0](u)\,. \tag{4.6}$$

由于

$$\gamma_1^{\mathrm{ex}}u=\gamma_1u+\frac{1}{2}\,[\gamma_1]u\,,\qquad\gamma_1^{\mathrm{in}}u=\gamma_1u-\frac{1}{2}\,[\gamma_1]u\,,$$

边界条件 (1.3) 等价于

$$[\gamma_0]u=0\,,\qquad[\gamma_{1,\ell}]u=2\,\frac{1-\rho_\ell}{1+\rho_\ell}\,\gamma_{1,\ell}u\equiv-\widetilde{\rho}_\ell\,\gamma_{1,\ell}u\,,\qquad\ell=1,\dots,n\,. \tag{4.7}$$

因此，由 (4.6) 可得，取 $B_2=B_\rho$ 得到

$$\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})=\big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma):\widetilde{u}_\kappa:=u-\widetilde{\rho}\,SL_\kappa\gamma_1u\in H^2(\mathbb{R}^3)\big\} \tag{4.8}$$

and

$$\mathrm{dom}(A_{\mathsf B})\subseteq\mathscr{D}_\rho\,. \tag{4.9}$$

[3]请注意，相对于 [24]，这里的记号有所变更：在那里记作 $\rho_{\mathsf B}$ 的映射，在这里记作 $q_{\mathsf B}$

此外，由 (4.4) 可得

$$\begin{aligned}&(A_{\mathsf{B}}+\kappa^2)u=(\Delta+\kappa^2)(u-R_\kappa B_1 u-\widetilde{\rho}\,SL_\kappa\gamma_1 u)\\=&(\Delta_\Omega^{\max}\oplus\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max}+\kappa^2)u-(\Delta+\kappa^2)R_\kappa B_1 u-\widetilde{\rho}\,(\Delta_\Omega^{\max}\oplus\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max}+\kappa^2)SL_\kappa\gamma_1 u\\=&(\Delta_\Omega^{\max}\oplus\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max}+\kappa^2)u+B_1 u\,.\end{aligned}$$

因此，取 $B_1=B_\rho\equiv 0\oplus(v^2-1)\Delta_\Omega^{\max}$，可得

$$A_{\mathsf{B}}\subseteq\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max}\oplus(v^2\Delta_\Omega^{\max})\,.$$

于是，由 (4.9) 和 (3.8),

$$A_{\mathsf{B}}\subseteq A_{v,\rho}$$

并且，为了得到等式 $A_{\mathsf{B}}=A_{v,\ \rho}$，还需证明与 (4.9) 相反的包含关系。

对于任意 $u\in L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\equiv\mathrm{dom}(\Delta_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^{\max}\oplus\Delta_\Omega^{\max})$，有（见 [26, 引理 4.2]）

$$u+SL_\kappa[\gamma_1]u-DL_\kappa[\gamma_0]u\in H^2(\mathbb{R}^3)\,.$$

因此，对于任意 $u\in\mathscr{D}_\rho\subseteq H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)$，由 (4.7) 可得,

$$u-\widetilde{\rho}\,SL_\kappa\gamma_1 u\in H^2(\mathbb{R}^3)\,.$$

由 (4.8) 得到

$$\mathscr{D}_\rho\subseteq\mathrm{dom}(A_{\mathsf{B}})\,.$$

□

备注 4.4. 根据前一定理的证明，见 (4.7)，可得到 $A_{v,\rho}$ 的自伴性定义域的另一种定义:

$$\mathscr{D}_\rho=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\,:\,\frac{1}{2}\,[\gamma_{1,\ell}]u=\frac{1-\rho_\ell}{1+\rho_\ell}\,\gamma_{1,\ell}u\,,\ \ell=1,\dots,n\right\}.$$

现在，我们证明定理 4.3 中的 Z_{B} 非空。

引理 4.5. 设 B_1 和 B_2 如 (4.2) 和 (4.3) 中所示，则 $Z_{\mathsf{B}}=\mathbb{C}_+$。

证明。由

$$\begin{aligned}(4.10)\qquad&\left(1-(B_1\oplus B_2)\tau G_\kappa\right)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1-(v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa & (1-v^2)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega SL_\kappa & (1-v^2)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega DL_\kappa\\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa & -\widetilde{\rho}\,\gamma_1 DL_\kappa\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}\left(1-\widetilde{M}_\kappa\right)^{-1} & \left(1-\widetilde{M}_\kappa\right)^{-1}V_\kappa\\ 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{M}_\kappa:=\begin{bmatrix}(v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa & (v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega SL_\kappa\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa & \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}$$

and

$$V_\kappa:=\begin{bmatrix}(v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega DL_\kappa\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 DL_\kappa\end{bmatrix},$$

可得

$$Z_{\mathsf{B}} \supseteq \{\kappa \in \mathbb{C}_+ : \big(1 - \widetilde{M}_\kappa\big)^{-1} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))\}\,.$$

利用由酉映射 $u \mapsto 1_{\Omega_{\rm ex}}\, u \oplus 1_\Omega u$及其逆映射 $u_{\rm ex} \oplus u_{\rm in} \mapsto 1^*_{\Omega_{\rm ex}}\, u_{\rm ex} + 1^*_\Omega u_{\rm in}$给出的识别 $L^2(\mathbb{R}^3) \equiv L^2(\Omega_{\rm ex}) \oplus L^2(\Omega)$，令

$$N_\kappa := 1_\Omega R_\kappa 1^*_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)\,,$$

并注意到，当 $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ 时，$\gamma_1 1_\Omega u = \gamma_1^{\rm in} u = \gamma_1 u$,

$$\begin{aligned}(1 - \widetilde{M}_\kappa)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1-v^2)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa 1^*_{\Omega_{\rm ex}} & 1 + (1-v^2)\Delta_\Omega^{\max} N_\kappa & (1-v^2)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa 1^*_{\Omega_{\rm ex}} & -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\rm in} N_\kappa & 1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-M_\kappa)^{-1} W_\kappa & (1-M_\kappa)^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$M_\kappa = \begin{bmatrix} (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} N_\kappa & (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega SL_\kappa \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\rm in} N_\kappa & \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix}$$

and

$$W_\kappa = \begin{bmatrix} (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa 1^*_{\Omega_{\rm ex}} \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa 1^*_{\Omega_{\rm ex}} \end{bmatrix}.$$

因此，

$$Z_{\mathsf{B}} \supseteq \{\kappa \in \mathbb{C}_+ : \big(1 - M_\kappa\big)^{-1} \in \mathscr{B}(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))\}\,.$$

注意，根据以下关系

$$-\Delta_\Omega^{\max} N_\kappa = 1 + \kappa^2 N_\kappa\,, \qquad -\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega SL_\kappa = \kappa^2 1_\Omega SL_\kappa\,.$$

M_κ 可改写为

$$M_\kappa = \begin{bmatrix} (1-v^2)(1+\kappa^2 N_\kappa) & (1-v^2)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\rm in} N_\kappa & \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

由于算子值映射 $\mathsf{C} \ni \kappa \mapsto M_\kappa$, Z_{B} 的解析性，只要$\big(1 - M_0\big)^{-1} \in \mathscr{B}(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))$，其就非空。记 $K_0 \in \mathscr{B}(H^{1/2}(\Gamma))$为诺伊曼–庞加莱算子 $K_0 := \gamma_0 DL_0 = (\gamma_1 SL_0)^*$，则有，

$$(1 - M_0)^{-1} = \begin{bmatrix} v^2 & 0 \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\rm in} N_0 & 1 - \widetilde{\rho}\,K_0^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} v^{-2} & 0 \\ v^{-2}\,\widetilde{\rho}(1 - \widetilde{\rho}\,K_0^*)^{-1}\gamma_1^{\rm in} N_0 & (1 - \widetilde{\rho}\,K_0^*)^{-1} \end{bmatrix}.$$

若 $\rho_1 = \cdots = \rho_n = 1$，则 $\widetilde{\rho} = 0$ 且

$$(1 - M_0)^{-1} = \begin{bmatrix} v^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{B}(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))\,.$$

否则，不失一般性，我们可以假设存在 $1 \le n_0 < n$ ，使得$\rho_\ell \in (0,\ +\infty)\backslash\{1\}$ 对任意 $\ell \in [n_0, n]$ ，而 $\rho_\ell = 1$ 则不然。定义 $\Gamma_0 := \Gamma_{n_0} \cup \cdots \cup \Gamma_n$，我们使用正交分解 $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{-1/2}(\Gamma\backslash\Gamma_0) \oplus H^{-1/2}(\Gamma_0)$。因此，

$$(1 - M_0)^{-1} = \begin{bmatrix} v^{-2} & 0 \\ v^{-2}\,(0 \oplus \widetilde{\rho}_0(1 - \widetilde{\rho}_0\,K_{00}^*)^{-1})\gamma_1^{\rm in} N_0 & 1 \oplus (1 - \widetilde{\rho}_0\,K_{00}^*)^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 K_{00} 表示 Γ_0 的诺伊曼-庞加莱算子，且

$$\widetilde{\rho}_0(\phi_{n_0}\oplus\cdots\oplus\phi_n):=(\widetilde{\rho}_{n_0}\phi_{n_0})\oplus\cdots\oplus(\widetilde{\rho}_n\phi_n)\,.$$

由于 $\widetilde{\rho}_\ell{}^{-1}\notin[-1/2,1/2)$ 对任意 $\ell\in[n_0,n]$ 及 $\sigma(K_{00}^*)=\sigma(K_{00})\subseteq[-1/2,1/2)$（参见，例如，[18,第 2], [5,节第 5]节），可得

$$(1-M_0)^{-1}\in\mathscr{B}(L^2(\Omega)\oplus H^{-1/2}(\Gamma))\,.$$

因此， Z_{B} 非空，从而根据与 [9, 定理 2.19 及注 2.20],中相同的论证，可得

$$Z_{\mathsf{B}}=\{\kappa\in\mathbb{C}_+:-\kappa^2\in\varrho(\Delta)\cap\varrho(A_{v,\rho})\}\,.$$

由于 $A_{v,\ \rho}\le 0$，可得 $\sigma(A_{v,\ \rho})\subseteq(-\infty,\ 0]$，因此

$$\varrho(A_{v,\rho})\supseteq\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]=\varrho(\Delta)\,.$$

因此,

$$Z_{\mathsf{B}}=\{\kappa\in\mathbb{C}_+:-\kappa^2\in\varrho(\Delta)\}=\mathbb{C}_+\,.$$

□

结合定理 4.3 与引理 4.5，可得

定理 4.6. 对于任意 $\kappa\in\mathbb{C}+$，有

$$\begin{aligned}&(-A_{v,\rho}-\kappa^2)^{-1}-(-\Delta-\kappa^2)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^2+(v^2-1)\kappa^2N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa\\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}}N_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(v^2-1)\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa\\ \widetilde{\rho}\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

证明. 由 (4.10) 和 (4.11),

$$\begin{aligned}&G_\kappa\big(1-(B_1\oplus B_2)\tau G_\kappa\big)^{-1}(B_1\oplus B_2)G_{\bar\kappa}^*\\&=\begin{bmatrix}R_\kappa & SL_\kappa & DL_\kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\big(1-\widetilde{M_\kappa}\big)^{-1} & \big(1-M_\kappa\big)^{-1}V_\kappa\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}\\ 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}R_\kappa & SL_\kappa\end{bmatrix}\big(1-\widetilde{M_\kappa}\big)^{-1}\begin{bmatrix}(v^2-1)1_\Omega^*\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}R_\kappa 1_{\Omega_{\mathrm{ex}}}^* & 1_\Omega R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ (1-M_\kappa)^{-1}W_\kappa & (1-M_\kappa)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \begin{bmatrix}(v^2-1)\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa 1_\Omega^*\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}(1-M_\kappa)^{-1}\begin{bmatrix}(v^2-1)\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa\\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

The 根据 (4.3) 和 (4.12) 中 $\widetilde{\rho}$ 和 M_k 的定义，证明即告完成。 □

注 **4.7.** 在 $v_\ell\neq 1$ 且对于任意指标 ℓ 的情况下，定理 4.6 改写为 s

$$\begin{aligned}&(-A_{v,\rho}-\kappa^2)^{-1}-(-\Delta-\kappa^2)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^2(v^2-1)^{-1}+\kappa^2N_\kappa & \kappa^2 1_\Omega SL_\kappa\\ -\gamma_1^{\mathrm{in}}N_\kappa & \widetilde{\rho}^{-1}-\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa\\ \gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}\end{aligned}$$

4.1. 例子：体积扰动。 在定理 4.6 中取 $\rho_1 = \cdots = \rho_n = 1$，可得到一个仅为正则扰动的 Δ，其支集位于 Ω 上:

$$\begin{aligned}
&(-A_{v,1} - \kappa^2)^{-1} \\
=&R_\kappa + \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ 0 \end{bmatrix} \\
=&R_\kappa + \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa)^{-1} & (v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa)^{-1}(1-v^2)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ 0 \end{bmatrix} \\
=&R_\kappa + (v^2-1) R_\kappa 1_\Omega^* (v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa)^{-1} \Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \,.
\end{aligned}$$

4.2. 例子：曲面扰动。在定理 4.6 中取 $v_1 = \cdots = v_n = 1$，可得到一个仅由 Δ 在 Γ 上支撑的奇异扰动:

$$\begin{aligned}
(-A_{1,\rho} - \kappa^2)^{-1} &= R_\kappa + \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa \end{bmatrix} \\
=&R_\kappa + \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\right)^{-1} \widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & \left(1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa \end{bmatrix} \\
=&R_\kappa + SL_\kappa \left(1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\right)^{-1} \widetilde{\rho}\,\gamma_1 R_\kappa \,.
\end{aligned}$$

注 4.8。由分解

$$L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma) = L^2(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus L^2(\Omega_n) \oplus H^{-1/2}(\Gamma_1) \oplus \cdots \oplus H^{-1/2}(\Gamma_n)\,,$$

将 $SL_k^{(\ell)}$ 记为 Γ_ℓ 的单层算子，并引入记号

$$\mathrm{vect}(L_\ell) := \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{vect}(L_\ell)^\top := \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_n \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{mat}(L_{\ell m}) := \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix},$$

定理 4.6 中的预解式差公式可改写为

$$\begin{aligned}
&(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - R_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{vect}(R_\kappa 1_{\Omega_\ell}^*)^\top & \mathrm{vect}(SL_\kappa^{(\ell)})^\top \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v_\ell^2 + (v_\ell^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\ell} R_\kappa 1_{\Omega_m}^*) & \mathrm{mat}((v_\ell^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\ell} SL_\kappa^{(m)}) \\ -\mathrm{mat}(\widetilde{\rho}_\ell\,\gamma_{1,\ell} R_\kappa 1_{\Omega_m}^*) & \mathrm{mat}(1 - \widetilde{\rho}_\ell\,\gamma_{1,\ell} SL_\kappa^{(m)}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{vect}((v_\ell^2-1)\Delta_{\Omega_\ell}^{\max} 1_{\Omega_\ell} R_\kappa) \\ \mathrm{vect}(\widetilde{\rho}_\ell\,\gamma_{1,\ell} R_\kappa) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

根据注 4.7，只要对任意指标 ℓ， $v_\ell \neq 1$ 和 $p_\ell \neq 1$ ，就有

$$
\begin{aligned}
&(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - R_\kappa \\
&= \Big[\mathrm{vect}(R_\kappa 1^*_{\Omega_\ell})^\top \quad \mathrm{vect}(SL^{(\ell)}_\kappa)^\top\Big] \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v_\ell^2(v_\ell^2-1)^{-1} + \kappa^2 1_{\Omega_\ell} R_\kappa 1^*_{\Omega_m}) & \mathrm{mat}(\kappa^2 1_{\Omega_\ell} SL^{(m)}_\kappa) \\ -\mathrm{mat}(\gamma_{1,\ell} R_\kappa 1^*_{\Omega_m}) & \mathrm{mat}(\widetilde{\rho}_\ell^{\,-1} - \gamma_{1,\ell} SL^{(m)}_\kappa) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{vect}(\Delta^{\max}_{\Omega_\ell} 1_{\Omega_\ell} R_\kappa) \\ \mathrm{vect}(\gamma_{1,\ell} R_\kappa) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.3.**例子：多　　个相同连通分支的情形**。假设

$$
\rho_1 = \cdots = \rho_n = \rho\,, \qquad v_1 = \cdots = v_n = v\,,
$$

$$
\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n\,, \qquad \Omega_\ell = y_\ell + \Omega_\circ\,, \tag{4.13}
$$

其中， y_ℓ 满足：当 $\ell \neq m$ 时， $\overline{\Omega_\ell} \cap \Omega_m = \varnothing$ 。

引入映射 $\varphi_\ell(x) := y_\ell + x$，使得 $\varphi_\ell(\Omega_\circ) = \Omega_\ell$，定义

$$
\Psi_\ell : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)\,, \qquad \Psi_\ell u := u \circ \varphi_\ell
$$

$$
\Phi_\ell : L^2(\Omega_\ell) \to L^2(\Omega_\circ)\,, \qquad \Phi_\ell u := u \circ (\varphi_\ell | \Omega_\circ)
$$

and

$$
\Phi^\partial_\ell : L^2(\Gamma_\ell) \to L^2(\Gamma_\circ)\,, \qquad \Phi^\partial_\ell \phi := \phi \circ (\varphi_\ell | \Gamma_\circ)\,, \qquad \Gamma_\circ := \partial\Omega_\circ\,.
$$

有如下恒等式

$$
\begin{aligned}
1_{\Omega_\ell} &= \Phi_\ell^{-1} 1_{\Omega_\circ} \Psi_\ell\,, \qquad 1^*_{\Omega_\ell} = \Psi_\ell^{-1} 1^*_{\Omega_\circ} \Phi_\ell\,, \\
\Delta^{\max}_{\Omega_\ell} &= \Phi_\ell^{-1} \Delta^{\max}_{\Omega_\circ} \Phi_\ell\,, \qquad R_\kappa = \Psi_\ell^{-1} R_\kappa \Psi_\ell\,, \\
SL^{(\ell)}_\kappa &= \Psi_\ell^{-1} SL^\circ_\kappa \Phi^\partial_\ell\,, \qquad \gamma_1^{(\ell)} = (\Phi^\partial_\ell)^{-1} \gamma_1^\circ \Psi_\ell\,.
\end{aligned}
$$

这里， SL°_κ 和 γ_1° 表示与枢轴区域 $\Omega_\circ$相对应的算子。引入记号

$$
\mathrm{diag}(L_\ell) := \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_n \end{bmatrix},
$$

