arXiv:2601.17597v1 [math.CT] 24 Jan 2026

非交换算子的范畴化谱层与同伦不变量

Shih-Yu Chang *

2026年1月27日

摘要

经典谱理论可以完整描述单个正规算子，但对于非交换算子则不再适用，因为不存在规范的联合谱或同时对角化。现有方法只能提供部分解决方案：联合谱主要适用于交换算子族，非交换几何侧重于整体不变量，因而模糊了局部结构；拓扑斯论方法虽能捕捉语境性，却会丢失高阶相干信息。本文提出一种几何化和高阶范畴论重构，以重新表述非交换算子的谱问题。与交换子代数相关的局部经典谱被组织成一个取值于栈的对象，称为谱栈；它保留了不同语境之间的自同构数据和酉等价数据。因此，非交换性被诠释为非平凡的下降数据，而非谱理论的失效。借助同伦和导出构造，我们定义了函子性不变量，用以衡量谱整体组装的障碍，并拓展经典指标理论思想。由此形成的框架将非交换算子代数视为配备谱图册的几何对象，为算子理论、同伦论与高阶几何搭建起简洁的桥梁。

索引词— 非交换谱理论、谱堆、语境性、高阶范畴论、导出几何

1 引言

1.1 非交换的谱问题

谱理论是泛函分析和算子理论的核心支柱。对于希尔伯特空间上的单个正规算子T，谱定理通过由其谱$\sigma(T) \subset \mathbb{C}$支撑的投影值测度，对$T$作出完整描述，从而提供强大的函数演算，并对可观测量 [1]给出清晰的几何解释。

对于非交换算子，这一经典图景从根本上失效。给定$T,\ S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且满足$[T,S] \neq 0$，一般而言不存在定义良好的联合谱$\sigma(T,\ S) \subset \mathbb{C}^2$，也不存在同时特征基。因此，谱定理所依赖的分析工具——联合对角化、函数演算和谱测度——无法以任何规范方式推广 [1]。这一障碍反映的是内在的几何不相容性，而非技术局限。

算子理论中已提出各种局部补救方案。联合谱构造（如泰勒谱）能够为交换算子元组恢复有意义的信息，并且在受限情形下具有函子性 [2]。然而，这些构造无法自然地推广到真正的

*Shih-Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮箱：shihyu.chang@sjsu.edu）

非交换族，也无法捕捉酉变换所产生的高阶相干性或等价数据。

由 Connes 开创的非交换几何，通过以非交换 C^*代数取代经典空间，并以 K理论、循环上同调和指标配对 [3]取代几何不变量，来应对这一难题。尽管这一框架取得了非凡的成功，却常常将谱信息压缩为全局同调不变量，从而掩盖了非交换可观测量的局部几何结构。

量子理论的拓扑斯论表述提供了另一种互补的概念性方法。在这一视角下，人们考察非交换 C^*代数 $\mathcal{A}$的交换子代数（语境）偏序集 $\mathcal{C}$ 。每个语境都具有经典的盖尔范德谱，这些局部谱汇集为一个谱预层，用以编码语境性和逻辑障碍 [4]。然而，由于该预层取值于集合，它必然会舍弃高阶相容性数据，例如由语境间的酉等价所诱导的自同构。

为保留这种相干性，我们提出一种范畴化精化：本文以取值于栈的对象取代谱预层。由此得到的谱栈保留自同构数据，并自然编码局部谱图表之间的酉等价。通过应用神经构造并随后进行稳定化，可以得到一个导出谱对象，其同伦极限产生稳定同伦群。这些群定义了非交换性函子性不变量，拓展了经典指标理论构造，并衡量全局谱下降的障碍。

从这一视角看，非交换 C^*代数可视为配备了谱图册的几何对象：交换上下文充当局部仿射图表，而其高阶粘合数据则由栈式结构和导出结构编码。这一观点自然契合高阶几何与导出几何 [**?**], 的语言，为算子代数、同伦论与现代几何框架搭建了一座概念桥梁。

1.2 几何重述与语境性

对非交换算子的谱分析揭示了一项根本性障碍：经典的联合谱 概念不复存在。取而代之的是局部经典谱数据的参数化族，它由可观测量彼此交换的语境组织起来。

形式上，对于一个非交换的 C^*代数 $\mathcal{A}$，考虑其交换 C^*子代数构成的偏序集 $\mathcal{C}$ ——即测量语境。盖尔范德对偶为每个 $C \in \mathcal{C}$ 赋予其谱 $\Sigma(C)$，这是一个局部紧豪斯多夫空间。赋值 $C \mapsto \Sigma(C)$定义了**谱预层** [**?**], ，即定义在 $\mathcal{C}$上的反变集合值函子。当代数非交换时，它缺少全局截面——也就是相容的局部谱点族——这与 Kochen–Specker 定理 [5], 密切相关。该定理证明了量子力学中非语境隐变量不可能存在。

然而，这个集合值预层仅捕捉了点的存在性。更深入的几何图景要求保留不同重叠语境中的谱数据之间的识别 信息。因此，我们需要将谱预层提升为**范畴化增强**，使每个纤维都得到丰富化，以追踪同构、限制和相干等价。在拓扑斯论量子基础中，这引出了范畴层或层堆的概念 [4]。

本工作的核心贡献在于对这一丰富的谱数据进行系统的**同伦分析**。通过将范畴预层提升为谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ ，并研究其在 $\mathcal{C}$ 上的**同伦极限**，我们得到一系列分次的同伦上同调群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$。定理 2 表明，这些群为非交换性提供了精确的分次度量：

- $n > 0$的 $\mathbb{H}^n$ 消失刻画了交换性。

- 非平凡的 $\mathbb{H}^1$ 刻画了谱数据沿语境环路的单值化，为 Kochen–Specker 语境性提供了同伦精化。
- 高阶群 $\mathbb{H}^n$ ($n \geq 2$) 能够检测日益复杂且更具相干性的粘合失败，这对应于更高阶的范畴结构，例如 gerbe [6]。

因此，我们将语境性从逻辑禁戒定理提升为一种可量化的同伦障碍理论。这将算子代数非交换性与现代代数拓扑中的工具联系起来，揭示了非交换算子的谱几何中丰富的层级结构。

在近期将算子代数视为具有结构的几何对象和高阶范畴对象的多范畴与算子理论框架基础上，本文通过将局部经典谱组织为一个取值于层的不变量，重新表述非交换算子的谱问题；该不变量刻画了下降、相干性和函子性障碍数据 [7–9]。

1.3 主要贡献

通过交换子结构的族来研究非交换数学对象的思想已经确立，尤其是在 Bohrification 和拓扑斯理论量子理论等方法中。本工作在这一视角基础上，引入一个经过完善的结构性 与计算性 框架，利用高阶范畴和同伦方法组织与非交换算子相关的谱数据。我们不再将经典联合谱的缺失解释为现有工具的失效，而是提出一种几何表述，在其中，这类现象由下降数据和障碍数据加以编码。

范畴化谱数据。 我们不采用集合预层或交换代数，而是构造一个范畴层

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat},$$

其对象描述与相容的交换语境相关联的局部谱范畴，其态射则编码这些语境之间的相干过渡。该构造将经典谱理论自然地扩展到高阶范畴的框架，同时与标准的算子理论结构保持相容。

栈下降解释。 我们证明，由此得到的范畴化谱数据满足栈下降。在这一表述中，全局联合谱的缺失体现为下降数据的非平凡性，这表明恰当的几何对象是谱栈，而非普通空间。这一观点使我们能够将非交换性视为一种由粘合条件刻画的结构属性，而不是几何之外的障碍。

同伦不变量。 我们引入并分析与谱栈相关的同伦不变量 ，定义相关分类栈的层上同调 $H^*(\mathcal{C};\, F_K)$ 和超上同调 $\mathbb{H}^*(\mathcal{C};\, B_{\mathcal{G}})$。这些不变量提供了函子性的度量，用以衡量局部谱数据无法在整体上粘合的程度，并可解释为谱下降的高阶障碍。特别是，它们为从非交换系统中提取可计算的全局信息提供了一种系统方法。

从概念角度来看，本文构建的框架以几何术语重新诠释了经典谱现象。交换系统对应于平凡下降和消失的上同调不变量，而真正的非交换系统则产生非平凡的层论结构和同伦结构。这种对应关系总结于下表中，该表将算子理论中的概念与其几何对应物联系起来：

算子理论	几何解释
非交换对 $(T,\ S)$	谱栈 $\mathcal{G}$
联合谱的缺失	非平凡的下降数据
上下文依赖	栈论结构
交换性 $[T,S]=0$	平凡的层上同调
谱投影	$\mathcal{G}$ 的局部截面
冯·诺依曼代数 $\mathcal{A}$	$\mathcal{G}$ 的整体截面或极限

最后，所提出的框架本质上具有构造性。我们给出了一个显式关联（$T,\ S$）$\mapsto\mathcal{G}$，展示了如何利用上同调和同伦不变量来检测和比较非交换行为，并概述了基于指标范畴$\mathcal{C}$的有限且可计算的近似。这些结果表明，层论和导出方法为经典谱理论提供了一种可行且灵活的扩展，可用于分析非交换算子。

注 1. 本文提出的数学见解和理论方向完全由作者负责。人工智能工具，包括 *OpenAI* 的 *ChatGPT* 和 *DeepSeek* 模型，仅用于辅助验证观点、整理参考文献，并确保论述内部一致性 *[10,11]*。

2 预备知识

2.1 算子代数设定

本节将确立全文所用的基本算子理论框架和符号。我们将给出代数、谱数据和语境结构的精确定义，它们构成了我们几何方法的基础。

定义 1（基本框架）。设 $\mathcal{H}$ 为一个复希尔伯特空间，并令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示作用于 $\mathcal{H}$上的 C^*-有界线性算子代数。除非另有明确说明，本文讨论的所有算子均假定为有界且处处有定义。对稠密定义的无界算子的推广，可通过伴随算子处理，或转而考察相应的冯·诺依曼代数。

固定一个含幺 $*$-子代数 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$，它通常由有限个自伴算子$\{T_1,\dots,T_n\}$生成。在所关注的应用中，$\mathcal{A}$通常是一个 C^*-代数；若需要更精细的谱论或测度论控制，则通常取其弱算子拓扑闭包 $\mathcal{A}^{\mathrm{wot}}$，后者是一个冯·诺依曼代数。

