arXiv:2601.17537v1 [cs.FL] 24 Jan 2026

高维自动机的变体

Hugo Bazille EPITA 研究实验室（LRE）雷恩，法国

Jérémy Dubut LIX，巴黎综合理工学院，帕莱索，法国

Uli Fahrenberg 形式化方法实验室 & 巴黎-萨克雷大学 吉夫叙尔伊韦特，法国

Krzysztof Ziemiański 华沙大学 华沙，波兰

摘要

近年来，高维自动机（HDA）理论发展迅速，首批应用也开始显现，尤其是在 Petri网分析方面。然而，人们逐渐发现，HDA 本身往往过于严格，不便于使用和推理。为解决特定问题，人们引入了较弱的 HDA 变体，例如带接口的高维自动机、部分高维自动机、ST 自动机，甚至关系型高维自动机。

本文汇集了这些变体及其他几种变体的定义，并将其整合为一个连贯的整体，探讨它们的性质以及彼此之间的翻译。我们表明，就语言而言，这些变体可归为两类：在包含下封闭的语言，以及不具备这一性质的语言。我们还表明，部分高维自动机满足克莱尼定理，而且与 HDA 不同，它们是可确定化的。

关键词：高维自动机，预立方集合，并发理论，确定性，克莱尼定理

ACM 引用格式：
Hugo Bazille、Jérémy Dubut、Uli Fahrenberg 和 Krzysztof Ziemiański。2026年。《高维自动机的变体》。载于 *LICS* 论文集。ACM，纽约，NY，美国，13 页。
https://doi.org/10.1145/nnnnnnn.nnnnnnn

1 引言

近年来，高维自动机（HDA）理论发展迅速，[4,8,9,11,14]，首次应用也已开始显现，尤其是在Petri网分析方面。[3,5] 在这些及其他研究中，一个共同主题是：正如 [16,17] 所引入、并在[8], 中重新采用的高维自动机本身，往往是一种过于严格、难以用于实践和推理的形式体系：

特此免费授权为个人或课堂使用而制作本作品全部或部分内容的数字副本或纸质副本，前提是不得为营利或商业利益制作或分发副本，且副本首页须包含本声明和完整引文。对于本作品中由作者以外的其他方拥有版权的部分，必须尊重其版权。注明出处后允许摘录。以其他方式复制、再版、发布至服务器或重新分发至列表，均须事先获得具体许可和／或支付费用。请向 permissions@acm.org 申请许可。*LICS*，葡萄牙里斯本c◯ 2026年 版权归所有者／作者所有。出版权授权给 ACM。ACM
ISBN
978-x-xxxx-xxxx-x/YYYY/MMhttps://doi.org/10.1145/nnnnnnn.nnnnnnn

在 [9],中，作者引入了带接口的高维自动机（iHDA），以便能够正确地将高维自动机拼接起来（这是克莱尼定理所必需的）。随后，[11] 再次采用这一概念，从而得到一种更简洁的 Nerode 型构造，将正则语言转化为 iHDA。

在 [3], 中，作者修订并扩展了 [17]中将佩特里网翻译为高维自动机的方法。当佩特里网加入抑制弧后，该翻译会得到部分 高维自动机（pHDA），其中一些面可能缺失。这些自动机此前已被引入 [7]，以便恰当地表示展开和树。

缺失面这一主题也出现在 [14] 中，该文引入了关于无限字的高维自动机，并指出，通常认为的 Muller 接受性与 Büchi 接受性之间的等价关系对高维自动机并不成立；不过，作者推测采用部分高维自动机后，这个问题便会消失。还应注意，[10]引入了另一种部分高维自动机的概念，与 [7]中的概念不兼容，且已被后者取代。

另一个多次出现的概念是 *ST* 自动机。它是有限自动机的一种变体，使用由所谓的启动符和终止符构成的无限字母表；在 [1,9,11,14] 以及其他研究中，人们利用它们为高维自动机提供操作语义，并简化证明。

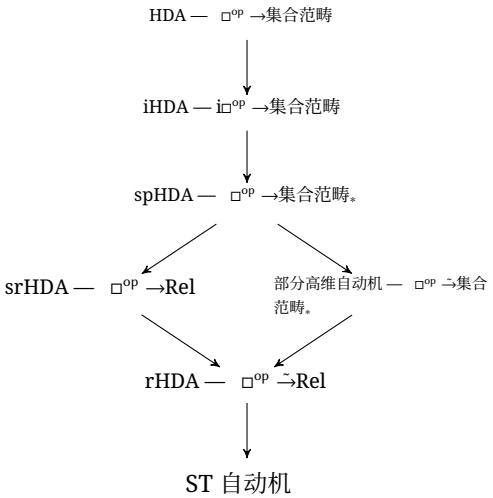


图 1. HDA的变体及其预层表述（松弛预层记为 ⇀）。

最后，近期一项尚未发表的研究 [6] 表明关系预层，特别是关系高维自动机，可能在并发系统建模中具有实用价值。

本文汇集了所有这些变体以及其他一些变体的定义，将它们整合为一个连贯的整体，探讨它们的性质及彼此之间的翻译，并证明了一个关于可确定化性的结果以及克莱尼定理。这一处理的核心是将它们表述为预层，定义在不同的范畴上，且既包括宽松表述，也包括严格表述，从而能够进行系统分析。图 1 展示了本文讨论的 HDA 的不同变体，以及它们的预层表述和相互关系；详情请见后续各节。

具体而言，我们证明，就语言而言，HDA 变体可以归为两类：语言在下闭关系下封闭的高维自动机和 iHDA，以及定义更丰富语言类的所有其他变体。我们还证明，与高维自动机和 iHDA 不同，[11],部分高维自动机是可确定化的。最后，与高维自动机和 iHDA 类似，[9], 部分高维自动机也满足克莱尼定理，但其证明比 [9]中针对高维自动机的证明简单得多。

2 带接口的偏序多重集

设 Σ 为一个有限字母表。并发列表，或称*conclist*，$U = (U, \dashrightarrow_U, \lambda_U)$由一个有限集合 U、一个严格全序 $\dashrightarrow_U \subseteq U \times U$（即事件序）arabic@footnote 以及一个标记 $\lambda_U : U \to \Sigma$组成。 Σ 上的 conclist 集合记为$\square = \square(\Sigma)$。并发列表同构是保持标签的序双射。

带接口的并发列表，或称*iconclist*，是一个元组 (S, U, T)，通常记作 ${}_S U_T$，由一个 conclist U和两个子集S、$T \subseteq U$组成。它们称为接口； S 是起始接口， T 是终止接口。 Σ 上的 iconclist 集合记为 $\mathrm{i}\square = \mathrm{i}\square(\Sigma)$。带接口并发列表同构是保持标签和接口的序双射。

带接口的偏序多重集，或称 ipomset，是一个元组 $(P, <_P, \dashrightarrow_P, S_P, T_P, \lambda_P)$，由有限集合 P、关系 $<_P$, $\dashrightarrow_P \subseteq P \times P$ 组成，其中 $<_P$ 是严格偏序， $\dashrightarrow_P$ 是无环的；还包括标记函数 $\lambda_P : P \to \Sigma$，以及子集 S_P, $T_P \subseteq P$，称为源接口和目标接口，满足 S_P 中的元素是 $<_P$-极小的，而 T_P 中的元素是 $<_P$-极大的。进一步

arabic@脚注A严格偏序是一种自反且传递的关系；严格全序是一种自反、传递且全序的关系；无环关系是指其传递闭包为严格偏序的关系。

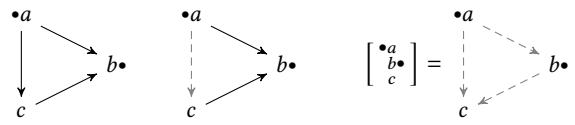


图 2. 两个 ipomset 和一个 iconclist。实线箭头表示优先顺序，虚线箭头表示事件序，圆点表示接口。

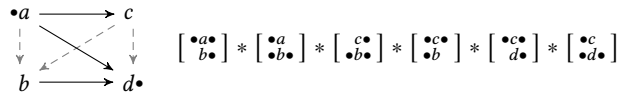


图 3. Ipomset（左）及其稀疏步分解。

要求对于每个 $x, y \in P$, $x = y$、 $x < y$、$y < x$、 $x \dashrightarrow y$ 和 $y \dashrightarrow x$ 中恰有一个成立。在不会产生歧义时，我们省略下标以简化记法。

直观地说， $<$表示事件的优先关系，而$\dashrightarrow$为事件排序 x, y 这些事件彼此并发，也就是说，既不存在 $x < y$ 也不存在 $y < x$。图2 展示了一些示例。我们用圆点表示接口，并且通常省略事件序；默认情况下，事件序向下排列。

ipomset P 和 Q 之间的同构是一个双射 $f : P \to Q$，满足 $f(S_P) = S_Q$, $f(T_P) = T_Q$, $\lambda_Q \circ f = \lambda_P$,$f(x) <_Q f(y)$ 当且仅当 $x <_P y$，且 $f(x) \dashrightarrow_Q f(y)$ 当且仅当 $x \dashrightarrow_P y$。P和 Q 同构记作 $P \simeq Q$。ipomset 之间的同构是唯一的，因此我们可以在 ipomset 及其等价类之间自由转换。

我们回顾 ipomset 的粘合运算的定义。设 P和 Q是两个带有 $T_P \simeq S_Q$的 ipomset。 P和 Q的粘合定义为 $P * Q = (R, <, \dashrightarrow, S, T, \lambda)$，其中：

1. $R = \mathrm{colim}(P \hookleftarrow T_P \cong S_Q \hookrightarrow Q)$，即在识别 $T_P \cong S_Q$ 下对 $P \sqcup Q$取商，且 $i : P \to R$ 和$j : Q \to R$ 是典范映射；2. $< = \{(i(x)\ i(y)) \mid x <_P y\} \cup \{(\ j(x)\ j(y)) \mid x <_Q y\} \cup \{(i(x)\ j(y)) \mid x \in P \setminus T_P, y \in Q \setminus S_Q\}$； 3. $\dashrightarrow = \{(i(x)\ i(y) \mid x \dashrightarrow_P y\} \cup \{(\ j(x)\ j(y) \mid x \dashrightarrow_Q y\}$；
4. $S = i(S_P)$、 $T = j(T_Q)$、 $\lambda(i(x)) = \lambda_P(x)$，以及 $\lambda(\ j(x)) = \lambda_Q(x)$。

因此， $P * Q$ 中的优先顺序将 P 中的事件置于 Q中的事件之前，但对于那些位于 P 的终止接口（该接口同时也是 Q的起始接口）中的事件，不会引入新的顺序。显然，粘合保持同构。

