arXiv:2601.17531v1 [math.RA] 24 Jan 2026

莱布尼茨 n-代数札记

JOSÉMANUEL CASAS、Emzar Khmaladze 和 MANUELLADRA

摘要。我们分析广义遗忘函子和 Daletskii-Takhtajan 函子在莱布尼茨 n-代数的完美对象及交叉模上的行为。随后，我们将其应用于莱布尼茨 n-代数的同调和泛中心扩张。

1. 引言

莱布尼茨 n-代数于 [8]作为南部代数 [9, 18] 或李 n-代数 [10]的非反对称版本被引入。对于 $n = 2$，莱布尼茨 2-代数就是通常的莱布尼茨代数。因此，莱布尼茨 n-代数是李代数、莱布尼茨代数和李n-代数的综合推广。

在莱布尼茨 n-代数结构理论的发展过程中，人们常会发现它与李 n-代数和莱布尼茨代数中已有结果的类比。一种研究方向是使用 遗忘函子 $\mathfrak{U}_n$，它将莱布尼茨代数 $\mathcal{L}$ 映射为具有相同底层向量空间 $\mathcal{L}$ 的莱布尼茨n-代数，并赋予其由 $[l_1, ..., l_n] = [l_1, [l_2, ..., [l_{n-1}, l_n] \dots]$给出的 n-元运算。

另一方面，在对 $[4,\ 3,\ 5]$，中研究的 Leibniz n-代数的同调方面进行探讨时，人们利用所谓的*Daletskii-Takhtajan* 函子 $\mathfrak{D}_n$ 的显著性质。该函子将 Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$ 映射为一个 Leibniz 代数，其底层向量空间为 $\mathcal{L}^{\otimes(n-1)}$，括积运算定义为

$$[l_1 \otimes \cdots \otimes l_{n-1}, l'_1 \otimes \cdots \otimes l'_{n-1}] = \sum_{1 \le i \le n} l_1 \otimes \cdots \otimes [l_i, l'_1, \dots, l'_{n-1}] \otimes \cdots \otimes l_{n-1}.$$

本文旨在进一步确立广义遗忘函子以及 Daletskii-Takhtajan 函子在 Leibniz n-代数与 Leibniz p-代数范畴之间的性质，其中 $p = k(n-1)+1$， k为某个自然数。特别地，我们证明了广义遗忘函子保持完美对象（定理 3.5）、作用（引理 4.2）和交叉模（命题 4.5）。在第 5 节中，我们通过给出反例（例 5.1），说明 Daletskii-Takhtajan 函子一般并不保持完美对象。在第 6 节中，我们构造一个同态，将系数取为 Leibniz 代数 $\mathcal{L}$ 的平凡余表示的同调映射到 Leibniz n-代数 $\mathfrak{U}_n(\mathcal{L})$的同调。最后，作为一项应用，在第 7 节中，我们分析完美 Leibniz n-代数在 Leibniz n-代数范畴和 Leibniz p-代数范畴中的泛中心扩张之间的关系。

2010 数学学科分类。 17A32, 17B55。关键词和短语。 Leibniz n-代数、遗忘函子、Daletskii-Takhtajan 函子、完美对象、交叉模、泛中心扩张、同调。

约定与记号。 全文中， $\mathbb{K}$表示基域，所有张量积均取自 $\mathbb{K}$。线性映射均为 $\mathbb{K}$-线性映射，向量空间也均为 $\mathbb{K}$-向量空间。 n 是一个自然数， $n \geq 2$ 和 $p = k(n-1)+1$， $q = \kappa(p-1)+1 = k\kappa(n-1)+1$，其中 k、 κ为某些自然数。

2. Leibniz n代数

以下定义最早见于 [8]。

定义 2.1. *Leibniz* n代数是一个向量空间 $\mathcal{L}$，其上配备一个 n-线性运算（n元括积） $[-,\dots,-]: \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}$，满足如下基本恒等式，对所有 x_1、 ...、 x_n、 y_2、 ...、 $y_n \in \mathcal{L}$ 均成立：

$$[[x_1,x_2,\dots,x_n],y_2,\dots,y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1,\dots,x_{i-1},[x_i,y_2,\dots,y_n],x_{i+1},\dots,x_n] \tag{2.1}$$

此外，如果 n元括积是斜对称的，即

$$[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] = \operatorname{sgn}(\sigma)[x_1,\dots,x_n],$$

对所有 $\sigma \in S_n$ 均成立，那么称 $\mathcal{L}$ 为李 n代数或 ***Filippov*** 代数 [10, 18]。这里， S_n 表示由 n 个元素构成的置换群， $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1,\ 1\}$表示 σ的符号。

Leibniz 代数的同态 是保持 n元括积的线性映射。Leibniz n代数所构成的范畴记作 $_n\mathbf{Lb}$。

对于 $n=2$，恒等式 (2.1) 等价于 Leibniz 恒等式 $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$，因此 Leibniz 2- 代数就是 Leibniz 代数 [15]。我们用 **Lb** 表示 $_2\mathbf{Lb}$。

例 2.2。

i)任意带有平凡 n元括号的向量空间都是 ***Leibniz*** n-代数，称为交换 ***Leibniz*** n-代数。ii) ***Lie*** 三系 [14] 和 ***Leibniz*** 三系 [1] 都是（非 ***Lie***）***Leibniz*** 3-代数。iii)结合三代数 [17] 带有3 个二元运算 $\dashv$、 $\vdash$ 和 $\perp$，并赋予三元括号

$$[x,y,z] = x \dashv (y \perp z - z \perp y) - (y \perp z - z \perp y) \vdash x,$$

（一般而言）是一个非 ***Lie Leibniz*** 3-代数。

iv) 设 $\mathit{char}(\mathbb{K}) \mid (n-1)$。那么，任意以 $\{e\}$ 为基的一维向量空间都是 ***Leibniz*** n-代数，其 n元括号由 $[e,e,\dots,e] = \alpha e$ 给出，对任意$\alpha \in \mathbb{K}$ 均成立（参见 [2, 例 2.1 (iv)]）。

v) 任意一个以 $\{e_1,e_2\}$ 为基的二维向量空间，关于由 $[e_1,e_2,e_2] = e_1$ 给出的三元括号构成 ***Leibniz*** 3-代数；其他情况下为0 （参见[2,定理 2。14]）。

Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$的子代数 $\mathcal{L}'$称为 $\mathcal{L}$的 n-侧理想，如果对于某个 i、 $1 \leq i \leq n$，只要 $l_i \in \mathcal{L}'$，就有 $[l_1, \ldots, l_n] \in \mathcal{L}'$。

对于任意两个 n侧理想 $\mathcal{L}'$和 $\mathcal{L}''$，记 $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \mathcal{L}^{n-2}]$与的交换子为由括积 $[l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_j, \ldots, l_n]$张成的 $\mathcal{L}$ 的 n侧理想，其中必有 $l_i \in \mathcal{L}'$和 $l_j \in \mathcal{L}''$，且存在某些 i和 j, $1 \leq i,\ j \leq n$,$i \neq j$。显然 $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \mathcal{L}^{n-2}] \subseteq \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$。特别地，若 $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}$（分别地， $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'' = \mathcal{L}$），则我们用记号 $[\mathcal{L}', \mathcal{L}^{n-1}]$（分别地， $[\mathcal{L}^n]$）代替 $[\mathcal{L}', \mathcal{L}, \mathcal{L}^{n-2}]$（分别地， $[\mathcal{L}, \mathcal{L}, \mathcal{L}^{n-2}]$）。