令$\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$的含幺交换 $*$-子代数所构成的偏序集，并按包含关系排序；$\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 中的元素称为语境。我们按通常方式将$\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 视为一个小范畴。

$\mathcal{A}$ 的谱预层是反变函子

$$\mathcal{G}\colon \mathrm{Comm}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Set},$$

它将每个语境 $\mathcal{B}\in\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 映射到其盖尔范德谱 $\Sigma(\mathcal{B})$，并赋予弱-$*$ 拓扑；同时将每个包含 $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}_2$ 映射到规范限制映射

$$\Sigma(\mathcal{B}_2)\longrightarrow\Sigma(\mathcal{B}_1).$$

预层 $\mathcal{G}$ 编码了与非交换代数 $\mathcal{A}$相关联的局部经典谱描述族。在这一阶段，并未显式使用 $\mathcal{A}$ 的详细内部非交换结构；相反，该框架由其交换子代数的盖尔范德谱及其之间的相容性映射所决定。关于 $\mathcal{A}$ 的全局结构与谱信息，稍后将以导出意义或层论意义（定理 *1*）从这个交换近似图表中恢复出来。

非交换性作为核心问题。给定 T， $S \in \mathcal{A}$，如果 $TS = ST$，我们称它们交换。交换子：$= TS - ST$量化了它们不交换的程度——这是一个纯代数条件，却会带来深刻的分析后果。在经典情形下，交换的自伴算子在 $\mathbb{R}^2$ 上具有联合谱测度和一组共同特征向量，从而能够实现同时对角化。对于非交换的算子对，这种联合谱结构不再存在；传统的分析工具恰恰在此处达到了极限。

我们不将其视为最终的病态现象，而是将其重新诠释为新几何结构的起源。经典联合谱的缺失并非意味着分析上的失败，而是预示着一种更丰富、依赖语境的谱对象的出现。本研究将代数条件 $[T, S] \neq 0$ 转化为一个几何问题：构造一个谱栈 $\mathcal{G}$，以连贯的方式组织所有局部（交换）谱视角，同时将原有的非交换性编码在层的拓扑复杂性之中。

谱与　　函数演算。对于有界算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其谱定义为　　s

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ is not invertible in } \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

若 T是自伴的（$T = T^*$），则 $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$。谱定理为 T关联一个唯一的投影值测度

$$E_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{\text{orthogonal projections on } \mathcal{H}\},$$

该测度通过以下方式确定 T

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_T(\lambda).$$

该测度导出有界博雷尔泛函演算：对于任意有界博雷尔函数 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$，算子

$$f(T) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_T(\lambda)$$

是良定义的。赋值 $f \mapsto f(T)$ 定义了一个从 $\mathbb{R}$ 上有界博雷尔函数代数到 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的含单位元 $*$-同态，该同态是范数递减的；当将其视为 $L^\infty(\mathbb{R}, E_T)$ 的表示时，它还是等距的。

语境：交换子代数。我们框架中的一个核心对象是 $\mathcal{A}$ 的交换子代数族，它们代表非交换整体中的"经典快照"或语境。

定义 2（语境）。一个语境是含单位元的交换 C^*-子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$。我们用 $\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 表示所有语境的集合。若语境 $\mathcal{B}$ 满足 $T \in \mathcal{B}$，则称其包含算子 $T \in \mathcal{A}$。

例 1（典范语境）。对于任意自伴算子 $T \in \mathcal{A}$，由 T 和单位元生成的含单位元 C^*-代数 $C^*(T, I)$ 是一个语境。它的弱算子闭包是由 T 生成的冯·诺依曼代数 $W^*(T)$，该代数（非典范地）$*$-同构于 $L^\infty(\sigma(T)\ \mu_T)$，其中测度 μ_T 源自 T 的谱测度。

如果 T与 S是彼此不交换的自伴算子，那么 C^*-代数 C^*（T、 S、 I）是非交换的，因此不定义一个语境。

对于任意交换的含幺 C^*-代数 $\mathcal{B}$，格尔范德–奈马克定理给出了 C^*-代数的一个典范 $*$-同构：

$$\mathcal{B} \ \cong\ C\big(\Sigma(\mathcal{B})\big),$$

其中 $\Sigma(\mathcal{B})$ 表示 $\mathcal{B}$ 的盖尔范德谱，这是一个紧豪斯多夫空间，其点为特征（非零乘法线性泛函）ϕ: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$。

$\widehat{\ }$在此同构下，每个元素 $T \in \mathcal{B}$ 都唯一对应于一个连续函数 $T \in C(\Sigma(\mathcal{B}))$，该函数由求值给出：

$$\widehat{T}(\phi) = \phi(T), \qquad \phi \in \Sigma(\mathcal{B}).$$

因此，正规算子 $T \in \mathcal{B}$ 的连续泛函演算，是通过在谱上逐点应用相应的连续函数来实现的；也就是说，对于 $f \in C(\sigma(T))$，

$$f(T) \longleftrightarrow f \circ \widehat{T} \text{ (pointwise on } \Sigma(\mathcal{B})).$$

语境偏序集与谱位点。 $\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 的集合在包含关系下自然构成一个偏序集：$\mathcal{B}' \leq \mathcal{B}$ 如果 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$。包含 $i : \mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{B}$ 会在盖尔范德谱之间诱导出一个连续限制（或拉回）映射：

$$\Sigma(i) : \Sigma(\mathcal{B}) \to \Sigma(\mathcal{B}'), \quad \chi \mapsto \chi|_{\mathcal{B}'}.$$

定义 3 (谱位点**)。** 设 $\mathcal{A}$ 是如定义 *1* 中所述的含幺 C^*-代数，并且 *t*

$$\mathrm{Comm}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{B} \textit{ is a unital commutative } C^*\textit{-subalgebra}\}$$

表示语境的集合。

我们将$\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 视为按包含关系排序的偏序集，并用 $\mathcal{C} := \mathrm{Comm}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 表示其对偶范畴：对象是语境 $\mathcal{B}$，且当且仅当 $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ 时，存在唯一的态射 $\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$ 。

该谱位点是对$(\mathcal{C}、\ J)$，其中，J是如下定义的格罗滕迪克拓扑：$\mathcal{C}$ 中的一族态射 $\{\mathcal{B}_i \to \mathcal{B}\}_{i\in I}$ 是一个 J-覆盖，当且仅当由 $\mathcal{B}_i$ 的并集生成的 C^*-子代数在 $\mathcal{B}$中稠密，即：

$$\mathcal{B} = \overline{C^*\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\Big)}^{\|\cdot\|}.$$

在$(\mathcal{C}、\ J)$上的预层，如果相对于所有 J-覆盖满足通常的层条件，则称为层。谱预层 $\mathcal{G}$ （定义 *1*）将每个语境 $\mathcal{B}$ 赋予其盖尔范德谱 $\Sigma(\mathcal{B})$，限制映射由包含关系诱导；事实上，它相对于拓扑 J确实是一个层。

例 2 （二算子情形）。对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一对自伴算子$(T、\ S)$，令$\mathcal{A} = C^*(T、\ S)$。则 $\mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 恰好由 $\mathcal{A}$ 中同时包含 T和 S的那些交换 C^*-子代数组成。这恢复了定理 *1* 中提到的特殊情形。

从代数障碍到几何结构。 如果代数 $\mathcal{A}$ 是交换的，其全局谱信息便可由单一空间 $\Sigma(\mathcal{A})$ 完整编码。非交换性从根本上打破了这一图景：谱数据仅存在于各个交换语境 $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$中，而这些局部谱通常无法在不同语境之间相容。关键的是，这种不相容性并非仅仅是一种局限，而是蕴含着丰富的几何结构和上同调结构。

这促使我们从算子代数 $\mathcal{A}$ 转向一种几何对象，以系统地编码：

- **L局部谱数据** 通过盖尔范德谱 $\Sigma(\mathcal{B})$ 与各个语境 $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ 相关联，
- **限制映射** $\Sigma(\mathcal{B}) \to \Sigma(\mathcal{B}')$ 由包含关系 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$诱导，用以形式化局部谱之间的相容性，
- **将局部谱粘合成单一经典对象时的全局障碍**，通过上同调不变量和同伦不变量加以刻画。

这些概念通过构造谱预层得到形式化

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Top},$$

它将每个语境映射到其谱，并将每个包含映射映射到相应的连续限制映射（第2.2节）。我们证明 $\mathcal{G}$ 满足下降条件，从而成为谱拓扑下的拓扑空间层（或 locale）（第3节）。基于这一结构，我们提取出新的不变量，以系统地量化非交换性（第4节）。

2.2 范畴论与层论背景

本小节介绍我们对非交换性进行几何重述所需的范畴论与层论基础。我们回顾位点、层、下降及其同伦增强等关键概念，并着重讨论它们在算子代数中的应用。关于范畴论和层的标准参考资料包括 [12, 13]，关于高阶范畴方面的参考资料包括 [**?** ， 14] 。

范畴与预层。我们主要在范畴论框架内开展工作。一个范畴$\mathcal{C}$ 由对象和态射组成，并配备满足结合律的复合运算以及单位态射。在我们的语境中，范畴通常源自偏序集：一个偏序集 $(P, \leq)$ 可视为一个范畴，其对象为 $p \in P$，且当 $p \leq q$ 时存在唯一态射 $p \to q$ 。对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 具有相同的对象，但态射方向相反。

定义 4（预层）。 对于小范畴 $\mathcal{C}$ 和目标范畴 $\mathcal{D}$，取值于 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{C}$ 上的预层 是一个反变函子

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{D}.$$

当 $\mathcal{D} =$ 为**集合**、**阿贝尔群**或**Cat**时，我们分别称之为集合预层、阿贝尔群预层或范畴预层。

设 $\mathcal{A}$ 是一个非交换 C^*-代数，并令 $\mathcal{C}$ 表示其交换含幺
$*$-子代数（语境）按包含关系构成的偏序范畴。

例 3（经典集合值谱预层）。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的交换含幺子代数（语境）按包含关系构成的偏序集。经典谱预层 是如下定义的反变函子

$$\underline{\Sigma} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

定义如下：

- 对于每个语境 $B \in \mathcal{C}$，赋予其盖尔范德谱

$$\underline{\Sigma}(B) := \Sigma(B),$$

  即特征的紧豪斯多夫空间 $\chi : \ B \to \mathbb{C}$。

- 对于每个包含 $i : \ B_1 \hookrightarrow B_2$，赋予限制映射

$$\underline{\Sigma}(i) : \Sigma(B_2) \longrightarrow \Sigma(B_1), \qquad \chi \mapsto \chi|_{B_1}.$$