上述关系给出

$$
\begin{aligned}
&\Big[\mathrm{vect}(R_\kappa 1^*_{\Omega_\ell})^\top \quad \mathrm{vect}(SL^{(\ell)}_\kappa)^\top\Big] = \big[\mathrm{vect}(\Psi_\ell^{-1} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ} \Phi_\ell)^\top \quad \mathrm{vect}(\Psi_\ell^{-1} SL^\circ_\kappa \Phi^\partial_\ell)^\top\big] \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix}^{-1} \big[\mathrm{vect}(R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ})^\top \quad \mathrm{vect}(SL^\circ_\kappa)^\top\big] \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Phi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Phi^\partial_\ell) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (v^2-1)\mathrm{vect}(\Delta^{\max}_{\Omega_\ell} 1_{\Omega_\ell} R_\kappa) \\ 2\,\frac{\rho-1}{\rho+1}\,\mathrm{vect}(\gamma_1^{(\ell)} R_\kappa) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v^2-1)\mathrm{vect}(\Phi_\ell^{-1} \Delta^{\max}_{\Omega_\circ} 1_{\Omega_\circ} R_\kappa \Psi_\ell) \\ 2\,\frac{\rho-1}{\rho+1}\,\mathrm{vect}((\Phi^\partial_\ell)^{-1} \gamma_1^\circ R_\kappa \Psi_\ell) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Phi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Phi^\partial_\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (v^2-1)\,\mathrm{vect}(\Delta^{\max}_{\Omega_\circ} 1_{\Omega_\circ} R_\kappa) \\ 2\,\frac{\rho-1}{\rho+1}\,\mathrm{vect}(\gamma_1^\circ R_\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2+(v^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\ell} R_\kappa 1^*_{\Omega_m}) & \mathrm{mat}((v^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\ell} SL^{(m)}_\kappa) \\ 2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{(\ell)\mathrm{in}} 1_{\Omega_\ell} R_\kappa 1^*_{\Omega_m}) & \mathrm{mat}(1+2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\gamma_1^{(\ell)} SL^{(m)}_\kappa) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2+(v^2-1)\kappa^2 \Phi_\ell^{-1} 1_{\Omega_\circ} \Psi_\ell \Psi_m^{-1} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ} \Phi_m) & (v^2-1)\kappa^2 \mathrm{mat}(\Phi_\ell^{-1} 1_{\Omega_\circ} \Psi_\ell \Psi_m^{-1} SL^\circ_\kappa \Phi^\partial_m) \\ 2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\mathrm{mat}((\Phi^\partial_\ell)^{-1}\gamma_1^{\circ\mathrm{in}} 1_{\Omega_\circ} \Psi_\ell \Psi_m^{-1} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ} \Phi_m) & \mathrm{mat}(1+2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,(\Phi^\partial_\ell)^{-1}\gamma_1^\circ \Psi_\ell \Psi_m^{-1} SL^\circ_\kappa \Phi^\partial_m) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Phi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Phi^\partial_\ell) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2+(v^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & (v^2-1)\kappa^2 \mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \\ 2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}} 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & \mathrm{mat}(1+2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\gamma_1^\circ \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Phi_m) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Phi^\partial_m) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $\Psi_{\ell m} := \Psi_\ell \Psi_m^{-1}$充当 Ψ_ℓ，用 $\varphi_{\ell m}(x)$ 替换 $\varphi_\ell : = x + (y_\ell - y_m)$。

因此，由定理 4.6 和注 4.8 可知，

$$
\begin{aligned}
(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - R_\kappa &= \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{vect}(R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ})^\top & \mathrm{vect}(SL^\circ_\kappa)^\top \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2+(v^2-1)\kappa^2 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & (v^2-1)\kappa^2 \mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \\ 2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}} 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & \mathrm{mat}(1+2\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\gamma_1^\circ \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v^2-1)\,\mathrm{vect}(\Delta^{\max}_{\Omega_\circ} 1_{\Omega_\circ} R_\kappa) \\ 2\,\frac{\rho-1}{\rho+1}\,\mathrm{vect}(\gamma_1^\circ R_\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

由注 4.7 可知，每当对于任意指标 ℓ有 $v_\ell \neq 1$ 和 $\rho_\ell \neq 1$ 时，便得到

$$
\begin{aligned}
(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - R_\kappa &= \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{vect}(R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ})^\top & \mathrm{vect}(SL^\circ_\kappa)^\top \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2(v^2-1)^{-1}+\kappa^2 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & \kappa^2 \mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \\ \mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}} 1_{\Omega_\circ} \Psi_{\ell m} R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ}) & \mathrm{mat}(\frac{1}{2}\,\frac{1+\rho}{1-\rho} - \gamma_1^\circ \Psi_{\ell m} SL^\circ_\kappa) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \mathrm{vect}(\Delta^{\max}_{\Omega_\circ} 1_{\Omega_\circ} R_\kappa) \\ \mathrm{vect}(\gamma_1^\circ R_\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\Psi_\ell) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\Psi_\ell) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. The Spectrum

这里，我们沿用 [25, 第 2], 节中的同类论证，研究 $A_{v,\ \rho}$的谱。

引理 5.1. $\sigma_p(A_{v,\rho}) = \varnothing$.

证明。由于 $A_{v,\rho} \leq 0$，只需证明 $\sigma_p(A_{v,\rho}) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$。给定 $\lambda < 0$，取$u_\lambda \in \mathscr{D}_\rho$ 使得 $A_{v,\ \rho} u_\lambda = \lambda u_\lambda$。由 (3.8),

$$(\Delta^{\max}_{\Omega_{\mathrm{ex}}} - \lambda)(u_\lambda | \Omega_{\mathrm{ex}}) = 0\,.$$

根据 Rellich 估计（例如参见 [20, 推论 4.8]），$u_\lambda | B^c = 0$ 对于任意开球 $B \supset \Omega$；因此，根据唯一延拓性质（例如参见 [20, 第 4 节.3]），$u_\lambda | \Omega_{\mathrm{ex}} = 0$，于是

$\gamma_0^{\mathrm{ex}} u_\lambda = \gamma_1^{\mathrm{ex}} u_\lambda = 0$。因此，根据 (1.3)，

$$\begin{cases} (v^2 \Delta_\Omega^{\max} - \lambda)(u_\lambda|\Omega) = 0 \\ \gamma_0^{\mathrm{in}}(u_\lambda|\Omega) = \gamma_1^{\mathrm{in}}(u_\lambda|\Omega) = 0\,. \end{cases}$$

这类边值问题的唯一解为 $u_\lambda|\Omega = 0$。因此，$u_\lambda = 0$。至于 $\lambda = 0$ 的情形，设 $u_0 \in \mathscr{D}_\rho$ 使得 $A_{v,\ \rho}\, u_0 = 0$。那么，由 (3.4) 得，

$$0 = \langle A_{v,\rho}\, u_0, u_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})} = \mathscr{Q}(u_0, u_0) \gtrsim \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.$$

由此可得 $u_0 = 0$。 □

引理 5.2。 $\sigma_{ess}(A_{v,\rho}) = (-\infty, 0]$。

证明。由[4] $SL_\kappa \in \mathscr{B}(B_{2\,2}^{-3/2}, (\Gamma)\ L^2(\mathrm{R}^3))$ 以及紧嵌入 $H^{-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow B_{2\,2}^{-3/2}, (\Gamma)$，可得 $SL_\kappa \in \mathfrak{S}_\infty(H^{-1/2}(\Gamma)\ L^2(\mathrm{R}^3))$。由 $R_\kappa \in \mathscr{B}(L^2(\mathrm{R}^3)\ H^2(\mathrm{R}^3))$ 以及紧嵌入 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$，可得 $1_\Omega R_\kappa \in \mathfrak{S}_\infty(L^2(\mathrm{R}^3)\ L^2(\Omega))$；继而由对偶性可得 $R_\kappa 1_\Omega^* \in \mathfrak{S}_\infty(L^2(\Omega)\ L^2(\mathrm{R}^3))$。根据定理 4.6 中的预解式差公式，$(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} - R_\kappa$ 也是紧的。因此，韦尔定理适用（参见例如 [33, Th. XIII.14]），且 $\sigma_{ess}(A_{v,\rho}) = \sigma_{ess}(\Delta) = (-\infty, 0]$。 □

5.1. **极限吸收原理**。

在这里，我们证明不存在奇异连续谱，因此 $A_{v,\rho}$ 的谱是纯绝对连续的。为此，我们按照 [25, 第 2 节1], 中的论证，首先证明 $A_{v,\rho}$ 满足极限吸收原理。众所周知，自由拉普拉斯算子满足极限吸收原理（例如参见 [6, 第 4] 节）：

对于任意 $\lambda \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$ 和任意 $\alpha > \frac{1}{2}$，这些极限

$$\lim_{\delta \searrow 0} (-\Delta + (\lambda \pm i\delta))^{-1} \tag{5.1}$$

在 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathrm{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathrm{R}^3))$ 中存在；当 $\alpha > 3/2$ 时，$\lambda = 0$ 情形下结论也同样成立。这里，$L^2_\alpha(\mathrm{R}^3)$ 表示带权 L^2 空间，权函数为 $w(x) = (1 + |x|^2)^\alpha$（更多细节见 [6, 第 2] 节）。至于 $A_{v,\rho}$，结论也类似：

定理 5.3。极限

$$\widetilde{\mathcal{R}}^\pm_\lambda := \lim_{\delta \searrow 0} (-A_{v,\rho} + \lambda \pm i\delta)^{-1}\,, \tag{5.2}$$

对任意 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3))$ 和任意 $\alpha > 1/2$ 及任意 $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$均存在；当 $\alpha > 3/2$ 时，$\lambda = 0$ 的情形也同样成立。此外，取值于 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3))$ 的广义预解算子

$$z \mapsto \widetilde{\mathcal{R}}^\pm_z := \begin{cases} (-A_{v,\rho} + z)^{-1} & z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \\ \widetilde{\mathcal{R}}^\pm_\lambda & z = \lambda \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

在 $\mathbb{C}_\pm \cup \mathbb{R}$ 上连续。

[4] Besov 类空间 $B^s_{2,\ 2}(\Gamma)$，$s > 0$，表示相对于 $H^{s+1/2}(\Omega)$ 的狄利克雷迹空间；其对偶空间记为 $B^{-s}_{2\,2,}\ (\Gamma)$。当 $0 < s \leq 1$ 时，$B^{\pm s}_{2\,2,}\ (\Gamma)$ 与 $H^{\pm s}(\Gamma)$ 相同。例如，参见 [38] 了解更多详情。

证明。 对于任意 $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,\ 0]$，我们使用简写记号

$$\widetilde{\mathcal{R}}_z \equiv (-A_{v,\rho}+z)^{-1}\,, \qquad \mathcal{R}_z \equiv (-\Delta+z)^{-1}$$

并定义 $\mathcal{SL}_z := (\gamma_0\mathcal{R}_{\bar z})^*$。注意到 $\mathcal{SL}_{\kappa^2} = SL_\kappa$。

由 [27, 式 (4.8)]，可得，对任意实数 α，有 $\mathcal{R}_z \in \mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ H^2_\alpha(\mathbb{R}^3))$。随后，利用对偶性和插值

$$\mathcal{R}_z \in \mathscr{B}(H^{-s}_\alpha(\mathbb{R}^3), H^{2-s}_\alpha(\mathbb{R}^3))\,, \qquad 0\le s\le 2\,. \tag{5.3}$$

特别地，

$$\mathcal{R}_z \in \mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))\,. \tag{5.4}$$

由 (5.3)，$\mathcal{SL}_z \in \mathscr{B}(H^{-1/2}(\Gamma)\ L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))$，并且由 $1^*_\Omega \in \mathscr{B}(L^2(\Omega)\ L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))$，可得 $\mathcal{R}_z 1^*_\Omega \in \mathscr{B}(L^2(\Omega)\ L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))$。因此，由定理 4.6 中的预解式差公式，

$$\widetilde{\mathcal{R}}_z \in \mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))\,, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\,. \tag{5.5}$$

由于 $1_\Omega\mathcal{R}_z \in \mathscr{B}(L^2_{-\beta}(\mathbb{R}^3)\ H^2(\Omega))$，由紧嵌入 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$，对任意实数 β 可得 $1_\Omega\mathcal{R}_z \in \mathfrak{S}_\infty(L^2_{-\beta}(\mathbb{R}^3)\ L^2(\Omega))$。因此，利用对偶性，$\mathcal{R}_z 1^*_\Omega \in \mathfrak{S}_\infty(L^2(\Omega)\ L^2_\beta(\mathbb{R}^3))$。由 (5.3)，$\mathcal{SL}_z \in \mathscr{B}(B^{-3/2}_{2\,2}{}_{,}(\Gamma)\ L^2_\beta(\mathbb{R}^3))$，并且由紧嵌入 $H^{-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow B^{-3/2}_{2\,2}{}_{,}(\Gamma)$，可得 $\mathcal{SL}_z \in \mathfrak{S}_\infty(H^{-1/2}(\Gamma)\ L^2_\beta(\mathbb{R}^3))$。因此，由定理 4.6 中的预解式差公式，

$$\widetilde{\mathcal{R}}_z - \mathcal{R}_z \in \mathfrak{S}_\infty(L^2(\mathbb{R}^n), L^2_\beta(\mathbb{R}^3))\,, \quad \beta>2\alpha\,. \tag{5.6}$$

此外，根据 [8, 推论 5.7(b)]，，对于所有紧子集 $K\subset(0,+\infty)$，存在一个常数 $c_\nu>0$，使得对 $\lambda\in K$ 有

$$\forall u\in L^2_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)\cap\ker(\mathcal{R}^+_\lambda-\mathcal{R}^-_\lambda), \quad \|\mathcal{R}^\pm_\lambda u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le c_\nu\|u\|_{L^2_{2\alpha}(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{5.7}$$

关系式 (5.4)-(5.7) 使我们能够应用 [34], 中给出的抽象结果。按照该处的记号，$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$、$\mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})$、$X = L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)$、$H_1 = -\Delta$、$H_2 = -A_{v,\rho}$、$J_1$ $\mathcal{H}_1$中的恒等算子，$J_2 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 乘以 $\sqrt{b}$。 [34, 第 175] 页中的假设 (T1) 和 (E1) 分别对应于我们的 (5.1)、(5.7) 和 (5.6)；于是，根据[34, 命题 4.2]，，后者推出了 [34, 第 166], 页中的假设 (LAP) 和 (E)，即再次得到 (5.1)，并且

$$J_2^*\widetilde{\mathcal{R}}_z J_2 - \mathcal{R}_z \in \mathfrak{S}_\infty(L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3), L^2_\alpha(\mathbb{R}^3))\,,$$

以及 [34, 第 168], 页中的假设 (T)，即 (5.7) 的一个技术性变体。根据 [34, 定理 3.5],，这些最后的假设连同 $-A_{v,\ \rho}\ge 0$ 以及 (5.4)-(5.5)（即 [34,第 165] 页中的假设 (OP)），保证了在 $\sigma_p(-A_{v,\ \rho})$ 之外存在极限 (5.2)；根据引理 5.1，后者为空集。□

根据显然的关系

$$\mathbb{C}_+ \ni \kappa \mapsto (-A_{v,\rho}-\kappa^2)^{-1} = \big(-A_{v,\rho} - \mathrm{Re}(\kappa)^2 + \mathrm{Im}(\kappa)^2 - i2\mathrm{Re}(\kappa)\mathrm{Im}(\kappa)\big)^{-1}\,,$$

定理 5.3 蕴含

推论 5.4。该 $\mathscr{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)\ L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3))$值映射

$$\kappa \mapsto \widetilde{R}_\kappa := \begin{cases} (-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} & \mathrm{Im}(\kappa) > 0 \\ \widetilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{-\kappa^2} & \mathrm{Im}(\kappa) = 0\,,\ \mp \mathrm{Re}(\kappa) > 0 \end{cases}$$

在 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上连续。

注 5.5. 根据 [19, 定理 18.3 ii)] 以及 $\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$在 $0 \in \mathbb{C}$ 的一个~邻域 $\kappa \mapsto R_\kappa$内的连续性，可以证明它实际上在整个 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ 上连续。然而，对于我们的目的（见下文引理 7.2 的证明），推论 5.4 中的结论已经足够。

由 $A_{v,\rho}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})$ 中的自伴性，我们有正交分解

$$L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_c \oplus L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{pp}\,,$$

其中，$L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_c$ 和 $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{pp}$ 分别表示 $A_{v,\rho}$ 的连续子空间和纯点子空间。令 P_λ 为与 $A_{v,\rho}$ 相关的恒等算子的谱分解。回想一下，如果 $f \in L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_c = (L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{pp})^\perp$，则 $\lambda \mapsto \langle f, P_\lambda f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 是 $\sigma_c(A_{v,\rho})$ 上的连续函数。连续子空间 $L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_c$ 进一步分解为 $A_{v,\rho}$ 的绝对连续子空间与奇异子空间的正交和

$$L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_c = L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{ac} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{sc}\,.$$

谱的绝对连续部分 $\sigma_{ac}(A_{v,\rho})$ 定义如下：若$f \in L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{ac}$，则 $\lambda \mapsto \langle f, P_\lambda f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 在 $\sigma_{ac}(A_{v,\rho})$ 上绝对连续。因此，奇异连续谱不存在等价于恒等算子

$$L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{ac} = (L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1})_{pp})^\perp\,.$$

由定理 5.3 可得

推论 5.6。

$$\sigma_{ac}(A_{v,\rho}) = (-\infty, 0]\,, \qquad \sigma_{sc}(A_{v,\rho}) = \varnothing\,.$$

证明。仿照定理 6.1], 的 [6, 证明，要证明 $\sigma_c(A_{v,\rho}) = \sigma_{ac}(A_{v,\rho})$，只需证明 $\lambda \mapsto \langle f, P_\lambda f\rangle$ 对任意 $f \in ((L^2(\mathbb{R}^3, b^{-1}))^{pp})^\perp$在 $\mathbb{R}$ 中绝对连续。给定紧区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 和 $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)$, 由定理 5.3 和 Stone 公式可得

$$\big\langle f, (P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1}) f\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \big\langle f, (\widetilde{\mathcal{R}}^+_\lambda - \widetilde{\mathcal{R}}^-_\lambda) f\big\rangle_{\alpha,-\alpha}\, d\lambda\,,$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\alpha,\ -\alpha}$表示 $L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)$-$L^2_{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 对偶性。因此，对于任意 $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^3)$，$\lambda \mapsto \langle f,\ P_\lambda f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 均连续可微。按照定理 6 的证明中的相同论证，该性质可推广到整个 $((L^2(\mathbb{R}^3))^{pp})^\perp$。□

综上，我们得到以下

定理 5.7。

$$\sigma(A_{v,\rho}) = \sigma_{ess}(A_{v,\rho}) = \sigma_{ac}(A_{v,\rho}) = (-\infty, 0]$$

并且，定理 *4.6* 中的预解式公式在 $A_{v,\rho}$ 的整个预解集上成立。此外，$\mathbb{C}_+ \ni \kappa \mapsto (-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1}$ 是一个解析的 $\mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^3))$ 值映射。

证明。 由引理 5.1 和推论 5.6,

$$\sigma(A_{v,\rho}) = \sigma_p(A_{v,\rho}) \cup \sigma_c(A_{v,\rho}) = \sigma_c(A_{v,\rho}) = \sigma_{ac}(A_{v,\rho})\,.$$

由引理 5.1 以及 $\sigma_{disc}(A_{v,\rho}) \subseteq \sigma_p(A_{v,\rho})$,

$$\sigma(A_{v,\rho}) = \sigma_{disc}(A_{v,\rho}) \cup \sigma_{ess}(A_{v,\rho}) = (-\infty, 0]\,.$$

由于 $A_{v,\rho}$ 是闭算子，映射 $\mathsf{C}\backslash(-\infty,0] \ni z \mapsto (-A_{v,\rho}+z)^{-1}$ 是解析的。因此，证明由 $\kappa \in \mathsf{C}_+ \Rightarrow -\kappa^2 \in \mathsf{C}\backslash(-\infty,0]$ 得出。□

6. Resolvent convergence

根据定理 4.6 中的预解式差公式，有

$$\begin{aligned}
&(-A_{v',\rho'}-\kappa^2)^{-1} - (-A_{v,\rho}-\kappa^2)^{-1} = \begin{bmatrix} R_\kappa 1^*_\Omega & SL_\kappa\end{bmatrix} \times \\
&\times\left(\begin{bmatrix} v'^2+(v'^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v'^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho'}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho'}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} v^2+(v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1}\right)\times \\
&\times \begin{bmatrix} (v'^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ \widetilde{\rho'}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_\kappa 1^*_\Omega & SL_\kappa\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2+(v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v'^2-v^2)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ (\widetilde{\rho'}-\widetilde{\rho}\,)\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_\kappa 1^*_\Omega & SL_\kappa\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'^2+(v'^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v'^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho'}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho'}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v^2-v'^2)(1+\kappa^2 N_\kappa) & (v^2-v'^2)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ (\widetilde{\rho'}-\widetilde{\rho}\,)\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & (\widetilde{\rho'}-\widetilde{\rho})\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2+(v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v'^2-1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ \widetilde{\rho'}\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_\kappa 1^*_\Omega & SL_\kappa\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2+(v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1-\widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} (v'^2-v^2)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ (\widetilde{\rho'}-\widetilde{\rho}\,)\,\gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