若 $<_P$ 为空，则 ipomset P 是离散的，因此 $\dashrightarrow_P$ 是全序的。离散 ipomset 恰好就是 iconclist。起始符是一个 iconclist ${}_A{\uparrow}U = {}_{U \setminus A}U_U$，而终止符是$U{\downarrow}_A = {}_U U_{U \setminus A}$；当 $A \neq \emptyset$时，它们是真的。恒等 *iconclist*为 $\mathrm{id}_U = {}_U U_U$。ipomset P的步分解是将其表示为起始符与终止符粘合所得的结果。若步分解是由真起始符和终止符交替组成的序列，或是单个恒等元，则称其为稀疏的。

一个 ipomset P 存在步分解，当且仅当$<_P$是一个 区间序 [12],，且在这种情况下，它存在一个 唯一的稀疏步分解 [11,命题 3。5]。本文中的所有 ipomset 都是区间型的，它们的集合记作iPoms。图 3 给出了一个示例。

ipomset 可以通过添加优先顺序（或等价地，移除并发）来细化。相反的操作（添加并发）称为包含。更形式化地，ipomset P被 Q所包含，是指存在一个双射 $f : P \to Q$，使得

$f(S_P) = S_Q, f(T_P) = T_Q, \lambda_Q \circ f = \lambda_P$; $f(x) <_Q f(y)$ 蕴含 $x <_P y$; 且 $x \dashrightarrow_P y$ 蕴含 $f(x) \dashrightarrow_Q f(y)$。我们将这种包含记为 $P \sqsubseteq Q$。ipomset 集合 L的包含闭包为 $L{\downarrow} = \{P \mid \exists Q \in L,\ P \sqsubseteq Q\}$。若 ipomset 集合 L 满足 $L = L{\downarrow}$，则称其关于包含闭包的。

3 HDA的变体

3.1 范畴 $\square$

下面将定义的 HDA 的大多数变体，都是同一个基范畴 $\square$ 上的不同类型的预层，因此我们先仔细介绍这个基范畴。

一个*conclist* 包含是一个函数 $d_{A,B}\colon U \to V$，对于 U 和Vconclist 以及 $A, B \subseteq V$，满足 $A \cap B = \emptyset$和 $V \setminus U = A \cup B$，且在 U上为恒等元。也就是说，U通过不相交集合 A 和 B扩展为V。conclist 包含 $d_{A,B}\colon U \to V$和 $d_{C,D}\colon V \to W$的复合为 $d_{A\cup C, B\cup D}$。令$\square\cdot$ 为一个范畴，其对象为 $\square$，态射为 conclist 包含 $U \to V$。

现在令 $\square$ 为由 $\square\cdot$ 以及每个对象上的conclist同构生成的范畴。（注意，$\square$一词在此处有多重含义，但这不会给下文带来问题。）$\square(U, V)$ 中的态射可以看作保持序和标记的单射 $U \hookrightarrow V$（在 [9]中称为lo映射），并附带一个表示 $V \setminus U = A \cup B$（其中 $A \cap B = \emptyset$）。直观地说，U中的事件包含在 V中，而 A和 B是 V中的事件，它们分别尚未在 U中开始，以及已在 U中终止。

范畴 $\square$ 没有非平凡的自同构，事实上，对于每个对象 U，都有 $\square(U, U) = \{\mathrm{id}_U = d_{\emptyset,\emptyset}\}$。因此，$\square$ 与其关于conclist同构的商唯一同构。我们也将该商记作 $\square$，并在这两个版本之间自由切换。商中的对象是不带事件恒等元的conclist：事件的标记和序才是重要的。

3.2 HDA与带接口的高维自动机

预立方集合是一种关于 $\square$的预层，也就是说，是一个函子 $X\colon \square^{\mathrm{op}} \to$集合范畴。对于 $x \in X[U]$，我们记作 $\mathrm{ev}(x) = U$，从而定义一个函数 $\mathrm{ev}\colon X \to \square$。我们将$\delta_{A,B} = X[d_{A,B}]$ 称为面映射；在记号中省略 U不会造成问题。

从基本层面来说，这意味着预立方集合是一个集合 X（由胞腔组成），连同一个函数 $\mathrm{ev}\colon X \to \square$ 以及面映射$\delta_{A,B}$，它们满足预立方恒等式

$$\delta_{C,D}\delta_{A,B} = \delta_{A\cup C, B\cup D}. \tag{1}$$

在面$y = \delta_{A,B}(x)$中，$A \subseteq \mathrm{ev}(x)$中的事件已取消开始，而 $B \subseteq \mathrm{ev}(x)$中的事件已终止。我们用$\delta^0_A = \delta_{A,\emptyset}$和$\delta^1_B = \delta_{\emptyset,B}$分别表示下方面和上方面。

定义 3.1. 高维自动机 (HDA) $(X, \bot, \top)$ 由一个预立方集合 X以及其子集$\bot$，$\top$ 组成，后两者分别是初始胞腔和接受胞腔。

现在我们转而讨论带接口的高维自动机，它们本质上是 iconclist 范畴上的预层。对于 iconclist (S_U, U, T_U) 和 (S_V, V, T_V)，iconclist 包含 $d_{A,B}\colon (S_U, U, T_U) \to (S_V, V, T_V)$ 是一种 conclist 包含 $U \to V$，满足 $A \cap S_V = B \cap T_V = \emptyset$，$S_U = S_V \setminus B$，且 $T_U = T_V \setminus A$。直观来说，接口标记了状态不可改变的事件：V 中的 A-事件尚未在U中开始，因此不能属于起始接口 S_V，也不能属于 S_U；而 V中已终止的 U-B 事件不能属于终止接口。示例见图 4。

令 $\mathrm{i}\square\cdot$ 为一个范畴，其对象为 $\mathrm{i}\square$，态射为 icon-clist 包含，复合的定义与 $\square\cdot$ 相同；令 $\mathrm{i}\square$ 为由 $\mathrm{i}\square\cdot$ 以及每个对象上的 iconclist 同构生成的范畴。同样，$\mathrm{i}\square$ 在同构意义下唯一等同于其关于 iconclist 同构的商，我们将在 $\mathrm{i}\square$ 与其商之间自由切换。

带接口的预立方集合是 $\mathrm{i}\square$ 上的预层，即一个函子 $X\colon \mathrm{i}\square^{\mathrm{op}} \to$ 集合范畴。我们将 $\mathrm{iev}(x) = {}_S U_T$ 记作 $x \in X[{}_S U_T]$，并将 $\delta_{A,B} = X[{}_A U_B]$。

定义 3.2。一个带接口的高维自动机（iHDA）$(X, \bot, \top)$由一个带接口的预立方集合 X 以及胞腔的初始子集 $\bot$，$\top$ 和接受子集组成，满足：对所有 $x \in \bot$，$S = U$；并且对所有满足 $\mathrm{iev}(x) = {}_S U_T$ 的$x \in \top$，$T = U$。

我们稍后会看到，iHDA 是严格部分高维自动机，其部分性是基于事件的，也就是说，对于胞腔 x，$\delta_{A,B}(x)$ 是否有定义，完全取决于 $\mathrm{iev}(x)$。

3.3 部分与关系型高维自动机

令 Set_* 为集合与偏函数（即，基点集）构成的范畴，Rel 为关系构成的范畴。部分预立方集合 是取值于 Set_*的宽松预层，定义在 $\square$ 上（即一个宽松函子$\square^{\mathrm{op}} \rightharpoonup \mathrm{Set}_*$）；而关系型预立方集合 是取值于 Rel 的宽松预层，定义在 $\square$ 上（即一个宽松函子 $\square^{\mathrm{op}} \rightharpoonup \mathrm{Rel}$）。与上文一样，我们用 $\rightharpoonup$表示宽松函子；定义和背景见 [13]。

简单来说，关系型预立方集合由一个集合 X、一个函数 $\mathrm{ev}\colon X \to \square$ 和面关系$\delta_{A,B} \subseteq X[U] \times X[U \setminus (A \cup B)]$组成，并满足宽松预立方恒等式

$$\delta_{C,D}\delta_{A,B} \subseteq \delta_{A\cup C, B\cup D} \tag{2}$$

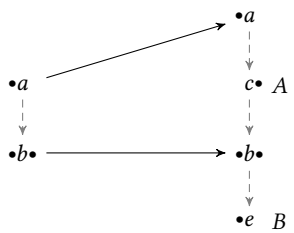


图 4. 一个 iconclist 映射。注释 A 和 B 分别表示尚未开始和已经终止的事件。由于位于目标接口中，c• 必须标记为 A，而不是 B。

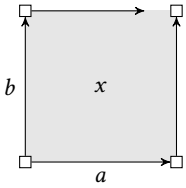


图 5. 部分高维自动机，其中 $\delta^1_a(\delta^1_b(x))$ 未定义。

（我们将关系复合写作从右向左复合）。在偏预立方集合中，面关系是偏函数；下文中，我们通常更倾向于将关系和偏函数写作多值函数。

我们还将用到上述预层的严格变体，即，非宽松函子 $\square^{\mathrm{op}} \to$ 集合范畴$_*$ 和$\square^{\mathrm{op}} \to$ Rel；在这种情况下，恒等元（2）将替换为（1）。

定义 3.3. 一个（严格）部分 / 关系型高维自动机 （(s)p/rHDA）$(X, \bot, \top)$ 由一个（严格）部分 / 关系型预立方集合 X 以及其初始胞腔和接受胞腔的子集$\bot, \top$ 组成。

请注意，上述定义引入了四种不同的概念。我们将详细说明这些概念，并直观解释它们与高维自动机的区别。集合范畴$_*$ 形式化了某些面映射可能“缺失”这一事实。这可能是因为该面不存在，如下方图11 所示，其中二维方形 x 只有一个下方面，因为 $\delta^0_a(x)$ 未定义。也可能是因为虽然胞腔存在，但面映射不存在。例如，在图5中，$\delta^1_{\{a,b\}}(x)$、$\delta^1_b(x)$ 和 $\delta^1_a(x)$ 均有定义，但 $\delta^1_a\delta^1_b(x)$ 未定义：如果事件 b 先于 a 终止，那么 a 就无法终止。不过，它们可以同时终止。

除了是部分的之外，面映射还满足（2）。这里的记号$\delta_{C,D}\delta_{A,B} \subseteq \delta_{A\cup C,B\cup D}$ 表示：如果 $\delta_{A,B}$ 和 $\delta_{C,D}$有定义，那么 $\delta_{A\cup C,B\cup D}$ 也有定义，且等于复合 $\delta_{C,D}\delta_{A,B}$；但$\delta_{A\cup C,B\cup D}$ 可以有定义，而左侧的映射中一个或两个都未定义。

在 spHDA 中，面映射满足更严格的关系（1）。因此，如果某个面缺失，那么它自身的下方面和上方面也都缺失。

在 rHDA 中，由于这里使用的是面关系而非面映射，对于给定的一组事件，一个胞腔可能有零个、一个或多个下方面/上方面。如图 13所示，二维胞腔 x在 a 和 b均未开始时有两个下方面，两个胞腔都绘于左下角。