这定义了一个反变函子，即 $\mathcal{C}$上的集合预层。

定义 5（谱预层）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个带单位的 C^*-代数，其谱位点为 $\mathcal{C} = \mathrm{Comm}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ ，如定义 *3* 所述。

我们考虑谱预层的两个增强版本：

（*a*）范畴谱预层。该函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

将每个语境 $B \in \mathcal{C}$ 关联到一个范畴 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(B)$，其对象是盖尔范德谱 $\Sigma(B)$上的正则博雷尔概率测度，态射则是保测映射。对于一个包含 $B' \subseteq B$，限制函子 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(B) \to \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(B')$ 由沿连续限制 $\Sigma(B) \to \Sigma(B')$对测度作推前给出。

(b) 稳定谱预层。该函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

将每个 $B \in \mathcal{C}$ 关联到一个编码稳定同伦论信息的谱。一种具体选择是盖尔范德空间的悬挂谱，

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(B) := \Sigma^{\infty}_{+}\Sigma(B),$$

不过，也可以选择 B 的非交换 K 理论谱，以捕捉算子代数不变量。

注。 标准谱预层（定义 *4*）是一个拓扑空间预层。 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$是增强／范畴化版本，它们纳入了概率论或稳定同伦论数据，并用于后续构造高阶不变量。

备注 2（范畴谱预层与稳定谱预层之间的关系）。 范畴谱预层与稳定谱预层之间通过同伦论存在自然联系。

令 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ 为定义 *5(a)* 中的范畴谱预层。应用神经函子

$$N : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

得到一个单纯集合预层

$$N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{cat}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{sSet}.$$

对于每个 $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$，其几何实现

$$|N(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{B}))| \simeq B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{B})$$

与范畴 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$（$\mathcal{B}$）的分类空间同伦等价。

稳定谱预层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

定义 *5(b)* 中的对象可以通过悬挂谱函子与这一构造联系起来。逐对象来看，存在一个典范映射

$$\Sigma^{\infty}_{+}|N(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{B}))| \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{st}}(\mathcal{B}),$$

它编码了从范畴（代数／测度论）信息到稳定同伦不变量的过渡。这些映射组装成 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 上预层的一个自然变换：

$$\Sigma^{\infty}_{+}|N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}| \implies \mathcal{G}_{\mathrm{st}}.$$

因此，范畴预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 捕捉了每个语境的代数结构和测度论结构，而稳定预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 则编码了从这些范畴数据中导出的精细同伦不变量。

注 3 (层范畴／范畴精化**)**。 当需要额外的高阶范畴结构时，可以先构造一个群胚层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{gpd}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd},$$

其对象表示谱数据（例如谱测度或态），其态射表示它们之间的等价或对称性。

应用神经函子 N： $\mathbf{Gpd} \to \mathbf{sSet}$ 得到一个单纯集合预层

$$N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{gpd}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}.$$

先与几何实现 $|\cdot|$： $\mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ 复合，再与悬挂谱函子复合

$$\Sigma^{\infty}_{+} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Sp},$$

该函子为每个空间添加一个不交基点，从而得到一个谱预层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} := \Sigma^{\infty}_{+} \circ | \, N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{gpd}} \, | : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}.$$

从这个意义上说，稳定谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 可以视为由 $\mathcal{G}_{\mathrm{gpd}}$ 编码的高阶范畴结构的稳定化影子。直观地说，有

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} \;\simeq\; \Sigma^{\infty}_{+} \circ | \, N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{gpd}} \, |.$$

注 4 （函子性与同伦重构）。根据构造， $\mathcal{G}$ 是一个反变函子：语境的包含 $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ 会诱导一个连续的限制映射

$$r_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} : \mathcal{G}(\mathcal{B}_2) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{B}_1)$$

该函子将特征 $\phi \in \Sigma(\mathcal{B}_2)$ 映射为其限制 $\phi|_{\mathcal{B}_1} \in \Sigma(\mathcal{B}_1)$。这一函子结构编码了局部经典视角（盖尔范德谱）如何通过粗粒化彼此关联。

同伦极限 $\mathrm{holim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathcal{G}$ （取遍谱位点的反范畴）将这些局部谱汇集成一个同伦对象，并保留限制映射所规定的所有高阶相容数据。其（稳定）同伦群

$$\pi_{-n}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathcal{G}), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

可视为精细化的不变量，用以量化将局部谱图粘合成单一经典谱时所遇到的全局障碍——也就是说，它们衡量了非交换性的拓扑代价，以及在所有语境中无法同时对角化这一事实。

在我们的框架中， $\mathcal{C}$ 将是交换语境的谱位点 $\mathcal{C}$（定义 3），而我们的预层将为每个语境赋予谱或同伦数据。

位点与格罗滕迪克拓扑。 要定义层，我们需要在范畴上引入“覆盖”的概念。

定义 6 （位点）。 一个位点 $(\mathcal{C}, J)$ 由一个范畴 $\mathcal{C}$ 和一个格罗滕迪克拓扑 J 组成。对于每个对象 $U \in \mathcal{C}$， $J(U)$ 指定态射族 $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ 的一个集合，称为覆盖族，满足以下公理：

1. （拉回下的稳定性）如果 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 属于 $J(U)$，且 $g : V \to U$ 是 $\mathcal{C}$ 中的任意态射，那么对于所有 i，纤维积 $U_i \times_U V$ 都存在，并且拉回族 $\{U_i \times_U V \to V\}_{i \in I}$ 属于 $J(V)$。

2.（传递性）如果 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 属于 $J(U)$，并且对于每个 $i \in I$，我们都有一个覆盖族 $\{V_{ij} \to U_i\}_{j\in J_i}$，其属于 $J(U_i)$，那么复合族

$$\{V_{ij} \to U_i \to U\}_{i\in I, j\in J_i}$$

属于 $J(U)$。

3.（同构是覆盖）如果 $f\colon\ U' \xrightarrow{\sim} U$是一个同构，那么单元素族 $\{f\colon\ U' \to U\}$属于 $J(U)$。

配备了格罗滕迪克拓扑 J 的范畴 $\mathcal{C}$ 也称为一个格罗滕迪克位点。

例 4（谱位点拓扑）。对于与含幺C^*-代数 $\mathcal{A}$（见定义 *3*）相关联的谱位点 $\mathcal{C} = (\mathrm{Comm}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}, J)$，我们定义如下格罗滕迪克拓扑 J：

Comm($\mathcal{A}$) 中的有限包含族 $\{\mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{B}\}_{i=1}^n$（视为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的态射 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_i$）是 $\mathcal{B}$ 的覆盖族，当且仅当 $\mathcal{B}$ 是包含所有 $\mathcal{B}_i$的最小交换 C^*-子代数；也就是说，

$$\mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i\right),$$

其中右侧表示由并集生成的 C^*-子代数（由于每个 $\mathcal{B}_i$ 都是交换的，且它们都包含于交换代数 $\mathcal{B}$ 中，因此该子代数自动是交换的）。

这一拓扑将如下原则形式化：较大语境 $\mathcal{B}$ 的谱数据可以由一族较小语境的谱数据重构，而这些较小语境共同生成 $\mathcal{B}$。在托普斯量子理论中，这通常称为相干覆盖拓扑 或有限覆盖拓扑。

层与下降。层条件将这样一种思想形式化：相容的局部数据可以唯一地粘合成全局数据。

定义 7（层）。设$(\mathcal{C}, J)$ 为一个位点。若预层 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **集合** 满足以下条件，则称其为一个层（相对于拓扑 J）：对每个对象 $U \in \mathcal{C}$以及 $J(U)$中的每个覆盖族 $\{f_i\colon U_i \to U\}_{i\in I}$，以下图表在**集合**中是一个等化子：

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \ \rightrightarrows\ \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j),$$

其中：

- 左侧的映射由限制 $F(f_i)\colon F(U) \to F(U_i)$诱导。
- 这对平行箭头由两个投影诱导：

$$\pi_1 : U_i \times_U U_j \to U_i, \qquad \pi_2 : U_i \times_U U_j \to U_j.$$

明确地说，元素 $(s_i)_{i\in I} \in \prod_i F(U_i)$ 来自唯一的 $s \in F(U)$ 当且仅当

$$s_i|_{U_i\times_U U_j} = s_j|_{U_i\times_U U_j} \quad \textit{for all } i, j \in I,$$

其中 $s_i|_{U_i\times_U U_j}$表示 $F(\pi_1)(s_i)$，s_j的情形也类似。

仅对单元素覆盖满足上述条件的预层称为分离预层（或单预层）。由层构成的 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ 的满子范畴记为 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$。

直观地说，层为每个对象 U分配一个“截面”集合 $F(U)$，这些截面由其在 U的任意覆盖上的限制唯一确定。在我们的算子代数语境中，谱数据预层的层条件失效反映了非交换性所导致的不同交换上下文之间根本上的不相容性。

层与高阶下降。 当预层取值于范畴而非集合时，我们需要下降的范畴化概念。

定义 8 （预层与层）。 设 $(\mathcal{C}, J)$ 是一个位点。

- 在 $\mathcal{C}$ 上的预层 是一个反变伪函子（或松函子）

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat},$$

其中**Cat** 表示小范畴构成的2-范畴。更明确地说，对于 $\mathcal{C}$中的每个态射 $f\colon V \to U$，都有一个拉回函子 $f^*\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$，以及相容的自然同构$(gf)^* \simeq f^*g^*$和 $\mathrm{id}_U^* \simeq \mathrm{id}^{\mathcal{F}(U)}$。

- 给定 $J(U)$中的覆盖族 $\{f_i\colon U_i \to U\}$，下降范畴 $\mathrm{Des}(\{U_i \to U\}, \mathcal{F})$ 定义如下：

  - 一个对象由以下内容构成：

    * 对象 $X_i \in \mathcal{F}(U_i)$ （对每个 i），* 同构
    （称为粘合同构）

$$\phi_{ij} : f_{ij}^*(X_i) \xrightarrow{\sim} f_{ji}^*(X_j) \quad \textit{in } \mathcal{F}(U_i \times_U U_j),$$

    其中 $f_{ij}\colon\ U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $f_{ji}\colon\ U_i \times_U U_j \to U_j$ 是投影，并且在三重交叠上满足余循环条件：

$$f_{jk}^*(\phi_{ij}) \circ f_{ij}^*(\phi_{jk}) = f_{ik}^*(\phi_{ik}) \quad \textit{in } \mathcal{F}(U_i \times_U U_j \times_U U_k).$$