根据注 4.7，在 $v_\ell \neq 1$, $v'_\ell \neq 1$ 和 $\rho_\ell \neq 1$, $\rho'_\ell \neq 1$ 的情形下，对任意指标 ℓ，上述预解式之差简化为

$$\begin{aligned}
&(-A_{v',\rho'}-\kappa^2)^{-1} - (-A_{v,\rho}-\kappa^2)^{-1} = \begin{bmatrix} R_\kappa 1^*_\Omega & SL_\kappa\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'^2(v'^2-1)^{-1}+\kappa^2 N_\kappa & \kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & \widetilde{\rho'}^{-1}-\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} ((1-v^2)(1-v'^2))^{-1}(v^2-v'^2) & 0 \\ 0 & (\widetilde{\rho'}\widetilde{\rho})^{-1}(\widetilde{\rho'}-\widetilde{\rho}\,)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2(v^2-1)^{-1}+\kappa^2 N_\kappa & \kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & \widetilde{\rho}^{-1}-\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ \gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

根据关系　　如上所述，可得到关于参数的连续性:

定理 6.1. 若对任意 $1 \le \ell \le n$，序列 $\{v_\ell(j)\ \rho_\ell(j)\}_{j=1}^{+\infty} \subset (0,+\infty)\times(0,+\infty)$收敛到 $(v_\ell, \rho_\ell) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$，当 $j \to +\infty$ 时，则 $\{A_{v(j),\rho(j)}\}_{j=1}^{+\infty}$ 在范数预解式意义下收敛到 $A_{v,\rho}$。

现在，我们考虑极端情形： $v_\ell(j)$'s 和/或 $\rho_\ell(j)$'s 收敛到 $+\infty$。显然，

$$v_\ell(j)\to+\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{v_\ell(j)^2}{v_\ell(j)^2-1}\to 1\,, \qquad \rho_\ell(j)\to+\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho_\ell(j)+1}{\rho_\ell(j)-1}=1\,.$$

为简便起见，我们只考虑所有 v_ℓ 和/或所有 ρ_ℓ 发散的情形；材料参数仅在 Ω 的某些连通分支上发散的情形可以用类似方法处理，留给读者自行完成。因此，我们在 $L^2(\Omega)\oplus H^{-1/2}(\Gamma)$ 中引入块算子矩阵

$$Q_\kappa^{\flat,\natural}:=\begin{bmatrix} w_\flat+\kappa^2 N_\kappa & \kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\gamma_1^{\rm in} N_\kappa & z_\natural-\gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}, \qquad (\flat,\natural)\in\{v,+\infty\}\backslash\{1\}\times\{\rho,+\infty\}\backslash\{1\}$$

其中

$$w_v:=v^2(v^2-1)^{-1}\,, \qquad w_{+\infty}:=1\,, \qquad z_\rho:=\widetilde{\rho}^{-1} \qquad z_{+\infty}:=\frac{1}{2}\,.$$

由于

$$(Q_0^{\flat,\natural})^{-1}=\begin{bmatrix} w_\flat^{-1} & 0 \\ w_\flat^{-1}\,(z_\natural-\gamma_1 SL_0)^{-1}\gamma_1^{\rm in}N_0 & (z_\natural-\gamma_1 SL_0)^{-1}\end{bmatrix},$$

根据 $\kappa\mapsto Q_{\cdot,\kappa}$ 的连续性，逆映射 $(Q_{\cdot,\kappa})^{-1}$ 存在，并且对于原点的某个充分小的复邻域中的任意 κ，它都是有界算子 U_0。因此，

$$R_\kappa^{\flat,\natural}:=R_\kappa+\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}(Q_k^{\flat,\natural})^{-1}\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa \\ \gamma_1 R_\kappa\end{bmatrix} \tag{6.1}$$

对于任意 $\kappa\in U_0\cap\mathbb{C}_+$，它都是定义良好的有界算子。由于 $\|(-A_{v(j),\rho(j)}-\kappa^2)^{-1}-R_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}\|\to 0$ 当 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)\ni(v_\ell(j),\rho_\ell(j))\to(\flat,\natural)$ 时，映射 $-\kappa^2\mapsto R_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}$ 是一个伪预解式。只要对于某个 $\kappa\in U_0\cap\mathbb{C}_+$，$R_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}$ 是单射，它就是闭算子 $A_{\flat,\natural}$ 的预解式。

引理 6.2. 若 $\flat\neq+\infty$，则对于任意满足 $Q_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}$ 有有界逆算子的 $\kappa\in\mathbb{C}_+$，$R_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}$ 是单射，$R^{\flat}_{\cdot,\kappa}$

证明. 令 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 满足 $R_{\cdot,\kappa}^{\flat,\natural}u_0=0$，即，

$$R_k u_0=-\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}(Q_k^{\flat,\natural})^{-1}\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa u_0 \\ \gamma_1 R_\kappa u_0\end{bmatrix}.$$

By

$$\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega \\ \gamma_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}N_k & \Delta_\Omega^{\max}1_\Omega SL_\kappa \\ \gamma_1 N_k & \gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\kappa^2 N_k & -\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ \gamma_1 N_k & \gamma_1 SL_\kappa\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}w_\flat-1 & 0\\ 0 & z_\natural\end{bmatrix}-Q_k^{\flat,\natural}\,,$$

由此可得

$$\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa u_0 \\ \gamma_1 R_\kappa u_0\end{bmatrix}=\left(1-\begin{bmatrix}w_\flat-1 & 0\\ 0 & z_\natural\end{bmatrix}(Q_k^{\flat,\natural})^{-1}\right)\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa u_0 \\ \gamma_1 R_\kappa u_0\end{bmatrix},$$

等价地，

$$\begin{bmatrix}w_\flat-1 & 0\\ 0 & z_\natural\end{bmatrix}(Q_k^{\flat,\natural})^{-1}\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max}1_\Omega R_\kappa u_0 \\ \gamma_1 R_\kappa u_0\end{bmatrix}=0\,. \tag{6.2}$$

若 $w_\flat \neq 1$，则由 (6.2) 得 $\begin{bmatrix}\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa u \\ \gamma_1 R_\kappa u\end{bmatrix} = 0$；这意味着 $R_\kappa u = 0$，因此 $u = 0$。

□

因此，有如下

定理 6.3。若对任意 $1 \leq \ell \leq n$，序列 $\{v_\ell(j)\ \rho_\ell(j)\}_{j=1}^{+\infty} \subset (0,+\infty) \times (0,+\infty)$收敛到$(v_\flat, +\infty)$，$v_\ell \neq 1$，当 $j \to +\infty$ 时，则 $\{A_{v(j),\rho(j)}\}_{j=1}^{+\infty}$ 在范数预解式意义下收敛到闭算子 $A_{v,+\infty}$，其预解式 $R^{v}{}_{,\kappa}{}^{+\infty}$由(6.1)给出。

注 6.4。对于情形 $v_1 = \cdots = v_n = 1$，利用例 4.2 中的预解式，可得与定理 6.3 类似的结论。因此，$A_{1,\rho(j)}$ 在范数预解式意义下收敛到$A_{1,+\infty}$，其中

$$(A_{1,+\infty} - \kappa^2)^{-1} = R_\kappa + SL_\kappa \left(\frac{1}{2} - \gamma_1 SL_\kappa\right)^{-1} \gamma_1 R_\kappa \,.$$

后者 根据引理 6.2 证明中的类似推理可知，它是单射。

注 6.5. 考察例 4.1 中的预解式可知，$v_\ell(j) \to +\infty$意味着 $(-A_{v(j),1} - \kappa^2)^{-1}$ 在范数意义下收敛于伪预解式

$$R_\kappa + R_\kappa 1_\Omega^* (1 + \kappa^2 N_\kappa)^{-1} \Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \,.$$

然而，后者不是单射，因此不是某个闭算子的预解式。事实上，容易验证，任何形如 $1_\Omega^* u_\Omega$, $u_\Omega \in L^2(\Omega)$ 的函数都属于其核。

注 6.6. 闭算子 $A_{v,+\infty}$ 只有在它是算子余弦函数的生成元、从而波动方程的柯西问题 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_{v,+\infty} u$ 可解时，才与声学建模相关。在非自伴情形下（例如 $A_{v,+\infty}$），即使已知预解式（参见例如 [14, 第二章定理 2.1]），这也可能是一个不简单的问题。

7. Resonances

从现在起，我们假设边界 Γ 是 $\mathcal{C}^1$ 类的, $^\alpha$，也就是说，它在局部可表示为某个函数的图，该函数具有 H¨older 连续的一阶导数，指数为 α（例如参见第 90] 页 [21, ）。

引理 7.1。映射

$$\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto Q_\kappa := \begin{bmatrix} v^2 + (v^2-1)\kappa^2 N_\kappa & (v^2-1)\kappa^2 1_\Omega SL_\kappa \\ -\widetilde{\rho}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & 1 - \widetilde{\rho}\,\gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix}$$

是一个取值于 $\mathscr{B}(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))$的解析映射，而 $\mathbb{C}\ni \kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$是一个取值于 $\mathscr{B}(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))$的亚纯映射，其极点具有有限秩。这些极点是满足$\ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}$的点 $\kappa_\circ \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{C}_+$。

证明。将 Q_κ 改写为

$$Q_\kappa = \begin{bmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^{-2}(v^2-1)\kappa^2 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_\kappa & 1_\Omega SL_\kappa \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & \gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix} \right),$$

根据亚纯 Fredholm 理论（参见例如 [33, 定理 XIII.13]），只需证明

$$\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto \begin{bmatrix} N_\kappa & 1_\Omega SL_\kappa \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa & \gamma_1 SL_\kappa \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

是一个以 $\mathfrak{S}_\infty(L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma))$ 为值的解析映射。

例如，根据 [25, 引理 3.1]，N_κ 是 Hilbert–Schmidt 算子，因此是紧算子。由 $1_\Omega SL_\kappa \in \mathscr{B}(H^{-1/2}(\Gamma)\ H^1(\Omega))$ 以及紧嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$，可得 $1_\Omega SL_\kappa \in \mathfrak{S}_\infty(H^{-1/2}(\Gamma)\ L^2(\Omega))$。已知诺伊曼–庞加莱算子 K_0 属于 $\mathfrak{S}_\infty(H^{1/2}(\Gamma))$（这里需要关于 Γ 的 $\mathcal{C}^{1,\,\alpha}$ 假设，参见例如 [18]），$\gamma_1 SL_0 = K_0^* \in \mathfrak{S}_\infty(H^{-1/2}(\Gamma))$。同样的论证（参见例如 [18, 方程 (15)]）可得 $\gamma_1 SL_\kappa \in \mathfrak{S}_\infty(H^{-1/2}(\Gamma))$。

最后，$\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa \in \mathfrak{S}_\infty(L^2(\Omega)\ H^{-1/2}(\Gamma))$ 由 $\gamma_1^{\mathrm{in}} N_\kappa \in \mathscr{B}(L^2(\Omega)\ H^{1/2}(\Gamma))$ 以及紧嵌入 $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ 得出。□

与 Schr¨odinger 算子的情形进行类比，可将 $A_{v,\rho}$的共振定义为映射 $z \mapsto 1_{B_2}(-A_{v,\rho} - z)^{-1} 1_{B_1}^*$ 在非物理片上 $\operatorname{Im}(\sqrt{z}) < 0$ 时的亚纯延拓的极点；这里，B_1 和 B_2 是任意两个有界开集。众所周知，映射 $\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto 1_{B_2} R_\kappa 1_{B_1}^*$ 是解析的。这意味着映射 $\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto 1_{B_2} SL_\kappa$、$\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto \Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega^* R_\kappa 1_{B_1}$ 和 $\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto \gamma_1 R_\kappa 1_{B_1}$的解析性。因此，考虑到定理 4.6 和引理 7.1 中的预解式公式，解析的 $\mathscr{B}(L^2(B_1)\ L^2(B_2))$ 值函数 $\mathbb{C}_+ \ni \kappa \mapsto 1_{B_2}(-A_{v,\rho} - \kappa^2) 1_{B_1}^*$ 具有一个亚纯的 $\mathscr{B}(L^2(B_1)\ L^2(B_2))$ 值延拓

$$\mathbb{C} \ni \kappa \mapsto 1_{B_1} R_\kappa 1_{B_2}^* + 1_{B_1} \begin{bmatrix} R_\kappa 1_\Omega^* & SL_\kappa \end{bmatrix} Q_\kappa^{-1} \begin{bmatrix} (v^2 - 1)\Delta_\Omega^{\max} 1_\Omega R_\kappa \\ \widetilde{\rho}\, \gamma_1 R_\kappa \end{bmatrix} 1_{B_2}^* . \tag{7.2}$$

由于（为简便起见，我们将其记为 L）在（7.2）中 Q_κ^{-1} 右侧的算子值域在 $L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma)$ 中稠密，而左侧的算子是单射的，因此，（7.2）中映射的极点恰好是满足 $\kappa_\circ$ 的点，即 $\ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}$。否则，记 $\operatorname{ran}(L)_\parallel$ 为到闭子空间 $\ker(Q_{\kappa_\circ})$ 上的正交投影，则有 $\operatorname{ran}(L)_\parallel \cap \ker(Q_{\kappa_\circ}) = \{0\}$，这将推出 $\operatorname{ran}(L) \subseteq \ker(Q_{\kappa_\circ})^\perp$，与 $\operatorname{ran}(L)$ 的稠密性矛盾。

因此，我们将 $A_{v,\rho}$ 的共振集定义为离散集

$$\mathsf{e}(A_{v,\rho}) := \{\kappa_\circ^2 \in \mathbb{C} : \kappa_\circ \in \mathbb{C}_- \text{ and } \ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\},\ \} . \tag{7.3}$$

共振集的这一定义与 [1, 附录 B] 中给出的定义一致。为避免任何误解，我们需要指出，在一些文献中，术语“共振”指的是 $\kappa_\circ$ 而不是 $\kappa_\circ^2$，例如参见 [13]。

由于对于映射 $Q_{\kappa_\circ}$ 非单射的点 $\kappa_\circ$，条件 $\kappa \in \mathbb{C}_-$ 会自动满足，因此定义 (7.3) 可以稍作简化：

引理 7.2.

$$\mathsf{e}(A_{v,\rho}) = \left\{\kappa_\circ^2 \in \mathbb{C} : \ker(Q_{\kappa_\circ}) \neq \{0\}\right\} .$$

证明。根据引理 5.4，$\mathbb{C}_+ \ni \kappa \mapsto 1_{B_2}(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} 1_{B_1}^*$ 具有一个连续的 $\mathscr{B}(L^2(B_1)\ L^2(B_2))$-值延拓到 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}\backslash\{0\}$。由于亚纯的 $\mathscr{B}(L^2(B_1)\ L^2(B_2))$-值函数 (7.2) 在限制于 $\mathbb{C}_+$ 时与 $\mapsto 1_{B_2}(-A_{v,\rho} - \kappa^2)^{-1} 1_{B_1}^*$ 重合，因此它在 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上连续。于是，$\kappa \mapsto Q_\kappa^{-1}$唯一可能的实极点是 $\kappa = 0$。然而，Q_0 具有有界逆算子（见引理 4.5 的证明），证明完毕。□

8. The ε-dependent case

给定 $(0,+\infty)$-值函数 $\varepsilon\mapsto v_\ell^2(\varepsilon)=v^2(\varepsilon)$、$\varepsilon\mapsto\rho_\ell(\varepsilon)=\rho(\varepsilon)$，我们考虑声学算子的族

$$A(\varepsilon):=v^2(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\nabla\cdot\rho(\varepsilon)^{-1}\nabla\,,\qquad 0<\epsilon\leq 1\,,$$

其区域为

$$\mathrm{dom}(A(\varepsilon))=\big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_\Delta(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma(\varepsilon))\,:\,\rho(\varepsilon)\,\gamma_1^{\mathrm{ex}}(\varepsilon)u=\gamma_1^{\mathrm{in}}(\varepsilon)u\big\}\,.$$

此处 $\gamma_1^{\mathrm{in}/\text{内侧/外侧}}(\varepsilon)$表示在 $\Gamma(\varepsilon)$处的内侧/外侧诺伊曼迹：$=\partial\Omega(\varepsilon)$，其中

$$\Omega(\varepsilon)=\Omega_1(\varepsilon)\cup\cdots\cup\Omega_n(\varepsilon)\,,\qquad \Omega_\ell(\varepsilon)=y_\ell+\Omega_\circ(\varepsilon)\,,\qquad y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^3\,,$$
$$\Omega_\circ(\varepsilon):=\{\varepsilon x,\ x\in\Omega_\circ\}$$

且参数 ε 足够小，使得只要 $i\neq j$，就有$\Omega_i(\varepsilon)\cap\Omega_j(\varepsilon)=\varnothing$。

由例子 4.3 和引理 7.2，$A(\varepsilon)$ 的共振集为

$$\mathsf{e}(A(\varepsilon))=\big\{\kappa^2(\varepsilon)\in\mathbb{C}:\ker(\widetilde{Q}_{\kappa(\varepsilon)}(\varepsilon))\neq\{0\}\,\big\}\,,$$

其中

$$\widetilde{Q}_\kappa(\varepsilon):\big(\oplus_{\ell=1}^n L^2(\Omega_\circ(\varepsilon)\big)\oplus\big(\oplus_{\ell=1}^n H^{-1/2}(\Gamma_\circ(\varepsilon)\big)\to\big(\oplus_{\ell=1}^n L^2(\Omega_\circ(\varepsilon)\big)\oplus\big(\oplus_{\ell=1}^n H^{-1/2}(\Gamma_\circ(\varepsilon)\big),$$

$$\widetilde{Q}_\kappa(\varepsilon)$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{mat}(v^2(\varepsilon)+(v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2 1_{\Omega_\circ(\varepsilon)}\Psi_{\ell m}R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ(\varepsilon)}) & (v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2\mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ(\varepsilon)}\Psi_{\ell m}SL^\circ_\kappa(\varepsilon))\\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}}(\varepsilon)1_{\Omega_\circ(\varepsilon)}\Psi_{\ell m}R_\kappa 1^*_{\Omega_\circ(\varepsilon)}) & \mathrm{mat}(\frac12+\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^\circ(\varepsilon)\Psi_{\ell m}SL^\circ_\kappa(\varepsilon))\end{bmatrix}$$

$SL^\circ_\kappa(\varepsilon)$ 和 $\gamma_1^\circ(\varepsilon)$ 表示与区域 $\Omega_\circ(\varepsilon)$ 对应的算子。

给定映射 $\varphi_\varepsilon(x):=\varepsilon x$，使得 $\varphi_\varepsilon(\Omega_\circ)=\Omega_\circ(\varepsilon)$，我们定义

$$\Psi_\varepsilon:L^2(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)\,,\qquad \Psi_\varepsilon u:=u\circ\varphi_\varepsilon$$
$$\Phi_\varepsilon:L^2(\Omega_\circ(\varepsilon))\to L^2(\Omega_\circ)\,,\qquad \Phi_\ell u:=u\circ(\varphi_\varepsilon|\Omega_\circ)$$

and

$$\Phi^\partial_\varepsilon:L^2(\Gamma_\circ(\varepsilon))\to L^2(\Gamma_\circ)\,,\qquad \Phi^\partial_\varepsilon\phi:=\phi\circ(\varphi_\varepsilon|\Gamma_\circ)\,.$$