在 srHDA 中，面关系再次满足更严格的（1）。如图 12 所示，此时 x 有两个下方面，当 a和 b 尚未启动时，但现在下边和左边都与两个角相连。

3.4 ST 自动机

现在我们来定义 ST 自动机及其一些（新的）推广形式，它们将在后文中发挥作用。

定义 3.4。P-自动机是一个元组 $A = (Q, E, s, t, \lambda, \mu, \bot, \top)$，其中 Q 是有限状态集合，E 是有限转移集合，$s, t\colon E \to Q$ 是源函数和目标函数，$\mu\colon Q \to \square$ 和 $\lambda\colon E \to$ iPoms 是标记，$\bot, \top \subseteq Q$是初始状态和接受状态。我们要求，对于每个转移 $e \in E$，都有 $\mu(s(e)) = S_{\lambda(e)}$且 $\mu(t(e)) = T_{\lambda(e)}$。

P 自动机也是预层，不过这一观察在此处对我们意义不大，因此我们不会用到它。

定义 3.5。 P 自动机是

- 一个*ST* 自动机，当且仅当 $\lambda(e)$是起始符或终止符；
- 一个广义 *ST*-自动机，当且仅当 $\lambda(e)$是离散的；
- 适当的当 $s(e) \notin \top$ 且 $t(e) \notin \bot$；
- 没有静默转移 当 $\lambda(e)$ 不是恒等元；

对所有 $e \in E$。

3.5 路径与语言

P-自动机 A 中的路径定义与自动机中的通常定义相同：一个序列 $\alpha = (q_0, e_1, q_1, \ldots\ldots, e_n, q_n)$，满足 $q_i \in Q$、$e_i \in E$和 $s(e_i) = q_{i-1}$、$t(e_i) = q_i$。若路径 α满足接受条件，则称其为接受路径：$q_0 = \mathrm{src}(\alpha) \in \bot$ 且 $q_n = \mathrm{tgt}(\alpha) \in \top$。由$\alpha$识别的 ipomset 是 $\mathrm{ev}(\alpha) = \lambda(e_1) * \cdots * \lambda(e_n)$。

定义 3.6。 P-自动机 A 的语言为 $L(A) = \{\mathrm{ev}(\alpha) \mid \alpha$ A 中的接受路径$\}$。

引理 3.7。 对于每个 *P*-自动机，都存在一个不含静默转移且识别相同语言的 *P*-自动机。

证明。 有限自动机的标准闭包构造适用。 □

利用第 5 节中定义的翻译，上述定义为本文定义的所有模型引入了语言。为求完整，我们也为关系型高维自动机定义路径和语言。设 $(X, \bot, \top)$ 是一个关系型高维自动机。在 X 中，若 $x \in \delta^0_A(y)$，则 x、$y \in X$ 上的一步上行转移为 $x \nearrow^A y$。若 $z \in \delta^1_B(y)$，则 y、$z \in X$ 上的一步下行转移为 $y \searrow_B z$。

在 X 中的一条路径 是一个序列 $\alpha = (x_0 \nearrow^{A_1} e_1 \searrow_{B_1} x_1 \nearrow^{A_2} \cdots \searrow_{B_n} x_n)$，由上步和下步组成；该序列不必交替，也可以以下步开始、以上步结束。如果该序列是 交替的，即每个上步后都跟着一个下步，反之亦然，那么这条路径称为稀疏路径。

路径 α若 $x_0 \in \bot$ 且 $x_n \in \top$，则称为接受路径。如果路径 α和 β 的最后一个胞腔分别与 α 的最后一个胞腔和 β的第一个胞腔相等，则它们可以连接，其连接记作 $\alpha * \beta$。因此，路径本身就是上步和下步的简单连接。

上步 $x \nearrow^A y$所识别的 ipomset 是起始符 $\mathrm{ev}(x \nearrow^A y) = {}_A\!\uparrow\!\mathrm{ev}(y)$，下步所识别的是 $\mathrm{ev}(y \searrow_B z) = \mathrm{ev}(y)\!\downarrow_B$。路径 α所识别的 ipomset $\mathrm{ev}(\alpha)$ 是各步所识别 ipomset 的连接，而 X的语言是 $L(X) = \{\mathrm{ev}(\alpha) \mid \alpha$中被接受的路径为 $X\}$。

引理 3.8。 对于 *(s)(p/r)HDA* X 中的每条路径 α，都存在一条稀疏路径 β，使得 $src(\beta) = src(\alpha)$、$tgt(\beta) = tgt(\alpha)$ 且$\mathrm{ev}(\beta) = \mathrm{ev}(\alpha)$。

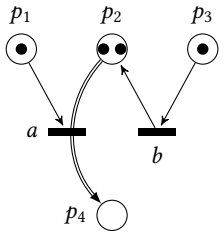


图6. 带传输弧的Petri网。

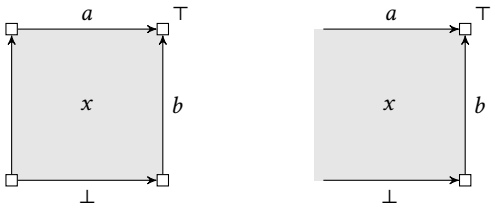


图8。高维自动机及其对应的 iHDA。

证明。 根据 (2)，每一对连续的上步或下步都可以合并为一个。 □

引理3.9. 设 $P, Q \in$ iPoms，$T_P = S_Q$。假设 $P * Q$ 的稀疏步分解是 P 和 Q 的稀疏步分解的连接。那么，每条满足$\mathrm{ev}(\alpha) = P{*}Q$的路径 α都可以分解为 $\alpha = \beta{*}\gamma$，其中 $\mathrm{ev}(\beta) = P$且$\mathrm{ev}(\gamma) = Q$。

证明。 该引理是 [11,引理 4.13], 的推广，其证明也是如此。 □

4 示例

在继续之前，我们先举一个示例，以说明部分定义和构造的动机。本节假定读者具备一些佩特里网知识，可放心跳过。

本文 [3]定义了从佩特里网的各种扩展到高维自动机的翻译，并指出，要使这种翻译有意义，后者必须是部分的。例如，图6 展示了一个佩特里网，其中有一条传输弧从 p_2 指向 p_4，并经过转移 a。每当转移 a 发生时，所有位于 p_2 中的令牌都会被传送到 p_4。

佩特里网的高维自动机语义由 [17]引入，并在 [3], 中得到完善，旨在忠实地刻画可达性和并发。在此， a 和 b 可以并发发生，也可以按任意顺序先后发生。

在 HDA 语义中，变迁触发具有持续时间。转移开始触发时，会取走其前置库所中的令牌，并一直持有这些令牌，直到触发完成。因此，在我们的示例中，如果 a 在 b 终止之前开始触发，那么两个令牌会被转移到 p_4；但如果 b 在 a 开始之前终止，那么 p_2 中就会多出一个令牌， a 会将其转移到 p_4。

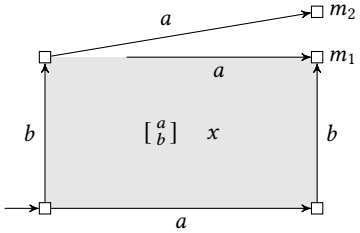


图7。图6中佩特里网的部分高维自动机语义。

图7 展示了示例网的部分 HDA 语义。标记为 m_2 的胞腔对应于 p_4 中含有三个令牌的标识，该标识是在 b 终止后、开始 a之前到达的；其他所有路径都会到达标记为 m_1 的胞腔，其中 p_4含有两个令牌。该部分高维自动机没有缺失胞腔，但其几何结构“破损”，因为 $\delta^0_a(\delta^1_b(x))$未定义，而 $\delta^1_b(\delta^0_a(x))$却存在。它不是严格部分高维自动机。

5 关系

现在，我们详细说明图 1 中各模型之间的翻译。

将前立方集合包含到带接口的前立方集合中（添加空接口）是函子性的，并且有一个右伴随，即闭包，它会补上缺失的面；而闭包又有一个右伴随，即分解；详情见 [9] 。事实上，闭包是由遗忘函子 $\mathrm{i}\square \to \square$ [15]诱导的本质几何态射。闭包和分解可以迁移到 (i)HDA 上，并保持语言不变 [9]。

将 HDA 纳入 iHDA 时，可能需要移除一些胞腔，因为开始事件不能处于未开始状态，而接受事件不能处于未终止状态。此类移除不会改变所识别的语言，示例见图。8

从 iHDA 到 spHDA 的翻译需要格外谨慎。这涉及通过某种推前，将一个范畴上的预层转换为另一个范畴上的预层。描述这一过程的一个便捷框架是：存在一个函子 $F\colon C \to D$，其定义在小范畴之间，并且对于 C 中的每个对象 c 以及每个态射 $f\colon F(c) \to d'$，至多存在一个态射 $g\colon c \to c'$ 使得 $F(g) = f$；也就是说， F 几乎是一个离散余纤维化。在这一条件下，有一种通用方法可将函子 $G\colon C \to \mathrm{Set}_*$ 转换为函子 $H\colon D \to \mathrm{Set}_*$，其方式让人联想到左 Kan 延拓：

$$H[d] = \coprod_{c \mid F(c)=d} G[c]$$

对于 D 中的对象 d，以及对于每个态射 $f\colon d \to d'$，

$$H[f](x) = \begin{cases} G[g](x) & \text{if } x \in G[c] \text{ and } \exists g \text{ with } F[g] = f, \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

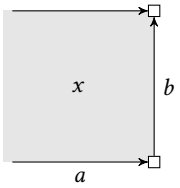


图9。iHDA，而非 HDA。

对于遗忘函子 $\mathbf{i}\square^{\mathrm{op}} \to \square^{\mathrm{op}}$，这给出了构造 iHDA $\to$ spHDA，其具体定义如下。对于一个 iHDA Y，我们定义 $X = I(Y)$ 为

$$X[U] = \coprod_{S,T \subseteq U} Y[{}_S U_T]$$

with

$$\delta_{A,B}(y) = \begin{cases} \delta_{A,B}(y) & \text{if } A \cap S = \emptyset = B \cap T, \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $y \in Y[{}_S U_T] \subseteq X[U]$ 和 $A,\ B \subseteq U, A \cap B = \emptyset$。直观地说，如果 iHDA 中缺少某个面映射，我们就将其在 X 中的所有取值定义为未定义。

spHDA $\hookrightarrow$ srHDA 和 pHDA $\hookrightarrow$ rHDA 的包含关系由遗忘函子 $\mathrm{Set}_* \to \mathrm{Rel}$ 诱导，而 spHDA $\hookrightarrow$ pHDA 和 spHDA $\hookrightarrow$ srHDA 的包含关系则源于每个严格函子都是宽松函子这一事实。