  - 下降数据 $(X_i, \phi_{ij}) \to (Y_i, \psi_{ij})$ 之间的态射是一个态射族

$$f_i : X_i \to Y_i \quad \textit{in } \mathcal{F}(U_i),$$

    使得下图在 $\mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$中交换：

$$\begin{array}{ccc} f_{ij}^*(X_i) & \xrightarrow{\phi_{ij}} & f_{ji}^*(X_j) \\ {\scriptstyle f_{ij}^*(f_i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{ji}^*(f_j)} \\ f_{ij}^*(Y_i) & \xrightarrow[\psi_{ij}]{} & f_{ji}^*(Y_j) \end{array}$$

- 若预层 $\mathcal{F}$ 对每个覆盖族 $\{U_i \to U\}$，典范函子

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathrm{Des}(\{U_i \to U\}, \mathcal{F}),$$

将对象 $X \in \mathcal{F}(U)$ 映到下降数据 $(X_i = f_i^*(X)\ \phi_{ij} =$典范$)$，是一个范畴等价，则称其为层。

直观地说，层是这样一种预层：对象和态射可以由相容的局部数据粘合而成，并且在典范同构意义下唯一。

因此，层是一种“范畴层”：对象和态射都满足下降条件。这将是我们的谱预层 $\mathcal{G}$（定义 5）的恰当概念，它为每个语境 $\mathcal{B}$ 指派其谱范畴 $\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{B}}$。

极限、余极限与重构。范畴极限和余极限为我们提供了形式语言，用以从相容的局部数据组装出全局对象。

定义 9 (极限)。设 I 为一个小范畴（称为指标范畴），并设 $D\colon I \to \mathcal{D}$ 是范畴 $\mathcal{D}$中的一个图表。D 的极限（也称为逆极限）是一个对象$\varprojlim D \in \mathcal{D}$，连同一族态射

$$\pi_i : \varprojlim D \longrightarrow D(i), \qquad i \in \mathrm{Ob}(I),$$

使得:

1. 对于 I 中的每个态射 $\alpha\colon i \to j$，图表

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim D & \xrightarrow{\quad\pi_i\quad} & D(i) \\ & {\scriptstyle \pi_j}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle D(\alpha)} & \\ & D(j) & \end{array}$$

交换，即 $D(\alpha)\circ \pi_i = \pi_j$。

2.（泛性质）对于任意配备了态射 $f_i\colon X \to D(i)$ 的对象 $X \in \mathcal{D}$，若这些态射满足对所有 I 中的态射 $\alpha\colon i \to j$，都有 $D(\alpha) \circ f_i = f_j$，则存在唯一的态射

$$u : X \to \varprojlim D$$

使得对于所有 $i \in \mathrm{Ob}(I)$，都有 $\pi_i \circ u = f_i$。

当极限存在时，它在唯一同构意义下唯一，通常记作$\varprojlim_I D$ 或$\varprojlim_{i\in I} D(i)$。

定义 10 (余极限)。对偶地，设 I 是一个小范畴，且 $D\colon I \to \mathcal{D}$ 是范畴$\mathcal{D}$中的一个图表。D 的余极限（或直接极限）是一个对象

$$\varinjlim D \in \mathcal{D}$$

以及一族态射

$$\iota_i : D(i) \longrightarrow \varinjlim D, \qquad i \in \mathrm{Ob}(I),$$

满足:

1. 对于 I中的每个态射 $\alpha\colon i \to j$，图表

$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{\quad D(\alpha)\quad} & D(j) \\ & {\scriptstyle \iota_i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \iota_j} & \\ & \varinjlim D & \end{array}$$

交换，即 $\iota_j \circ D(\alpha) = \iota_i$。

*2. (*泛性质*)* 对于任意配备有态射的对象 $X \in \mathcal{D}$

$$f_i : D(i) \to X$$

满足条件：对所有 I 中的态射 $\alpha\colon i \to j$，存在唯一的态射 $f_j \circ D(\alpha) = f_i$

$$u : \varinjlim D \to X$$

使得对于所有 $i \in \mathrm{Ob}(I)$，$u \circ \iota_i = f_i$。

当余极限存在时，它在唯一同构意义下是唯一的，通常记作 $\operatorname{colim}_I D$ 或 $\varinjlim_{i\in I} D(i)$。

在层论和算子代数背景中，极限通常编码粘合条件或一致性约束，而余极限则编码局部数据的自由生成或聚合。

在当前框架中，谱位点 $\mathcal{C}$ 为一幅交换语境及其谱数据的图表编入指标。全局对象——例如算子代数 $\mathcal{A}$ 及特定算子（T， S）——可作为该图表的（可能是同伦）极限恢复。形式上，这一重构原理由如下形式的同构表达:

$$(\mathcal{A}, T, S) \;\cong\; \varprojlim_{\mathcal{B}\in\mathcal{C}} (\mathcal{B}, T, S),$$

wh这里的极限是在一个适当的、带有指定元素的算子代数范畴中取的 s.

存在高阶相容数据时——例如范畴层的情形——普通极限可能并不足够，因此必须改为考虑同伦极限，以处理模同构意义下的下降。

概念要点：通过极限进行重构，表达了这样一个原理：非交换对象完全由其相容的交换影族所确定，从而将局部相容性蕴含全局结构这一思想形式化。

同伦增强。 为捕捉更精细的拓扑信息，我们采用这些概念的同伦精化形式。

定义 11（同伦极限与超上同调）。 设 $(\mathcal{C}, J)$ 是一个位点，并设

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

是一个谱预层。例如，可以通过对空间或范畴的预层应用稳定化函子（如无限悬挂 Σ^∞_+）得到这样的预层。

- 该同伦极限

  $$\operatorname{holim}_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \;\in\; \mathbf{Sp}$$

  是图表 $\mathcal{F}$ 的导出极限，其构造旨在保持逐对象弱等价。例如，可以将终对象在 $\mathcal{C}$ 中的某个超覆盖所产生的余单纯谱全化来计算，也可以先在适当的模型范畴中进行纤维替换，再取通常的极限。

- 该 超上同调（或 下降上同调） $\mathcal{F}$ 定义为

  $$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{F}) := \pi_{-n}\Big(\operatorname{holim}_{\mathcal{C}} \mathcal{F}\Big), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

  其中 π_k（–）表示一个谱的第 k 个稳定同伦群。

解释。同伦极限将局部谱数据组装成一个全局对象，同时保留所有高阶相容性。超上同调群 $\mathbb{H}^n$ 衡量谱数据在全局相容方面的障碍：对于 $n > 0$，非零的 $\mathbb{H}^n$ 表示存在高阶下降障碍。

注 5 (稳定与非稳定同伦极限**)**。 设 $(\mathcal{C}, J)$ 为一个位点。

1. 非稳定情形。 若 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}$ 是一个单纯集合预层（或空间预层），则其同伦极限

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} F$$

是一个空间。其同伦群 $\pi_n(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} F)$ 仅对 $n \geq 0$ 定义，并且就是通常的（非稳定）同伦群。

2. 稳定情形。 如果 $\mathbf{E}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$ 是一个谱预层，则其同伦极限

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \in \mathbf{Sp}$$

再次成为一个谱。可以考虑其所有整数次数上的稳定同伦群：

$$\pi_n(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} \mathbf{E}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

3. 与上同调的关系。 设 A 是 $(\mathcal{C}, J)$上的一个阿贝尔层，并令 HA 为其 *Eilenberg–Mac Lane* 谱（其中 $\pi_0(HA) \cong A$，且所有其他同伦群均为平凡群）。那么，对于任意整数 $k \geq 0$,

$$\pi_{-k}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} HA) \;\cong\; H^k(\mathcal{C}; A),$$

其中 $H^k(\mathcal{C}; A)$ 表示 A的普通层上同调。

更一般地，如果$\mathbf{E}$ 由空间的预层 F经稳定化得到（例如，$\mathbf{E} = \Sigma^\infty_+ F$），那么

$$\pi_{-k}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} \mathbf{E}) \;\cong\; \mathbb{H}^k(\mathcal{C}; F),$$

其中 $\mathbb{H}^k(\mathcal{C};\ F)$ 是 k 的第 k 个超上同调群。

总之，负次数同伦群会自然地出现在稳定情形中，并在特殊情况下恢复经典的（超）上同调。稳定与不稳定同伦极限之间的这一区别，阐明了何时 π_{-n} 是有意义的。

超上同调能够检测到普通层上同调可能遗漏的高阶粘合障碍。它将为我们提供最精细的不变量，用于衡量非交换性（第4节）。

解释性总结。 从这一范畴论视角来看，非交换算子代数 $\mathcal{A}$会产生：

- 一个**位点** $\mathcal{C}$，其上的对象是交换语境，覆盖反映代数生成。
- **预层**（以及预层）用于编码附加到每个语境的局部谱数据。
- **下降条件** 用于检验局部数据是否相容并粘合为全局数据。
- **上同调障碍**（H^*、 $\mathbb{H}^*$）用于衡量下降的失败程度，从而量化原有的非交换性。

该框架将非交换性的代数问题转化为下降与粘合的几何问题。基于这些基础，我们现在可以定义研究的核心对象：位点 $\mathcal{C}$ 上的谱预层 $\mathcal{G}$。

3 谱层定理

谱层定理在第3.1节中讨论。接下来，我们将在第3.2节讨论如何应用谱层定理的示例及其直接推论。

3.1 陈述与解释

定理 1 (谱层与同伦重构**)**。 设 (T, S) 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一对自伴算子，设 $\mathcal{A} = C^*(T, S)$ 是它们生成的 C^*-代数，并设 $\mathcal{C}$ 是$\mathcal{A}$ 的谱位点，定义见定义 *3*（由包含 T和 S的 $\mathcal{A}$ 的交换含幺子代数组成的范畴，并赋予其典范的格罗滕迪克拓扑）。

(i) (层结构***)*** 范畴谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$，它将每个 $C \in \mathcal{C}$映射为盖尔范德谱 $\Sigma(C)$上的谱测度范畴，是层 在$(\mathcal{C}, J)$上的层结构。也就是说，对于 $\mathcal{C}$ 中的每个覆盖 $\{C_i \hookrightarrow C\}_{i\in I}$，典范函子

$$\Phi : \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C) \longrightarrow \mathrm{Des}\big(\{C_i \to C\},\ \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}\big)$$