给定一个 Leibniz n 代数 $\mathcal{L}$，显然， $\mathcal{L}$ 对由所有形如

$$[l_1, \ldots, l_n] - \operatorname{sgn}(\sigma)[l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(n)}],$$

其中 l_1，.....， $l_n \in \mathcal{L}$ 和 $\sigma \in S_n$，是一个 Lie n 代数，记作 $\mathcal{L}_{\mathrm{Lie}}$。这定义了一个函子 $(-)_{\mathrm{Lie}}$，从 ${}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$ 到 Lie n 代数范畴 ${}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lie}$，它是满嵌入函子 ${}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lie} \hookrightarrow {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$ 的左伴随。

定义 2.3。

i) ***Leibniz*** n 代数 $\mathcal{L}$ 的中心是 n 侧理想

$$\mathsf{Z}(\mathcal{L}) = \{l \in \mathcal{L} \mid [l_1, \ldots, l_{i-1}, l, l_{i+1}, \ldots, l_n] = 0,\ where\, 1 \leq i \leq n, l_j \in \mathcal{L}, j = 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\}.$$

ii) 若 ***Leibniz*** n 代数 $\mathcal{L}$ 满足 $\mathcal{L} = [\mathcal{L}^n]$，则称其为完美代数。

3. $\mathfrak{U}_p^q$ FUNCTORS AND PERFECT OBJECTS

Any Leibniz 代数相对于 n 元括积也是一个 Leibniz n 代数

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1, [x_2, \ldots, [x_{n-1}, x_n] \cdots]]$$

（参见 [8, 命题 3.2]）。这就给出了所谓的遗忘函子

$$\mathfrak{U}^n : \mathbf{Lb} \to {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}, \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}.$$

本节讨论函子 $\mathfrak{U}^n$ 到范畴 ${}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb}(p = k(n-1)\ +1)$ 和 ${}_{\mathrm{q}}\mathbf{Lb}\ (q = \kappa(p-1)\ +1)$ 的推广。我们需要回顾 [8] 中的以下定义。

定义 3.1。 设 A 是一个配备有 n-线性运算 $\omega : A^{\otimes n} \to A$ 的向量空间。若映射 $f\colon\ A \to A$ 满足

$$f(\omega(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \omega(a_1, \ldots, f(a_i), \ldots, a_n).$$

注意，给定一个向量空间 $\mathcal{L}$， n-线性运算 $[-, \overset{n}{\ldots}, -]\colon\ \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}$ 满足基本恒等式 (2.1)，当且仅当对于所有 $x_2, \cdots, x_n \in \mathcal{L}$，映射

$$\mathrm{ad}_{x_2, \cdots, x_n} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}, \qquad x \mapsto [x, x_2, \cdots, x_n], \tag{3.1}$$

是关于 $[-, \overset{n}{\ldots}, -]$ 的导子。

命题 3.2。 设 A 是一个向量空间， $\omega_n : A^{\otimes n} \to A$ 是一个 n-线性运算。设 $\omega_p : A^{\otimes p} \to A$ 定义如下:

$$\omega_p(a_1, a_2, \dots, a_p) = \omega_n\Big(a_1, \dots a_{n-1}, \omega_n\big(a_n, \dots, a_{2n-2}, \omega_n(\dots, \omega_n(a_{p-n+1}, \dots, a_p)\dots)\big)\Big). \tag{3.2}$$

那么，关于 ω_n 的导子 $f\colon A \to A$ 是关于 ω_p的导子。

证明。 这可通过以下直接计算得出:

$$\begin{aligned}
&f(\omega_p(a_1, \dots, a_p))\\
&\quad = f\Big(\omega_n\Big(a_1, \dots a_{n-1}, \omega_n\big(a_n, \dots, a_{2n-2}, \omega_n(\dots, \omega_n(a_{p-n+1}, \dots, a_p)\dots)\big)\Big)\Big)\\
&\quad = \omega_n\Big(f(a_1), \dots a_{n-1}, \omega_n\big(a_n, \dots, a_{2n-2}, \omega_n(\dots, \omega_n(a_{p-n+1}, \dots, a_p)\dots)\big)\Big)\\
&\qquad + \dots + \omega_n\Big(a_1, \dots f(a_{n-1}), \omega_n\big(a_n, \dots, a_{2n-2}, \omega_n(\dots, \omega_n(a_{p-n+1}, \dots, a_p)\dots)\big)\Big)\\
&\qquad + \omega_n\Big(a_1, \dots a_{n-1}, f\big(\omega_n(a_n, \dots, a_{2n-2}, \omega_n(\dots, \omega_n(a_{p-n+1}, \dots, a_p)\dots)\big)\Big)\Big)\\
&\quad = \dots = \sum_{i=1}^{p} \omega_p(a_1, \dots, f(a_i), \dots, a_p).
\end{aligned}$$

□

命题 3.3。设 $\mathcal{L}$ 是关于 n元括积$[-, \overset{n}{\dots}, -]\colon \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}$的 ***Leibinz*** n-代数。那么， $\mathcal{L}$ 是关于该 p元括积的 ***Leibniz*** p-代数

$$[l_1, l_2, \dots, l_p] = [l_1, \dots l_{n-1}, [l_n, \dots, l_{2n-2}, [\dots, [l_{p-n+1}, \dots, l_p]\dots]]].$$

证明。 我们知道，对于任意 $x_2, \dots, x_n \in \mathcal{L}$，由 (3.1) 得到的 $\mathrm{ad}_{x_2,\dots,x_n}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 是关于 n 元括积的导子。我们必须证明，对于所有 $x_2, \dots, x_p \in \mathcal{L}$，$\mathrm{ad}_{x_2,\dots,x_p}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 也是关于所述 p线性括积的导子。根据 p线性括积的定义，立即可得

$$\mathrm{ad}_{x_2,\dots,x_p} = \mathrm{ad}_{x_2,\dots x_{n-1},[x_n,\dots,x_{2n-2},[\dots,[x_{p-n+1},\dots,x_p]\dots]]}.$$

那么，由命题 3.2 即得所需结果。 □

注记 3.4。 我们注意到，在特例 $n = 2$ 中，命题 *3.2* 和命题 *3.3* 分别给出 [8]，中的命题 *2.2* 和命题 *3.2*。

根据命题 3.3，存在一个函子

$$\mathfrak{U}_n^p : {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb} \to {}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb}, \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}.$$

显然，特别是， $\mathfrak{U}_2^n$ 与 $\mathfrak{U}^n$ 相同：上文所考虑的$\mathbf{Lb} \to {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$。此外，我们有如下范畴与函子之间的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Lb} & \xrightarrow{\mathfrak{U}^n} & {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb} \\ {\scriptstyle \mathfrak{U}^p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{U}_n^q} \\ {}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb} & \xrightarrow[\mathfrak{U}_p^q]{} & {}_{\mathrm{q}}\mathbf{Lb}. \end{array} \tag{3.3}$$

定理 3.5. $\mathfrak{U}_n^p$ ： ${}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Lb} \to {}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{Lb}$ 是一个正合函子，且保持并反映完美对象。