最后，rHDA $\to$ STA 这一翻译最初是为高维自动机提出的 [1]；我们在此重述该翻译，并将其扩展到关系型高维自动机。设 $(X,\ \bot,\ \top)$ 是一个关系型高维自动机，则其操作语义由以下 ST 自动机给出：$\mathrm{ST}(X) = (X,\ E,\ s,\ t,\ \lambda,\ \mathrm{ev}\ \bot,\ \top)$ 其中

$$E = \{(p, {}_A\uparrow \mathrm{ev}(q), q) \mid A \subseteq \mathrm{ev}(q), p \in \delta^0_A(q)\}$$
$$\cup \{(q, \mathrm{ev}(q)\downarrow_B, r) \mid B \subseteq \mathrm{ev}(q), r \in \delta^1_B(q)\},$$
$$s((p,U,q)) = p, \quad t((p,U,q)) = q, \quad \lambda((p,U,q)) = U.$$

也就是说，$\mathrm{ST}(X)$ 的转移恰好模拟了 X 中事件的开始与终止。因此，X 中的路径与 $\mathrm{ST}(X)$ 中的路径之间存在一一对应关系，且该对应关系保留了标记和接受性。

接下来我们给出一些示例，以区分这些类别。图9展示了一个 iHDA X，其中有 $X[[\,{}^{a}_{\bullet}\,]] = \{x\}$。（在所有示例中，$\bot = \top = \emptyset$。）鉴于 b 无法取消开始，X 缺少面 $\delta^0_a(x)$、$\delta^0_b\delta^0_a(x)$ 和 $\delta^1_b\delta^0_a(x)$，因此 X 不是 HDA。

在图10中，我们给出一个 spHDA X，其中包含 $X[[\,{}^{a}_{b}\,]] = \{x\}$，且 $\delta^0_{a,\,b}(x) = \delta^0_b(\delta^0_a(x)) = \delta^0_a(\delta^0_b(x)) = \emptyset$。这不是一个

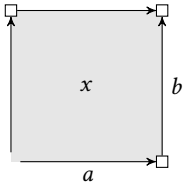


图10。是 spHDA，但不是 iHDA。

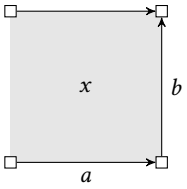


图11。是部分高维自动机，但不是 spHDA。

iHDA，因为事件 a 只有在 b 已开始之后才能取消开始。图11展示了相同的 $[\,{}^{a}_{b}\,]$-方形，但现在 $\delta^0_a(x) = \emptyset$。由于 $\delta^0_{a,\,b}(x)$ 已定义，但 $\delta^0_b(\delta^0_a(x))$ 未定义，因此这是一个部分高维自动机，但不是 spHDA。

图12展示了一个 srHDA，其中有 $\delta^0_{a,\,b}(x) = \delta^0_b(\delta^0_a(x)) = \delta^0_a(\delta^0_b(x)) = \{u,\ v\}$，但它不是 spHDA；图13展示了一个 rHDA，其中有 $\delta^0_{a,\,b}(x) = \delta^0_b(\delta^0_a(x)) = \{u,\ v\}$，但 $\delta^0_a(x) = \emptyset$，因此它既不是 srHDA，也不是部分高维自动机。

最后，图 14 展示了一个 ST 自动机，其中包含 $Q[\emptyset] = \{p\}$，$Q[a] = \{q\}$、$Q[[\,{}^{a}_{b}\,]] = \{r\}$，且没有其他状态和转移 $p \to q \to r$。复合跃迁 $p \to r$ 缺失，违反了（2），因此这不是某个 rHDA 的翻译。包含关系 STA $\hookrightarrow \subsetneq$ 广义ST自动机 $\hookrightarrow \subsetneq$ PA 的严格性直接由定义可知。

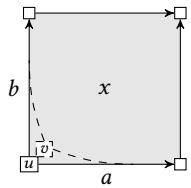


图12。srHDA，而非 spHDA。

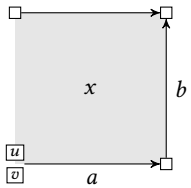


图13。 rHDA，而非 srHDA。

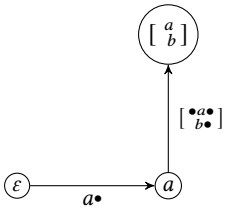


图14。ST 自动机，而非 rHDA。

6 语言等价

我们证明，对于每个 P-自动机，都存在一个识别相同语言的严格部分高维自动机。为此，我们引入一种约化的广义 ST-自动机概念，它本质上对应于一个部分高维自动机，并证明它们实际上可以翻译为严格部分高维自动机。根据引理3.7，我们可以假设不存在静默转移。

首先，有一个简单的引理：P 自动机可以转换为 ST 自动机。

引理 6.1。 对于每个 *P*-自动机 $\mathcal{A}$，都存在一个与之语言等价的 *ST* 自动机。

证明。 设 e_0 为一个转移，使得 $\lambda(e_0)$ 既不是起始符也不是终止符。设 $\lambda(e_0) = P_1 * \ldots * P_n$ 为一个 ST-分解。设 A′ 为一个 P 自动机，它由 A 将转移 e 替换为以下序列而得到



重复此构造，我们会消除所有既不是启动符也不是终止符的标签。□

在本节的其余部分固定一个 gST-automaton $\mathrm{A} = (Q, E, s, t, \lambda, \mu, \bot, \top)$。如果 A 没有静默转移并满足以下条件，我们就称 A 是约化的：

(a) $q \in \bot \implies t^{-1}(q) = \emptyset$;
(b) $q \in \top \implies s^{-1}(q) = \emptyset$;
(c) $\lambda(e) = {}_S U_T \wedge T = U \implies t(e) \in \top$;
(d) $\lambda(e) = {}_S U_T \wedge S = U \implies s(e) \in \bot$;
(e) $q \in \bot \implies |s^{-1}(q)| \leq 1$;
(f) $q \in \top \implies |t^{-1}(q)| \leq 1$;

对所有 $q \in Q$ 和 $e \in E$ 均成立。也就是说，A 没有进入初始状态的转移，也没有从接受状态出发的转移（(a) 和 (b)）；唯一的纯启动转移是指向接受状态的转移，而纯终止转移来自初始状态（(c) 和 (d)）；初始状态至多有一个出转移，接受状态至多有一个入转移（(e) 和 (f)）。我们将依次变换 A，使其满足所有这些条件，并在此过程中保持语言不变。

引理 6.2。 存在一个 *gST-automaton* $\mathcal{A}'$，它满足 *(a)* 和 *(b)* 以及 $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$。

证明。 定义 $\mathrm{A}' = (Q', E', s', t', \lambda', \mu', \bot', \top')$ 如下：

- $Q' = Q \cup \{q_\bot \mid q \in \bot\} \cup \{q^\top \mid q \in \top\} \cup \{q^\top_\bot \mid q \in \bot \cap \top\}$，添加新的初始状态和接受状态；
- $E' = E \cup \{e_\bot \mid s(e) \in \bot\} \cup \{e^\top \mid t(e) \in \top\} \cup \{e^\top_\bot \mid s(e) \in \bot, t(e) \in \top\}$，其中
- $s'(e_\bot) = s(e)_\bot, s'(e^\top) = s(e), s'(e^\top_\bot) = s(e)_\bot$,
- $t'(e_\bot) = t(e)$，$t'(e^\top) = t(e)^\top$，$t'(e^\top_\bot) = t(e)^\top$，
- 其他情况下 $s' (e) = s(e)$ 和 $t' (e) = t(e)$;
- $\bot' = \{q_\bot \mid q \in \bot\} \cup \{q^\top_\bot \mid q \in \bot \cap \top\}$ 和 $\top' = \{q^\top \mid q \in \top\} \cup \{q^\top_\bot \mid q \in \bot \cap \top\}$；以及
- λ', μ' extensions of λ, μ by $\lambda'(e_\bot) = \lambda'(e^\top) = \lambda'(e^\top_\bot) = \lambda(e)$ and $\mu'(q_\bot) = \mu'(q^\top) = \mu'(q^\top_\bot) = \mu(q)$.

验证 A′ 满足 (a) 和 (b) 是显而易见的。利用将 $q, q_\bot, q^\top, q^\top_\bot$ 映射到 q，并将 $e, e_\bot, e^\top, e^\top_\bot$ 映射到 e 的函数模拟 $p : \mathrm{A}' \to \mathrm{A}$，我们有 $L(\mathrm{A}') \subseteq L(\mathrm{A})$。

为证明反向结论，设 $\alpha = (q_0, e_1, q_1, \ldots, q_{n-1}, e_n, q_n)$ 是 A 中的一条接受路径，则 $\alpha' = ((q_0)_\bot, (e_1)_\bot, q_1, \ldots, q_{n-1}, (e_n)^\top, (q_n)^\top)$ 是 A′ 中的一条接受路径，它识别相同的 ipomset。（如果 α 的长度小于 2，则我们需要修改这一论证。如果 $\alpha = (q, e, r)$，我们取 $\alpha' = (q_\bot, e^\top_\bot, r^\top)$；如果 $\alpha = (q)$ 是常量，则令 $\alpha' = (q^\top_\bot)$。）□

现在假设 A 满足 (a) 和 (b)，并对其进行修改以确保满足 (c) 和 (d)。我们称 $e \in E$ 为起始转移，如果 $\lambda(e)$ 是起始符，其维数为 $|\lambda(e)|$；如果它不满足 (c)，则称其为不良，即，$t(e) \notin \top$。类似地，我们定义终止转移和不良终止转移。令 $\mathrm{bst}_n(\mathrm{A})$ 和 $\mathrm{btt}_n(\mathrm{A})$ 分别表示 A 中不良起始转移和不良终止转移的数量。

对于任意起始转移 $c \in E$，定义广义 ST-自动机 $\mathrm{A}_c = (Q, E', s', t', \lambda', \mu, \bot, \top)$，令 $E' = E \setminus \{c\} \cup \{e^* \mid e \in s^{-1}(t(c))\}$，并将 s、t 和 λ 扩展为 $s'(e^*) = s(c), t'(e^*) = t(e)$，以及 $\lambda'(e^*) = \lambda(c) * \lambda(e)$。也就是说，我们移除 c，并从 c 的源向从 c 的目标出发的所有转移的目标添加转移，同时相应调整标签。（这类似于用于移除静默转移的闭包构造。）显然，A_c 仍满足 (a) 和 (b)，因为任何新转移的起点或终点分别是已有出边或入边的状态。

引理 6.3。 假设 $c \in E$ 是一个维数为 n 的坏起始转移。那么

1. $L(\mathrm{A}) = L(\mathrm{A}_c)$，2. $\mathrm{bst}_n(\mathrm{A}_c) = \mathrm{bst}_n(\mathrm{A}) - 1$，3. $\mathrm{bst}_k(\mathrm{A}_c) = \mathrm{bst}_k(\mathrm{A})$ 对于 $k < n$，4. $\mathrm{btt}_k(\mathrm{A}_c) = \mathrm{btt}_k(\mathrm{A})$ 对于所有 k，