是范畴等价。

*(ii) (*代数重构与情境障碍*)* 存在一个典范单射 $*$-同态

$$\Phi : (\mathcal{A}, T, S) \hookrightarrow \varprojlim_{C\in\mathcal{C}} (C, T, S), \qquad \Phi(a) = (a|_C)_{C\in\mathcal{C}},$$

它将 $\mathcal{A}$ 识别为射影极限的子代数，该子代数由全局可实现的相容族构成。

此外，

$$\Phi \textit{ is an isomorphism} \quad \Longleftrightarrow \quad [T, S] = 0.$$

等价地， Φ 不满射，恰好测量了由 T和 S的非交换性所引起的上下文障碍。

(iii) （同伦不变量）*K*理论预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$（$C$）$= K$（$C$）给出 $\mathbb{Z}$-分次超上同调

$$\mathbb{H}^n_{(T,S)} := \pi_{-n}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}}),$$

这些是酉不变量；当 $[T, S] = 0$ 时，它们化约为 K_{-n}（C^*（σ（T）$\times\, \sigma$（S））），否则则能捕捉高阶情境障碍。

证明。

定理 1(i) 的证明：层结构。设 **(***T*， *S***)**、 $\mathcal{A} = C^*$**(***T*， *S***)** 和 $\mathcal{C}$ 如定理所述。我们证明范畴谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ 是 $\mathcal{C}$ 上典范格罗滕迪克拓扑的一个层。

1. 设置与下降数据。设 $\{C_i \hookrightarrow C\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个覆盖。这恰好意味着

$$C = \overline{C^*\big(\bigcup_{i\in I} C_i\big)}^{\|\cdot\|}.$$

我们必须证明典范函子

$$\Phi : \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C) \longrightarrow \mathrm{Des}\big(\{C_i \to C\},\ \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}\big)$$

是范畴等价。

回顾一下，下降范畴 Des 中的对象是一对

$$\big((X_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{i,j\in I}\big),$$

其中：

- $X_i \in \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C_i)$（$\Sigma(C_i)$ 上的谱测度），
- ϕ_{ij}：$X_i|_{C_i\cap C_j} \xrightarrow{\sim} X_j|_{C_i\cap C_j}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C_i \cap C_j)$ 中的一个同构，
- 满足 $C_i \cap C_j \cap C_k$上的余循环条件 $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$。

Des 中的态射 $(f_i) : (X_i, \phi_{ij}) \to (Y_i, \psi_{ij})$ 是一族 f_i：$X_i \to Y_i$，满足 $\psi_{ij} \circ f_i|_{C_i\cap C_j} = f_j|_{C_i\cap C_j} \circ \phi_{ij}$。

函子 Φ 将 $X \in \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$ 映射为

$$\Phi(X) = \big((X|_{C_i})_{i\in I}, (\mathrm{id}_{X|_{C_i\cap C_j}})_{i,j}\big),$$

其中 $X|_{C_i}$ 是限制，$\mathrm{id}^{X|_{C_i\cap C_j}}$ 是典范恒等同构。在态射上，$\Phi(f) = (f|_{C_i})_{i\in I}$。

2. 全忠实性。

忠实性。若 f, g：$X \to Y$满足 $\Phi(f) = \Phi(g)$，则对所有 $i \in I$都有 $f|_{C_i} = g|_{C_i}$。由于族 $\{C_i \hookrightarrow C\}$ 生成了 C 作为一个 C^*-代数，且谱测度由其限制唯一确定，因此有$f = g$。

满性。设 $(f_i) : \Phi(X) \to \Phi(Y)$ 是 Des 中的一个态射。因此，f_i：$X|_{C_i} \to Y|_{C_i}$ 是态射，且对所有 i, j，都有 $f_i|_{C_i\cap C_j} = f_j|_{C_i\cap C_j}$。由于这些语境覆盖了 C，这些局部态射可唯一地粘合为一个态射 f：$X \to Y$，并且满足 $f|_{C_i} = f_i$。因此，Φ 是全忠实的。

3. 本质满性与障碍。 我们必须证明，每个下降数据 $\big((X_i),(\phi_{ij})\big)$ 都与某个 $X \in \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$ 对应的 $\Phi(X)$ 同构。这等价于证明，局部谱测度X_i 可以粘合为定义在 C 上的全局谱测度。

3.1. 投影值测度。每个 X_i 都是定义在 $\Sigma(C_i)$ 上的谱（投影值）测度：

$$X_i : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(C_i),$$

其中 $\mathcal{P}(C_i)$ 是 C_i'' 中正交投影构成的格，满足通常的测度公理 .

3.2. 粘合问题。固定一个博雷尔集 $U \subseteq \mathbb{R}$，并令 $P_i(U) := X_i(U) \in \mathcal{P}(C_i)$。相容同构 ϕ_{ij} 确保

$$P_i(U)|_{C_i\cap C_j} = P_j(U)|_{C_i\cap C_j} \qquad (\forall i, j).$$

因此 $\{P_i(U)\}$ 构成覆盖 $\{C_i\}$ 上的相容投影族。

3.3. 障碍。尽管 $\{C_i\}$ 生成了作为 C^*-代数的 C，但相容族 $\{P_i(U)\}$ 通常并不能来自全局投影 $P(U) \in \mathcal{P}(C)$。这是因为投影格 $\mathcal{P}(C)$ 是正交模的，而每个 $\mathcal{P}(C_i)$都是布尔格；布尔格无法粘合成正交模格。

等价地，赋值 $U \mapsto \{P_i(U)\}$ 定义了一个语境化的谱数据，它在每个 C_i 上局部满足谱测度公理，但可能无法组装成 C 上的全局谱测度。

3.4. 下降理论解释。下降数据有效，当且仅当对于每个博雷尔集 U，相容族 $\{P_i(U)\}$能够粘合为投影 $P(U) \in \mathcal{P}(C)$，且 $U \mapsto P(U)$ 是一个谱测度。当且仅当每个下降数据都有效时，函子 Φ 才是本质满的。

本质满性可能失效的情形，正是栈条件的具体内容：$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 是一个栈，而不是一个层，因为局部数据（下降数据）并不总能粘合为全局数据。这种无法粘合的现象由定理第 (iii) 部分提到的上同调群 $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 加以量化。

3.5. 交换情形。如果 C 是交换的（等价地，$[T, S] = 0$），那么所有 $\mathcal{P}(C_i)$ 都是布尔代数 $\mathcal{P}(C)$ 的布尔子代数。在这种情况下，相容族 $\{P_i(U)\}$ 会唯一地粘合为

投影 $P(U) \in \mathcal{P}(C)$，而 $U \mapsto P(U)$ 是谱测度。因此，每个下降数据都是有效的，并且 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 归结为一个层。

3.6. 下降数据的有效性。 下降数据 $\big((X_i),\ (\phi_{ij})\big)$ 是有效的，当且仅当投影族$\{X_i(U)\}$可以粘合成一个投影 $P(U) \in \mathcal{P}(C)$，对每个 博雷尔集 $U \subseteq \mathbb{R}$都成立，并且赋值$U \mapsto P(U)$满足：

1. $P(\varnothing) = 0, P(\mathbb{R}) = 1$,
2. $P(U \cap V) = P(U)P(V)$,
3. 弱算子拓扑中的 σ-可加性。

当这些条件成立时，由 $X(U) = P(U)$定义的全局谱测度 X满足 $\Phi(X) \cong\big((X_i),\ (\phi_{ij})\big)$。因此， Φ 在有效下降数据的满子范畴上本质满。

4. 叠公理的验证。

4.1. 谱位点中的拉回。由于 $\mathcal{C}$ 是偏序集（ C^*-子代数的包含关系），$C_i \to C \leftarrow C_j$ 的拉回就是它们的交 $C_i \cap C_j$。因此图表

$$\begin{array}{ccc} C_i \cap C_j & \hookrightarrow & C_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_j & \hookrightarrow & C \end{array}$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个拉回。

4.2. 谱的相干性。应用 Gelfand 谱函子 Σ （它是逆变的）得到紧豪斯多夫空间的一个推出图：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(C_i) \times_{\Sigma(C)} \Sigma(C_j) & \longrightarrow & \Sigma(C_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(C_j) & \longrightarrow & \Sigma(C) \end{array}$$

其中纤维积为

$$\Sigma(C_i) \times_{\Sigma(C)} \Sigma(C_j) = \{(\chi_i, \chi_j) \mid \chi_i|_C = \chi_j|_C\}.$$

存在自然同构 $\Sigma(C_i \cap C_j) \cong \Sigma(C_i) \times_{\Sigma(C)} \Sigma(C_j)$，因为 $C_i \cap C_j$ 上的一个特征可以唯一延拓为 C_i 和 C_j 上的一对相容特征。

4.3. 高阶交的下降。对于三重交，我们有

$$\Sigma(C_i \cap C_j \cap C_k) \cong \Sigma(C_i) \times_{\Sigma(C)} \Sigma(C_j) \times_{\Sigma(C)} \Sigma(C_k).$$

相容同构 ϕ_{ij} 由这些泛同构诱导，因此自动满足 $C_i \cap C_j \cap C_k$上的余循环条件 $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$。

4.4. 栈条件。我们已经证明：

- Φ 是全忠实的（步骤 2），
- Φ 的本质像恰好由有效下降数据构成（步骤 3），
- 下降数据是一致的（步骤 4.3）。

因此， $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 满足 $\mathcal{C}$ 中覆盖的下降条件，也就是说，它是 $(\mathcal{C}, J)$ 上的层。

定理 1(ii) 的证明：代数重构与情境障碍 .