证明。 $\mathfrak{U}_n^p$ 的正合性显然。因此，我们需要证明 Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$是完美的，当且仅当 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})$ 是一个完美的 Leibniz p-代数。

首先，假设 $\mathcal{L}$ 是一个完美的 Leibniz n-代数，即 $\mathcal{L} = [\mathcal{L}^n]$。那么任意元素$x \in \mathcal{L}$都具有形式 $x = \sum \lambda_1[x_{11}, \ldots, x_{1n}]$。用同样的论证，元素 $x_{1n} \in \mathcal{L}$具有形式 $x_{1n} = \sum \lambda_2[x_{21}, \ldots, x_{2n}]$，依此类推，经过 k步（回忆一下， $p = k(n-1)+1$）后，我们得到

$$x = \sum \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_k \omega_p(x_{11}, \ldots, x_{1,n-1}, x_{21}, \ldots, x_{2,n-1}, \ldots, x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in [\mathcal{L}^p],$$

其中 ω_p： $\mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathcal{L}$的定义方式与 (3.2) 中相同，且 $\omega_n(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$。

反之，根据 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})$ 上 p元括积的定义，显然 $[\mathcal{L}^p] \subseteq [\mathcal{L}^n] \subseteq \mathcal{L}$。因此，若 $\mathcal{L} = [\mathcal{L}^p]$，则 $\mathcal{L} = [\mathcal{L}^n]$。□

作为定理 3.5 的直接推论，我们得出，图表 (3.3) 中的每个函子都保持完美对象。特别地，若 $\mathcal{L}$ 是完美 Leibniz 代数，则 $\mathcal{L}$ 是完美 Leibniz 3- 代数、完美 Leibniz 4- 代数，依此类推。

4. $\mathfrak{U}_p^q$ 函子与交叉模

本节我们将说明，函子 $\mathfrak{U}_p^q$ 可以扩展到相应的交叉模范畴。在此之前，我们先回顾 [6] 中关于 Leibniz n- 代数的作用和交叉模的一些必要概念。

定义 4.1. 我们称 ***Leibniz*** n-代数 $\mathcal{P}$ 作用于 ***Leibniz*** n-代数 $\mathcal{L}$，如果 $2^n - 2n$-线性映射

$$[-, \overset{n}{\ldots}, -] : \mathcal{L}^{\otimes i_1} \otimes \mathcal{P}^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^{\otimes i_m} \otimes \mathcal{P}^{\otimes j_m} \to \mathcal{L}$$

给定，其中 $1 \le m \le n-1$, $\sum (i_k + j_k) = n$, $0 \le i_k \le n-1$ 且至少一个$1 \le k \le m$ $i_k \neq 0$, $0 \le j_k \le n-1$ 且至少一个 $j_k \neq 0$，使得由基本恒等式 *(2.1)* 得到的等式成立：将恰好 i 个变量$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$取自 $\mathcal{L}$，其余变量全部取自 $\mathcal{P}$，并改变 $i = 1, \ldots, 2n-2$。

例如，如果 $\mathcal{L}$ 是 Leibniz n-代数 $\mathcal{P}$ 的 n侧理想，那么 $\mathcal{P}$ 中的 n元括积会导出 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{L}$的作用。

引理 4.2。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{L}$ 是 *Leibniz* n-代数，且 $\mathcal{P}$ 作用于 $\mathcal{L}$。那么 *Leibniz*p-代数 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{P})$ 作用于 *Leibniz* p-代数 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{L})$。

证明。由于 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ 和 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ 是 Leibniz p-代数，其 p元括积如命题 3.3 所述，因此我们需要构造 $2^p - 2$ p-线性映射

$$[-, \overset{p}{\ldots}, -] : \mathcal{L}^{\otimes i_1} \otimes \mathcal{P}^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^{\otimes i_m} \otimes \mathcal{P}^{\otimes j_m} \to \mathcal{L},$$

满足 $\sum_{1\le k\le m}(i_k + j_k) = p$，并且符合定义 4.1 中的相同条件。令我们取

x

使得 $i_1, \cdots, i_m, j_1, \cdots, j_m$，并定义相应的 p-线性映射 $[-, \overset{p}{\ldots}, -]$ 如下：

$$\begin{aligned}&[x_1, \ldots, x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+j_1}, \ldots, x_p]\\ &\quad = [x_1, \ldots x_{n-1}, [x_n, \ldots, x_{2n-2}, [\ldots, [x_{p-n+1}, \ldots, x_p]\ldots]]],\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中任意 x 元素属于 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{P}$，但与此同时，这些元素中至少有一个属于 $\mathcal{L}$，且至少有一个属于 $\mathcal{P}$。在方程 (4.1) 右侧，迭代的 n元括积由 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{L}$ 的作用给出，因此满足基本方程 (2.1)。于是，按照命题 3.3 中相同的论证，容易看出，由 (4.1) 定义的 p-线性括积也满足相应的基本恒等式；也就是说，它们确实定义了 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{P})$ 对 $\mathfrak{L}_n^p(\mathcal{L})$ 的作用。□

定义 4.3。[6] *Leibniz* n-代数的交叉模是一个同态 $\mu: \mathcal{L} \to \mathcal{P}$，并伴随一个 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{L}$ 的作用，满足以下条件：(CM1) μ 与 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{L}$的作用相容，即

$$\begin{aligned}&\mu[l_1^1, \ldots, l_{i_1}^1, x_1^1, \ldots, x_{j_1}^1, \ldots, l_1^m, \ldots, l_{i_m}^m, x_1^m, \ldots, x_{j_m}^m]\\ &= [\mu l_1^1, \ldots, \mu l_{i_1}^1, x_1^1, \ldots, x_{j_1}^1, \ldots, \mu l_1^m, \ldots, \mu l_{i_m}^m, x_1^m, \ldots, x_{j_m}^m],\end{aligned}$$

对于满足以下条件的 $0 \le i_k$、$j_k \le n-1$、$0 \le k \le m$、$1 \le m \le n-1$ $\sum_{1\le k\le m}(i_k + j_k) = n$，在至少一个 $i_k \ne 0$ 以及至少一个 $j_k \ne 0$。在此处及下文中，所有 l均属于 $\mathcal{L}$，所有x均属于 $\mathcal{P}$。

(CM2) 对于每个 $1 \le i \le n-1$，$\mathcal{L}$中的 n-括积

$$(*) \qquad [l_1, l_2, \ldots, l_n]$$

等于将变量l中的恰好 i 个替换为 μl后，从 $(*)$ 得到的任意表达式。(CM3) 如果 $\sum_{1\le k\le m} i_k \ge 2$，则表达式

$$(**) \qquad [l_1^1, \ldots, l_{i_1}^1, x_1^1, \ldots, x_{j_1}^1, \ldots, l_1^m, \ldots, l_{i_m}^m, x_1^m, \ldots, x_{j_m}^m]$$

等于将 l 中恰好一个（因而对每个 $1 \le i \le \sum_{1\le k\le m} i_k - 1$，也将 l 中的 i 个）替换为 μl 后，由$(**)$ 得到的任意表达式。