证明。 设 $\alpha = (q_0, e_1, \ldots\ldots, e_n, q_n)$ 是 A 中的一条接受路径。显然 $e_n \neq c$（因为 $t(c) \notin \top$），且 $e_i = c$ 意味着 $e_{i+1} \neq c$（因为 $\lambda(c)$ 是真起始转移，所以我们有 $s(c) \neq t(c)$）。在 α 中将每个 c，e_i 替换为 e^*_i，即可得到 A_c 中的一条接受路径 α，满足 $\mathrm{ev}(\alpha) = \mathrm{ev}(\alpha')$。因此 $L(\mathrm{A}) \subseteq L(\mathrm{A}_e)$。

反过来，如果 β 是 A_c 中的一条接受路径，那么将每个步骤 e^* 替换为序列 c，e 即可得到 A 中的一条接受路径，这说明反向包含关系同样成立。

对于其他断言，注意到没有 e^* 是终止转移（这证明了 4）；如果 e^* 是起始转移，那么 $|\lambda(e^*)| > |\lambda(c)|$（这证明了 (3)）。(2) 成立是因为我们移除了 c。□

对于不良终止迁移，也有一个对称的引理。

引理 6.4。 存在一个广义 *ST*-自动机 $\mathcal{A}'$，满足 *(a)–(d)* 以及 $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$。

证明。 反设不然。那么存在 $k, n > 0$，使得每个满足 (a)、(b) 和 $L(\mathrm{B}) =$ 的 gST 自动机 B

$L(\mathcal{A})$ 至少有 k 个维数为 n的坏转移。但根据引理 6.3 ，我们可以移除一个维数为 n 的坏起始符或终止符转移，而不会引入任何维数小于或等于 n的新的坏转移。由于有限 gST 自动机中的转移维数有界，这就产生了矛盾。□

现在假设 A 满足 (a)–(d)。定义广义 ST-自动机 $A' = (Q', E, s', t', \lambda, \mu', \bot', \top')$ 如下：

- $Q' = Q \setminus (\bot \cup \top) \cup (\bot \cap \top) \cup \{e_\bot \mid e \in s^{-1}(\bot)\} \cup \{e^\top \mid e \in s^{-1}(\top)\}$,
- $\mu'(e_\bot) = \mu(s(e)), \mu'(e^\top) = \mu(t(e))$,
- $\bot' = \{e_\bot \mid e \in s^{-1}(\bot)\} \cup (\bot \cap \top)$,
- $\top' = \{e^\bot \mid e \in t^{-1}(\top)\} \cup (\bot \cap \top)$, and

$$s'(e) = \begin{cases} s(e) & \text{if } s(e) \notin \bot, \\ e_\bot & \text{if } s(e) \in \bot, \end{cases} \qquad t'(e) = \begin{cases} t(e) & \text{if } t(e) \notin \top, \\ e^\top & \text{if } t(e) \in \top. \end{cases}$$

也就是说，我们复制初始状态和接受状态，使得每个状态至多分别具有一个出转移或入转移；但同时属于初始状态和接受状态的状态除外，因为根据 (a) 和 (b)，它们已经完全没有转移。

引理 6.5。 $\mathcal{A}'$ 是约化的，且 $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$。

证明。 我们有 $\bot' \cap \top' = \bot \cap \top$，因此不存在从同时属于初始状态和接受状态的状态出发或在此类状态终止的转移。其他初始状态和接受状态分别是类型为 $e_\bot$ 和 $e^\top$ 的状态，它们根据构造满足 (e) 和 (f)。因此 A′ 满足 (a)、(b)、(e) 和 (f)。

如果 $\lambda(e)$ 是起始符，那么 $t(e) \in \top$ (因为 A 满足 (c))，因此 $t'(e) = e^\top \in \top'$。于是 A′ 也满足 (c)。类似地，A′ 满足 (d)，因此是约化的。A′中的接受路径与 A 中的接受路径相对应，因此 $L(\mathrm{A}) = L(\mathrm{A}')$。□

结合引理 6.1 至 6.5 ，我们得到以下结果。

命题 6.6。 对于每个 *P*-自动机，都存在一个识别相同语言的约化 *gST*-自动机。

现在设 $\mathrm{A} = (Q, E, s, t, \lambda, \mu, \bot, \top)$ 是一个约化 gST-自动机。我们给出将 A 转换为部分高维自动机的两种方法。第一种较为简单，第二种则生成严格部分高维自动机。

设 $X(\mathrm{A})$ 是胞腔为 $Q \sqcup E/\sim$ 的部分高维自动机，其中$e \sim s(e)$ 当且仅当 $\lambda(e)$ 是终止符；若 $\lambda(e)$ 是起始符，则 $e \sim t(e)$。对于 $q \in Q$，我们令 $\mathrm{ev}(q) = \mu(q)$；对于满足 $\lambda(e) = {}_S U_T$ 的 $e \in E$，令 $\mathrm{ev}(e) = U$，并且只定义面映射

$$\delta^0_{U \setminus S}(e) = s(e), \quad \delta^1_{U \setminus T}(e) = t(e),$$

以及 $\bot_{X(\mathcal{A})} = \bot_{\mathcal{A}}, \top_{X(\mathcal{A})} = \top_{\mathcal{A}}$。（注意，如果 $e \sim q$，那么 $\mathrm{ev}(e) = \mathrm{ev}(q)$，且上述某个等式化简为$\delta^\epsilon_\emptyset(e) = q$。）

$X(\mathcal{A})$ 是一个部分高维自动机。

证明。 我们将验证任意两个面映射都无法复合，因此条件（2）显然成立。若 $x \in X(\mathcal{A})$ 是 $[y]$的一个（非平凡）下方面，则 $x = [s(e)]$ 且 $y = [e]$满足 $e \in E$，使得 $\lambda(e)$ 不是终止符（$S_{\lambda(e)} \neq \lambda(e)$）。若$s(e) \sim e'$ 对某个 e'成立，则有两种可能：

- $\lambda(e')$ 是起始符，且 $s(e') = s(e) =: q$。根据条件 (d)，$q \in \bot$，继而根据条件 (e)，$e' = e$。由于 $\lambda(e)$ 不是终止符，因此得到矛盾。
- $\lambda(e')$ 是一个终止符，且 $t(e') = s(e) =: q$。然后 $q \in \top$ 由条件 (c) 得出，这与 (b) 矛盾。

因此，$s(e)$ 在其等价类中独立存在，因而没有面。当 $s(e)$ 是一个上方面时，情况类似。□

Lemma 6.8. $L(X(\mathcal{A})) = L(\mathcal{A})$.

证明。 A 中的任意接受路径 $(q_0, e_1, q_1, \ldots, q_n)$ 都对应于一条路径

$$(q_0 \nearrow^{A_1} e_1 \searrow_{B_1} q_1 \nearrow^{A_2} \cdots \searrow_{B_n} q_n)$$

其中 $A_k = U \setminus S, B_k = U \setminus T$对于 $\mathrm{ev}(e_k) = {}_S U_T$。（如果 $\lambda(e_1)$ 是终止符，则第一个上步变为平凡步；如果 $\lambda(e_n)$ 是终止符，则最后一个下步也如此。）反过来，根据构造，这些是 $X(\mathrm{A})$ 中仅有的接受路径。□

为了将 A 转换为一个严格的部分高维自动机，我们引入高维自动机的一种新变体；它与 iHDA 相似，但彼此不可比较。

定义 6.9。 锥预立方范畴c□ 的对象为 i□，其态射由以下内容生成：

- $d^0_A : {}_S(U \setminus A)_{U \setminus A} \to {}_S U_T$ for $\emptyset \neq A \subseteq U \setminus S$,
- $d^1_B : {}_{U \setminus B}(U \setminus B)_T \to {}_S U_T$ for $\emptyset \neq B \subseteq U \setminus T$

以及每个对象上的 iconclist 同构。复合按 □ 中的定义进行。

一个锥形 *HDA*是一个预层 $X : \mathrm{c}\square^{\mathrm{op}} \to$ 集合范畴，并带有起始胞腔和接受胞腔 $\bot, \top \subseteq X$。直观地说，X具有一组特殊的锥胞腔 x，它们只有锥形面$\delta^0_A(x)$ 和$\delta^1_B(x)$，而所有其他胞腔都构成此类锥胞腔的一部分。例如，图 15 展示了一个具有一个锥胞腔$y^*_{ab,\ b}$的锥形 HDA。

引理 6.10。 每个 *HDA* 都是锥形 *HDA*，而每个锥形 *HDA* 都是严格偏高维自动机。

证明。 翻译与第 5 节中从高维自动机到 iHDA 以及从 iHDA 到 spHDA 的翻译相同。□

为了区分这些类，我们给出几个示例。图 15 展示了一个既不是 HDA 也不是 iHDA 的锥形HDA。在 iHDA 中，当某个角不存在时，方形中的事件至少有一个不能处于未启动或已终止状态。因此，在这个示例中，底边和右边至少有一个不应存在，才能使其成为 iHDA。在图 10 中，我们有一个不是锥形HDA 的 spHDA：在锥形HDA 中，当一个胞腔的多个事件都可以处于未启动状态时，它们的并集也可以处于未启动状态；但这里并非如此，因为左下角不存在。最后，图 9展示了一个不是锥形HDA 的 iHDA：在锥形HDA 中，下方面不能拥有上方面，但在这里，右下角是下边的一个上方面。

现在令 $\mathrm{c}\square^{{}_A U_B}$ 表示由锥形胞腔 ${}_A U_B$ 表示的预层。定义 $\mathrm{c}\square^{{}_A U_B}$ 的以下胞腔：

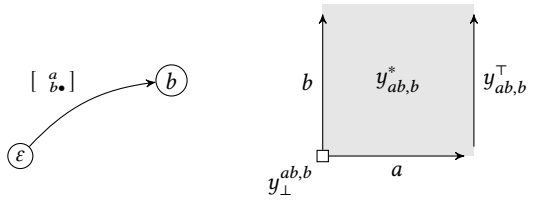


图15。 一个广义ST转移及其锥形HDA $Y([\ {}^{a}_{b\bullet}\ ])$。

- the middle cell $w^{*}_{AU_B} = \mathrm{id}_{AU_B} \in Y(_AU_B)[_AU_B]$,
- for $A \neq U$, the initial cell $w^{0}_{AU_B} = \delta^{0}_{U\setminus A}(w^{*}_{AU_B}) \in \mathrm{c}\square^{AU_B}[_AA_A]$,
- for $B \neq U$, the final cell $w^{1}_{AU_B} = \delta^{1}_{U\setminus B}(w^{*}_{AU_B}) \in \mathrm{c}\square^{AU_B}[_BB_B]$.