设 (T, S) 如定理所述， $\mathcal{A} = C^*(T, S)$，且 $\mathcal{C}$ 谱位点。

1. 射影极限的构造。

考虑交换 C^*-代数的图表

$$\{C\}_{C\in\mathcal{C}}, \qquad C_1 \hookrightarrow C_2 \text{ when } C_1 \subseteq C_2.$$

C^*-代数范畴中的射影极限存在，且由下式给出

$$\varprojlim_{C\in\mathcal{C}} C = \Big\{ (a_C)_{C\in\mathcal{C}} \in \prod_{C\in\mathcal{C}} C \;\Big|\; a_{C_1} = a_{C_2}|_{C_1} \text{ for all } C_1 \subseteq C_2 \Big\},$$

配备逐分量运算和范数 $\|(a_C)\| = \sup_{C\in\mathcal{C}} \|a_C\|$。

2. 典范映射 Φ。

定义 Φ： $\mathcal{A} \to \lim_{\longleftarrow C\in\mathcal{C}} C$，其中

$$\Phi(a) = (a|_C)_{C\in\mathcal{C}},$$

其中， $a|_C$ 表示视为子代数 C 中的元素 a。这是一个幺正 $*$-同态，因为每个限制映射 $a \mapsto a|_C$ 都是一个 $*$-同态。

3. Φ的单射性。

假设 $\Phi(a) = 0$，即对于每个 $C \in \mathcal{C}$，都有 $a|_C = 0$。我们证明 $a = 0$。由于 $\mathcal{A} = C^*(T, S)$ 由 T 和 S 生成，只需证明每个定义在 $\mathcal{A}$ 上的态 φ 在 a 上都为零。

对于任意态 φ，考虑 GNS 表示 π_φ： $\mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_\varphi)$，其循环向量为 ξ_φ。令 $C_\varphi = C^*(\pi_\varphi(T), \pi_\varphi(S))$ 为 $B(\mathcal{H}_\varphi)$ 中由 $\pi_\varphi(T)$ 和 $\pi_\varphi(S)$ 生成的交换 C^*-代数。根据函数演算，存在一个包含 T, S 的交换 C^*-子代数 $C \subseteq \mathcal{A}$，使得 $\pi_\varphi(C) \cong C_\varphi$。

由于根据假设 $a|_C = 0$，在此表示中有 $\pi_\varphi(a) = 0$。因此 $\varphi(a) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle = 0$。由于态能够区分 C^*-代数中的点，我们得出 $a = 0$。因此 Φ 是单射的。

4. 满射性的刻画。

我们证明以下等价关系：

$$\Phi \text{ is surjective } \iff [T, S] = 0.$$

($\Leftarrow$) 若 $[T, S] = 0$，则 $\mathcal{A} = C^*(T, S)$是交换的。在这种情况下， $\mathcal{A}$ 本身属于 $\mathcal{C}$，且是一个终对象：对于每个 $C \in \mathcal{C}$，都有 $C \subseteq \mathcal{A}$。因此，射影极限可化简为在此终对象处求值：

$$\varprojlim_{C\in\mathcal{C}} C \cong \mathcal{A},$$

并且 Φ 成为一个同构。

($\Rightarrow$) 假设 Φ 是满射的。我们证明 T 与 S 交换。对于每个 $C \in \mathcal{C}$，元素 $T|_C$ 与 $S|_C$交换，因为 C 是交换的。极限中的一个相容族$(a_C)_{C\in\mathcal{C}}$ 由其在任意一个包含 T和 S的极大交换子代数上的取值所确定。由于 Φ 是满射的，存在 $a \in \mathcal{A}$使得$\Phi(a) = (T|_C)_C$。但是 $\Phi(T) = (T|_C)_C$，因此由单射性可得 $a = T$。类似地， $\Phi(S) = (S|_C)_C$。现在考虑元素 $[T, S] = TS - ST \in \mathcal{A}$。对于每个 $C \in \mathcal{C}$，

$$[T, S]|_C = T|_C\, S|_C - S|_C\, T|_C = 0,$$

bec因为 $T|_C$和 $S|_C$在 C中交换。因此 $\Phi([T, S]) = 0$，并由单射性可得 $[T, S] = 0$。

5. 作为情境障碍的解释。

Φ 的像恰好由那些相容族 $(a_C)_{C\in\mathcal{C}}$ 构成，它们是全局可实现的：存在一个元素 $a \in \mathcal{A}$，使得对所有 C都有 $a|_C = a_C$。当 $[T,S] \neq 0$时，存在一些无法全局实现的相容族。这类族表示语境性可观测量：它们在每个经典语境中都有一致的定义，但无法组合成单一的量子可观测量。

因此，商

$$\varprojlim_{C\in\mathcal{C}} C \;/\; \Phi(\mathcal{A})$$

测度了由 T 与 S的非交换性所产生的情境障碍。当且仅当 T 与 S 交换时，此障碍才消失；也就是说，此量子系统具有单一的经典描述。

6. 证明的完成。

我们已经证明：

1. $\Phi:\ \mathcal{A} \hookrightarrow \lim_{\longleftarrow C\in\mathcal{C}} C$ 是一个单射的 $*$-同态。
2. Φ 是同构，当且仅当 $[T,S]=0$。
3. 当 $[T,S] \neq 0$ 时满射性的缺失，恰好体现了对 $(T,\ S)$ 中固有的情境障碍。

这就证明了该定理的 (ii) 部分。

定理1(iii)的证明：同伦不变量。

设 $(T,\ S)$、$\mathcal{A} = C^*(T,\ S)$ 和 $\mathcal{C}$ 如定理中所述。

1. 稳定谱预层的构造。

对于每个交换上下文 $C \in \mathcal{C}$，定义谱 K 理论预层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) := \mathrm{Map}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma(C), \mathrm{ku}),$$

其中：

- $\Sigma(C)$ 是 C 的盖尔范德谱（一个紧豪斯多夫空间），
- ku 是连通复 K 理论谱，
- $\mathrm{Maps_p}(-,-)$ 表示谱的稳定 ∞-范畴中的映射谱。

对于一个包含 $\iota:\ C_1 \hookrightarrow C_2$，盖尔范德谱上的诱导限制映射 $\Sigma(\iota):\ \Sigma(C_2) \twoheadrightarrow \Sigma(C_1)$ 给出一个谱映射

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(\iota) : \mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C_2) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C_1), \quad f \mapsto f \circ \Sigma(\iota).$$

因此 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}:\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$是一个定义良好的预层。

2. 同伦极限与超上同调群。

定义谱同伦极限

$$\mathcal{X}_{(T,S)} := \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}} \in \mathbf{Sp}$$

以及相应的谱超上同调群

$$\mathbb{H}^n_{(T,S)} := \pi_{-n}(\mathcal{X}_{(T,S)}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

3. 算子对在自然等价下的不变性。

3.1. 酉不变性。若 U是满足 $T' = UTU^*$ 和 $S' = USU^*$ 的酉算子，则由 U 的共轭作用诱导：

• 一个 $*$-同构 φ_U： $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}'$,

•偏序集的同构 Φ_U: $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}', C \mapsto UCU^*$,

•对每个 $C \in \mathcal{C}$，都有一个同胚 $\Sigma(C) \xrightarrow{\sim} \Sigma(UCU^*)$.

由此得到图表的一个自然等价

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} \circ \Phi_U^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{G}'_{\mathrm{st}},$$

因此 $\mathcal{X}_{(T,S)} \simeq \mathcal{X}_{(T',S')}$ 以及 $\mathbb{H}^n_{(T,S)} \cong \mathbb{H}^n_{(T',S')}$.

3.2. 近似酉不变性。设 (T_n, S_n) 是一列算子对，其中 $\|T_n - T\| \to 0, \|S_n - S\| \to 0$，且每个 (T_n, S_n) 都与 (T', S') 酉等价。由 C^*-范数的连续性可知， $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$在连续场代数的意义下成立。

谱位点 $\mathcal{C}_n$ 收敛到 $\mathcal{C}$，相对于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的子集在 Hausdorff 距离下收敛；图表 $\mathcal{G}^{(n)}{}_{\mathrm{st}}$逐点收敛到 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$。由于谱中的同伦极限与滤过余极限交换,

$$\varinjlim_n \mathcal{X}_{(T_n,S_n)} \simeq \mathcal{X}_{(T,S)},$$

因此可通过近似酉等价 $\mathbb{H}^n_{(T,S)} \cong \mathbb{H}^n_{(T',S')}$。

3.3. $*$-同构不变性。设 φ: $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}'$ 是一个 $*$-同构，满足 $\varphi(T) = T', \varphi(S) = S'$。于是 φ 诱导一个同构 Φ_φ： $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$，并且对于每个 $C \in \mathcal{C}$，限制映射 $\varphi|_C$： $C \xrightarrow{\sim} \varphi(C)$ 诱导一个同胚 $\Sigma(C) \xrightarrow{\sim} \Sigma(\varphi(C))$。因此 $\mathcal{X}_{(T,S)} \simeq \mathcal{X}_{(T',S')}$。

3.4. Morita 不变性。假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 通过等价双模 X Morita 等价，且该双模以如下意义交织这些算子：存在 T, S 和 T', S' 的相容作用。于是根据 C^*-代数的 Eilenberg-Watts 定理，表示范畴之间存在强 Morita 等价。

对于交换子代数 $C \subseteq \mathcal{A}$，Morita 等价诱导出对应 $C \leftrightarrow C'$，其谱同胚于 $\Sigma(C) \simeq \Sigma(C')$。更确切地说，若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 强 Morita 等价，则它们的本原理想空间同胚，且此同胚限制在相应交换子代数的谱上。

C因此，图表 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 和 $\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}$ 自然等价，并且 $\mathbb{H}^n_{(T,S)} \cong \mathbb{H}^n_{(T',S')}$。

4. 与交换性的关系。

4.1. 交换情形（$[T, S] = 0$）。当 T 和 S 交换时， $\mathcal{A} = C^*(T, S)$ 是交换的。令 $X = \sigma(T) \times \sigma(S)$ 为它们的联合谱，则 $\mathcal{A} \cong C(X)$。

对于 K 理论预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) = K(C)$，我们利用这样一个事实：对于交换的 C^*-代数， $K(C) \simeq$Map$(\Sigma(C)\ \mathbb{K})$, 其中 $\mathbb{K}$ 是非连通 K 理论谱（Bousfield-Friedlander定理）。更具体地说， $\widetilde{K}_{-n}) \cong K^{-n}(\Sigma(C))$。

由于 $\mathcal{A} \cong C(X)$ 是包含所有其他交换子代数的极大交换子代数，因此图表 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 在同伦范畴中有一个终对象 $\mathcal{A}$。对于任意图表 F: $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$，只要它有一个终对象 C_0，典范映射 $F(C_0) \to \mathrm{holim}_{\mathcal{C}} F$ 就是弱等价。将此结论应用于 $C_0 = \mathcal{A}$，得到:

$$\mathcal{X}_{(T,S)} = \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}} \simeq \mathcal{G}_{\mathrm{st}}(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) \simeq K(C(X)).$$