交叉模的态射$(\mathcal{L} \xrightarrow{\mu} \mathcal{P}) \to (\mathcal{L}' \xrightarrow{\mu'} \mathcal{P}')$ 是一对 (α, β)，其中$\alpha: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 和 $\beta: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ 是满足以下条件的 Leibniz n-代数同态：

i) $\mu'\alpha = \beta\mu$,
ii) α 通过 β保持 $\mathcal{P}$ 的作用，即:

$$\begin{aligned}&\alpha[l_1^1,\dots,l_{i_1}^1,x_1^1,\dots,x_{j_1}^1,\dots,l_1^m,\dots,l_{i_m}^m,x_1^m,\dots,x_{j_m}^m]\\&=[\alpha l_1^1,\dots,\alpha l_{i_1}^1,\beta x_1^1,\dots,\beta x_{j_1}^1,\dots,\alpha l_1^m,\dots,\alpha l_{i_m}^m,\beta x_1^m,\dots,\beta p_{j_m}^m]\,.\end{aligned}$$

记$\mathbf{X}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$ 为 Leibniz n-代数的交叉模范畴。注意，对于$n=2$，条件 (CM2) 和 (CM3) 是相同的，因此我们得到 Leibniz 代数的交叉模 [16] 的定义。相应的范畴将记为$\mathbf{XLb}$，而不是$\mathbf{X}_2\mathbf{Lb}$。

存在全嵌入函子

$$\mathcal{I}_n^0,\mathcal{I}_n^1\colon {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}\to\mathbf{X}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$$

定义为 $\mathcal{I}_n^0(\mathcal{L})=(0\xrightarrow{0}\mathcal{L})$，$\mathcal{I}_n^1(\mathcal{L})=(\mathcal{L}\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathcal{L})$，其中 $\mathcal{L}$ 为 Leibniz n-代数。

给定一个交叉模 $\mu\colon\mathcal{L}\to\mathcal{P}$，则 Im($\mu$) 是 $\mathcal{P}$ 的 n侧理想。定义三个函子

$$\mathcal{J}_n^0,\mathcal{J}_n^1,\mathcal{J}_n^2:\mathbf{X}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}\to{}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$$

为 $\mathcal{J}_n^0(\mathcal{L}\xrightarrow{\mu}\mathcal{P})=\mathcal{P}/\mathrm{Im}(\mu)$，$\mathcal{J}_n^1(\mathcal{L}\xrightarrow{\mu}\mathcal{P})=\mathcal{P}$，以及 $\mathcal{J}_n^2(\mathcal{L}\xrightarrow{\mu}\mathcal{P})=\mathcal{L}$。

注 4.4. 容易验证，对于 $i=0$，$\mathcal{J}_n^i$ 是 $\mathcal{I}_n^i$ 的左伴随，且 $\mathcal{I}_n^i$ 是$\mathcal{J}_n^{i+1}$的左伴随1。

命题 4.5. 若 $\mu:\mathcal{L}\to\mathcal{P}$ 是 *Leibniz* n-代数的一个交叉模，则 $\mathfrak{U}_n^p(\mu):\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})\to\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{P})$ 是 *Leibniz* p- 代数的一个交叉模。

证明。 容易验证，同态 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{P})$ 连同引理 4.2 中所描述的 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{P})$ 在 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})$ 上的作用，满足 <style id='p'>pLb 中交叉模的条件 ($_n$CM1)-($_n$CM3)。例如，我们仅证明 $\mathfrak{U}_n^p(\mu)$ 与 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{P})$ 在 $\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})$ 上的作用相容。实际上，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{U}_n^p(\mu)[l_1^1,\dots,l_{i_1}^1,x_1^1,\dots,x_{j_1}^1,\dots,l_1^m,\dots,l_{i_m}^m,x_1^m,\dots,x_{j_m}^m]\\&=\mathfrak{U}_n^p(\mu)[y_1,\dots,y_{i_1},y_{i_1+1},\dots,y_{i_1+j_1},\dots,y_p]\\&=\mu[y_1,\dots y_{n-1},[y_n,\dots,y_{2n-2},[\dots,[y_{p-n+1},\dots,y_p]\dots]]]\\&=[\mu(l_1^1),\dots,\mu(l_{i_1}^1),x_1^1,\dots,x_{j_1}^1,\dots,\mu(l_1^m),\dots,\mu(l_{i_m}^m),x_1^m,\dots,x_{j_m}^m].\end{aligned}$$

这里我们用到了以下记号:
$y_1=l_1^1,\dots,\ y_{i_1}=l_{i_1}^1,\ y_{i_1+1}=x_1^1,\dots,\ y_{i_1+j_1}=x_{j_1}^1,\dots,\ y_{p-i_m-j_m+1}=l_1^m,\ \cdots,\ y_{p-j_m}=l_{i_m}^m,$
$y_{p-j_m+1}=x_1^m,\dots,\ y_p=x_{j_m}^m.\square$

命题 4.5 中的赋值具有函子性，因此我们得到一个函子 $\mathfrak{XU}_n^p:\mathbf{X}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}\to\mathbf{X}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb}$。我们将 $\mathfrak{XU}_2^n:\mathbf{X}_2\mathbf{Lb}\to\mathbf{X}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}$记为 $\mathfrak{XU}^n$。由 (3.3) 可立即得到以下结论。

以下范畴与函子的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{XLb} & \xrightarrow{\mathfrak{XU}^n} & \mathbf{X_nLb} \\ {\scriptstyle \mathfrak{XU}^p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{XU}^q_n} \\ \mathbf{X_pLb} & \xrightarrow[\mathfrak{XU}^q_p]{} & \mathbf{X_qLb}\,. \end{array}$$

此外，函子 $\mathfrak{XU}^p_n$ 是从 $\mathfrak{U}^p_n$ 到交叉模范畴的典范扩张，其含义如下述命题所示。

命题 4.6. 以下范畴与函子的图表

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Lb} & \xrightarrow{\mathfrak{U}^p_n} & {}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{Lb} \\ {\scriptstyle \mathcal{I}^i_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{I}^i_p} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Lb} & \xrightarrow[\mathfrak{XU}^p_n]{} & \boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{Lb} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Lb} & \xrightarrow{\mathfrak{XU}^p_n} & \boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{Lb} \\ {\scriptstyle \mathcal{J}^j_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}^j_p} \\ {}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Lb} & \xrightarrow[\mathfrak{U}^p_n]{} & {}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{Lb} \end{array} \tag{4.2}$$

对 $i = 0,1$ 和 $j = 0,1,2$均为交换图表。

证明. 对于 $i \in \{0,1\}$和 $j \in \{1,2\}$，等式 $\mathfrak{XU}^p_n \circ \mathcal{I}^i_n = \mathcal{I}^i_p \circ \mathfrak{U}^p_n$和 $\mathfrak{U}^p_n \circ \mathcal{J}^j_n = \mathcal{J}^j_p \circ \mathfrak{XU}^p_n$ 显然成立。为证明 $\mathfrak{XU}^p_n \circ \mathcal{J}^0_n = \mathcal{J}^0_p \circ \mathfrak{XU}^p_n$，我们需要证明

$$\mathfrak{U}^p_n(\mathcal{P})/\operatorname{Im}\mathfrak{U}^p_n(\mu) = \mathfrak{U}^p_n\left(\mathcal{P}/\operatorname{Im}(\mu)\right)$$

对任意交叉模 μ，都有：$\mathcal{L} \to \mathcal{P}$。最后这个等式很容易由函子 $\mathfrak{U}^p_n$ 的正合性推出（见定理 3.5）。