有如下恒等式

$$1_{\Omega_\circ(\varepsilon)}=\Phi_\varepsilon^{-1}1_{\Omega_\circ}\Psi_\varepsilon\,,\qquad 1^*_{\Omega_\circ(\varepsilon)}=\Psi_\varepsilon^{-1}1^*_{\Omega_\circ}\Phi_\varepsilon\,,$$
$$\Delta^{\max}_{\Omega_\circ(\varepsilon)}=\varepsilon^{-2}\Phi_\varepsilon^{-1}\Delta^{\max}_{\Omega_\circ}\Phi_\varepsilon\,,\qquad R_\kappa=\varepsilon^2\Psi_\varepsilon^{-1}R_{\varepsilon\kappa}\Psi_\varepsilon\,,$$
$$SL^\circ_\kappa(\varepsilon)=\varepsilon\Psi_\varepsilon^{-1}SL^\circ_{\varepsilon\kappa}\Phi^\partial_\varepsilon\,,\qquad \gamma_1^\circ(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}(\Phi^\partial_\varepsilon)^{-1}\gamma_1^\circ\Psi_\varepsilon\,.$$

由 $\Psi_\varepsilon\Psi_{\ell m}\Psi_\varepsilon^-=\Psi_{\ell m}$ 可得这些关系，

$$\widetilde{Q}_\kappa(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\Phi_\varepsilon & 0\\ 0 & \Phi^\partial_\varepsilon\end{bmatrix}^{-1}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\mathrm{mat}(v^2(\varepsilon)+(v^2(\varepsilon)-1)\varepsilon^2\kappa^2 1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m}R_{\varepsilon\kappa}1^*_{\Omega_\circ}) & (v^2(\varepsilon)-1)\varepsilon\kappa^2\mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m}SL^\circ_{\varepsilon\kappa})\\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\varepsilon\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}}1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m}R_{\varepsilon\kappa}1^*_{\Omega_\circ}) & \mathrm{mat}(\frac12+\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^\circ\Psi_{\ell m}SL^\circ_{\varepsilon\kappa})\end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Phi_\varepsilon & 0\\ 0 & \Phi^\partial_\varepsilon\end{bmatrix}.$$

注意到，对于块算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，有

$$\ker \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \ker \begin{bmatrix} \varepsilon^{-a} A & \varepsilon^{-b} B \\ \varepsilon^{-c} C & \varepsilon^{-d} D \end{bmatrix} \neq \{0\}$$

f或任意满足 $a+d=b+c$ 的 $\varepsilon>0$ 和 $a,\ b,\ c,\ d$，由引理 7.2 可得，

$$\mathsf{e}(A(\varepsilon)) = \{\kappa^2(\varepsilon) \in \mathbb{C} : \ker\left(M^{(a,b,c)}_{\kappa(\varepsilon)}(\varepsilon)\right) \neq \{0\}\},$$

其中

$$M^{(a,b,c)}_{\kappa}(\varepsilon) : \left(\oplus_{\ell=1}^n L^2(\Omega_\circ)\right) \oplus \left(\oplus_{\ell=1}^n H^{-1/2}(\Gamma_\circ)\right) \to \left(\oplus_{\ell=1}^n L^2(\Omega_\circ)\right) \oplus \left(\oplus_{\ell=1}^n H^{-1/2}(\Gamma_\circ)\right),$$

$$M^{(a,b,c)}_{\kappa}(\varepsilon)$$

$$:= \begin{bmatrix} \mathrm{mat}(v^2(\varepsilon)\varepsilon^{-a} + (v^2(\varepsilon)-1)\varepsilon^{-a+2}\,\kappa^2 1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m} R_{\varepsilon\kappa} 1^*_{\Omega_\circ}) & (v^2(\varepsilon)-1)\varepsilon^{-b+1}\,\kappa^2 \mathrm{mat}(1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m} SL^\circ_{\varepsilon\kappa}) \\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\varepsilon^{-c+1}\,\mathrm{mat}(\gamma_1^{\circ\mathrm{in}} 1_{\Omega_\circ}\Psi_{\ell m} R_{\varepsilon\kappa} 1^*_{\Omega_\circ}) & \varepsilon^{-(b+c-a)}\,\mathrm{mat}(\frac{1}{2} + \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^\circ \Psi_{\ell m} SL^\circ_{\varepsilon\kappa}) \end{bmatrix}.$$

因此，若存在一个映射

$$\varepsilon \mapsto (\kappa(\varepsilon), u(\varepsilon)\oplus\phi(\varepsilon)) \in \mathbb{C} \times \left(\oplus_{\ell=1}^n L^2(\Omega_\circ)\right) \oplus \left(\oplus_{\ell=1}^n H^{-1/2}(\Gamma_\circ)\right)$$

使得

$$u(\varepsilon) \neq 0, \quad \phi(\varepsilon) \neq 0, \qquad M^{(a,b,c)}_{\kappa(\varepsilon)}(\varepsilon) \begin{bmatrix} u(\varepsilon) \\ \phi(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8.1}$$

then

$$\kappa^2(\varepsilon) \in \mathsf{e}(A(\varepsilon)).$$

9. Resonances ε-expansions

在本节中，我们研究 $A(\varepsilon)$ 在 $n=1$ 情形下的共振；因此，我们记 $\Omega_\circ = \Omega$，并避免在表示算子时使用上标 $\circ$。我们研究以下四种情形，它们在 $\varepsilon \ll 1$ 时解析函数 $\varepsilon \mapsto v^2(\varepsilon)\chi_\Omega$ 和 $\varepsilon \mapsto \rho(\varepsilon)\chi_\Omega$ 的行为有所不同，这些情形已在引言中的 (1.11)–(1.14) 中列出。我们将相应的声学算子记为 $A_j(\varepsilon)$、$j=1$，2、3、4。

受 [35], 的启发，为求解 (8.1)，我们采用以下隐函数论证：令

$$F : U \times \mathbb{C} \times \Xi \to \Xi$$

为一个解析映射，其中 $U \subset \mathbb{C}$ 是 0 的一个开邻域，Ξ 是一个复希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，相应的范数为 $\|\cdot\|$。我们寻找一个解析映射

$$f : U_0 \to \mathbb{C} \times (\Xi\backslash\{0\}),$$

其中，$U_0 \subset \mathbb{C}$ 是 0 的一个小开邻域，且方程在其中有唯一解

$$F(z, f(z)) = 0.$$

假设存在 $(\zeta_0,\ \xi_0) \in \mathbb{C} \times (\Xi\backslash\{0\})$，使得 $F(0,\ \zeta_0,\ \xi_0) = 0$。那么，对于这样一个 $(\zeta_0,\ \xi_0)$，我们定义映射

$$\Phi : U \times \mathbb{C} \times \Xi \to \mathbb{C} \times \Xi, \qquad \Phi(z,\zeta,\xi) := (\langle \xi_0, \xi - \xi_0\rangle, F(z,\zeta,\xi)).$$

显然， $\Phi(0,\ \zeta_0,\ \xi_0) = (0,\ 0)$。我们将 $(\zeta,\ \xi) \mapsto F(0,\ \zeta,\ \xi)$ 在 $(0,\ \zeta_0,\ \xi_0)$ 处的弗雷歇微分记为 D_0F: $\mathbb{C} \times \Xi \to \Xi$。根据巴拿赫空间值解析函数的隐函数定理（例如参见 [40]），如果有界线性映射

$$D_0\Phi : \mathbb{C} \times \Xi \to \mathbb{C} \times \Xi\,, \qquad D_0\Phi(\zeta,\xi) := (\langle \xi_0, \xi\rangle, D_0F(\zeta,\xi))$$

是一个双射（因此根据开映射定理，它具有有界逆算子），那么存在 $U_0 \subseteq U$（0 的一个开邻域）以及唯一的解析函数

$$f : U_0 \to \mathbb{C} \times \Xi\,, \qquad f(z) \equiv (\zeta(z), \xi(z))\,,$$

使得 $\Phi(z,\ f(z)) = (0,\ 0)$。因此，根据 Φ 的定义，

$$\begin{cases} \langle \xi_0, \xi(z)\rangle = \|\xi_0\|^2 \\ F(z, f(z)) = 0\,. \end{cases}$$

因此，由 $\xi_0 \in \Xi\backslash\{0\}$ 可得 $\xi(z) \in \Xi\backslash\{0\}$。此外，

$$f(z) = f(0) - (D_0\Phi)^{-1}(0, \partial_0 F(\zeta_0))\, z + O(|z|^2)\,,$$

其中 $\partial_0 F : \mathbb{C} \to \Xi$ 表示关于第一个变量 z 的偏导数，并在点 $(0,\ \zeta_0,\ \xi_0)$ 处计算。需要指出的是，f 的展开式中除第一项以外的所有系数，都可以像有限维情形那样递归计算。

9.1. 情形 1。 我们定义映射

$$F_1 : U \times \mathbb{C} \times X \to X$$

$$\begin{aligned} F_1(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) &:= M_\kappa^{(2,1,1)}(\varepsilon) \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v^2(\varepsilon)\varepsilon^{-2} + (v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2 N_{\varepsilon\kappa} & (v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2 1_\Omega SL_{\varepsilon\kappa}) \\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_{\varepsilon\kappa} & \frac{1}{2} + \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1 SL_{\varepsilon\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $X = L^2(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\Gamma)$， $U \subset \mathbb{C}$ 是原点的一个小开邻域，且 $\varepsilon \mapsto v^2(\varepsilon)$ 和 $\varepsilon \mapsto \rho(\varepsilon)$ 是如 (1.11) 中所述的解析函数。

我们寻求方程的一个解 $\varepsilon \mapsto (\kappa(\varepsilon)\ u(\varepsilon) \oplus \phi(\varepsilon)) \in \mathbb{C}_- \times (X\backslash\{0\})$

$$F_1(\varepsilon, \kappa(\varepsilon), u(\varepsilon)\oplus\phi(\varepsilon)) = 0\,. \tag{9.1}$$

由解析性　　由算子值映射 $z \mapsto N_z$ 和 $z \mapsto SL_z$ 的解析性（例如参见 [28]），记

$$N_z = N_0 + N_{(1)} z + O(|z|^2)\,, \qquad SL_z = SL_0 + SL_{(1)} z + O(|z|^2)\,,$$

并且根据

$$\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)} = -\frac{\rho_1}{2}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,,$$

可得

$$\begin{aligned} F_1(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) = &\begin{bmatrix} v^2 - \kappa^2 N_0 & -\kappa^2\, 1_\Omega SL_0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} v_1^2 - \kappa^3 N_{(1)} & -\kappa^3 1_\Omega SL_{(1)} \\ -\frac{1}{2}\,\rho_1\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & -\frac{1}{2}\,\rho_1\gamma_1 SL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

因此，

$$F_1(0,\kappa,u\oplus\phi)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(v^2-\kappa^2N_0)u-\kappa^2 1_\Omega SL_0\phi=0\\ \frac{1}{2}\,\phi=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(v^2-\kappa^2N_0)u=0\\ \phi=0\,.\end{cases}$$

因此，

$$F_1(0,\pm v\lambda^{-1/2},e_\lambda\oplus 0)=0\,,$$

只要 e_λ 是与连通区域 Ω 对应的牛顿算子 N_0 的归一化特征函数，其对应特征值为 $\lambda>0$。

现在，我们引入映射

$$\Phi_1:U\times\mathbb{C}\times X\to\mathbb{C}\times X\,,\qquad \Phi_1(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi):=(\langle e_\lambda,u\rangle_{L^2(\Omega)}-1,F_1(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi))\,. \tag{9.2}$$

显然，

$$\Phi_1(0,\pm v\lambda^{-1/2},e_\lambda\oplus 0)=(0,0)\,.$$

记为

$$D_\pm\Phi_1:\mathbb{C}\times X\to\mathbb{C}\times X$$

映射 $(\kappa,u\oplus\phi)\mapsto\Phi_1(0,\kappa,u\oplus\phi)$ 在 $(0,\pm v\lambda^{-1/2},e_\lambda\oplus 0)$ 处的弗雷歇微分，即，

$$D_\pm\Phi_1(\kappa,u\oplus\phi)=\left(\langle e_\lambda,u\rangle_{L^2(\Omega)},\left(\mp 2v\lambda^{1/2}\kappa e_\lambda+v^2(1-\lambda^{-1}N_0)u-v^2\lambda^{-1}1_\Omega SL_0\phi\right)\oplus\frac{1}{2}\,\phi\right)\,.$$

现在，对于任意给定的 $(z_*,u_*\oplus\phi_*)\in\mathbb{C}\times X$，我们证明方程存在唯一解 $(\kappa,u\oplus\phi)\in\mathbb{C}\times X$，满足

$$D_\pm\Phi_1(\kappa,u\oplus\phi)=(z_*,u_*\oplus\phi_*)\,. \tag{9.3}$$

令

$$w:=u_*+2v^2\lambda^{-1}1_\Omega SL_0\phi_*\,,$$

方程 (9.3) 可改写为

$$\begin{cases}\langle e_\lambda,u\rangle_{L^2(\Omega)}=z_*\\ \mp 2v\lambda^{1/2}\kappa e_\lambda+v^2\lambda^{-1}(\lambda-N_0)u=w\\ \frac{1}{2}\,\phi=\phi_*\,.\end{cases} \tag{9.4}$$

引入正交分解

$$u=\widehat{u}_\lambda\,e_\lambda+u_\perp\,,\quad w=\widehat{w}_\lambda e_\lambda+w_\perp\,,$$

其中

$$\widehat{u}_\lambda:=\langle e_\lambda,u\rangle_{L^2(\Omega)}\,,\quad \widehat{w}_\lambda:=\langle e_\lambda,w\rangle_{L^2(\Omega)}\,,\qquad \langle e_\lambda,u_\perp\rangle_{L^2(\Omega)}=\langle e_\lambda,w_\perp\rangle_{L^2(\Omega)}=0\,,$$

（9.3）可改写为

$$\begin{cases}\widehat{u}_\lambda=z_*\\ \mp 2v\lambda^{1/2}\kappa=\widehat{w}_\lambda\\ v^2\lambda^{-1}(\lambda-N_0)u_\perp=w_\perp\\ \frac{1}{2}\,\phi=\phi_*\,.\end{cases}$$

我们定义线性算子

$$(\lambda-N_0)_\perp:\ker(\lambda-N_0)^\perp\to\ker(\lambda-N_0)^\perp\,,\quad (\lambda-N_0)_\perp:=(\lambda-N_0)|\ker(\lambda-N_0)^\perp\,;$$

由于 N_0 是紧自伴算子（因此，$\ker(\lambda - N_0)^\perp = \mathrm{ran}(\lambda - N_0)$），它是一个有界双射。

如果 λ 是一个简单特征值，则 $w_\perp \in \ker(\lambda - N_0)^\perp$，且方程（9.3）的唯一解为

$$\begin{cases} \kappa = \mp(2v\lambda^{1/2})^{-1}\langle e_\lambda, u_* + 2v^2\lambda^{-1}1_\Omega SL_0\phi_*\rangle_{L^2(\Omega)} \\ u = z_* + \lambda v^{-2}\,(\lambda - N_0)_\perp^{-1}\big(u_* + 2v^2\lambda^{-1}1_\Omega SL_0\phi_*\big)_\perp \\ \phi = 2\phi_*\,. \end{cases} \tag{9.5}$$

因此，只要 λ 是一个简单特征值，$D_\pm\Phi_1$ 就是一个有界双射；根据本节开头回顾的隐函数论证，在 $0 \in \mathbb{R}$ 的充分小邻域内，存在一个取值于 $\mathbb{C}\times(X\setminus\{0\})$ 的解析函数 $\varepsilon \mapsto (\kappa_\pm(\varepsilon)\ u_\pm(\varepsilon)\oplus\phi_\pm(\varepsilon))$，

$$\kappa_\pm(\varepsilon) = \pm\frac{v}{\lambda^{1/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\kappa_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,, \qquad u_\pm(\varepsilon) = e_\lambda + \sum_{n=1}^{+\infty}u_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,, \qquad \phi_\pm(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty}\phi_\pm^{(n)}\varepsilon^n$$

它唯一地求解（9.1）。可以显式计算展开式中出现的所有系数。特别地，

$$\big(\kappa_\pm^{(1)}, u_\pm^{(1)}\oplus\phi_\pm^{(1)}\big) = -\,(D_\pm\Phi_1)^{-1}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Phi_1(\varepsilon, \pm v\lambda^{-1/2}, e_\lambda, 0)\right).$$

By

$$N_{(1)}u := \frac{d}{d\kappa}\bigg|_{\kappa=0}N_\kappa u = \frac{i}{4\pi}\,\langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)}\,1\,,$$

可得

$$\begin{aligned} &D_\pm\Phi_1(\kappa_\pm^{(1)}, u_\pm^{(1)}\oplus\phi_\pm^{(1)}) \\ &= \left(0, \big(-v_1^2 e_\lambda \pm i\,(4\pi)^{-1}v^3\lambda^{-3/2}\langle 1, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}1\big)\oplus\frac{1}{2}\,\rho_1\lambda\gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\right). \end{aligned}$$

因此，由（9.5）以及

$$\langle e_\lambda, 1_\Omega SL_0\gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle\gamma_0^{\mathrm{in}}N_0e_\lambda, \gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)} = \lambda\langle\gamma_0^{\mathrm{in}}e_\lambda, \gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)}\,,$$

接下来是

$$\kappa_\pm^{(1)} = \mp\,\frac{v_1^2}{2v\lambda^{1/2}} - i\,\frac{v^2}{8\pi\lambda^2}\,\langle 1, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}^2 \mp \frac{1}{2}\,\rho_1 v\lambda^{1/2}\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}}e_\lambda, \gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)}\,.$$

由此得到

$$\kappa_\pm(\varepsilon) = \pm\left(\frac{v}{\lambda^{1/2}} + \left(\frac{v_1^2}{2v\lambda^{1/2}} - \frac{1}{2}\,\rho_1 v\lambda^{1/2}\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}}e_\lambda, \gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)}\right)\varepsilon\right) - i\,\frac{v^2}{8\pi\lambda^2}\,\langle 1, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

因此 $k_\pm^2(\varepsilon) \in \mathsf{e}(A(\varepsilon))$，其中

$$k_\pm^2(\varepsilon) = \frac{v^2}{\lambda} - \left(\frac{v_1^2}{\lambda} + \rho_1 v^2\langle\gamma_0^{\mathrm{in}}e_\lambda, \gamma_1^{\mathrm{in}}e_\lambda\rangle_{L^2(\Gamma)}\right)\varepsilon \mp i\,\frac{v^3}{8\pi\lambda^{5/2}}\,\langle 1, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,.$$

请注意，在 $v = 1$ 和 $\rho_1 = v_1 = 0$的情况下，上述展开与 [25]中给出的展开一致。

注 9.1。 由于特征函数 e_λ 是实值的，内积 $\langle \gamma_0^{\rm in} e_\lambda$、$\gamma_1^{\rm in} e_\lambda \rangle_{L^2(\Gamma)}$和 $\langle 1$、$e_\lambda \rangle_{L^2(\Omega)}$ 也都是实值的。

注 9.2. 关于特征值 λ 简单性的假设，由于 N_0 是 $L^2(\Omega)$ 中拉普拉斯算子的逆，并满足某种（非局部）边界条件（见 [17]），根据 [16, 第 6], 章中的结果，我们猜想这一假设对一般域 Ω 成立。

对情形 2 及后续情形的研究需要一些预备知识。令 $K_z := \gamma_0 D L_z$，映射 $z \mapsto K_z$ 是 $\mathscr{B}(H^{1/2}(\Gamma_\circ))$ 值解析的，并且（见 [28, 引理 5.3]）

$$K_z = K_0 + K_{(2)}\, z^2 + K_{(3)}\, z^3 + O(|z|^4)\,.$$

在 $H^{1/2}(\Gamma)$ 中定义内积 $[\cdot,\cdot]_{\frac12}$ 如下：

$$[\phi,\varphi]_{\frac12} := \langle {S_0}^{-1}\phi, \varphi\rangle_{-\frac12,\frac12}\,,$$

其中

$$S_0 : H^{-1/2}(\Gamma_\circ) \to H^{1/2}(\Gamma_\circ)\,, \qquad S_0 := \gamma_0 S L_0\,,$$