注意，$\mathrm{c}\square^{UU_U}$ 唯一的胞腔是中间胞腔 $w^{*}_{UU_U}$。

非正式地说，与约化的广义 ST-自动机 $\mathcal{A}$ 对应的锥形HDA，是通过将 每个转移 e 替换为锥形胞腔 $\mathrm{c}\square^{\lambda(e)}$ 来构造的，同时保留其状态，见图 15。

为了给出精确的构造，定义

- $E_0 = \{e \in E \mid S_\lambda(e) = \lambda(e)\}$;
- $E_1 = \{e \in E \mid T_\lambda(e) = \lambda(e)\}$;
- $E_* = E \setminus (E_0 \cup E_1)$;
- $Q_0 = s(E_0)$， $Q_1 = t(E_1)$， $Q_* = Q \setminus (Q_0 \cup Q_1)$。

注意，根据条件 (c) 和 (d)， $Q_0 \subseteq \perp$ 和 $Q_1 \subseteq \top$，并且 $E_0 \cap E_1 = \emptyset$，因为不存在静默转移。

对于 $e \in E$和 $q \in Q_*$，记 $Y_e = \mathrm{c}\square^{\lambda(e)}$和 $Z_q = \mathrm{c}\square^{\mathrm{id}_{\mu(q)}}$。令 y^{*}_{e} 为 Y_e的中间胞腔，z_q 为 Z_q的唯一胞腔。对于 $e \in E\setminus E_0$，令 $y^{0}_{e} \in Y_e$为初始胞腔；对于 $e \in E\setminus E_1$，令 $y^{1}_{e} \in Y_e$为最终胞腔。定义 $X_{\mathcal{A}}$为商

$$\coprod_{e\in E} Y_e \sqcup \coprod_{q\in Q_*} Z_q/\sim$$

由关系 $y^{0}_{e} \sim z_{s(e)}$对每个 $e \in E\setminus E_0$和 $y^{1}_{e} \sim z_{t(e)}$对$e \in E\setminus E_1$ 成立。$X_{\mathcal{A}}$ 的起始胞腔和接受胞腔定义如下:

$$\perp_{X_{\mathcal{A}}} = \{z_q \mid q \in \perp_{\mathcal{A}} \cap Q_*\} \cup \{y^{*}_{e} \mid e \in E_0\},$$
$$\top_{X_{\mathcal{A}}} = \{z_q \mid q \in \top_{\mathcal{A}} \cap Q_*\} \cup \{y^{*}_{e} \mid e \in E_1\}.$$

令 $j_e : \mathrm{c}\square^{\lambda(e)} = Y_e \to X$ 表示典范单射。对于 $e \in E$，定义一条路径

$$\beta_e = \begin{cases} (q^{0}_{e} \nearrow^{\lambda(e)\setminus S_{\lambda(e)}} q^{*}_{e} \searrow_{\lambda(e)\setminus T_{\lambda(e)}} q^{1}_{e}) & \text{for } e \in E_* \\ (q^{*}_{e} \searrow_{\lambda(e)\setminus T_{\lambda(e)}} q^{1}_{e}) & \text{for } e \in E_0 \\ (q^{0}_{e} \nearrow^{\lambda(e)\setminus S_{\lambda(e)}} q^{1}_{e}) & \text{for } e \in E_1 \end{cases}$$

引理 6.11。 设 x 是 $X_{\mathcal{A}}$的一个胞腔。若 x 同时是下方面和上方面（可能分别属于两个不同的胞腔），则$x = z_q$，其中 $q \in Q$。若 x 既有下方面又有上方面，则$x = y^{*}_{e}$，其中 $e \in E_*$。

证明。 在第一种情况下，对于 $S \neq U$ 和 $T \neq U$，我们有 $x \in X_{\mathcal{A}}[_SU_T]$。每个这样的胞腔都具有 y^{*}_{e} 的形式，其中 $e \in E_*$。要证明第二个陈述，请注意，Y_e（以及 Z_q）中没有任何胞腔是另一个胞腔的下方面和上方面。因此， x 必须表示为一个非平凡的抽象类，因而，根据 z_q，对于 $q \in Q_*$ 有此结论。□

引理 6.12。 $X_{\mathcal{A}}$中的每条非恒定稀疏接受路径 α都具有如下形式： $\beta_{e_1} * \ldots * \beta_{e_n}$，其中 $e_i \in E$、 $t(e_i) = s(e_{i+1})$、$s(e_1) \in \perp$ 以及 $t(e_n) \in \top$。若 α为恒定的，则对$q \in \perp \cap \top$有 $\alpha = (z_q)$。

证明。 根据引理 6.11，

$$\alpha = \eta * (z_{q_0} \nearrow y_{e_1} \searrow z_{q_1} \nearrow \cdots \nearrow y_{e_k} \searrow z_{q_k}) * \omega,$$

其中 η 要么是常量，要么是下步； ω 要么是常量，要么是上步。显然， $s(e_i) = q_i$且 $t(e_i) = q_{i+1}$，于是$\alpha = \eta * \beta_{e_1} * \cdots * \beta_{e_k} * \omega$。如果 η 是下步，那么它必定是 $(y^{e}_{*} \searrow z_{t(e)}) = \beta_e$，因为 $e \in E_0$：这些是仅有的具有上方面的起始胞腔。类似地， ω 要么是常量，要么是 β_e，对于 $e \in E_1$。□

引理 6.13. $L(X_{\mathcal{A}}) = L(\mathcal{A})$。

证明。对于所有 $e \in E$，我们有 $\mathrm{ev}(\beta_e) = \lambda(e)$。因此，由引理 6.12 可知， $L(X_{\mathcal{A}}) \subseteq L(\mathrm{A})$。为证明反向结论，注意，若 $\alpha = (q_0, e_1, q_1, e_2, \ldots, q_n)$ 是 A 中的一条接受路径，那么 $\beta = \beta_{e_1} * \ldots * \beta_{e_n}$ 就是 X中的一条接受路径，其中 $\mathrm{ev}(\beta) = \mathrm{ev}(\beta_{e_1}) * \cdots * (\beta_{e_n}) = \mathrm{ev}(e_1) * \cdots * (e_n) = \mathrm{ev}(\alpha)$。□

$X_{\mathcal{A}}$ 的构造及其正确性的证明不需要条件 (e)–(f): 从起始胞腔出发的多个转移会在构造过程中自行分离。

7 部分高维自动机的克莱尼定理

借助上一节建立的工具，我们现在能够为（严格）部分高维自动机给出一个简洁的克莱尼型定理证明。证明遵循标准的汤普森算法思路；鉴于文献 [9] 中高维自动机（以及 iHDA）的克莱尼定理证明十分复杂，这应当是一个令人欣喜的意外。

集合 $L, M \subseteq$ iPoms 上的有理运算 为 $L \cup M$,$LM = \{P * Q \mid P \in L, Q \in M, T_P \simeq S_Q\}$， 以及 $L^{+} = \bigcup_{n\geq 1} L^{n}$。与 [9], 相比， LM 的定义不包括对包含关系的封闭性，因为部分高维自动机语言并不对包含关系封闭。

令 iST 表示启动符和终止符的集合。基本 ipomset 语言为 $\emptyset$ 和 $\{P\}$，其中 $P \in$ iST 中的所有元素均适用。注意，这是一个无限集合。有理语言 是由基本语言在有理运算下生成的最小语言类。

再次与 [9], 相比，注意我们不包含并行组合 $\|$。代价是扩展基本 ipomset 的集合，从单元素集合扩展到任意 iconclist。

定理 7.1. 一组 *ipomset* L 是有理的，当且仅当存在一个部分高维自动机 X，使得 $L = L(X)$。

证明。 反向的证明与 [9] 中的证明类似：将 X 转换为一个 ST 自动机 $\mathcal{A}$，去掉状态标记，并添加额外的初始状态，使其不接受空字；然后使用标准的克莱尼定理，在 iST 上生成一个有理（字）表达式，其中任何子表达式 x^* 都可以转换为 $\varepsilon + x^+$，并且将连接理解为粘合时，该表达式生成 L。

对于正向，基本语言由空 iHDA 以及带有起始胞腔 $Y(S_p)$ 和接受胞腔 $Y(T_P)$ 的可表示对象 $\square^P$ 识别。对于有理运算，我们可以使用 gST 自动机。首先，$L(\mathrm{A}) \cup L(\mathrm{B}) = L(\mathrm{A} \sqcup \mathrm{B})$（不交并）。

对于连接，设 A 和 B 为约化 gST 自动机，并按如下方式定义 $\mathrm{A} * \mathrm{B} = (Q, E, s, t, \lambda, \mu, \bot, \top)$：

- $Q = Q_\mathrm{A} \cup Q_\mathrm{B}$，$\mu = \mu_\mathrm{A} \cup \mu_\mathrm{B}$，$\bot = \bot_\mathrm{A}$，$\top = \top_\mathrm{B}$
- $E = E_\mathrm{A} \cup E_\mathrm{B} \cup \{(p^\top, q_\bot) \subseteq \top_\mathrm{A} \times \bot_\mathrm{B} \mid \mu_\mathrm{A}(p^\top) \simeq \mu_\mathrm{B}(q_\bot)\}$
- $s(e) = s_\mathcal{A}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{A}$ 时，$s_\mathcal{B}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{B}$ 时，以及 $s((p^\top, q_\bot)) = p^\top$ 否则，类似地，对于 t
- $\lambda(e) = \lambda_\mathcal{A}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{A}$ 时，$\lambda_\mathcal{B}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{B}$ 时，以及 $\lambda((p^\top, q_\bot)) =$ 若 id 为 $\mu_\mathcal{A}(p^\top)$ 则为其他情况

由于约化 gST 自动机的性质 (a) 和 (b)，因此 $L(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = L(\mathrm{A})L(\mathrm{B})$。

最后，对于克莱尼正闭包，设 A 是一个约化 gST-自动机，则我们定义 $\mathrm{A}^+ = (Q, E, s, t, \lambda, \mu, \bot, \top)$ 如下：

- $Q = Q_\mathcal{A}$、$\mu = \mu_\mathcal{A}$、$\bot = \bot_\mathcal{A}$、$\top = \top_\mathcal{A}$
- $E = E_\mathrm{A} \cup \{(p^\top, q_\bot) \subseteq \top_\mathrm{A} \times \bot_\mathrm{A} \mid \mu_\mathrm{A}(p^\top) \simeq \mu_\mathrm{A}(q_\bot)\}$
- $s(e) = s_\mathcal{A}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{A}$ 和 $s((p^\top, q_\bot)) = p^\top$ 否则，同样地，对于 t
- $\lambda(e) = \lambda_\mathcal{A}(e)$ 当 $e \in E_\mathcal{A}$ 和 $\lambda((p^\top, q_\bot)) = \mathrm{id}_{\mu_\mathcal{A}(p^\top)}$ 否则

然后，由于性质 (a) 和 (b)，$L(\mathrm{A}^+) = L(\mathrm{A})^+$。 □

8 确定化

本节将证明，每个部分高维自动机都可以进行确定化，也就是说，存在一个识别相同语言的确定性部分高维自动机。下面的定义推广了 [11,定义 6.1]。

定义 8.1。一个部分高维自动机 X 是确定性的，如果

1. 对于每个 $U \in \square$，在 $X[U]$ 中至多存在一个初始胞腔；2. 对于所有 $A \subseteq V \in \square$ 和 $x \in X[V - A]$，至多存在一个胞腔 $y \in X[V]$ 使得 $x = \delta^0_A(y)$。