□

5. $\mathfrak{D}^p_q$ 函子与完美对象

给定一个 Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$，我们知道，相对于 n元括积，$\mathcal{L}^{\otimes n-1}$ 是一个 Leibniz 代数

$$[l_1 \otimes \cdots \otimes l_{n-1}, l'_1 \otimes \cdots \otimes l'_{n-1}] = \sum_{1 \le i \le n} l_1 \otimes \cdots \otimes [l_i, l'_1, \ldots, l'_{n-1}] \otimes \cdots \otimes l_{n-1}$$

（参见 [8, 命题 3.4]）。这定义了所谓的 Daletskii-Takhtajan 函子 [9]（另见 [11]）

$$\mathfrak{D}_n : {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb} \to \mathbf{Lb}, \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\otimes(n-1)}.$$

广义 Daletskii-Takhtajan 函子 $\mathfrak{D}^p_q$ 在范畴${}_{\mathrm{q}}\mathbf{Lb}$ 与 ${}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb}$之间定义如下（见 [8, 注 3.5]）。设 $\mathcal{L}$ 为一个 Leibniz q-代数。注意到

$q=\kappa(p-1)+1$，则 $\mathcal{L}^{\otimes\kappa}$ 关于如下括积成为一个 Leibniz p-代数

$$[l_{11}\otimes\cdots\otimes l_{1\kappa},\cdots,l_{p1}\otimes\cdots\otimes l_{p\kappa}]=\sum_{1\leq i\leq\kappa}l_{11}\otimes\cdots\otimes[l_{1i},l_{21},\cdots,l_{2\kappa},\cdots,l_{p1},\cdots,l_{p\kappa}]\otimes\cdots\otimes l_{1\kappa}$$

这一对应定义了一个函子

$$\mathfrak{D}_q^p:{}_{\mathrm{q}}\mathbf{Lb}\to{}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb},\quad \mathcal{L}\mapsto\mathcal{L}^{\otimes\kappa}.$$

显然，特别地，$\mathfrak{D}_n^2=\mathfrak{D}_n:{}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb}\to\mathbf{Lb}$ 即为上文所考虑的对象，并且我们有如下范畴与函子的交换图

$$\begin{array}{ccc}{}_{\mathrm{q}}\mathbf{Lb} & \xrightarrow{\mathfrak{D}_q^p} & {}_{\mathrm{p}}\mathbf{Lb}\\ {\scriptstyle\mathfrak{D}_q^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathfrak{D}_p}\\ {}_{\mathrm{n}}\mathbf{Lb} & \xrightarrow[\mathfrak{D}_n]{} & \mathbf{Lb}\,.\end{array}\tag{5.1}$$

我们的主要研究兴趣之一是分析这一问题。该问题在某种程度上与第 3 节所研究的问题正好相反，即研究函子 $\mathfrak{D}_q^p$ 是否保完美对象。我们着重考察函子 $\mathfrak{D}_n=\mathfrak{D}_n^2$ 的情形。紧接着给出的例子表明，即使 $\mathfrak{D}_n$ 一般也不保完美对象。

例 5.1。

i) 考虑四维 *Lie* 3-代数 $\mathcal{L}$，其基为 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，三元括号定义如下

$$[e_1,e_2,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_2,e_4]=-e_3,\quad [e_1,e_3,e_4]=e_2,\quad [e_2,e_3,e_4]=-e_1,$$

连同相应的反对称性，其余情形均为零 [10]。显然，$\mathcal{L}$ 是一个完美 *Lie* 3-代数，因而也是完美 *Leibniz* 3-代数。然而，$\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$不是完美 *Leibniz* 代数，因为 $\mathfrak{D}_3(\mathcal{L})=[\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}]$ 由以下元素集生成

$$\{-e_1\otimes e_3,\ -e_1\otimes e_4,\ e_2\otimes e_1,\ e_2\otimes e_3,\ e_2\otimes e_4,\ e_3\otimes e_1,\ -e_3\otimes e_2,\ -e_3\otimes e_3,\ e_3\otimes e_4,\ -e_4\otimes e_1,\ e_4\otimes e_2,$$
$$e_4\otimes e_3,\ e_4\otimes e_4,\ -e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2,\ e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1,\ -e_1\otimes e_3-e_3\otimes e_1,\ e_1\otimes e_4+e_4\otimes e_1\},$$

并且元素 $e_1\otimes e_1,e_2\otimes e_2\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ 不能表示为交换子 $[e_i\otimes e_j,e_k\otimes e_l]$, $i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$ 的线性组合。

ii) 令 $\mathbb{K}$ 包含有理数域，$\mathcal{L}$为由生成元 $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ 生成的五维完美 *Leibniz* 代数，其括积定义如下：

$$\begin{array}{lll}[e_2,e_1]=-e_3, & [e_1,e_2]=e_3, & [e_1,e_3]=-2e_1\\ [e_3,e_1]=2e_1, & [e_3,e_2]=-2e_2, & [e_2,e_3]=2e_2\\ [e_5,e_1]=e_4, & [e_4,e_2]=e_5, & [e_4,e_3]=-e_4\\ & [e_5,e_3]=e_5 & \end{array}$$

其他情况下均为零 [19]。由定理 *3.5*， $\mathfrak{U}_3(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ 是一个完美 ***Leibniz*** 3代数，其三元括号运算定义如下：

$$\begin{array}{lll}
[e_1,e_1,e_2] = -2e_1, & [e_2,e_1,e_2] = 2e_2, & [e_3,e_1,e_3] = -4e_1 \\
[e_1,e_2,e_1] = 2e_1, & [e_2,e_1,e_3] = 2e_3, & [e_3,e_2,e_3] = -4e_2 \\
[e_1,e_2,e_3] = 2e_3, & [e_2,e_2,e_1] = -2e_2, & [e_3,e_3,e_1] = 4e_1 \\
[e_1,e_3,e_2] = -2e_3, & [e_2,e_3,e_1] = -2e_3, & [e_3,e_3,e_2] = 4e_2 \\
[e_4,e_1,e_2] = -e_4, & [e_5,e_1,e_2] = e_5 & \\
[e_4,e_2,e_1] = e_4, & [e_5,e_1,e_3] = -2e_4 & \\
[e_4,e_2,e_3] = 2e_5, & [e_5,e_2,e_1] = -e_5 & \\
[e_4,e_3,e_2] = -2e_5, & [e_5,e_3,e_1] = 2e_4 &
\end{array}$$

其他位置均为零。容易验证， $\mathfrak{D}_3(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$ 不是完美 ***Leibniz*** 代数，因为基元素 $e_4 \otimes e_5$ 和 $e_5 \otimes e_4$ 不能写成交换子 $[e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_l]$、 i、 j、 k、 $l \in \{1,2,3,4,5\}$的线性组合。

iii) 设 $\mathbb{K}$ 包含有理数域， $\mathcal{L}$ 为一个三维完美 ***Leibniz*** 3-代数，其基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ ，三元括号定义如下：

$$[e_1,e_1,e_2] = \alpha e_1, \quad [e_2,e_1,e_2] = -\alpha e_2, \quad [e_3,e_1,e_2] = \beta e_3$$