我们引入关于 $[\cdot,\cdot]_{\frac12}$ 正交的投影算子

$$P_0\phi := c_\Omega^{-1}\,[1,\phi]_{\frac12}\,1\,, \qquad c_\Omega := [1,1]_{\frac12}\,.$$

已知 $-\frac12$ 是 K_0 的简单特征值，其对应的特征函数为常函数 1，因此

$$P_0\left(\frac12 + K_0\right)P_0 = 0\,.$$

此外（参见 [28,引理 2.3 和 2.4]），

$$P_0 K_{(2)} P_0 = -\frac{1}{\omega_M^2}\,P_0\,, \qquad \omega_M^2 := \frac{c_\Omega}{|\Omega|}\,,$$

and

$$P_0 K_{(3)} P_0 = -i\,\frac{|\Omega|}{4\pi}\,P_0\,.$$

根据恒等算子,

$$K_0 S_0 = S_0 K_0^* \equiv S_0\gamma_1 S L_0\,, \tag{9.6}$$

$-\frac12$ 是 $\gamma_1 S L_0$ 的简单特征值，其特征函数为 ${S_0}^{-1}1$，并且

$$P_0^*\left(\frac12 + \gamma_1 S L_0\right)P_0^* = 0\,.$$

这里 *de 表示关于 $H^{-1/2}(\Gamma)$-$H^{1/2}(\Gamma)$ 对偶性的伴随算子；因此,

$$P_0^*\phi = c_\Omega^{-1}\,\langle 1,\phi\rangle_{\frac12,-\frac12}\,{S_0}^{-1}1\,.$$

此外,

$$P_0^* K_{(2)}^* P_0^* = -\frac{1}{\omega_M^2}\,P_0^*\,, \qquad P_0^* K_{(3)}^* P_0^* = i\,\frac{|\Omega|}{4\pi}\,P_0^*\,. \tag{9.7}$$

将 $[\cdot,\cdot]_{-\frac{1}{2}}$ 在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 中的内积定义为

$$[\phi,\varphi]_{-\frac{1}{2}} := \langle S_0\phi,\varphi\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\,,$$

我们引入正交（相对于 $[\cdot,\cdot]_{-\frac{1}{2}}$）投影算子

$$P\phi := \widehat{c}_\Omega^{-1}\,[S_0{}^{-1}1,\phi]_{-\frac{1}{2}}\,S_0{}^{-1}1\,,\qquad \widehat{c}_\Omega := [S_0{}^{-1}1,S_0{}^{-1}1]_{-\frac{1}{2}}\,.$$

有

$$\widehat{c}_\Omega = \langle 1,S_0{}^{-1}1\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle S_0{}^{-1}1,1\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = c_\Omega$$

因此

$$P\phi = c_\Omega{}^{-1}\,[S_0{}^{-1}1,\phi]_{-\frac{1}{2}}\,S_0{}^{-1}1 = c_\Omega{}^{-1}\,\langle 1,\phi\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\,S_0{}^{-1}1 = P_0^*\phi\,.$$

由（9.6），

$$\begin{aligned}[\gamma_1 SL_0\phi,\varphi]_{-\frac{1}{2}} =&\langle S_0\gamma_1 SL_0\phi,\varphi\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle\phi,K_0S_0\varphi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\\ =&\langle S_0^{-1}S_0\phi,K_0S_0\varphi\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = [\phi,S_0^{-1}K_0S_0\varphi]_{-\frac{1}{2}}\\ =&[\phi,\gamma_1 SL_0\varphi]_{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

因此，$\gamma_1 SL_0$ 在由 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 给出的希尔伯特空间中是自伴的，该空间配备内积 $[\cdot,\cdot]_{-\frac{1}{2}}$；这样的希尔伯特空间记作 $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma)$。由于 $\gamma_1 SL_0$ 是自伴且紧的（因此 $\mathrm{ran}\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right) = \ker\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)^\perp$），

$$\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)_\perp : \ker\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)^\perp \to \ker\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)^\perp$$

是一个有界双射，其中我们引入简写记号

$$\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)_\perp := P_\perp\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)P_\perp\,,\qquad P_\perp := (1-P)\,.$$

最后，我们引入希尔伯特空间

$$\widehat{X} := L^2(\Omega)\oplus\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

其内积为

$$\langle u_1\oplus\phi_1,u_2\oplus\phi_2\rangle_{\widehat{X}} := \langle u_1,u_2\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_1,\phi_2]_{-\frac{1}{2}}\,.$$

9.2. 情形 2. 定义映射

$$F_2 : U\times\mathbb{C}\times\widehat{X}\to\mathbb{C}\times\widehat{X}$$

$$\begin{aligned}&F_2(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) := M_\kappa^{(0,1,1)}(\varepsilon)\begin{bmatrix}u\\ P\phi+\varepsilon^2P_\perp\phi\end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}v^2(\varepsilon)+(v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2N_{\varepsilon\kappa} & (v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2 1_\Omega SL_{\varepsilon\kappa}\\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^{\mathrm{in}}N_{\varepsilon\kappa} & \varepsilon^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1 SL_{\varepsilon\kappa}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ P\phi+\varepsilon^2P_\perp\phi\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $U\subset\mathbb{C}$ 是原点的一个小开邻域，$\varepsilon\mapsto v^2(\varepsilon)$ 和 $\varepsilon\mapsto\rho(\varepsilon)$ 是如 (1.12) 中所示的解析函数。

我们寻求方程 $F_2(\varepsilon,\kappa(\varepsilon)\ u(\varepsilon)\ \oplus\phi(\varepsilon))\ =0$.的一个解 $\ \varepsilon\mapsto(\kappa(\varepsilon)\ u(\varepsilon)\ \oplus\phi(\varepsilon))\ \in\mathsf{C}_-\times(X\backslash\{0\})$

(9.8)

根据 $\gamma_1 SL_z=K^*_{-\bar z}$，可得

$$\gamma_1 SL_z=\gamma_1 SL_0+K^*_{(2)}\,z^2-K^*_{(3)}\,z^3+O(|z|^4)\,.$$

因此，根据

$$\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}=1-2\rho\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\,,$$

可得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-2}\left(\frac12+\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\ \gamma_1 SL_{\varepsilon\kappa}\right)\\ =&\varepsilon^{-2}\left(\frac12+\gamma_1 SL_0\right)_\perp+\left(\kappa^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1 SL_0\right)-\kappa^3K^*_{(3)}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\,.\end{aligned}$$

这就得到（注意到 $\gamma_1^{\rm in}N_{(1)}=0$）

$$\begin{aligned}F_2(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi)=&\begin{bmatrix}1&0\\ \gamma_1^{\rm in}N_0&\left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp+\left(\kappa^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0\right)P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}v^2&\kappa^2v_1^2\mathbf{1}_\Omega SL_0P\\ 0&-\kappa^3K^*_{(3)}P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\,.\end{aligned}$$

因此，$F_2(0,\ \kappa,\ u\oplus\phi)=0$ 当且仅当（κ，u，ϕ）满足

$$\begin{cases}u=0\\ \left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp\phi+(\kappa^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0)P\phi=0\,.\end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases}u=0\\ P(\kappa^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0)P\phi=0\\ \left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp\phi+P_\perp(\kappa^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0)P\phi=0\,,\end{cases}$$

即，

$$\begin{cases}u=0\\ \left(\rho-\frac{\kappa_0^2}{\omega_M^2}\right)P\phi=0\\ \left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp\phi+\kappa^2P_\perp K^*_{(2)}P\phi=0\,.\end{cases}$$

因此，只要 $F_2(0,\pm\kappa_\circ,0\oplus\phi_\circ)=0$，

$$\kappa_\circ=\sqrt{\rho}\ \omega_M\,,\qquad \phi_\circ={S_0}^{-1}1-\rho\,\omega_M^2\varphi_\circ^\perp\,,$$

$$\varphi_\circ^\perp:=\left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp^{-1}P_\perp K^*_{(2)}{S_0}^{-1}1\,.$$

现在我们引入映射

$$\Phi_2:U\times\mathbb{C}\times\widehat X\to\mathbb{C}\times\widehat X\,,\qquad \Phi_2(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi):=([\phi_\circ,\phi-\phi_\circ]_{-\frac12},F_2(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi))\,.\tag{9.9}$$

显然,

$$\Phi_2(0,\pm\kappa_\circ,0\oplus\phi_\circ)=(0,0)\,.$$

我们记

$$D_\pm\Phi_2:\mathbb{C}\times\widehat{X}\to\mathbb{C}\times\widehat{X}$$

在.....处的弗雷歇微分，即映射 $(\kappa,\ u\oplus\phi)\mapsto\Phi_2(0,\ \kappa,\ u\oplus\phi)$ 在 $(0,\ \pm\kappa_\circ,\ 0\oplus\phi_\circ)$ 处的弗雷歇微分，即

$$D_\pm\Phi_2(\kappa,u\oplus\phi)=\Bigg([\phi_\circ,\phi]_{-\frac12},u\oplus\Bigg(\pm2\kappa_\circ\kappa K^*_{(2)}P\phi_\circ+\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u \\ +\left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp\phi+\big(\kappa_\circ^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0\big)P\phi\Bigg)\Bigg)\,.$$

现在，对于任意给定的 $(z_*,\ u_*\oplus\phi_*)\in\mathsf{C}\times X$，我们证明方程存在唯一解 $(\kappa,\ u\oplus\phi)\in\mathsf{C}\times X$，使得

$$D_\pm\Phi_2(\kappa,u\oplus\phi)=(z_*,u_*\oplus\phi_*)\,. \tag{9.10}$$

由 $P\big(\kappa_\circ^2K^*_{(2)}-2\rho\,\gamma_1SL_0\big)P=0$ 可知，(9.10) 等价于以下方程组

$$\begin{cases}[\phi_\circ,\phi]_{-\frac12}=z_*\\ u=u_*\\ P\big(\pm2\kappa_\circ\kappa K^*_{(2)}P\phi_\circ+\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u\big)=P\phi_*\\ P_\perp\big(\pm2\kappa_\circ\kappa K^*_{(2)}P\phi_\circ+\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u+\big(\frac12+\gamma_1SL_0\big)P_\perp\phi+\kappa_\circ^2K^*_{(2)}P\phi\big)=P_\perp\phi_*\,.\end{cases}$$

后者可改写为

$$\begin{cases}[\phi_\circ,\phi]_{-\frac12}=z_*\\ u=u_*\\ \mp2\omega_M^{-2}\kappa_\circ\kappa\,P\phi_\circ=P\big(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*\big)\\ P\phi=c_\phi\,{S_0}^{-1}1\\ \big(\frac12+\gamma_1SL_0\big)_\perp\,\phi=P_\perp\big(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*-(c_\phi\kappa_\circ^2\pm2\kappa_\circ\kappa)K^*_{(2)}{S_0}^{-1}1\big)\end{cases}$$

因此，(9.10) 的唯一解为

$$\begin{cases}u=u_*\\ \kappa=\mp\,\omega_M^2(2\kappa_\circ)^{-1}\,[\phi_\circ,P\phi_\circ]^{-1}_{-\frac12}\,[\phi_\circ,P\big(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*\big)]_{-\frac12}\\ \quad=\mp\,(2\sqrt{\rho}\,\omega_M|\Omega|\,)^{-1}\,\langle1,\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*\rangle_{\frac12,-\frac12}\\ \phi=c_\phi\,({S_0}^{-1}1-\kappa_\circ^2\varphi_\circ^\perp)+\varphi_\perp=c_\phi\phi_\circ+\varphi_\perp\,,\quad c_\phi=c_\Omega^{-1}\big(z_*-[\phi_\circ,\varphi_\perp]_{-\frac12}\big)\\ \varphi_\perp=\big(\frac12+\gamma_1SL_0\big)_\perp^{-1}\,P_\perp\big(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*\mp2\kappa_\circ\kappa K^*_{(2)}{S_0}^{-1}1\big)\,.\end{cases} \tag{9.11}$$

因此，根据本节开头回顾的隐函数论证，在 $0\in\mathsf{R}$ 的一个充分小邻域内，存在一个取值于 $\mathsf{C}\times(X\setminus\{0\})$ 的解析函数 $\varepsilon\mapsto(\kappa_\pm(\varepsilon)\ u_\pm(\varepsilon)\ \oplus\phi_\pm(\varepsilon))$，

$$\kappa_\pm(\varepsilon)=\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M+\sum_{n=1}^{+\infty}\kappa_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad u_\pm(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad \phi_\pm(\varepsilon)=\phi_\circ+\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_\pm^{(n)}\varepsilon^n$$

该函数唯一地满足 (9.8)。可以显式计算展开式中出现的所有系数。特别是,

$$\left(\kappa_{\pm}^{(1)}, u_{\pm}^{(1)} \oplus \phi_{\pm}^{(1)}\right) = -\left(D_{\pm}\Phi_2\right)^{-1} \left(\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \Phi_2(\varepsilon, \pm\sqrt{\rho}\,\omega_M, 0 \oplus \phi_\circ) \right).$$

等价地,

$$D_{\pm}\Phi_2\left(\kappa_{\pm}^{(1)}, u_{\pm}^{(1)} \oplus \phi_{\pm}^{(1)}\right) = \left(0, -\kappa_\circ^2 \left(\left(v_1^2 1_\Omega S L_0 P \phi_\circ\right) \oplus \left(\mp \kappa_\circ K_{(3)}^* P \phi_\circ \right) \right)\right).$$

因此，由（9.11）和（9.7），

$$\begin{aligned}
\kappa_{\pm}^{(1)} &= \pm\, \frac{\kappa_\circ}{2|\Omega|} \left[\phi_\circ, P(\mp\kappa_\circ K_{(3)}^* P\phi_\circ - v_1^2 \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1_\Omega S L_0 P \phi_\circ)\right]_{-\frac{1}{2}} \\
&= \pm\, \frac{\sqrt{\rho}\,\omega_M}{2|\Omega|} \left[\phi_\circ, \mp\sqrt{\rho}\,\omega_M\, i\, \frac{|\Omega|}{4\pi} P\phi_\circ - v_1^2 P \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1_\Omega S L_0 P \phi_\circ\right]_{-\frac{1}{2}} \\
&= -\, i\, \frac{c_\Omega}{8\pi}\, \rho\, \omega_M^2 \mp \frac{\sqrt{\rho}\,\omega_M}{2|\Omega|}\, v_1^2 \langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1_\Omega S L_0 {S_0}^{-1} 1 \rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

由于 $u_\Omega := 1_\Omega S L_0 {S_0}^{-1} 1$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_\Omega u_\Omega = 0 \\ \gamma_0^{\mathrm{in}} u_\Omega = 1\,, \end{cases}$$

可得 $u_\Omega = 1$ ，因此，根据格林公式,

$$\langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1_\Omega S L_0 {S_0}^{-1} 1 \rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1 \rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle 1, \Delta_\Omega^{\max} N_0 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle 1, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = -|\Omega|\,,$$

综上，根据 $c_\Omega = \omega_M^2 |\Omega|$，可得

$$\kappa_{\pm}(\varepsilon) = \pm\left(1 + \frac{v_1^2}{2}\,\varepsilon\right)\sqrt{\rho}\,\omega_M - i\,\frac{|\Omega|}{8\pi}\,\rho\,\omega_M^4 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

因此 $k_{\pm}^2(\varepsilon) \in \mathsf{e}(A(\varepsilon))$，其中

$$\kappa_{\pm}^2(\varepsilon) = \left(1 + v_1^2 \varepsilon\right) \rho\, \omega_M^2 \mp i\, \frac{|\Omega|}{4\pi}\, \rho^{3/2} \omega_M^5 \varepsilon + O(\varepsilon^2)\,.$$

在下文的情形 3 和情形 4 中，我们使用了一些与情形 2 相同的记号。不过，请注意，这些记号可能表示向量和常数，而它们在不同情形下不一定相同；若有不同，会明确给出定义。

9.3. 情形 3。

定义映射

$$F_3 : U \times \mathbb{C} \times \widehat{X} \to \widehat{X}$$

$$\begin{aligned}
F_3(\varepsilon, \kappa, u \oplus \phi) &:= M_\kappa^{(1,1,1)}(\varepsilon) \begin{bmatrix} u \\ P\phi + \varepsilon P_\perp \phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v^2(\varepsilon)\varepsilon^{-1} + (v^2(\varepsilon) - 1)\varepsilon\kappa^2 N_{\varepsilon\kappa} & (v^2(\varepsilon) - 1)\kappa^2 1_\Omega S L_{\varepsilon\kappa}) \\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_{\varepsilon\kappa} & \varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\, \gamma_1 S L_{\varepsilon\kappa}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ P\phi + \varepsilon P_\perp \phi \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中， $U \subset \mathbb{C}$ 是原点的一个小开邻域， $\varepsilon \mapsto v^2(\varepsilon)$ 和 $\varepsilon \mapsto \rho(\varepsilon)$ 是如式 (1.13) 中所述的解析函数。

^我们寻找方程的一个解 $\varepsilon \mapsto (\kappa(\varepsilon)\ u(\varepsilon)\ \oplus \phi(\varepsilon))\ \in \mathsf{C}_- \times (X\backslash\{0\})$

$$F_3(\varepsilon, \kappa(\varepsilon), u(\varepsilon) \oplus \phi(\varepsilon)) = 0\,. \tag{9.12}$$

根据情形 2 中同类的论证，并且根据

$$\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)} = 1 - 2\rho\,\varepsilon + (2\rho^2 - \rho_1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\ \gamma_1 SL_{\varepsilon\kappa}\right)\\ =&\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0\right)_\perp - 2\rho\,\gamma_1 SL_0 + \big((2\rho^2-\rho_1)\gamma_1 SL_0 + \kappa^2 K^*_{(2)}\big)\varepsilon + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

由此，根据 $\gamma_1 SL_0 P\phi = -\frac{1}{2}\,P\phi$ 以及 $\gamma_1^{\mathrm{in}} N_{(1)} = 0$,

$$\begin{aligned}F_3(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) &= \begin{bmatrix} v^2 & -\kappa^2 1_\Omega SL_0 P \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & \big(\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0\big)_\perp + \rho\,P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix} v_1^2 - \kappa^2 N_0 & \kappa^2 1_\Omega\big((v^2 SL_0 - \kappa SL_{(1)})P - SL_0 P_\perp\big) \\ -2\rho\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & \kappa^2 K^*_{(2)} P - 2\rho\,\gamma_1 SL_0 P_\perp + (\frac{1}{2}\,\rho_1 - \rho^2)P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,.\end{aligned}$$

因此， $F_3(0,\ \kappa,\ u\oplus\phi) = 0\oplus 0$ 当且仅当 $(\kappa,\ u,\ \phi)$ 满足

$$\begin{cases} v^2 u - \kappa^2 1_\Omega SL_0 P\phi = 0 \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \big(\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0\big)_\perp \phi + \rho\,P\phi = 0\,. \end{cases} \tag{9.13}$$

取满足 $P\phi = S_0^{-1}1$ 的 ϕ，则 (9.13) 可改写为

$$\begin{cases} u = v^{-2}\kappa^2\,1 \\ v^{-2}\kappa^2 P\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1 + \rho\,S_0^{-1}1 = 0 \\ \big(\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0\big)_\perp \phi = -v^{-2}\kappa^2 P_\perp \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1\,. \end{cases}$$

由于

$$PS_0^{-1}1 = S_0^{-1}1\,, \qquad P\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1 = c_\Omega^{-1}\langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} S_0^{-1}1 = -c_\Omega^{-1}|\Omega| S_0^{-1}1 = -\omega_M^{-2} S_0^{-1}1\,,$$

one has that $F_3(0,\pm\kappa_\circ, u_\circ, \phi_\circ) = 0$ whenever

$$\kappa_\circ = v\sqrt{\rho}\,\omega_M\,, \qquad u_\circ = \rho\,\omega_M^2 1\,, \qquad \phi_\circ = S_0^{-1}1 - \rho\,\omega_M^2\varphi_\circ^\perp\,,$$

$$\varphi_\circ^\perp = \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 SL_0\right)_\perp^{-1} P_\perp \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 1\,.$$