[11] 说明，对于高维自动机，语言 L 可被确定性 HDA 接受，当且仅当它是交换不变的：对于所有满足 $PP' \in L$、$QQ' \in L$ 和 $P \sqsubseteq Q$ 的 P、Q、P'、$Q' \in \mathrm{iPoms}$，也有 $QP' \in L$。图 16 展示了一个语言 L 不具备交换不变性的 HDA：$(ab)^* c \in L$、$\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] \in L$ 和 $ab \sqsubseteq \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$，但 $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] c \notin L$。这个 HDA 无法确定化为初始/稀疏/串行高维自动机。直观来说，在这四种模型中，一个具有左下角和右上角的方形必须包含它的四条边。这样一来，穿过 ab 的合适路径就只有一条，穿过这些边的路径只有一条，而将其延伸以得到 abc 必然会产生一条也能识别 $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] c$ 的路径。

然而，有几种方法可以构造出能够识别 L 的确定性部分高维自动机。图17 和18展示了其中两种。第一种方法是“断开”边与其下方面之间的连接，从而消除唯一的非确定性来源。第二种方法认为，对于每个被识别的 ipomset P，都存在一条能够识别 P 且比其他路径更重要的路径：稀疏路径（见引理3.8）。图18中的部分高维自动机，其现存的路径全是稀疏路径。因此它是确定性的，并能识别 L。接下来，我们将证明，这种对部分高维自动机的分解总是存在，并且可以应用类似幂集的构造来获得确定性部分高维自动机。

令 $\mathrm{iPoms}^q \subseteq \mathrm{iPoms}$ 为满足以下条件的 ipomset P 集合：其稀疏分解 $P = Q_1 * \cdots * Q_m$ 的最后一个元素不是起始符，也就是说，要么 Q_m 是终止符，要么 $m = 0$ 且 P 是恒等初始偏序集。此外，对于 $U \in \mathrm{iPoms}$，令 $\mathrm{iPoms}^q_U = \{P \in \mathrm{iPoms}^q \mid T_P = U\}$。下一个引理可由稀疏分解的唯一性立即推出。

引理 8.2. 每个 *ipomset* P 都有唯一的表示形式 $P = P' *_V U_U$，其中 $P' \in \mathrm{iPoms}^q$。

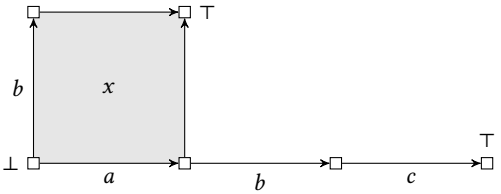


图 16. 一个无法确定化为 srHDA 的 HDA。

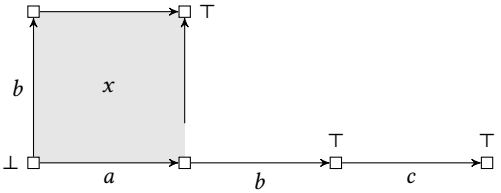


图 17. 将边“打断”，从而确定化为部分高维自动机。

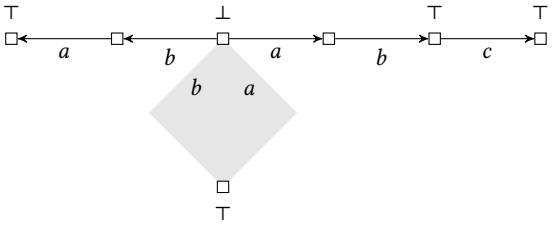


图 18. 将其“展开”，构造上步与下步交替序列，从而确定化为部分高维自动机。

对于部分高维自动机 X、ipomset P 和子集 $K \subseteq X$，定义

$$X(K,P) = \{x \in X \mid \exists \alpha \text{ path in } X : \mathsf{ev}(\alpha) = P,\ \mathsf{src}(\alpha) \in K,\ \mathsf{tgt}(\alpha) = x\}$$

并令 $\mathrm{iPoms}(X) = \{P \in \mathrm{iPoms} \mid X(\perp_X, P) \neq \emptyset\}$.

引理 8.3。 对于所有 $K \subseteq X, U \subsetneq V \in \square, P \in \mathrm{iPoms}^q_U$，我们有 $X(K, P *_U V_W) = X(X(K,P)_U V_W)$。

证明。如果 α 是 X 中的一条稀疏路径，那么利用引理3.9，存在一个分解 $\alpha = \beta * \gamma$，使得 $\mathsf{ev}(\beta) = P$ 且 $\mathsf{ev}(\gamma) = {}_U V_W$。这表明 $X(K, P *_U V_W) \subseteq X(X(K,P)_U V_W)$。反向包含显然。□

引理 8.4。 对于每个部分高维自动机 X，都存在一个与之语言等价的部分高维自动机 X'，使得对于每个 $x \in \perp_{X'}$ 和 $A \subseteq \mathsf{ev}(x)$，面 $\delta^0_A(x)$ 未定义。

证明。 令 X' 为胞腔集合为

$$X' = X \sqcup \{(x, C) \mid x \in X,\ C \subseteq \mathsf{ev}(x),\ \delta^0_C(x) \in \perp_X\}.$$

我们将事件扩展为 $\mathsf{ev}((x,C)) = \mathsf{ev}(x)$，并将面映射扩展为 $\delta^0_A((x,C)) = (\delta^0_A(x)\ C - A)$ 和 $\delta_{A,B}((x,C)) = \delta_{A,B}(x)$，其中 $B \neq \emptyset$；当 $A \not\subseteq C$ 时，面 $\delta^0_A((x,C))$ 未定义。最后，我们定义 $\perp_{X'} = \{(x,\emptyset) \mid x \in \perp_X\}$ 和 $\top_{X'} = \top_X \cup \{(x,A) \in X' \mid x \in \top_X\}$。

设 α 是 X中的一条稀疏接受路径。若 $\alpha = (x_0 \nearrow^A x_1 \searrow_B x_2 \cdots)$ 以一个上步开始，则 $((x_0,\emptyset) \nearrow^A (x_1, A) \searrow_B x_2 \cdots)$ 是 X' 中一条识别 $\mathsf{ev}(\alpha)$ 的接受路径；若 $\alpha = (x_0 \searrow_B x_1 \cdots)$ 以一个下步开始，则 $((x_0,\emptyset) \searrow_B x_1 \cdots)$ 也是这样一条路径。因此，$L(X) \subseteq L(X')$。为证明逆向结论，注意遗忘第二个坐标的映射 $X' \to X$ $(x \mapsto x, (x,A) \mapsto x)$ 保持接受路径。□

固定一个部分高维自动机 X，它满足引理 8.4。识别 $L(X)$ 的确定性部分高维自动机的构造，是对经典论证的一种改编：其状态是一些胞腔集合，这些胞腔可从某个起始胞腔出发，沿着识别给定 ipomset 的路径到达。我们只考虑属于iPoms^q的 ipomset。

在 iPoms 上引入一个等价关系 $\sim^X_U$ $^q_U(X) = \mathrm{iPoms}^q \cap \mathrm{iPoms}(X) \cap \mathrm{iPoms}_U$，定义如下：

$$P \sim^X_U Q \iff X(\perp_X, P) = X(\perp_X, Q).$$

令 $[P]$ 表示 P 在 $\mathrm{iPoms}^q_U/\sim^X_U$ 中的等价类。注意，若 $\mathrm{id}_U \in \mathrm{iPoms}^q_U(X)$，则 $[\mathrm{id}_U] = \{\mathrm{id}_U\}$：我们有$X(\perp_X, \mathrm{id}_U) = \perp_X \cap X[U]$，而引理 8.4 保证当 P不是恒等元时，没有起始胞腔属于 $X(\perp_X, P)$。

我们如下定义一个部分高维自动机 $Y = \mathrm{Det}(X)$（面映射仅在源和目标都已定义时才定义）。

- $Y[U]$是三元组 $([P], A, U)$ 的集合，其中 $A \subseteq U \in \square$，$P \in \mathrm{iPoms}^q_{U\setminus A}(X)$，满足 $P *_{U\setminus A} U_U \in \mathrm{iPoms}(X)$
- $\delta^0_A([P], A, U) = ([P], \emptyset, U \setminus A)$
- $\delta^1_B([P], A, U) = ([P *_{U\setminus A} U_{U\setminus B}], \emptyset, U\setminus B)$ 对于 $\emptyset \neq A, B \subseteq U$
- $\delta^1_B([\mathrm{id}_V], \emptyset, V) = ([_V V_{V\setminus B}], \emptyset, V \setminus B)$
- $\mathrm{maximal\ chain}([\mathrm{id}_V], A, U) \xrightarrow{\delta^0_A} ([\mathrm{id}_V], \emptyset, V) \xrightarrow{\delta^1_B} ([_V V_{V\setminus B}], \emptyset, V \setminus B)$ for $\emptyset \neq A \subseteq U \in \square, V = U \setminus A$
- $\perp_Y = \{(\mathrm{id}_V, \emptyset, V) \mid \perp_X[V] \neq \emptyset\}$
- $([P], A, U) \in \top_Y \iff P *_{U\setminus A} U_U \in L(X)$

下面我们将证明，对于一个 ipomset $P \in \mathrm{iPoms}(X)$，它具有一个 $P = P' *_V U_U$引理 8.2中的表示，恰好存在一条路径 ω_P，该路径从起始胞腔开始并识别 P。此外，$\mathrm{tgt}(\alpha_P) = ([P'], U\setminus V, U)$。

引理 8.5。 上面的定义是有效的。

证明。我们需要证明上面映射定义良好，也就是说，如果 $P \sim^X_U Q$对于 $P, Q \in \mathrm{iPoms}^q_U(X)$且 $\emptyset \neq A, B \subseteq U$，那么 $P *_{U\setminus A} U_{U\setminus B} \sim^X_U Q *_{U\setminus A} U_{U\setminus B}$。由引理 8.3可得

$$X(\perp_X, P *_{U\setminus A} U_{U\setminus B}) = X(X(\perp_X, P), {}_{U\setminus A}U_{U\setminus B}) = X(X(\perp_X, Q), {}_{U\setminus A}U_{U\setminus B}) = X(\perp_X, Q *_{U\setminus A} U_{U\setminus B}).$$

我们还需要证明终态定义良好，即如果 $P \sim^X_{U\setminus A} Q$且 $P *_U {}_{\setminus A}U_U \in L(X)$那么 $Q *_{U\setminus A} U_U \in L(X)$。这同样是引理 8.3的推论：

$$X(\perp_X, Q *_{U\setminus A} U_U) \cap \top_X = X(X(\perp_X, Q), {}_{U\setminus A}U_U) \cap \top_X = X(X(\perp_X, P), {}_{U\setminus A}U_U) \cap \top_X = X(\perp_X, P *_{U\setminus A} U_U) \cap \top_X \neq \emptyset.$$ □