其他位置均为零，其中 α 和 β 是 $\mathbb{K}$ [13, 例 1。11]中的非零元素。容易验证， $\mathfrak{D}_3(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$ 不是完美 ***Leibniz*** 代数，因为基元素 $e_1 \otimes e_2$ 和 $e_2 \otimes e_1$ 不能写成交换子 $[e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_l]$、 i、 j、 k、 $l \in \{1,2,3\}$的线性组合。

6. 浅谈 Leibniz n代数的同调

在 [16] 中，系数取为 g 的余表示 M 时，Leibniz 代数 g 的 Leibniz 同调 HL^*(g M) 可计算为由下式给出的 Leibniz 链复形CL_*(g M) 的上同调

$$CL_k(\mathrm{g}, M) = (M \otimes \mathrm{g}^{\otimes k}) , \quad k \geq 0$$

其中，边界算子 d_k：CL_k(g M) $\to CL_{k-1}$(g M) 定义如下

$$\begin{aligned} d_k(m \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = ([m,x_1] \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_k) + \sum_{2 \leq i \leq k} (-1)^i ([x_i,m] \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{x_i} \otimes \ldots \otimes x_k) \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{j+1} (m \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i,x_j] \otimes \ldots \otimes \widehat{x_j} \otimes \ldots \otimes x_k) . \end{aligned}$$

文献 [8] 证明，函子 $\mathfrak{D}_n$ 将自由 Leibniz n-代数映射为自由 Leibniz 代数。文献 [5, 8] 利用了 $\mathfrak{D}_n$ 的这一性质，构造出显式的（余）链复形，用以计算带系数的 Leibniz n-代数的 Quillen（上）同调。特别地，文献 [5, 的命题 3.1] 证明，若 $\mathcal{M}$ 是 Leibniz$n$-代数 $\mathcal{L}$的一个余表示，则 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$ 可视为 Leibniz 代数$\mathfrak{D}_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{\otimes(n-1)}$的一个余表示。接着，将链复形 ${}_nCL_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})$定义为 Leibniz 复形 $CL_*(\mathfrak{D}_n(\mathcal{L})\ \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$，而带有余表示 $\mathcal{L}$ 的 Leibniz n-代数的同调 ${}_nHL_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})$

的系数定义为

$$ {}_nHL_*(\mathcal{L},\mathcal{M}) = H_*\big({}_nCL_*(\mathcal{L},\mathcal{M})\big) = HL_*\big(\mathfrak{D}_n(\mathcal{L}),\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\big)\,. $$

注意，对于 $n=2$，我们有 ${}_2CL_k(\mathcal{L},\ \mathcal{M}) \cong CL_{k+1}(\mathcal{L},\ \mathcal{M})$，对所有 $m\geq 0$ 均成立，因此

$$ {}_2HL_k(\mathcal{L},\mathcal{M}) \cong HL_{k+1}(\mathcal{L},\mathcal{M})\,. \tag{6.1} $$

在下面的第7节中，我们将使用一个显然的事实：如果 $\mathcal{M}$ 是 L的平凡余表示，那么 ${}_nHL_0(\mathcal{L},\ \mathcal{M}) = \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}/[\mathcal{L}^n]$。特别地，对于 $\mathcal{M}=\mathbb{K}$，我们得到 ${}_nHL_0(\mathcal{L},\ \mathbb{K}) =\mathcal{L}/[\mathcal{L}^n]$。

命题6.1。 如果 $\mathcal{M}$ 是 *Leibniz* 代数 $\mathcal{L}$的平凡余表示，那么存在一个链复形的态射

$$ h_*: {}_nCL_*(\mathfrak{U}_n(\mathcal{L}),\mathcal{M}) \longrightarrow {}_2CL_*(\mathcal{L},\mathcal{M})\,, $$

它在维数0时是一个同构。此外，如果 $\mathcal{L}$ 是一个完美 *Leibniz* 代数，那么h_* 是一个满同态。

证明。首先注意， $\mathcal{M}$ 被视为 Leibniz n-代数 $\mathfrak{U}_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$的平凡余表示。于是 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}$ 是关于线性映射（作用）的 $\mathfrak{D}_n\,\mathfrak{U}_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{\otimes(n-1)}$ 的余表示

$$ [-,-]: \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes(n-1)} \longrightarrow \mathcal{M}\otimes\mathcal{L} \quad \text{and} \quad [-,-]: \mathcal{L}^{\otimes(n-1)}\otimes\mathcal{M}\otimes\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}\otimes\mathcal{L} $$

由.....给出

$$ \begin{aligned} [m\otimes l, l_1\otimes\cdots\otimes l_{n-1}] &= m\otimes[l,l_1,\ldots,l_{n-1}] \\ \text{and}\quad [l_1\otimes\cdots\otimes l_{n-1}, m\otimes l] &= -m\otimes[l,l_1,\ldots,l_{n-1}]. \end{aligned} $$

特别地， $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}$在 Leibniz 代数 $\mathcal{L}$上的余表示结构由 $[m\otimes l,l_1]=m\otimes[l,l_1]$和 $[l_1,m\otimes l]=-m\otimes[l,l_1]$给出。

接下来，注意到

$$ \begin{aligned} {}_nCL_k(\mathfrak{U}_n(\mathcal{L}),\mathcal{M}) &= CL_k(\mathfrak{D}_n\,\mathfrak{U}_n(\mathcal{L}),\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}) = CL_k(\mathcal{L}^{\otimes(n-1)},\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}) \\ &= \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\big(\mathcal{L}^{\otimes(n-1)}\big)^{\otimes k} = \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k(n-1)}, \end{aligned} $$

而

$$ {}_2CL_k(\mathcal{L},\mathcal{M}) = \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k}. $$

映射 h_k： $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k(n-1)} \longrightarrow \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k}$ 由下式给出

$$ \begin{aligned} &h_k(m\otimes l_1^1\otimes l_2^1\otimes\cdots\otimes l_{n-1}^1\otimes\cdots\otimes l_1^k\otimes l_2^k\otimes\cdots\otimes l_{n-1}^k) \\ &\quad = m\otimes l\otimes[l_1^1,[l_2^1,\ldots[l_{n-2}^1,l_{n-1}^1]\ldots]]\otimes\cdots\otimes[l_1^k,[l_2^k,\ldots[l_{n-2}^k,l_{n-1}^k]\ldots]]\,. \end{aligned} $$

细节只是直接但繁琐的计算，留给读者完成。根据 h_k 的定义可知，当 $\mathcal{L}$ 是完美 Leibniz 代数时，它是一个满同态。□

注6.2。 给定一个 *Leibniz* 代数 $\mathcal{L}$的平凡余表示 $\mathcal{M}$ ，存在一个同态h_*： ${}_nHL_*(\mathfrak{U}_n(\mathcal{L})\ \mathcal{M}) \longrightarrow {}_2HL_*(\mathcal{L},\overline{\mathcal{M}})$，其中 h_0 是一个满同态。此外，如果 $\mathcal{L}$ 是一个完美 *Leibniz* 代数，那么 h_0 是恒等映射，且 h_1 是一个满同态。