现在我们引入映射 h

$$\Phi_3 : U\times\mathbb{C}\times\widehat{X} \to \mathbb{C}\times\widehat{X}\,,$$

$$\Phi_3(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) := \big(\langle u_\circ, u-u_\circ\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_\circ, \phi-\phi_\circ]_{-\frac{1}{2}}, F_3(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi)\big)\,. \tag{9.14}$$

显然,

$$\Phi_3(0,\pm\kappa_\circ, u_\circ\oplus\phi_\circ) = (0,0)\,.$$

我们用.....表示

$$D_\pm\Phi_3 : \mathbb{C}\times\widehat{X} \to \mathbb{C}\times\widehat{X}$$

映射 $(\kappa, u\oplus\phi)\ \mapsto \Phi_3(0,\kappa,u\oplus\phi)$ 在 $(\pm\kappa_\circ, u_\circ\oplus\phi_\circ)$ 处的弗雷歇微分，即

$$D_\pm\Phi_3(\kappa,u\oplus\phi)=\Big(\langle u_\circ,u\rangle_{L^2(\Omega)}+[\phi_\circ,\phi]_{-\frac12},(\mp2\kappa_\circ\kappa 1_\Omega SL_0P\phi_\circ+v^2u-\kappa_\circ^2 1_\Omega SL_0P\phi)\oplus \Big(\gamma_1^{\rm in}N_0u+\Big(\frac12+\gamma_1SL_0\Big)_\perp\phi+\rho\,P\phi\Big)\Big)$$

现在，对于任意给定的 $(z_*,\ u_*\oplus\phi_*)\ \in \mathsf{C}\ \times X$，我们证明方程存在唯一解 $(\kappa,\ u\oplus\phi)\ \in \mathsf{C}\ \times X$：

$$D_\pm\Phi_3(\kappa,u\oplus\phi)=(z_*,u_*\oplus\phi_*)\,. \tag{9.15}$$

等价地，方程组为

$$\begin{cases}\langle u_\circ,u\rangle_{L^2(\Omega)}+[\phi_\circ,\phi]_{-\frac12}=z_*\\ v^2u\mp2\kappa_\circ\kappa 1-c_\phi\kappa_\circ^2 1=u_*\\ P\gamma_1^{\rm in}N_0u+c_\phi\rho\,{S_0}^{-1}1=P\phi_*\\ P\phi=c_\phi\,{S_0}^{-1}1\\ P_\perp\big(\gamma_1^{\rm in}N_0u+\big(\frac12+\gamma_1SL_0\big)P_\perp\phi\big)=P_\perp\phi_*\,.\end{cases} \tag{9.16}$$

然后，由

$$[\phi_\circ,S_0^{-1}1]_{-\frac12}=[S_0^{-1}1,S_0^{-1}1]_{-\frac12}=c_\Omega\,,\quad [\phi_\circ,P\gamma_1^{\rm in}N_01]_{-\frac12}=[S_0^{-1}1,\gamma_1^{\rm in}N_01]_{-\frac12}=-|\Omega|\,,$$

(9.16) gives

$$\begin{cases}\kappa=\pm(2\kappa_\circ)^{-1}(\widehat\kappa-c_\phi\kappa_\circ^2)\\ u=v^{-2}\big(u_*+\widehat\kappa 1\big)\\ \phi=c_\phi S_0^{-1}1-v^{-2}\widehat\kappa\varphi_\circ^\perp+\varphi_*^\perp\,,\end{cases} \tag{9.17}$$

其中

$$\varphi_*^\perp=\Big(\frac12+\gamma_1SL_0\Big)_\perp^{-1}P_\perp\big(\phi_*-v^{-2}\gamma_1^{\rm in}N_0u_*\big)$$

且 $(\widehat\kappa,\ c_\phi)$ 是下列方程的解

$$\begin{cases}-v^{-2}|\Omega|\,\widehat\kappa+c_\Omega\rho\,c_\phi=[\phi_\circ,P\big(\phi_*-v^{-2}\gamma_1^{\rm in}N_0u_*\big)]_{-\frac12}\\ v^{-2}\big(\langle u_\circ,1\rangle_{L^2(\Omega)}-[\phi_\circ,\varphi_\circ^\perp]_{-\frac12}\big)\widehat\kappa+c_\Omega c_\phi=z_*-v^{-2}\langle u_\circ,u_*\rangle_{L^2(\Omega)}-[\phi_\circ,\varphi_*^\perp]_{-\frac12}\,.\end{cases} \tag{9.18}$$

由于

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}-v^{-2}|\Omega| & c_\Omega\rho\\ v^{-2}\big(\langle u_\circ,1\rangle_{L^2(\Omega)}-[\phi_\circ,\varphi_\circ^\perp]_{-\frac12}\big) & c_\Omega\end{bmatrix}\\ =&-v^{-2}c_\Omega\big(|\Omega|+\rho\,\langle u_\circ,1\rangle_{L^2(\Omega)}-\rho\,[\phi_\circ,\varphi_\circ^\perp]_{-\frac12}\big)\\ =&-v^{-2}c_\Omega\big(|\Omega|+\rho^2\omega_M^2\big(|\Omega|+\|\varphi_\circ^\perp\|^2_{\widehat H^{-1/2}(\Gamma)}\big)\big)\neq0\,,\end{aligned}$$

方程组 (9.18) 有唯一解。

因此，根据本节开头回顾的隐函数论证，在 $0\in\mathbb{R}$ 的一个充分小的邻域内，解析函数的隐函数定理表明，存在一个取值于 $\mathbb{C}\times(X\backslash\{0\})$ 的解析函数 $\varepsilon\mapsto(\kappa_\pm(\varepsilon)\ u_\pm(\varepsilon)\oplus\phi_\pm(\varepsilon))$，

$$\kappa_\pm(\varepsilon)=\pm v\sqrt{\rho}\,\omega_M+\sum_{n=1}^{+\infty}\kappa_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad u_\pm(\varepsilon)=u_\circ+\sum_{n=1}^{+\infty}u_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad \phi_\pm(\varepsilon)=\phi_\circ+\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_\pm^{(n)}\varepsilon^n$$

它是 (9.12) 的唯一解。可以显式计算展开式中出现的所有系数。特别是,

$$\big(\kappa_\pm^{(1)},u_\pm^{(1)}\oplus\phi_\pm^{(1)}\big)=-\left(D_\pm\Phi_3\right)^{-1}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Phi_3(\varepsilon,\pm v\sqrt{\rho}\,\omega_M,u_\circ\oplus\phi_\circ)\right).$$

等价地,

$$D_\pm\Phi_3(\kappa_\pm^{(1)},u^{(1)}\oplus\phi^{(1)})=\big(0,\widehat{u}_\circ\oplus\widehat{\phi}_\circ\big)\,,$$

其中

$$\begin{bmatrix}\widehat{u}_\circ\\ \widehat{\phi}_\circ\end{bmatrix}:=-\begin{bmatrix}v_1^2-\kappa_\circ^2N_0 & \kappa_\circ^2 1_\Omega\big((v^2SL_0-\kappa_\circ SL_{(1)})P-SL_0P_\perp\big)\\ -2\rho\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0 & \kappa_\circ^2K_{(2)}^*P-2\rho\,\gamma_1SL_0P_\perp+(\frac{1}{2}\,\rho_1-\rho^2)P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_\circ\\ \phi_\circ\end{bmatrix}.$$

因此，$\kappa_\pm^{(1)}$ 与 (9.17) 中的 κ 类似，只需将 u_* 和 ϕ_* 替换为 $\widehat{u}_\circ$ 和 $\widehat{\phi}_\circ$，并在 (9.18) 中取 $z_*=0$。为简洁起见，记 $\kappa_\pm^{(1)}=r_\pm-iI_\pm$，其中 $r_\pm$ 和 $I_\pm$ 均为实数，则有

$$\kappa_\pm(\varepsilon)=\pm v\sqrt{\rho}\,\omega_M+r_\pm\varepsilon-iI_\pm\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

于是

$$\kappa_\pm^2(\varepsilon)=v^2\rho\,\omega_M^2\pm2v\sqrt{\rho}\,\omega_Mr_\pm\varepsilon\mp i2v\sqrt{\rho}\,\omega_MI_\pm\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

属于 $\mathsf{e}(A(\varepsilon))$。

9.4. 情形 4。 我们定义映射

$$F_4:U\times\mathbb{C}\times\widehat{X}\to\widehat{X}$$

$$\begin{aligned}&F_4(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi):=M_\kappa^{(2,1,1)}(\varepsilon)\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}v^2(\varepsilon)\varepsilon^{-2}+(v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2N_{\varepsilon\kappa} & (v^2(\varepsilon)-1)\kappa^2 1_\Omega SL_{\varepsilon\kappa}\\ \frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1^{\mathrm{in}}N_{\varepsilon\kappa} & \frac{1}{2}+\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1SL_{\varepsilon\kappa}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \phi\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $U\subset\mathbb{C}$ 是原点的一个小开邻域，$\varepsilon\mapsto v^2(\varepsilon)$ 和 $\varepsilon\mapsto\rho(\varepsilon)$ 是 (1.14) 中的解析函数。于是有

$$\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}=1-2\rho\,\varepsilon+(2\rho^2-\rho_1)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

and

$$\frac{1-\rho(\varepsilon)}{1+\rho(\varepsilon)}\,\gamma_1SL_{\varepsilon\kappa}=\gamma_1SL_0-2\rho\,\gamma_1SL_0\varepsilon+\big((2\rho^2-\rho_1)\gamma_1SL_0+\kappa^2K_{(2)}^*\big)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\,.$$

因此（注意 $\gamma_1^{\mathrm{in}} N_{(1)} = 0$），

$$F_4(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) = \begin{bmatrix} v^2-\kappa^2 N_0 & -\kappa^2 1_\Omega SL_0 \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & \frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^2-\kappa^3 N_{(1)} & -\kappa^3 1_\Omega SL_{(1)} \\ -2\rho\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & -2\rho\,\gamma_1 SL_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}\varepsilon$$
$$+\begin{bmatrix} v_2^2+v^2\kappa^2 N_0-\kappa^4 N_{(2)} & v^2\kappa^2 1_\Omega SL_0-\kappa^4 1_\Omega SL_{(2)} \\ ((2\rho^2-\rho_1)\gamma_1 SL_0+\kappa^2 K^*_{(2)})\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0+\gamma_1^{\mathrm{in}} N_{(2)} & (2\rho^2-\rho_1)\gamma_1 SL_0+\kappa^2 K^*_{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\,,$$

注9.3。显然可知，$u\oplus\phi\in X\backslash\{0\}$满足 $F_4(0,\ 0,\ u\oplus\phi)=0$ 当且仅当 $u=0$ 且 $P_\perp\phi=0$，即当且仅当

$$u\oplus\phi = 0\oplus c_0 S_0^{-1}1\,,\quad c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

情形 $\kappa\neq 0$ 较为复杂，以下引理将对此进行描述。

引理9.4。$(\kappa, u\oplus\phi)\in(\mathbb{C}\backslash\{0\})\times(X\backslash\{0\})$ 满足方程 $F_4(0,\kappa,u\oplus\phi)=0$ 当且仅当

$$(\kappa,u\oplus\phi) = (\pm v\nu^{1/2}, u_\nu\oplus\phi_\nu)\,,$$

wh其中(ν,u_ν) 是 $L^2(\Omega)$ 中的诺伊曼拉普拉斯算子 $-\Delta_\Omega^N$的一个特征对，并且

$$\phi_\nu = S_0^{-1}\gamma_0^{\mathrm{in}}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,. \tag{9.19}$$

证明。显然，$F_4(0,\ \kappa,\ u\oplus\phi)=0$ 当且仅当

$$\begin{cases} \left(\frac{v^2}{\kappa^2}-N_0\right)u - 1_\Omega SL_0\phi = 0 \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)\phi = 0\,. \end{cases} \tag{9.20}$$

因此，如果 $(\kappa,u\oplus\phi)\neq(0,0\oplus 0)$ 是一个解，那么

$$\begin{cases} \frac{v^2}{\kappa^2}\gamma_1^{\mathrm{in}} u - \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u - \gamma_1^{\mathrm{in}} SL_0\phi = 0 \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \frac{1}{2}\,\phi + \frac{1}{2}\,(\gamma_1^{\mathrm{ex}}+\gamma_1^{\mathrm{in}})SL_0\phi = 0\,. \end{cases}$$

将这两行相加，可得

$$\frac{v^2}{\kappa^2}\,\gamma_1^{\mathrm{in}} u + \frac{1}{2}\,\phi + \frac{1}{2}\,[\gamma_1]SL_0\phi = 0\,.$$

然后，由 $[\gamma_1]SL_0\phi=-\phi$,

$$\gamma_1^{\mathrm{in}} u = 0\,.$$

此外，由

$$0 = -\Delta_\Omega^{\max}\left(\left(\frac{v^2}{\kappa^2}-N_0\right)u - 1_\Omega SL_0\phi\right) = -\frac{v^2}{\kappa^2}\Delta_\Omega^{\max}u - u\,,$$

可得

$$\frac{\kappa^2}{v^2}\in\sigma(-\Delta_\Omega^N) = \sigma_{disc}(-\Delta_\Omega^N)$$

因此，$(v^{-2}\kappa^2,u)\equiv(\nu,u_\nu)$ 是诺伊曼拉普拉斯算子 $-\Delta_\Omega^N$ 的一个特征对。

By

$$P\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu = c_\Omega^{-1}\langle 1,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} S_0^{-1}1 = -c_\Omega^{-1}\langle 1,u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} S_0^{-1}1 = 0\,,$$

由此可得

$$P_\perp\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu = \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu$$

因此，(9.20) 中的第二个方程给出

$$P_\perp\phi\equiv\phi_\nu^\perp=-\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)_\perp^{-1}\gamma_1^{\rm in}N_0u_\nu\,. \tag{9.21}$$

由关系式

$$DN_0=\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)S_0^{-1} \tag{9.22}$$

并且由

$$DN_0\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu=\gamma_1^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu=-\gamma_1^{\rm in}N_0u_\nu\,, \tag{9.23}$$

可得

$$-\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)_\perp^{-1}\gamma_1^{\rm in}N_0u_\nu=P_\perp S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu$$

因此

$$\phi_\nu^\perp=P_\perp S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,.$$

记 $P\phi=c_\nu S_0^{-1}1$，由 (9.20) 中的第一个方程可得

$$h_\nu:=\left(\frac{1}{\nu}-N_0\right)u_\nu-1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp=c_\nu 1$$

因此

$$c_\nu|\Omega|=\langle 1,h_\nu\rangle_{L^2(\Omega)}\,.$$

因此我们证明了，如果 $(\kappa,\ u\oplus\phi)\neq(0,\ 0\oplus 0)$ 是 $F_4(0,\ \kappa,\ u\oplus\phi)=0\oplus 0$ 的解，那么 $(\kappa,\ u\oplus\phi)=(\pm v\nu^{1/2},\ u_\nu\oplus\phi_\nu)$，其中 $(\nu,\ u_\nu)$ 是诺伊曼拉普拉斯算子的一个特征对，并且

$$\phi_\nu=|\Omega|^{-1}\langle 1,h_\nu\rangle_{L^2(\Omega)}\,S_0^{-1}1+\phi_\nu^\perp\,. \tag{9.24}$$

现在，我们来证明 h_ν 是一个常函数。由于 h_ν 是调和函数，h_ν 是常数当且仅当 $\gamma_0^{\rm in}h_\nu$ 是常数。由

$$\begin{aligned}h_\nu=&(\nu^{-1}-N_0)u_\nu-1_\Omega SL_0P_\perp S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\\=&(\nu^{-1}-N_0)u_\nu-1_\Omega SL_0S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\\&+1_\Omega SL_0PS_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,,\end{aligned}$$

并由 $S_0=\gamma_0SL_0=\gamma_0^{\rm in}1_\Omega SL_0$，可得

$$\gamma_0^{\rm in}h_\nu=S_0PS_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu=c_\Omega^{-1}\langle 1,S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\rangle_{\frac12,-\frac12}1\,.$$

因此，h_ν 是一个常数，且

$$h_\nu=c_\nu=c_\Omega^{-1}\langle 1,S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\rangle_{\frac12,-\frac12}1\,.$$

由 (9.24),

$$\phi_\nu=c_\nu S_0^{-1}1+\phi_\nu^\perp=S_0^{-1}\gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,.$$

反过来，现在我们来证明 $F_4(0,\ \pm v\nu^{1/2},\ u_\nu\oplus\phi_\nu)=0$，等价地

$$\begin{cases}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu-1_\Omega SL_0\phi_\nu=0\\ \gamma_1^{\rm in}N_0u_\nu+\left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)\phi_\nu=0\,.\end{cases}$$

由于 $1_\Omega SL_0\phi_\nu$ 和 $(\nu^{-1}-N_0)u_\nu$ 都是调和函数，且

$$\gamma_0^{\rm in}1_\Omega SL_0\phi_\nu = S_0\phi_\nu = \gamma_0^{\rm in}(\nu^{-1}-N_0)u_\nu\,,$$

它们重合。此外，由 (9.22) 和 (9.23),

$$\gamma_1^{\rm in}N_0u_\nu = -DN_0S_0\phi_\nu = -\left(\frac{1}{2}+\gamma_1 SL_0\right)\phi_\nu\,.$$

□

注 9.5. 根据前一个引理的证明，由于 h_ν 是常数，因此 $1_\Omega SL_0P\phi_\nu = h_\nu$，可得

$$N_0u_\nu + 1_\Omega SL_0\phi_\nu = \nu^{-1}u_\nu + h_\nu - \left((\nu^{-1}-N_0)u_\nu - 1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp\right) = \nu^{-1}u_\nu\,. \tag{9.25}$$

现在我们引入映射

$$\Phi_4 : U\times\mathbb{C}\times\widehat{X}\to\mathbb{C}\times\widehat{X}\,,$$

$$\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi) := \left(\langle u_\nu, u-u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_\nu,\phi-\phi_\nu]_{-\frac12}, F_4(\varepsilon,\kappa,u\oplus\phi)\right). \tag{9.26}$$

显然,

$$\Phi_4(0,\pm v\nu^{1/2},u_\nu\oplus\phi_\nu) = (0,0)\,.$$

我们记为

$$D_\pm\Phi_4 : \mathbb{C}\times\widehat{X}\to\mathbb{C}\times\widehat{X}$$

映射 $(\kappa,u\oplus\phi)\mapsto\Phi_4(0,\kappa,u\oplus\phi)$ 在 $(0,\pm v\nu^{1/2},u_\nu\oplus\phi_\nu)$ 处的弗雷歇微分，即,

$$\begin{aligned} D_\pm\Phi_4(\kappa,u\oplus\phi) = \Bigg(&\langle u_\nu,u\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_\nu,\phi]_{-\frac12}, \big(\mp 2v\nu^{1/2}\kappa(N_0u_\nu + 1_\Omega SL_0\phi_\nu)\\ &+ v^2(1-\nu N_0)u - v^2\nu 1_\Omega SL_0\phi\big)\oplus\left(\gamma_1^{\rm in}N_0u + \left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)\phi\right)\Bigg)\end{aligned}$$

现在，我们研究 $D_\pm\Phi_4$ 的可逆性。由于 $\nu=0$ 的情形更为复杂，因此我们先考虑 $\nu\neq0$ 的情形。

引理 9.6. 假设诺伊曼特征值 $\nu\neq0$ 是单重的。那么，对于任意给定的 $\widehat{(z_*,u_*\oplus\phi_*)}\in\mathbb{C}\times X$，方程

$$D_\pm\Phi_4(\kappa,u\oplus\phi) = (z_*,u_*\oplus\phi_*) \tag{9.27}$$

$\widehat{\ }$有唯一解 $(\kappa,u\oplus\phi)\in\mathbb{C}\times X$。特别地,

$$\kappa = \mp\frac12\nu^{1/2}\|u_\nu\|^{-2}_{L^2(\Omega)}\left(v^{-1}\langle u_\nu,u_*\rangle_{L^2(\Omega)} + v\,\langle\gamma_0^{\rm in}u_\nu,\phi_*\rangle_{\frac12,-\frac12}\right) \tag{9.28}$$