因此,

$$\mathbb{H}^n_{(T,S)} = \pi_{-n}(\mathcal{X}_{(T,S)}) \cong \pi_{-n}(K(C(X))) = K_{-n}(C(X)).$$

当 X 是有限维时（例如， T， S 有限维）， $C(X) \cong \mathbb{C}^k$ 对某个 k 成立，并且

$$K_{-n}(\mathbb{C}^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^k & n \text{ even}, \\ 0 & n \text{ odd}. \end{cases}$$

因此， $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$ 的周期为 2。

4.2. 非交换情形（$[T,S]\neq 0$）。当 T和 S不交换时，存在一个非平凡的比较映射

$$c:\mathrm{Map}(\mathrm{Prim}(\mathcal{A}),\mathrm{ku})\longrightarrow \mathcal{X}_{(T,S)},$$

其中，Prim($\mathcal{A}$) 是 $\mathcal{A}$的本原理想空间。同伦纤维 fib(c) 衡量了同伦情境性：将局部谱粘合为全局非交换谱数据的障碍。

在此情形下， $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$ 对 $n>0$ 可以非零，从而编码高阶粘合障碍。例如，当 $[T,S]=i\hbar I$（正则对易关系）时，可得到 $\mathbb{H}^1_{(T,S)}\cong\mathbb{Z}$，这对应于 Weyl代数的非平凡 Dixmier-Douady 类。

5. 示例与计算。

5.1. 有限维矩阵。对于 T， $S\in M_n(\mathbb{C})$，每个 $C\in\mathcal{C}$ 都同构于某个 $k\le n$的 $\mathbb{C}^k$，其中 $\Sigma(C)$ 是一个离散的 k点空间。于是， $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C)\ \simeq \mathrm{ku}^{\times k}$，该图表编码了 T和 S的不同对角化之间的相容性。同伦极限可以通过一个由 ku 的乘积构成的有限图表来计算，从而得到有限生成阿贝尔群 $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$。

5.2. 正则反对易关系。对于由满足 $\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=2\eta_{ij}$的自伴算子 $\{\gamma_i\}$ 生成的克利福德代数 Cliff(p， q)，谱位点 $\mathcal{C}$ 由 $\{\gamma_i\}$的交换子集所生成的极大交换子代数组成。每个 $\Sigma(C)$ 都是有限集合，而图表 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 编码了自旋结构。由此可得$\mathbb{H}^0_{(T,S)}\cong\mathbb{Z}_2$，它刻画了旋量的 $\mathbb{Z}_2$分级。

5.3. 几乎交换算子。对于满足 $\|[T,S]\|<\varepsilon$的算子，这些不变量在交换情形与非交换情形之间起到插值作用。当 $\varepsilon\to 0$时， $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$ 收敛到联合谱的 K上同调，且收敛速率由 ε控制。

6. 结论：同伦不变量。

我们已经证明，谱超上同调群 $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$:

1. 是良定义的 $\mathbb{Z}$-分次阿贝尔群，

2. 在以下变换下保持不变：酉等价、近似酉等价、 $*$-同构以及 Morita 等价；当 $[T,S]=0$ 时，归约为联合谱的 K上同调；当 $[T,S]\neq 0$ 时，捕捉高阶障碍，

3. 可通过具体示例计算，并且对 T 与 S 之间的代数关系敏感。

因此，$\{\mathbb{H}^n_{(T,S)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成了对 (T， S) 这一对的完备同伦不变量集，从而确立了定理的 (iii) 部分。

□

注 6 (非交换算子的几何视角)。 定理 *1* 通过三个互补的数学视角来诠释一对自伴算子（T、 S）：

- 栈论视角 （第 *(i)* 部分）： 范畴谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 编码了局部谱数据无法组装成全局谱测度这一失败。当 $[T,S]\neq 0$、 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 是一个非平凡叠时，存在无法粘合为全局对象的下降数据，这反映了非对易可观测量固有的 *Kochen-Specker* 上下文性。

- 算子代数视角 （第二部分）： 典范嵌入 $\Phi:\ \mathcal{A}\hookrightarrow\lim_{\longleftarrow C\in\mathcal{C}}C$ 展示了$\mathcal{A}$ 作为经典可观测量的全局一致族所构成的代数。当 $[T,S]=0$ 时，每个一致族都来自 $\mathcal{A}$ 中的单个元素；当 $[T,S]\neq 0$ 时，则存在局部一致但缺乏全局实现的族，它们刻画了这一对的代数情境性。

• 同伦论视角（第三部分）：*K*理论预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 给出 $\mathbb{Z}$-分次超上同调群 $\mathbb{H}^n_{(T,S)} = \pi_{-n}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$。这些群提供了稳定不变量，可进一步细化代数障碍：

– 当 $[T,S]=0$, $\mathbb{H}^n_{(T,S)} \cong K_{-n}(C(\sigma(T)\times\sigma(S)))$（联合谱的 *K* 理论）。– 当 $[T,S]\neq 0$ 时，群 $\mathbb{H}^n_{(T,S)}$ 针对 $n>0$ 刻画了粘合局部*K*理论数据时的高阶障碍，其中 $\mathbb{H}^0$ 则编码了局部谱上向量丛的一致族。

这三种视角彼此相关，但并非简单的层级关系：$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 并非 以任何直接明了的方式通过神经和稳定化从 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 得到。相反，$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 捕捉稳定同伦信息（*K*理论），而 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 捕捉范畴信息（谱测度）。二者都反映了同一几何实在的不同侧面：非交换算子无法同时对角化。

本质上，定理 *1*(i)–(iii)逐步量化了非交换性的几何代价，从范畴层面（叠式下降）经由代数层面（极限嵌入）直至同伦层面（超上同调）。

下面的推论 1 用于给出同伦不变量的性质。

推论 1（同伦不变量的性质）。超上同调群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 满足：

（*a*）（交换情形下的约化）若 $[T,S]=0$，则 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \cong K_{-n}(C(\sigma(T)\times\sigma(S)))$ 对所有$n\in\mathbb{Z}$均成立。

（*b*）（语境性的检测）

（*i*）若（T,S）呈现 *Kochen–Specker*语境性，则 $\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})\neq 0$。（*ii*）若联合谱 $\sigma(T)\times\sigma(S)$ 是可缩的，且 $\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})\neq 0$，则（$T,S$）呈现 *Kochen–Specker*语境性。

特别地，当 $\sigma(T)\times\sigma(S)$ 是可缩的时，$\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})\neq 0$ 当且仅当（T,S）是 *Kochen–Specker*语境性的。

(c)（分次障碍理论）对于 $n\geq 1$，超上同调群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 包含为 （T,S）构造全局谱测度时的第 $(n-1)$ 阶同伦障碍。

(d)（函子性）若 $\phi:(T,S)\to(T',S')$ 是一个交织这些算子的 $*$-同态，则它诱导态射 $\phi_*:\ \mathbb{H}^n(\mathcal{C}';\ \mathcal{G}'_{\mathrm{st}})\to\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$（反变函子性）。

推论 *1* 的证明。我们将证明定理 1(iii) 中定义的超上同调群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 的每一项性质。

(a) 交换情形下的消失。

我们证明，若 $[T,S]=0$，则

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \ \cong\ K_{-n}(C(\sigma(T)\times\sigma(S))) \quad \text{for all } n\in\mathbb{Z}.$$

步骤 1：交换情形。若 $[T,S]=0$，则 C^*-代数 $\mathcal{A}=C^*(T,\ S)$ 是交换的。由联合函数演算，

$$\mathcal{A}\ \cong\ C(X), \qquad X:=\sigma(T)\times\sigma(S).$$

由于 $\mathcal{A}$ 是交换的，并且包含 T 和 S，因此它是谱位点 $\mathcal{C}$中的一个对象。

步骤 2：谱位点中的终对象。对于每个 $C \in \mathcal{C}$，都存在唯一的包含关系

$$C \hookrightarrow \mathcal{A}$$

在 $\mathcal{C}$ 中。因此， $\mathcal{A}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的终对象 。

步骤 3：对终对象取同伦极限。设

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}, \qquad \mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) = K(C).$$

对于以具有终对象的范畴为指标的任意谱图表，同伦极限与该终对象处的值弱等价。因此，

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, K(C) \;\simeq\; K(\mathcal{A}).$$

步骤 4：过渡到同伦群。根据定义，

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \;:=\; \pi_{-n}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, K(C))\,.$$

利用上述等价，我们得到

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \;\cong\; \pi_{-n}(K(\mathcal{A})) \;=\; K_{-n}(\mathcal{A}).$$

由于 $\mathcal{A} \cong C(\sigma(T) \times \sigma(S))$，结论成立。

（b）通过 $\mathbb{H}^1$检测语境性。

令 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{A} = C^*$的含单位元的幺交换 C^*子代数偏序集，其中包含单位元，并令 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) = K(C)$为 K理论的谱值预层。

正向蕴含。 假设对(T, S)具有 Kochen–Specker 情境性，即相应的谱预层 Σ 在 $\mathcal{C}$ 上没有全局截面。根据量子理论拓扑斯论表述中的标准结果，不存在全局截面意味着局部经典数据之间存在非平凡的高阶相容性障碍。这类障碍可由在 $\mathcal{C}$上的导出极限检测。

考虑与图表 $C \mapsto K(C)$相关的同伦极限谱序列：

$$E_2^{p,q} = \lim_{\mathcal{C}}^{(p)} K_{-q}(C) \implies \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}).$$

语境性意味着逆系统 $\{K_1(C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ 不存在全局相容的选择，因此 $\lim_{\mathcal{C}}^{(1)} K_0(C)$ 或 $\lim_{\mathcal{C}} K_1(C)$ 非零。由此， E_2页在总次数 1 上包含非平凡贡献，因此

$$\mathbb{H}^1(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \neq 0.$$

逆向蕴含（在可缩性假设下）。假设联合谱 $X = \sigma(T) \times \sigma(S)$是可缩的，并且

$$\mathbb{H}^1(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \neq 0.$$

反设 T与 S 交换。则 $\mathcal{A} = C^*(T,\ S)$ 是一个交换 C^*-代数，并且$\mathcal{A} \cong C(X)$。根据 (a) 部分，我们有一个典范同构

$$\mathbb{H}^1(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \;\cong\; K_1(C(X)).$$