7. $\mathfrak{U}_n^p$ 函子与泛中心扩张

定义7.1。 [4] *Leibniz* n-代数的一个扩张

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

如果 $M \subseteq \mathsf{Z}(\mathcal{K})$，则称其为 $\mathcal{L}$ 的中心扩张。

我们注意到，$_{\mathrm{n}}$**Lb** 中的扩张 $0 \to M \to \mathcal{K} \to \mathcal{L} \to 0$ 是中心扩张，当且仅当理想 $[M, \mathcal{K}^{n-1}]$ 为零。此外，众所周知，Leibniz n-代数的范畴是半阿贝尔范畴，而中心扩张的定义与半阿贝尔范畴一般框架中的相同概念一致 [12], ；特别地，它由 $_{\mathrm{n}}$**Lb** 与其由向量空间组成的 Birkhoff 子范畴之间的伴随诱导（见 [7]）。

注 7.2。 如果 *(7.1)* 是 *Leibniz* n-代数 $\mathcal{L}$ 的中心扩张，那么 π： $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ 是一个交叉模，其中 $\mathcal{L}$ 对 $\mathcal{K}$ 的作用按标准方式定义：为 $\mathcal{L}$ 中的元素选取原像，并在 $\mathcal{K}$ 中取 n-元括积（见 [6,例 2(iii)]）。

另一方面，给定一个 *Leibniz* n-代数的交叉模 π： $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$，根据条件（*CM2*），$\pi$ 的核位于 $\mathcal{K}$ 的中心中，因此我们得到$0 \to \mathsf{Ker}\,\pi \to \mathcal{K} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L} \to 0$ 的中心扩张 $\mathcal{L}$。

紧接着的以下示例表明，与函子 $\mathfrak{U}_n$的情形不同，函子 $\mathfrak{D}_n$ 不保持交叉模。

例 7.3。 设 π： $K \to L$ 是由中心扩张（*7.1*）给出的 *Leibniz* n-代数交叉模。则 $\mathfrak{D}_n(\pi) = \pi^{\otimes(n-1)}$：$\mathcal{K}^{\otimes(n-1)} \to \mathcal{L}^{\otimes(n-1)}$ 可能不是交叉模，因为一般而言， $\pi^{\otimes(n-1)}$ 的核不位于 $\mathcal{K}^{\otimes(n-1)}$ 的中心中。

定义 7.4。 如果对于任意中心扩张 $0 \to M' \to \mathcal{K}' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{L} \to 0$，都存在唯一的同态 h：$\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ 使得 $\pi' \circ h = \pi$，则称中心扩张 （7.1）是泛中心扩张。

众所周知，Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$ 存在泛中心扩张，当且仅当 $\mathcal{L}$ 是完美的。在这种情况下，泛中心扩张可通过 $\mathcal{L}$ 的非阿贝尔张量幂来描述（见 [4, 3]）。为方便读者，我们将简要回顾这一构造。

设 $\mathcal{L}$ 是一个 Leibniz n-代数。张量幂 $\mathcal{L}^{\otimes n}$ 可通过以下括积赋予 Leibniz n-代数结构:

$$\begin{aligned}&[x_{11} \otimes \cdots \otimes x_{n1}, x_{12} \otimes \cdots \otimes x_{n2}, \ldots, x_{1n} \otimes \cdots \otimes x_{nn}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{11} \otimes \cdots \otimes [x_{i1}, [x_{12}, \ldots, x_{n2}], \ldots, [x_{1n}, \ldots, x_{nn}]] \otimes \cdots \otimes x_{n1}\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

现在设 $\delta_2 : \mathcal{L}^{\otimes(2n-1)} \to \mathcal{L}^{\otimes n}$ 是同调复形$_nCL(\mathcal{L}, \mathbb{K})$ 中的第二个边界映射，其中 $\mathbb{K}$ 被视为 $\mathcal{L}$ 的平凡余表示。因此,

$$\begin{aligned}\delta_2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{2n-1}) =& [x_1, x_2, \ldots, x_n] \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{2n-1} \\ &- \sum_{1 \le i \le n} x_1 \otimes \cdots \otimes [x_i, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}] \otimes \cdots \otimes x_n\,.\end{aligned}$$

根据 [3], 余核(δ_2 : $\mathcal{L}^{\otimes(2n-1)} \to \mathcal{L}^{\otimes n}$) 配备了由定义在 $\mathcal{L}^{\otimes n}$ 上的括积 (7.2) 所诱导的 Leibniz n-代数结构。这个 Leibniz n-代数记作$\mathcal{L}^{*n}$，称为 $\mathcal{L}$ 的非阿贝尔张量幂。

将 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathcal{L}^{\otimes n}$ 到 $\mathcal{L}^{*n}$ 的像记为 $x_1 * \cdots * x_n$。那么可以验证（见 [4]），$\mathcal{L}^{*n}$ 中的括积为

$$\begin{array}{l}[x_{11} * \cdots * x_{n1},\ x_{12} * \cdots * x_{n2},\ \ldots,\ x_{1n} * \cdots * x_{nn}] \\ = [x_{11}, \ldots, x_{n1}] * [x_{12}, \ldots, x_{n2}] * \cdots * [x_{1n}, \ldots, x_{nn}]\end{array} \tag{7.3}$$

存在一个 Leibniz n-代数的正合列

$$0 \longrightarrow {}_nHL_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}^{*n} \overset{[-,\overset{n}{\cdots},-]}{\longrightarrow} \mathcal{L} \to {}_nHL_0(\mathcal{L}) \longrightarrow 0,$$

其中，${}_nHL_0(\mathcal{L}) = {}_nHL_0(\mathcal{L}, \mathbb{K}) = \mathcal{L}/[\mathcal{L}^n]$ 和 ${}_nHL_1(\mathcal{L}) = {}_nHL_1(\mathcal{L}, \mathbb{K})$ 分别是 Leibniz n-代数 $\mathcal{L}$ 在平凡余表示 $\mathbb{K}$ 系数下的零次同调和一次同调，并且二者都被视为阿贝尔 Leibniz n-代数。特别地，如果 $\mathcal{L}$ 是一个完美 Leibniz n-代数，那么 ${}_nHL_0(\mathcal{L}) = 0$ 并且

$$0 \longrightarrow {}_nHL_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}^{*n} \overset{[-,\overset{n}{\cdots},-]}{\longrightarrow} \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{7.4}$$

是 $\mathcal{L}$ 的泛中心扩张。

考虑到定理 3.5，将函子 $\mathfrak{U}_n^p$ 应用于 (7.4)，我们再次得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{U}_n^p({}_nHL_1(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L}^{*n}) \longrightarrow \mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L}) \longrightarrow 0 \tag{7.5}$$

在范畴 ${}_p$**Lb** 中。$\mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L}^{*n})$ 中的 p 元括积 $= \mathcal{L}^{*n}$ 定义为

$$\begin{array}{l}[x_{11} * \ldots * x_{1n}, x_{21} * \cdots * x_{2n}, \ldots, x_{p1} * \cdots * x_{pn}] \\ = [x_{11} * \cdots * x_{1n}, \ldots, x_{(n-1)1} * \cdots * x_{(n-1)n}, [x_{n1} * \cdots * x_{nn}, \ldots, x_{(2n-2)1} * \cdots * x_{(2n-2)n}, \\ \qquad [\ldots, [x_{(q-n+1)1} * \cdots * x_{(q-n+1)n}, \ldots, x_{q1} * \cdots * x_{qn}] \ldots]]] \\ = [x_{11} * \cdots * x_{1n}, \ldots, x_{(n-1)1} * \cdots * x_{(n-1)n}, [x_{n1} * \cdots * x_{nn}, \ldots, x_{(2n-2)1} * \cdots * x_{(2n-2)n}, \\ \qquad [\ldots, [[x_{(q-n+1)1}, \ldots, x_{(q-n+1)n}] * \cdots * [x_{q1}, \ldots, x_{qn}]] \ldots]]] \\ = \cdots = [x_{11}, \ldots, x_{1n}] * \cdots * [x_{(n-1)1}, \ldots, x_{(n-1)n}] * [[x_{n1}, \ldots, x_{nn}], \ldots, \\ \qquad \left[x_{(2n-2)1}, \ldots, x_{(2n-2)n}\right], \left[\ldots \left[x_{(p-n+1)1}, \ldots, x_{(p-n+1)n}\right], \ldots, [x_{p1}, \ldots, x_{pn}]\right] \ldots]].\end{array}$$