其中 u_ν 表示对应于 ν的特征函数。

证明。 方程（9.27）等价于方程组

$$\begin{cases}\langle u_\nu,u\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_\nu,\phi]_{-\frac12} = z_*\\ \mp2v\nu^{1/2}\kappa(N_0u_\nu+1_\Omega SL_0\phi_\nu) + v^2(1-\nu N_0)u - v^2\nu 1_\Omega SL_0\phi = u_*\\ \gamma_1^{\rm in}N_0u + (\frac12+\gamma_1SL_0)\phi = \phi_*\,.\end{cases}$$

根据（9.25），后者可改写为

$$\begin{cases} \langle u_\nu, u\rangle_{L^2(\Omega)} + [\phi_\nu, \phi]_{-\frac{1}{2}} = z_* \\ \mp 2v\nu^{-1/2}\kappa u_\nu + v^2(1-\nu N_0)u - v^2\nu 1_\Omega SL_0\phi = u_* \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + (\tfrac{1}{2} + \gamma_1 SL_0)\phi = \phi_* \,. \end{cases} \tag{9.29}$$

现在假设 (9.29) 至少有一个解 $(\kappa,\ u,\ \phi)$。根据第二行中的关系，$u_* - v^2 u \in H^1_\Delta(\Omega)$，因此其诺伊曼迹作为$H^{-1/2}(\Gamma)$中的分布是有定义的。因此，对第二行取诺伊曼迹，并将所得结果与第三行相加，可得

$$\frac{1}{2}\,\phi + \frac{1}{2}\,[\gamma_1] SL_0\phi = \nu^{-1}\gamma_1^{\mathrm{in}}(v^{-2}u_* - u) + \phi_* \,.$$

因此，由 $[\gamma_1]SL_0\phi = -\phi$,

$$\nu^{-1}\gamma_1^{\mathrm{in}}(u - v^{-2}u_*) = \phi_* \,.$$

那么，由

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega^{\max}\big(\mp 2v^{-1}\nu^{-3/2}\kappa u_\nu - N_0 u - 1_\Omega SL_0\phi\big) &= \mp 2v^{-1}\nu^{-3/2}\kappa\Delta_\Omega^{\max}u_\nu + u \\ &= \pm 2v^{-1}\nu^{-1/2}\kappa u_\nu + u = -\Delta_\Omega^{\max}(\nu^{-1}(u - v^{-2}u_*)) \,, \end{aligned}$$

函数

$$w_* := \nu^{-1}(u - v^{-2}u_*)$$

满足边值问题

$$\begin{cases} (-\Delta_\Omega^{\max} - \nu)w_* = f_* \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} w_* = \phi_* \,, \end{cases} \tag{9.30}$$

其中

$$f_* = v^{-2}u_* \pm 2v^{-1}\nu^{-1/2}\kappa u_\nu \,.$$

根据 [21, 定理 4.10], (9.30) 可解，当且仅当

$$\langle u_\nu, f_*\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \phi_*\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = 0 \,.$$

后者蕴含（9.28）。此外，（9.30）的解集为

$$\{w_* = c_* u_\nu + \widetilde{w}_* \,, \quad c_* \in \mathbb{C}\}$$

其中 $\widetilde{w}_*$ 是任意一个固定特解。因此，u 属于这种形式

$$u = \nu(c_* u_\nu + \widetilde{w}_*) + v^{-2}u_* \,, \quad c_* \in \mathbb{C} \,. \tag{9.31}$$

若 u 如式（9.31）所示，则

$$\begin{aligned} P\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u =& c_\Omega^{-1}\langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} S_0^{-1}1 = -c_\Omega^{-1}\langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} S_0^{-1}1 \\ =& -c_\Omega^{-1}\big(\langle 1, \nu\widetilde{w}_* + v^{-2}u_*\rangle_{L^2(\Omega)}\big) S_0^{-1}1 \\ =& -c_\Omega^{-1}\big(-\langle 1, \Delta_\Omega^{\max}\widetilde{w}_*\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle 1, v^{-2}u_* - f_*\rangle_{L^2(\Omega)}\big) S_0^{-1}1 \\ =& c_\Omega^{-1}\langle 1, \Delta_\Omega^{\max}\widetilde{w}_*\rangle_{L^2(\Omega)} = c_\Omega^{-1}\langle 1, \phi_*\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \\ =& P\phi_* \,. \end{aligned}$$

注意，后者也给出 $P\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_\nu=0$，即 $\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_\nu=P_\perp\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_\nu$。因此，由式（9.29）的第三行可得，

$$P_\perp\phi=\left(\frac{1}{2}+\gamma_1SL_0\right)_\perp^{-1}P_\perp(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u)=\psi_\nu^\perp-\nu c_*\varphi_\nu^\perp\,,$$

其中

$$\varphi_\nu^\perp=\left(\frac{1}{2}+\gamma_1^{\mathrm{in}}SL_)\right)_\perp^{-1}\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_\nu$$

and

$$\psi_\nu^\perp=\left(\frac{1}{2}+\gamma_1SL_0\right)_\perp^{-1}P_\perp(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0(\nu\widetilde{w}_*+v^{-2}u_*))\,.$$

由 (9.21)，$\varphi_\nu^\perp=-\phi_\nu^\perp$ 因此

$$P_\perp\phi=\psi_\nu^\perp+\nu c_*\phi_\nu^\perp\,. \tag{9.32}$$

记

$$P\phi=c_\phi S_0^{-1}1 \tag{9.33}$$

并在 (9.29) 第二行中与 $1\in L^2(\Omega)$ 取内积，利用 (9.31) 可得，

$$\begin{aligned}\langle 1,u_*\rangle_{L^2(\Omega)}=&v^2\langle 1,(1-\nu N_0)(\nu c_*u_\nu+\nu\widetilde{w}_*+v^{-2}u_*)\rangle_{L^2(\Omega)}-v^2\nu c_\phi|\Omega|\\&-v^2\nu\langle 1,1_\Omega SL_0(\psi_\nu^\perp+\nu c_*\phi_\nu^\perp)\rangle_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

将此关系与 (9.29) 第一行中的关系结合起来，数对 $(c_*,\ c_\phi)$ 满足方程组

$$\begin{cases}\nu\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2c_*+[\phi_\nu,S_0^{-1}1]_{-\frac12}c_\phi=z_*-\langle u_\nu,\nu\widetilde{w}_*+v^{-2}u_*\rangle_{L^2(\Omega)}-[\phi_\nu,P_\perp\phi]_{-\frac12}\\ \nu\langle 1,N_0u_\nu+1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp\rangle_{L^2(\Omega)}\,c_*+|\Omega|\,c_\phi=\langle 1,(1-\nu N_0)\widetilde{w}_*-v^{-2}N_0u_*-1_\Omega SL_0\psi_\nu^\perp\rangle_{L^2(\Omega)}\,.\end{cases} \tag{9.34}$$

根据（9.25），记作 $\phi_\nu=c_\nu S_0^{-1}1+\phi_\nu^\perp$，

$$N_0u_\nu+1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp=\nu^{-1}u_\nu-c_\nu1_\Omega SL_0S_0^{-1}1=\nu^{-1}u_\nu-c_\nu1\,.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}\nu\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2&[\phi_\nu,S_0^{-1}1]_{-\frac12}\\ \nu\langle 1,N_0u_\nu+1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp\rangle_{L^2(\Omega)}&|\Omega|\end{bmatrix}\\ =&\nu\left(|\Omega|\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2-[\phi_\nu,S_0^{-1}1]_{-\frac12}\langle 1,\nu^{-1}u_\nu-c_\nu1\rangle_{L^2(\Omega)}\right)\\ =&\nu\left(|\Omega|\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2+c_\Omega|c_\nu|^2\right)>0\end{aligned}$$

且系统（9.34）具有唯一解。总之，如果系统（9.29）可解，则存在一个唯一解 (κ,u,ϕ)，由（9.28）、（9.31）以及（9.32）、（9.33）给出，其中 (c_*,c_ϕ) 满足（9.34）。

反过来，给定 (z_*,u_*,ϕ_*)，令 (κ,u,ϕ) 由 (9.28)、(9.31) 以及 (9.32)、(9.33) 定义，其中 (c_*,c_ϕ) 满足 (9.34)。于是，

$$D_\pm\Phi_4(\kappa,u\oplus\phi)=(z_*,(\mp2v\nu^{-1/2}\kappa u_\nu+v^2(1-\nu N_0)u-v^2\nu1_\Omega SL_0\phi)\oplus\phi_*)\,.$$

由于

$$u=\nu(c_*u_\nu+\widetilde{w}_*)+v^{-2}u_*\,,$$

其中 $\widetilde{w}_*$ 满足（9.30），可得

$$D_\pm\Phi_4(\kappa,u\oplus\phi)=(z_*,(u_*+\widetilde{u}_*)\oplus\phi_*)\,,$$

其中

$$\widetilde{u}_*:=\mp2v\nu^{-1/2}\kappa u_\nu+v^2\nu(1-\nu N_0)(c_*u_\nu+\widetilde{w}_*)-\nu N_0u_*-v^2\nu1_\Omega SL_0\phi\,.$$

因此，为完成证明，我们需要证明 $\widetilde{u}_*=0$。首先，注意到 $\widetilde{u}_*$ 是调和函数。事实上，

$$\begin{aligned}-\Delta_\Omega^{\max}\widetilde{u}_*&=\mp2v\nu^{1/2}\kappa u_\nu+v^2\nu^2c_*u_\nu-v^2\nu\Delta_\Omega^{\max}\widetilde{w}_*-v^2\nu^2(c_*u_\nu+\widetilde{w}_*)-\nu u_*\\&=\mp2v\nu^{1/2}\kappa u_\nu+v^2\nu f_*-\nu u_*=0\,.\end{aligned}$$

此外，根据 $\gamma_1^{\mathrm{in}}\widetilde{w}_*=\phi_*$ 以及 $[\gamma_1]SL_0\phi=-\phi$，

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\mathrm{in}}\widetilde{u}_*=&v^2\nu\big(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u-\gamma_1^{\mathrm{in}}SL_0\phi\big)\\=&v^2\nu\left(\phi_*-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u-\frac{1}{2}\,\phi-\frac{1}{2}\,[\gamma_1]SL_0\phi-\gamma_1^{\mathrm{in}}SL_0\phi\right)\\=&v^2\nu\left(\phi_*-\left(\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u+\frac{1}{2}\,\phi+\gamma_1SL_0\phi\right)\right)\\=&0\,.\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{u}_*$ 是一个常数；令 $\widetilde{u}_*=\widetilde{c}_*$ 并写成 $P\phi=c_\phi S_0^{-1}1$。于是，根据（9.34）的第二行

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_*|\Omega|=&\langle1,\widetilde{u}_*\rangle_{L^2(\Omega)}\\=&v^2\nu\big(\langle1,\widetilde{w}_*\rangle_{L^2(\Omega)}-\langle1,N_0(\nu(c_*u_\nu+\widetilde{w}_*)+v^{-2}u_*)\rangle_{L^2(\Omega)}-\langle1,1_\Omega SL_0\phi\rangle_{L^2(\Omega)}\big)\\=&v^2\nu\big(\langle1,(1-\nu N_0)\widetilde{w}_*-v^{-2}N_0u_*-1_\Omega SL_0\psi_\nu^\perp\rangle_{L^2(\Omega)}-\nu c_*\langle1,N_0u_\nu+1_\Omega SL_0\phi_\nu^\perp\rangle_{L^2(\Omega)}\big)\\=&0\,.\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{u}_*=0$ 证明完成。 □

注 9.7. 请注意，我们关于诺伊曼特征值ν简单性的假设对一般域 Ω 成立，参见 [16,例子 6.4]。

根据前面的引理以及本节开头回顾的隐函数论证，在 $0\in\mathsf{R}$ 的一个足够小的邻域内，存在一个取值于 $\mathsf{C}\times(X\backslash\{0\})$ 的解析函数 $\varepsilon\mapsto(\kappa_\pm(\varepsilon)\ u_\pm(\varepsilon)\oplus\phi_\pm(\varepsilon))$，

$$\kappa_\pm(\varepsilon)=\pm v\sqrt{\nu}+\sum_{n=1}^{+\infty}\kappa_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad u_\pm(\varepsilon)=u_\nu+\sum_{n=1}^{+\infty}u_\pm^{(n)}\varepsilon^n\,,\qquad\phi_\pm(\varepsilon)=\phi_\nu+\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_\pm^{(n)}\varepsilon^n$$

它是 $F_4(\varepsilon,\kappa(\varepsilon)\ u(\varepsilon)\oplus\phi(\varepsilon))=0$ 的唯一解。所有展开式中出现的系数都可以显式计算。特别是，

$$\big(\kappa_\pm^{(1)},u_\pm^{(1)}\oplus\phi_\pm^{(1)}\big)=-\left(D_\pm\Phi_4\right)^{-1}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Phi_4(\varepsilon,\pm v\nu^{1/2},u_\nu\oplus\phi_\nu)\right)\,,$$

等价地,

$$D_{\pm}\Phi_4(\kappa_{\pm}^{(1)}, u^{(1)} \oplus \phi^{(1)}) = \left(0, \widehat{u}_\nu \oplus \widehat{\phi}_\nu\right),$$

其中

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_\nu \\ \widehat{\phi}_\nu \end{bmatrix} := - \begin{bmatrix} v_1^2 \mp v^3\nu^{3/2} N_{(1)} & \mp v^3\nu^{3/2} 1_\Omega SL_{(1)} \\ -2\rho\,\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 & -2\rho\,\gamma_1 SL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\nu \\ \phi_\nu \end{bmatrix}.$$

因此，由（9.28），

$$\kappa_{\pm}^{(1)} = \pm\frac{1}{2}\,\nu^{1/2}\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^{-2}\left(v^{-1}\langle u_\nu, \widehat{u}_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} + v\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \widehat{\phi}_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right).$$

By

$$N_{(1)}u = \frac{i}{4\pi}\,\langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} 1\,, \qquad SL_{(1)}\phi = \frac{i}{4\pi}\,\langle 1, \phi\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} 1\,,$$

可得

$$\begin{aligned} &v^{-1}\langle u_\nu, \widehat{u}_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} + v\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \widehat{\phi}_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \\ =& - v_1^2 v^{-1}\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho v\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - 2\rho v\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \gamma_1 SL_0\phi_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

由于 $(\nu^{-1} - N_0)u_\nu = 0$ 和 $1_\Omega SL_0\phi_\nu$ 均为调和函数，且

$$\gamma_0^{\mathrm{in}} SL_0\phi_\nu = \gamma_0^{\mathrm{in}} SL_0 S_0^{-1}\gamma_0^{\mathrm{in}}(\nu^{-1} - N_0)u_\nu = \gamma_0^{\mathrm{in}}(\nu^{-1} - N_0)u_\nu\,,$$

得到

$$1_\Omega SL_0\phi_\nu = (\nu^{-1} - N_0)u_\nu\,.$$

此外,

$$\gamma_1 SL_0\phi_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_1^{\mathrm{in}} + \gamma_1^{\mathrm{ex}})SL_0\phi_\nu = \gamma_1^{\mathrm{in}} SL_0\phi_\nu + \frac{1}{2}\,[\gamma_1]SL_0\phi_\nu = \gamma_1^{\mathrm{in}} SL_0\phi_\nu - \frac{1}{2}\,\phi_\nu\,.$$

格林公式给出

$$\begin{aligned} \langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} =& \langle u_\nu, \Delta_\Omega N_0 u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle\Delta_\Omega u_\nu, N_0 u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} \\ =& - \|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu\langle u_\nu, N_0 u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \gamma_1^{\mathrm{in}} SL_0\phi_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle u_\nu, \Delta_\Omega 1_\Omega SL_0\phi_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle\Delta_\Omega u_\nu, 1_\Omega SL_0\phi_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} \\ =& \nu\langle u_\nu, 1_\Omega SL_0\phi_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_\nu, (1 - \nu N_0)u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)} = \|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu\langle u_\nu, N_0 u_\nu\rangle_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Thus

$$\kappa_{\pm}^{(1)} = \pm\frac{1}{2}\,\nu^{1/2}\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^{-2}\left(\rho v\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \phi_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - v_1^2 v^{-1}\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

由（9.19），$\kappa_{\pm}^{(1)}$ 不依赖于$\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)}$；因此，取$\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)} = 1$,

$$\kappa_{\pm}^{(1)} = \pm\frac{1}{2}\,\nu^{1/2}\left(\rho v\,\langle\gamma_0^{\mathrm{in}} u_\nu, \phi_\nu\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - v_1^2 v^{-1}\right).$$

并记 $\kappa_{\pm}^{(1)} = \pm\,\kappa_\nu$, $\kappa_\nu \in \mathbb{R}$,

$$\kappa_{\pm}(\varepsilon) = \pm(v\nu^{1/2} + \kappa_\nu\varepsilon) + O(\varepsilon^2)\,;$$

then

$$\kappa_{\pm}^2(\varepsilon) = v^2\nu + 2v\nu^{1/2}\kappa_\nu\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

属于 $\mathsf{e}(A(\varepsilon))$。

最后，我们考虑情形 $\nu = 0$。此时隐函数论证无法直接应用，因此必须采用 Lyapunov-Schmidt 约化（例如参见 [2, 第5]章第 3 节和第 4 节）。

我们记为

$$D_0\Phi_4 : \mathbb{C} \times \widehat{X} \to \mathbb{C} \times \widehat{X}$$

映射 $(\kappa, u \oplus \phi) \mapsto \Phi_4(0, \kappa, u \oplus \phi)$ 在 $(0, 0, 0 \oplus c_0 S_0^{-1}1)$ 处的弗雷歇微分（见注释 (9.3)），即，记 $P\phi = c_\phi S_0^{-1}1$,

$$D_0\Phi_4(\kappa, u \oplus \phi) = \left(c_\Omega \overline{c}_0 c_\phi, v^2 u \oplus \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0 \right) P_\perp \phi \right) \right).$$

有

$$\ker(D_0\Phi_4) = \{(\kappa, u \oplus \phi) : u = 0\,,\ \phi = 0\} \simeq \mathbb{C}\,.$$

记

$$\phi_* = c_{\phi_*} S_0^{-1}1 + \phi_*^\perp\,, \qquad u = c_{u_*}1 + u_*^\perp\,,$$

该系统

$$\begin{cases} c_\Omega \overline{c}_0 c_\phi = z_* \\ v^2 u = u_* \\ \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right) P_\perp \phi = \phi_* \end{cases}$$

当且仅当.....时可解

$$P(v^2\phi_* - \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_*) = (v^2 c_{\phi_*} + c_\Omega^{-1}|\Omega| c_{u_*}) S_0^{-1}1 = 0$$

此时，解由下式给出

$$\begin{cases} c_\phi = c_\Omega^{-1}\overline{c}_0^{-1} z_* \\ u = v^{-2} u_* \\ P_\perp \phi = \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)_\perp^{-1} \left(\phi_* - v^{-2}\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u_*\right). \end{cases} \tag{9.35}$$

这意味着

$$\mathrm{ran}(D_0\Phi_4) = \mathbb{C} \oplus \widehat{X}_0\,,$$

其中

$$\widehat{X}_0 := \left\{ u_* \oplus \phi_* \in \widehat{X} : \langle 1, u_* \rangle_{L^2(\Omega)} + v^2 [S_0^{-1}1, \phi_*]_{-\frac{1}{2}} = 0 \right\} = \{1 \oplus v^2 S_0^{-1}1\}^\perp\,.$$