引理 8.6。 Y 是确定性的。

证明。 根据定义可立即得到映射δ^0_A：$Y[U] \to Y[U\setminus A]$是单射，并且 $|\perp_Y[U]| \leq 1$对所有 $U \in \square$都成立。□

引理 8.7。 设 $P \in \mathrm{iPoms}(X)$ 是一个具有分解 $P = P' *_V U_U$ 的 *ipomset*。那么存在一条稀疏路径 ω_P，使得 $\mathit{src}(\omega_P) = (\mathrm{id}_{S_P}, \emptyset, S_P)$、$\mathsf{ev}(\omega_P) = P$，且 $\mathit{tgt}(\omega_P) = ([P'], U\setminus V, U)$。

证明。 我们根据其稀疏分解的长度进行归纳定义 ω_P。若 P 是恒等元或终止符，我们定义

- 对于 $P = \mathrm{Id}_V$，并令 $\omega_P = (\mathrm{id}_V, \emptyset, V)$,
- 对于 $P = P' *_W W_U$，我们令 $\omega_P = ((\mathrm{id}_W, \emptyset, W) \searrow_{U\setminus V} (P', \emptyset, U))$,

如果 P 的稀疏分解包含起始符，我们分两种情况考虑：

- 如果 P 的稀疏分解以起始符结束，那么对于 $V \subsetneq U$，$P = P' *_V U_U$，并且我们令$\omega_P = \omega(P') * ((P', \emptyset, V) \nearrow^{U\setminus V} (P', U \setminus V, U))$。
- 如果最后一个因子是终止符，那么 $P = R *_W V_U$对于 $W \subsetneq V \supseteq U$和 $R \in \mathrm{iPoms}^q$。我们定义 $\omega_P = \omega_{R *_W V_V} * (([R], V\setminus W, V) \searrow_{V\setminus U} ([P], \emptyset, U))$。□

引理 8.8. 如果 α 是 Y 中的一条路径，且 $\mathit{src}(\alpha) \in \perp_Y$，那么$\alpha = \omega_{\mathsf{ev}(\alpha)}$。

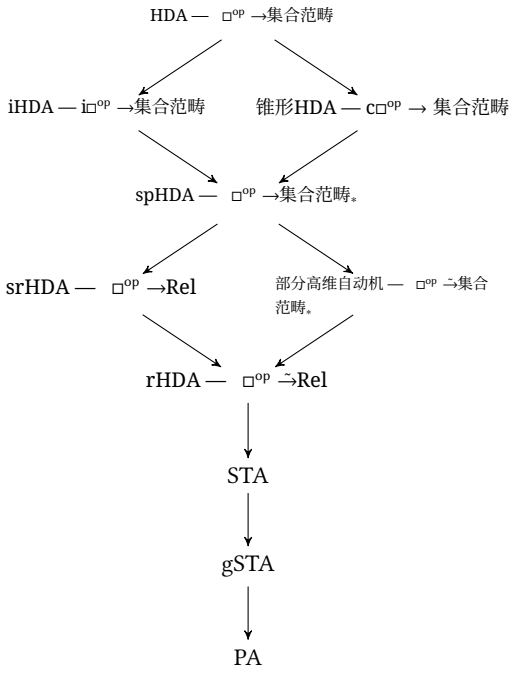


图19. HDA的变体，包括本文中介绍的新变体。

证明. 显然， α 是稀疏的。假设 α 是一条满足 $\alpha \neq \omega_{\mathrm{ev}(\alpha)}$ 的最短路径。如果 α 是常量，那么 $\alpha = ([\mathrm{id}_V, \emptyset, V]) = \omega_{\mathrm{id}_V}$。否则，存在一个分解 $\alpha = \beta * (x, \varphi, y)$。由于 β 比 α 短，因此我们有 $\beta = \omega_P, P = \mathrm{ev}\beta$。需要考虑三种情况：

- $P = \mathrm{id}_V$ 和 $\beta = (([\mathrm{id}_V], \emptyset, V))$。那么，要么 $\alpha = ([\mathrm{id}_V], \emptyset, V) \nearrow ([\mathrm{id}_V], A, U) = \omega_{VU_U}$ 对于 $A \subseteq U, V \cong U \setminus A$，要么 $\alpha = ([\mathrm{id}_V], \emptyset, V) \searrow_B ([_U U_{U\setminus B}], \emptyset, U \setminus B) = \omega_{U U_{U\setminus B}}$。
- $P \in \mathrm{iPoms}^q_U(X)$ 不是恒等元。那么 $\mathrm{tgt}(\alpha) = ([P], \emptyset, U)$。这个胞腔没有已定义的面。唯一的可能性是 $\alpha = \omega_P * (([P], \emptyset, V) \nearrow^A ([P], A, V)) = \omega_{P*_V U_U}$ 对于 $V = U \setminus A$。
- $P \notin \mathrm{iPoms}^q_U(X)$ 且不是恒等元。于是 $\mathrm{tgt}(\alpha) = ([P], A, U)$，$A \neq 0$。这个胞腔不是任何其他胞腔的面，因此唯一的可能性是 $\alpha = \omega_P * (([P], A, U) \searrow_B ([P *_{U\setminus A} U_{U\setminus B}], \emptyset, U \setminus B)) = \omega_{P *_U U_{U\setminus B}}$。

In all 在这些情形中，我们有 y ield 一个 con tradiction. □

命题 8.9。 $L(Y) = L(X)$。

证明。 注意到 $\mathrm{tgt}(\omega_P) \in \top_Y$ 当且仅当 $P \in L(X)$。因此，包含关系 $L(X) \subseteq L(Y)$ 由引理 8.7推出，逆向包含关系则由引理8.8推出。 □

9 结论

我们理清了 HDA 变体的纷繁类别，但在此过程中也引入了几种新的变体。图19 更新了论文开篇的分类谱系将这些新变体纳入其中：锥形 HDA、广义 ST 自动机和 P 自动机。

我们已经证明，就语言而言，这一谱系分为两类：一类是高维自动机和 iHDA（语言在包含下闭合），另一类是所有其他自动机，包括新提出的锥形 HDA，其语言未必在包含下闭合。事实上，[9]的克莱尼定理与本文的定理表明：(i)HDA 的语言由带包含闭包的有理表达式生成，而另一类则由不带包含闭包的有理表达式生成。

我们推测，迈希尔–内罗德定理 [11]和布奇–埃尔戈特–特拉赫滕布罗特定理 [2] 也有适用于部分高维自动机的对应版本；并且由于缺少包含闭包，我们预计其证明会比 [2, 11]中的证明更简单。

我们还证明了，与高维自动机和 iHDA 不同[11],，部分高维自动机可以进行确定化。此外，图16 中的示例表明，spHDA 和 srHDA 并非总是可确定化的。交换不变性是否仍是可确定化性的充要条件，还有待研究。

因此，从自动机理论的角度来看，部分高维自动机似乎比完整的高维自动机更容易处理。另一方面，高维自动机的几何性质比部分高维自动机好得多：我们已经看到，部分高维自动机可能会出现“几何破碎”，而最近的 [6]表明，从几何角度理解（宽松的）关系预层的几何实现并非易事。更准确地说，[6] 将关系预层实现为非豪斯多夫拓扑空间，而高维自动机的实现则是豪斯多夫的。其他定义是否更合适，例如类似于 [7]那样破坏定向结构而非拓扑，仍有待讨论。

参考文献

[1] Amazigh Amrane、Hugo Bazille、Emily Clement、Uli Fahrenberg 和 Krzysztof Ziemiański。带接口的区间部分有序多重集。载于 Uli Fahrenberg、Wesley Fussner 和 Roland Glück 编，*RAM- iCS*，第 14787 卷，《计算机科学讲义》，第 28–45 页。Springer，2024。[2] Amazigh Amrane、Hugo Bazille、Uli Fahrenberg 和 Marie Fortin。高维自动机的逻辑与语言。载于 Joel D. Day 和 Florin Manea 编，*DLT*，第 14791 卷，《计算机科学讲义》，第 51–67 页。Springer，2024。[3] Amazigh Amrane、Hugo Bazille、Uli Fahrenberg、Loïc Hélouët 和 Philipp Schlehuber-Caissier。Petri网与高维自动机。载于 Elvio Gilberto Amparore 和 Łukasz Mikulski 编，佩特里网，第 15714 卷，《计算机科学讲义》，第 18–40 页。Springer，2025。[4] Amazigh Amrane、Hugo Bazille、Uli Fahrenberg 和 Krzysztof Ziemiański。高维自动机的闭包与判定性质。《理论计算机科学》，1036，2025。[5] Amazigh Amrane、Hugo Bazille、Timothée Fragnaud 和 Philipp Schlehuber-Caissier。面向将 Petri网高效转换为高维自动机。载于反应系统建模，2025。

[6] Yorgo Chamoun 和 Samuel Mimram。关系预层的实现。http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Samuel.Mimram/ docs/mimram_relpsh.pdf。已被 FOSSACS 接收，2026年。[7] Jérémy Dubut。部分高维自动机中的树。载于 Mikołaj Bojańczyk 和 Alex Simpson 编，*FOSSACS*，第 11425 卷，《计算机科学讲义》，第 224–241 页。Springer，2019。[8] Uli Fahrenberg、Christian Johansen、Georg Struth 和 Krzysztof Ziemiański。高维自动机的语言。《计算机科学中的数学结构》，31(5):575–613，2021。https://arxiv.org/abs/ 2103.07557。[9] Uli Fahrenberg、Christian Johansen、Georg Struth 和 Krzysztof Ziemiański。高维自动机的克莱尼定理。《计算机科学中的逻辑方法》，20(4)，2024。[10] Uli Fahrenberg 和 Axel Legay。部分高维自动机。载于 Lawrence S. Moss 和 Pawel Sobocinski 编，*CALCO*，第 35 卷，莱布尼茨国际信息学会议录，第 101–115 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2015。[11] Uli Fahrenberg 和 Krzysztof Ziemiański。高维自动机的迈希尔–内罗德定理。《信息学基础》，192(3-4):219– 259，2024。

[12] Peter C. Fishburn。 区间序与区间图：偏序集研究。Wiley，1985。[13] Susan Niefield。松弛预层与可指数化性。《范畴理论与应用》，24(12):288–301，2010。[14] Luc Passemard、Amazigh Amrane 和 Uli Fahrenberg。高维自动机：扩展至无限轨迹。载于 Maribel Fernández 编，*FSCD*，第337卷 *LIPIcs*，第31:1–31:23页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2025。[15] Georg Struth 和 Krzysztof Ziemiański。预层自动机。《纯粹与应用逻辑年刊》，177(2):103660，2026。[16] Rob J. van Glabbeek。高维自动机的双模拟。电子邮件消息，1991年6月。http://theory.stanford.edu/~rvg/hda。[17] Rob J. van Glabbeek。论高维自动机的表达能力。《理论计算机科学》，356(3):265–290，2006。另见 [18]。[18] Rob J. van Glabbeek。《论高维自动机的表达能力》勘误。《理论计算机科学》，368(1-2):168–194，2006。