因此，映射 $\mathcal{L}^{*n} \overset{[-,\overset{n}{\cdots},-]}{\longrightarrow} \mathcal{L}$, $x_1 * \cdots * x_n \mapsto [x_1, \ldots, x_n]$ 是 Leibniz p 代数的同态，而 (7.5) 是 Leibniz p 代数的中心扩张。

再次感谢定理 3.5，$\mathcal{L} = \mathfrak{U}_n^p(\mathcal{L})$ 作为 Leibniz p-代数是完美的，并且具有泛中心扩张

$$0 \longrightarrow {}_pHL_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}^{*p} \overset{[-,\overset{p}{\cdots},-]}{\longrightarrow} \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

在范畴$_{\mathrm{p}}$**Lb**中。由于

$$0 \longrightarrow {}_nHL_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}^{*n} \xrightarrow{[-,\overset{n}{\ldots},-]} \mathcal{L} \longrightarrow 0,$$

赋予上述 Leibniz p-代数结构后，若它是$_{\mathrm{p}}$**Lb**中的一个中心扩张，则存在唯一的 Leibniz p-代数同态

$$\phi : \mathcal{L}^{*p} \longrightarrow \mathcal{L}^{*n}$$

该同态由 $\phi(x_1 * \cdots * x_p) = x_1 * \cdots * x_{n-1} * [x_n, \ldots, x_{2n-2}, [\ldots, [x_{p-n+1}, \ldots, x_p]]]$ 给出，并使下列$_{\mathrm{p}}$**Lb**中的图表交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_pHL_1(\mathcal{L}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{*p} & \xrightarrow{[-,\overset{p}{\ldots},-]} & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_nHL_1(\mathcal{L}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{*n} & \xrightarrow{[-,\overset{n}{\ldots},-]} & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{7.6}$$

此外，显然 ϕ是一个满同态。

推论 7.5. 若 $\mathcal{L}$ 是完美 *Leibniz* p-代数，则

$$\mathcal{L}*\overset{n-1}{\ldots}*\mathcal{L} * \mathsf{Z}(\mathcal{L}) * \mathcal{L}*\overset{p-n}{\ldots}*\mathcal{L} \;+\; \mathcal{L}*\overset{n}{\ldots}*\mathcal{L} * \mathsf{Z}(\mathcal{L}) * \mathcal{L}*\overset{p-n-1}{\ldots}*\mathcal{L}$$
$$+ \;\ldots\; + \mathcal{L}*\overset{p-1}{\ldots}*\mathcal{L} * Z(\mathcal{L}) \;\subseteq\; \mathsf{Ker}(\phi)\ .$$

致谢。 作者获得了西班牙国家研究机构（西班牙）项目 PID2020-115155GB-I00 的资助。Emzar Khmaladze 获得了格鲁吉亚 Shota Rustaveli 国家科学基金会项目 FR-22-199 的资助。他感谢圣地亚哥-德孔波斯特拉大学的热情接待。

参考文献

[1] M. R. Bremner 和 J. Sánchez-Ortega，Leibniz 三元系统，Commun. Contemp. Math. 16 (1) (2014), 1350051, 19 页。[2] L. M. Camacho、J. M. Casas、J. R. Gómez、M. Ladra 和 B. A. Omirov，关于幂零 Leibniz n-代数，J. Algebra Appl. 11 (2012), no. 2, 1250060 (17 页)。[3] J. M. Casas，Leibniz n-代数的平凡系数同调，Comm. Algebra 31 (2003), no. 3, 1377–1386。[4] J. M. Casas，Leibniz n-代数的非阿贝尔张量积与泛中心扩张，Bull. Belg. Math. Soc.-Simon Stevin 11 (2004), no. 2, 259–270。[5] J. M. Casas，Leibniz n-代数的系数同调，C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009), 595–598。[6] J. M. Casas、E. Khmaladze 和 M. Ladra，Leibniz n-代数的交叉模，Forum Math. 20 (2008), 841–858。[7] J. M. Casas、E. Khmaladze、M. Ladra 和 T. Van der Linden，Leibniz 与 Lie n-代数的同调与中心扩张，Homology Homotopy Appl. 13(1) (2011), 59–74。[8] J. M. Casas、J.-L.Loday 和 T. Pirashvili，Leibniz n-代数，Forum Math. 14 (2002), no. 2, 189–207。[9] Y. Daletskii 和 L. A. Takhtajan，Nambu 代数的 Leibniz 与 Lie 代数结构，Letters in Math. Physics 39 (1997), 127–141。

[10] V. T. Filippov，n-Lie 代数，Sib. Mat. Zh. 26 (1985), no. 6, 126–140。[11] P. Gautheron，关于 Nambu 力学的一些评述，Letters in Math. Physics 37 (1996), 103–116。[12] G. Janelidze 和 G.M. Kelly，伽罗瓦理论与中心扩张的一般概念，J. Pure Appl. Algebra 97(2) (1994), 135–161。[13] M. S. Kim、R. Turdibaev，来自范畴 U n(Lb) 的 Leibniz n-代数的一些定理，Algebra Colloq. 28 (2021), no. 1, 155–168。[14] W. Lister，Lie 三系的结构理论，Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 217–242。[15] J.-L. Loday，循环同调，Grundl. Math. Wiss. Bd. 301, Springer 1992。[16] J.-L. Loday 和 T. Pirashvili，Leibniz 代数的泛包络代数与（上）同调，Math. Ann. 296 (1993), no. 1, 139–158。[17] J.-L. Loday、M. O. Ronco，三代数与多胞体族，《同伦论：与代数几何、群上同调和代数 K理论的关系》，369–398，Contemp. Math., 346, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯，罗得岛州，2004。[18] Y. Nambu，广义哈密顿动力学，Phys. Rev. D 7 (1973), no. 3, 2405–2412。[19] B. A. Omirov，复有限维 Leibniz 代数的嘉当子代数的共轭，J. Algebra 302 (2006), 887–896。[J. M. Casas] 应用数学系 I 和 CITMAga，E. E. Forestal，维戈大学，36005 蓬特韦德拉，西班牙。电子邮箱：jmcasas@uvigo.es[E. Khmaladze]格鲁吉亚大学，科斯塔瓦街 77a，0171 第比利斯，格鲁吉亚；以及第比利斯国立大学 A. Razmadze 数学研究所，塔马拉什维利街 6，0177 第比利斯，格鲁吉亚。电子邮箱：e.khmaladze@ug.edu.ge[M. Ladra] 数学系，CITMAga，圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，15782 圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙。电子邮箱：manuel.ladra@usc.es