因此，记 P 和 $P_\perp$ 分别为投影到闭子空间 $\mathbb{C} \oplus \widehat{X}_0$ 和 $(\mathbb{C} \oplus \widehat{X}_0)^\perp = \{0\} \oplus \mathrm{span}(1 \oplus v^2 S_0^{-1}1)$ 上的正交投影算子，则有 $\widehat{P} = 1 - \widehat{P}_\perp$ 其中

$$\widehat{P}_\perp(z_*, u_* \oplus \phi_*) := \left(0, (|\Omega| + v^4 c_\Omega)^{-1} \left(\langle 1, u_* \rangle_{L^2(\Omega)} + v^2 \langle 1, \phi_* \rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right) (1 \oplus v^2 S_0^{-1}1) \right).$$

显然,

$$\Phi_4(\varepsilon, \kappa, u \oplus \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{P}\Phi_4(\varepsilon, \kappa, u \oplus \phi) = 0 \\ \widehat{P}_\perp \Phi_4(\varepsilon, \kappa, u \oplus \phi) = 0\,. \end{cases} \tag{9.36}$$

定义

$$\widehat{\Phi}_4 : U \times \mathbb{C} \times \widehat{X} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \widehat{X}_0\,, \qquad \widehat{\Phi}_4 := \widehat{P}\Phi_4\,,$$

并将映射 $u\oplus\phi\mapsto\Psi(0,\,0,\,u\oplus\phi)$ 在 $(0,\,0,\,0\oplus c_0S_0^{-1}1)$ 处的弗雷歇微分记为 $\widehat{D}_0\widehat{\Phi}_4$，可得

$$\widehat{D}_0\widehat{\Phi}_4=\widehat{P}D_0\Phi_4\,.$$

根据（9.35），$D_0\Phi_4\colon X\to\mathbb{C}\times X_0$ 是一个有界双射，并且

$$\widehat{D}_0\widehat{\Phi}_4(u\oplus\phi)=(z_*,u_*\oplus\phi_*)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}u=v^{-2}u_*\\ \phi=(c_\Omega\overline{c}_0)^{-1}z_*S_0^{-1}1+\left(\frac{1}{2}+\gamma_1SL_0\right)_\perp^{-1}(\phi_*-v^{-2}\gamma_1^{\mathrm{in}}N_0u_*)\,.\end{cases}$$

由于

$$\widehat{\Phi}_4(0,0,0\oplus c_0S_0^{-1}1)=\widehat{P}\Phi_4(0,0,0\oplus c_0S_0^{-1}1)=0\,,$$

隐函数定理适用于 Φ_4，因此，在 $(0,\,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ 的一个足够小的邻域内，存在一个取值于 X_0 的解析映射 $(\varepsilon,\,\kappa)\mapsto u(\varepsilon,\,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\,\kappa)$，使得

$$\widehat{P}\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))=0\,,$$

等价地，

$$\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))=\widehat{P}_\perp\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))\,.\tag{9.37}$$

定义

$$f(\varepsilon,\kappa):=\langle1\oplus v^2S_0^{-1}1,F_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))\rangle_{\widehat{X}}\,,\tag{9.38}$$

并利用这些关系

$$\begin{cases}\langle u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa),u(\varepsilon,\kappa)\oplus(\phi(\varepsilon,\kappa)-c_0S_0^{-1}1)\rangle_{\widehat{X}}=0\\ \langle u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa),1\oplus v^2S_0^{-1}1\rangle_{\widehat{X}}=0\,,\end{cases}$$

（9.37）可改写为

$$\begin{cases}\langle1,u(\varepsilon,\kappa)\rangle_{L^2(\Omega)}=-v^2c_0c_\Omega\\ [S_0^{-1}1,\phi(\varepsilon,\kappa)]_{-\frac{1}{2}}\equiv\langle1,\phi(\varepsilon,\kappa)\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=c_0c_\Omega\\ F_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))=(|\Omega|+v^2c_\Omega)^{-1}f(\varepsilon,\kappa)(1\oplus v^2S_0^{-1}1)\,.\end{cases}\tag{9.39}$$

此外，由（9.36）和（9.38）可得，

$$\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))=0\;\Leftrightarrow\;\widehat{P}_\perp\Phi_4(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\oplus\phi(\varepsilon,\kappa))=0\;\Leftrightarrow\;f(\varepsilon,\kappa)=0\,.$$

下文采用简记

$$\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^nf_0:=\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^nf(0,0)\,,\qquad\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^nu_0:=\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^nu(0,0)\,,\qquad\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^n\phi_0:=\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^n\phi(0,0)\,,$$

由于 F_4 是 κ^2、$\partial_k\Psi$ 的函数（$0,\,0,\,0\oplus c_0S_0^{-1}1$）$=0$，因此，

$$\partial_\kappa u_0\oplus\partial_k\phi_0=-(\widehat{D}_0\Psi)^{-1}\partial_k\Psi(0,0,0\oplus c_0S_0^{-1}1)=0\oplus0\,.$$

由（9.39）中的前两行，

$$\langle1,\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^nu_0\rangle_{L^2(\Omega)}=0\,,\qquad\left[S_0^{-1}1,\partial_\varepsilon^m\partial_\kappa^n\phi_0\right]_{-\frac{1}{2}}=0\,,$$

有 $f_0 := f(0,\ 0) = 0$ 并且，由

$$\begin{aligned}&\langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \left[S_0^{-1}1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\phi\right]_{-\frac{1}{2}}\\ =&\langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle 1, \gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 u\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle 1, u\rangle_{L^2(\Omega)} = 0\,,\end{aligned}$$

这对任意 $u \oplus \phi \in X$ 都成立,

$$\partial_\kappa f_0 = v^2 \langle 1, \partial_\kappa u_0\rangle_{L^2(\Omega)} + v^2 \left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0\, \partial_\kappa u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\kappa \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\partial_\kappa^2 f_0 =& \frac{v^2}{2}\,\left\langle 1, \partial_\kappa^2 u_0\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{v^2}{2}\,\left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\kappa^2 u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\kappa^2 \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ &- c_0 \langle 1, 1_\Omega S L_0 S_0^{-1} 1\rangle_{L^2(\Omega)} = -c_0 |\Omega|\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\,\partial_\kappa^3 f_0 =& \frac{v^2}{6}\,\left\langle 1, \partial_\kappa^3 u_0\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{v^2}{6}\,\left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\kappa^3 u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\kappa^3 \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ &- \frac{1}{3}\,\left\langle 1, N_0 \partial_\kappa u_0 + 1_\Omega S L_0 \partial_\kappa \phi_0\right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon f_0 =& v^2 \langle 1, \partial_\varepsilon u_0\rangle_{L^2(\Omega)} + v^2 \left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\varepsilon u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\varepsilon \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ &- 2\rho c_0 [S_0^{-1}1, \gamma_1 S L_0 S_0^{-1} 1]_{-\frac{1}{2}} = \rho c_0 c_\Omega\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon \partial_\kappa f_0 =& v^2 \langle 1, \partial_\varepsilon \partial_\kappa u_0\rangle_{L^2(\Omega)} + v^2 \left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\varepsilon \partial_\kappa u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\varepsilon \partial_\kappa \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ &+ v_1^2 \langle 1, \partial_\kappa u_0\rangle_{L^2(\Omega)} - 2\rho v^2 \left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\kappa u_0 + \gamma_1 S L_0 \partial_\kappa \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}} = 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\partial_\varepsilon \partial_\kappa^2 f_0 =& \frac{v^2}{2}\,\left\langle 1, \partial_\varepsilon \partial_\kappa^2 u_0\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{v^2}{2}\,\left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\varepsilon \partial_\kappa u_0 + \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 S L_0\right)\partial_\varepsilon \partial_\kappa^2 \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ &- \frac{1}{2}\,\left\langle 1, N_0 \partial_\varepsilon u_0 + 1_\Omega S L_0 \partial_\varepsilon \phi_0 + v_1^2 \partial_\kappa^2 u_0\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &- \rho v^2 \left[S_0^{-1}1, \left(\gamma_1^{\mathrm{in}} N_0 \partial_\kappa^2 u_0 + \gamma_1 S L_0 \partial_\kappa^2 \phi_0\right)\right]_{-\frac{1}{2}}\\ =& -\frac{1}{2}\,\left\langle 1, N_0 \partial_\varepsilon u_0 + 1_\Omega S L_0 \partial_\varepsilon \phi_0 + v_1^2 \partial_\kappa^2 u_0\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\rho v^2 \left[S_0^{-1}1, \partial_k^2 \phi_0\right]_{-\frac{1}{2}}\\ =& -\frac{1}{2}\,\left\langle 1, N_0 \partial_\varepsilon u_0 + 1_\Omega S L_0 \partial_\varepsilon \phi_0\right\rangle_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

注9.8. 为确定 $\partial_\varepsilon u_0 \oplus \partial_\varepsilon \phi_0$，可利用关系 $\Psi(\varepsilon,\kappa,u(\varepsilon,\kappa)\ \phi(\varepsilon,\kappa)) = 0$，得到

$$\begin{aligned}
&\widehat{D}_0\Psi(\partial_\varepsilon u_0 \oplus \partial_\varepsilon\phi_0) = -\partial_\varepsilon\Psi(0,0,0\oplus c_0 S_0^{-1}1) = -\widehat{P}(0,\partial_\varepsilon F_4(0,0,0\oplus c_0S_0^{-1}1))\\
=&2\rho\widehat{P}(0,0\oplus c_0\gamma_1 SL_0S_0^{-1}1) = 2\rho\big((0,0\oplus c_0\gamma_1SL_0S_0^{-1}1) - \widehat{P}_\perp(0,0\oplus c_0\gamma_1SL_0S_0^{-1}1)\big)\\
=&2\rho c_0\left(0,0\oplus\gamma_1SL_0S_0^{-1}1 - \frac{v^2c_\Omega}{|\Omega|+v^4c_\Omega}\,(1\oplus v^2S_0^{-1}1)\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\partial_\varepsilon u_0 = -\frac{2\rho c_0c_\Omega}{|\Omega|+v^4c_\Omega}\,1 = -\frac{2\rho c_0\omega_M^2}{1+v^4\omega_M^2}\,1$$

$$\partial_\varepsilon\phi_0 = -2\rho c_0\left(\frac12+\gamma_1SL_0\right)_\perp^{-1}\left(\gamma_1SL_0S_0^{-1}1 - \frac{\omega_M^2}{1+v^4\omega_M^2}\left(v^4S_0^{-1}1-\gamma_1^{\mathrm{in}}N_01\right)\right).$$

现在，我们引入解析函数

$$\begin{aligned}
g(t,z) :=& t^{-2}f(t^2,tz) = f_0\,t^{-2} + \partial_\varepsilon f_0 + \partial_\kappa f_0\,t^{-1}z + \frac12\,\partial_\varepsilon^2 f_0\,t^2\\
&+\partial_\varepsilon\partial_\kappa f_0\,tz + \frac12\,\partial_\kappa^2 f_0\,z^2 + \frac16\,\partial_\varepsilon^3 f_0 t^4 + \frac12\,\partial_\varepsilon^2\partial_\kappa f_0\,t^3z\\
&+\frac12\,\partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0\,t^2z^2 + \frac16\,\partial_\kappa^3 f_0\,tz^3 + O(t^2(t^2+|z|^2)^2)\\
=&\rho c_0c_\Omega - c_0|\Omega|z^2 + \frac12\,\partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0\,t^2z^2 + O(t^4) + O(|tz|^3) + O(t^2(t^2+|z|^2)^2)\,.
\end{aligned}$$

因此，由

$$g(0,z) = \rho c_0c_\Omega - c_0|\Omega|z^2\,,$$

可得

$$g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M) = 0\,.$$

Then

$$\begin{aligned}
\partial_z g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M) &= \mp 2c_0|\Omega|\sqrt{\rho}\,\omega_M \neq 0\,,\\
\partial_t g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M) = 0\,,&\qquad \partial_t^2 g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M) = \partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0\,\rho\,\omega_M^2\,.
\end{aligned}$$

根据隐函数定理，在 $0\in\mathbb{R}$ 的某个邻域内，存在唯一的解析函数 $t\mapsto z_\pm(t)$，

$$\begin{aligned}
z_\pm(t) &= \pm\sqrt{\rho}\,\omega_M - \frac12\left(\partial_z g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M)\right)^{-1}\partial_t^2 g(0,\pm\sqrt{\rho}\,\omega_M)\,t^2 + O(t^3)\\
&= \pm\sqrt{\rho}\,\omega_M\left(1+\frac{\partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0}{4c_0|\Omega|}\,t^2\right) + O(t^3)
\end{aligned}$$

使得 $g(t,z_\pm(t)) = 0$。因此，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，

$$\kappa_\pm(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,z_\pm(\sqrt{\varepsilon}) = \pm\sqrt{\rho}\,\omega_M\left(1+\frac{\partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0}{4c_0|\Omega|}\,\varepsilon\right)\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon^2)$$

唯一求解

$$F_4(\varepsilon,\kappa(\varepsilon),u(\varepsilon,\kappa(\varepsilon))\oplus\phi(\varepsilon,\kappa(\varepsilon))) = 0$$

并且根据（9.39），$u(\varepsilon,\kappa(\varepsilon))\oplus\phi(\varepsilon,\kappa(\varepsilon))\neq 0$。因此，

$$\kappa_{\pm}^2(\varepsilon)=\rho\,\omega_M\left(1+\frac{\partial_\varepsilon\partial_\kappa^2 f_0}{2c_0|\Omega|}\,\varepsilon\right)\varepsilon+O(\varepsilon^{5/2})$$

属于 $\mathsf{e}(A(\varepsilon))$。

致谢。作者感谢下一代欧盟2022年PRIN项目“数学物理中的奇异相互作用与有效模型”提供的资助。A.P.感谢国家数学物理组（GNFM-INdAM）的支持。

References

[1] S. Albeverio，F. Gesztesy，R. Hoegh-Krohn，H. Holden：《量子力学中的可解模型》，第2版，美国数学学会 Chelsea 出版社，2005年。[2] A. Ambrosetti，G. Prodi：《非线性分析入门》。剑桥大学出版社，1995年。[3] H. Ammari，A. Dabrowski，B. Fitzpatrick，P. Millien 和 M. Sini：高折射率亚波长共振介电纳米颗粒。《应用科学数学方法》42，6567–6579，2019年。[4] H. Ammari，B. Fitzpatrick，D. Gontier，H. Lee，H. Zhang：含气泡介质中声波的米纳特共振。《亨利·庞加莱研究所年刊》37-7，1975–1998，2018年。Ќ. Ando，H. Kang，Y. Miyanishi，M. Putinar：诺伊曼-庞加莱算子的谱分析。《罗马尼亚数学与纯粹应用杂志》66，545–575，2021年。[5] S. Agmon：薛定谔算子的谱性质与散射理论。《比萨高等师范学校科学年刊（第四辑）》2，151–218，1975年。Ẅ. Arendt，C.J.K. Batty，M. Hieber，F. Neubrander：《向量值拉普拉斯变换与柯西问题》。第2版，Birkhäuser，2011年。[6] M. Ben-Artzi，A. Devinatz：偏微分算子的极限吸收原理。《美国数学学会回忆录》第364卷，1987年。C̈. Cacciapuoti，D. Fermi，A. Posilicano：关于 Kreĭn 函数的逆映射。《数学与应用评论》39，229–240，2018年。[7] R. Caflisch，M. Miksis，G. Papanicolaou，L. Ting：含气泡液体中波传播的有效方程。《流体力学杂志》153，259–273，1985年。[8] A. Dabrowski，A. Ghandriche，M. Sini：在近共振频率下将气泡用作造影剂的声学成像模态的数学分析。《反问题与成像》15第3期，1–43，2021年。[9] Y. Deng，H. Liu：《局域共振谱理论及其应用》。施普林格，2024年。S̆. Dyatlov，M. Zworski：《散射共振的数学理论》。美国数学学会，2019年。 QH. O. Fattorini：巴拿赫空间中的二阶线性微分方程。北荷兰出版公司，1985年。[10] J. Galkowski：薄势垒散射中的共振分布。《美国数学学会回忆录》259，2019年。[11] D. Henry：偏微分方程边值问题中的边界扰动。剑桥大学出版社，2005年。[12] T.Sh. Kalmenov，D. Suragan：牛顿势的一个边界条件与谱问题。《算子理论：进展与应用》216，187–210，2011年。[13] H. Kang：诺伊曼-庞加莱算子的谱几何与分析：综述。载于：NG. Kang，J. Choe，K. Choi，Sh. Kim（编），《数学最新进展》，施普林格，2022年。[14] A. Komech，E. Kopylova：色散衰减与散射理论。约翰·威立父子出版公司，2012年。[15] R. Leis：《数学物理中的初边值问题》。B.G. Teubner，1986年。

[21] W. McLean：强椭圆系统与边界积分方程。剑桥大学出版社，2000年。[22] L. Li，M. Sini：亚波长谐振器的一致预解估计：Minnaert 气泡情形。预印本 arXiv:2406.02192。[23] A. MANTILE 和 A. POSILICANO：奇异扰动的渐近完备性与 S 矩阵。《纯粹与应用数学杂志》130-9，36–67，2019年。[24] A. MANTILE，A. POSILICANO：兼具正则与奇异扰动的散射理论。《谱理论杂志》13，1057–1109，2023年。[25] A. MANTILE，A. POSILICANO：经典波的体共振。《应用数学与物理杂志》76，12，2025年；补遗，2026年（即将出版）。[26] A. MANTILE，A. POSILICANO，M. Sini：在非闭超曲面上施加边界条件的自伴椭圆算子。《微分方程杂志》261，1–55，2016年。[27] A. MANTILE，A. POSILICANO，M. Sini：在超曲面上施加边界条件的拉普拉斯算子的极限吸收原理、广义特征函数与散射矩阵。《谱理论杂志》8，1443–1486，2018年。[28] A. MANTILE，A. POSILICANO，M. Sini：米纳特共振的起源。《纯粹与应用数学杂志》165，106–147，2022年。[29] A. Moiola，E.A. Spence：声学传输问题：显式依赖波数的界与无共振区域。《数学模型与应用科学方法》29，317–354，2019年。[30] G. Popov，G. Vodev：透明障碍物实轴附近的共振。《数学物理通讯》207，411–438，1999年。[31] G. Popov，G. Vodev：传输问题中的共振分布与局部能量衰减。《渐近分析》19第3–4期，253–265，1999年。[32] A. POSILICANO：自伴算子奇异扰动的 Kreĭn 型公式及其应用。《泛函分析杂志》183，109–147，2001年。ˇM. Reed，B. Simon：《现代数学物理方法》第IV卷：算子分析。Academic Press，1978年。[33] W. Renger：奇异扰动算子的极限吸收原理。《数学新闻》228，163–187，2001年。[34] P. Rosenbloom：巴拿赫空间中线性算子的扰动。《数学档案》6，89–101，1955年。[35] J. Sj[36] ostrand，M. Zworski：复缩放与散射极点的分布。《美国数学会杂志》4-4，729–769，1991年。¨A. E. Taylor：依解析方式依赖于参数的线性运算。《数学年刊》39，574–593，1938年。[37] H. Triebel：《分形与谱》。Birkhäuser，1997年。[38] M.M. Vainberg，V.A. Trenogin：《非线性方程解分支理论》。Noordhoff International Publishing，1974年。[39] E. F. Whittlesey：巴拿赫空间中的解析函数。《美国数学会会刊》16，1077–1083，1965年。[40] D.R. Yafaev：《数学散射理论：解析理论》。美国数学学会，2010年。

Laboratoire de Mathématiques de Reims, Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse BP 1039, 51687 Reims, France

DiSAT, Sezione di Matematica, Università dell'Insubria, via Valleggio 11, I-22100 Como, Italy

电子邮箱地址：andrea.mantile@univ-reims.fr

电子邮箱地址：andrea.posilicano@unisubria.it