由于 X 是可缩的， $K_1(C(X)) = 0$，从而得到矛盾。因此 $[T, S] \neq 0$。

根据科亨–施佩克定理，对于非对易可观测量，其相应的谱预层不含全局截面，这是一个标准推论。因此，$(T,\ S)$ 具有 Kochen–Specker 情境性。

(c) 分次障碍理论。

对于 $n \geq 1$，群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 控制着从局部交换数据构造相干全局谱对象时所遇到的高阶障碍。利用谱预层的 Postnikov 塔，可以将这一点精确表述。

1. K-理论预层的 Postnikov 塔。

设 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) = K(C)$。对于每个 $n \geq 0$，记 $\tau_{\leq n}K(-)$ 为谱预层$K(-)$ 的 n-截断。存在预层的同伦纤维列

$$\tau_{\leq n}K(-) \longrightarrow \tau_{\leq n-1}K(-) \longrightarrow \Sigma^{n+1}H(K_n(-)),$$

其中，$H(K_n(-))$ 表示与阿贝尔预层 $K_n(-)$ 相关联的埃伦伯格–麦克莱恩预层。

2. 通过同伦极限的障碍理论。

应用 $\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}$ 可得到一个谱塔

$$\cdots \to \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \tau_{\leq n}K(-) \to \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \tau_{\leq n-1}K(-) \to \cdots .$$

给定一个类

$$x \in \pi_0(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \tau_{\leq n-1}K(-))\,,$$

将其提升到第 x 阶段的障碍 n位于

$$\pi_0\big(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \Sigma^{n+1}H(K_n(-))\big) \cong \pi_{-(n+1)}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, H(K_n(-)))\,.$$

根据阿贝尔群预层的超上同调定义，该群在规范意义下同构于

$$\mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{C}; K_n(-)).$$

3. 与 $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 的关系。

Bousfield–Kan 下降谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}; \pi_{-q}\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$$

表明障碍群

$$H^{n+1}(\mathcal{C}; \pi_n\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \ \cong\ \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{C}; K_n(-))$$

表现为 $\mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 的一个子商。

因此，对于每个 m，群 $\mathbb{H}^m(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 都带有一个有限滤过，其伴随分次分量编码了存在全局谱测度所面临的连续同伦障碍类。

4. 对谱测度的解释。

在稳定化下，局部谱测度产生局部 K-理论类。上述障碍理论表明：

- $\mathbb{H}^1$ 检测全局谱测度存在性的首要障碍（Kochen–Specker语境性）；
- $\mathbb{H}^2$ 检测同伦相干粘合的次级障碍；
- 高阶 $\mathbb{H}^n$ 检测高阶相干性障碍。

因此，分次族 $\{\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})\}_{n\geq 1}$ 构成了一种分次同伦障碍理论，用于从局部交换上下文重新构造全局谱测度。

（d）函子性。

设 $\phi\colon(\mathcal{A},\ T,\ S)\to(\mathcal{A}',\ T',\ S')$ 是一个含幺 $*$-同态，满足 $\phi(T)=T'$ 且 $\phi(S)=S'$。我们证明，ϕ 在超上同调群 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}';\mathcal{G}'_{\mathrm{st}})\to\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 上诱导反变映射。

步骤 1：谱位点上的诱导函子。设 $\mathcal{C}$（分别为 $\mathcal{C}'$）是由包含关系排序的、包含 $T,\ S$（分别为 $T',\ S'$）的 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{A}'$）的含幺交换 C^*-子代数构成的偏序集。对于每个 $C\in\mathcal{C}$，像 $\phi(C)\subseteq\mathcal{A}'$ 是交换的且包含 $T',\ S'$，因此 $\phi(C)\in\mathcal{C}'$。保持包含关系的性质$C_1\subseteq C_2\implies\phi(C_1)\subseteq\phi(C_2)$定义了一个偏序集函子

$$\Phi:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}',\quad C\mapsto\phi(C).$$

步骤 2：盖尔范德谱上的反变映射。对于每个 $C\in\mathcal{C}$，限制映射 $\phi|_C:\ C\to\phi(C)$ 是交换 C^*-代数之间的含幺 $*$-同态。根据盖尔范德对偶，它在谱上诱导出一个方向相反的连续映射：

$$\Sigma(\phi|_C):\Sigma(\phi(C))\longrightarrow\Sigma(C),\qquad\chi\mapsto\chi\circ\phi|_C.$$

步骤 3：谱预层的自然变换。应用悬挂谱函子 Σ^∞_+，得到一个谱态射

$$\Sigma^\infty_+\Sigma(\phi(C))\longrightarrow\Sigma^\infty_+\Sigma(C),$$

对于每个 $C\in\mathcal{C}$，这些态射组成一个自然变换

$$\phi^\sharp:\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}\circ\Phi^{\mathrm{op}}\Longrightarrow\mathcal{G}_{\mathrm{st}}.$$

它属于函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Sp})$。

步骤 4：同伦极限上的诱导映射。同伦极限关于图表的自然变换具有反变函子性。将此应用于 $\phi^\sharp$，得到一个映射

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}\circ\Phi^{\mathrm{op}})\longrightarrow\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{G}_{\mathrm{st}}.$$

步骤 5：沿着 Φ进行限制。与函子 Φ 复合，得到一个典范映射 p

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}'}\,\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}\longrightarrow\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}\circ\Phi^{\mathrm{op}}),$$

始终定义良好 。与步骤 4 中的映射复合后，得到谱 a

$$\phi_*:\mathrm{holim}_{\mathcal{C}'}\,\mathcal{G}'_{\mathrm{st}}\longrightarrow\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{G}_{\mathrm{st}}.$$

第6步：超上同调上的诱导映射。根据定义，

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}):=\pi_{-n}\,\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{G}_{\mathrm{st}},$$

因此，取同伦群可得

$$\phi_*:\mathbb{H}^n(\mathcal{C}';\mathcal{G}'_{\mathrm{st}})\longrightarrow\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}),\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

步骤 7：自然性。 - 若 ϕ 是同构，则 Φ 是范畴等价，且每个$\Sigma(\phi|_C)$都是同胚。因此， $\phi^\sharp$ 是自然弱等价，而 ϕ_* 是同构。- 对于可复合的 $*$-同态 ϕ 和 ψ，有 $(\psi \circ \phi)_* = \phi_* \circ \psi_*$。

结论。 该构造定义了一个反变函子

$$(T, S) \longmapsto \mathbb{H}^*(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$$

它从带有交织 $*$-同态的算子对范畴映至 $\mathbb{Z}$-分次阿贝尔群范畴。

□

注 7。 本文始终采用约定 $\mathbb{H}^n = \pi_{-n}(\operatorname{holim} K(C))$。根据 *Bott* 周期性，$K_{-1} \cong K_1$，因此在交换情形下不会产生歧义。

3.2 示例与直接推论

We 下面将给出两个示例，以说明定理 1 和推论 1 的应用。

Ex例 5 （泡利矩阵作为最小情境系统）。 考虑泡利矩阵 *s*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

作用于 $\mathbb{C}^2$，并满足 $[X, Z] = -2iY \neq 0$。令 $\mathcal{A} = C^*(X, Z) \cong M_2(\mathbb{C})$。

(i) **(**谱位点**)**。 谱位点 $\mathcal{C}$ 由 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C^*-子代数组成，这些子代数由单个自伴算子生成。它们恰好是极大阿贝尔子代数

$$C_\theta := C^*(\cos\theta\, X + \sin\theta\, Z), \qquad \theta \in [0, \pi),$$

每个都与 $\mathbb{C}^2$ $*$-同构。特别地，

$$C_0 = C^*(Z), \qquad C_{\pi/2} = C^*(X).$$

每个 C_θ 的盖尔范德谱都是一个含两个点的离散空间 $\Sigma(C_\theta) = \{-1, 1\}$。没有交换子代数同时包含 X 和 Z，因此 $\mathcal{C}$ 没有终对象。这反映了单一经典语境无法编码 (X, Z) 的联合行为。

(ii) **(**类栈行为**)**。 范畴谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ 将每个语境 C_θ 映射到其两点谱上的谱数据范畴（测度或等价的表示）。

联系不同语境的酉算子——例如交换 X 和 Z 特征基的哈达玛酉算子——只能确定到一个符号。这种 $\mathbb{Z}/2$ 歧义妨碍了不同语境之间局部谱数据的严格识别。因此，局部数据的相容族无法唯一粘合，而 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 表现出真正的类栈行为，而非层的行为。

(iii) **(**同伦不变量**)**。稳定化谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$ 为每个语境C_θ 赋予悬挂谱 $\Sigma^\infty_+\Sigma(C_\theta) \simeq \Sigma^\infty_+(\{-1, 1\}) \simeq S^0 \vee S^0$。同伦极限

$$\operatorname{holim}_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_{\mathrm{st}}$$

编码了全局相容的谱数据所面临的障碍。

在此有限维情形下， $\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 是非平凡的，揭示了一个取值于 $\mathbb{Z}/2$的同伦障-碍，它源于 X 与 Z的非交换性。注意：二维情形下不会出现经典 Kochen–Specker 情境性，因此该不变量捕捉的是最小的同伦障碍，而非完整的 KS 矛盾。

这为推论 *1(b)* 和 *(c)* 提供了一个最简的有限维例证，其中非交换性已足以产生一个非平凡的首个同伦不变量。

因此，即使在最简单的非交换量子系统中，定理 *1* 也揭示了谱位点上的非平凡层结构和同伦障碍，预示着更高维系统中出现的更丰富的语境现象。

例 6（叶化群胚：一个启发性案例）。 设 M 是一个配备了余维为 q的叶化 $\mathcal{F}$ 的紧致光滑流形。考虑 $\mathcal{F}$ 的整体群胚 G 及其约化 C^*-代数$\mathcal{A} = C_r^*(G)$， 它编码了叶化 *[3]*的横向动力学。

尽管将定理 *1* 全面而严格地应用于叶化 C^*-代数需要大量技术性发展，但这一情形为谱栈框架提供了有力的动机，并揭示了非交换几何、叶化理论与同伦代数之间可能存在的深刻联系。

(i)（谱位点的直观理解）。可以预期，谱位点 $\mathcal{C}$ 由与完备横截面 T自然关联的交换 C^*子代数组成。对于每个完备横截面 T，代数 $C_0(T)$以尊重群胚结构的方式嵌入到 $C_r^*(G)$ 中。

不同的横截面会产生无法同时嵌入同一个更大的交换子代数中的交换子代数，这反映了非平凡的整体性。除非叶化是一个纤维化（具有平凡整体性），否则位点 $\mathcal{C}$ 没有终对象，这说明不存在全局交换描述。

关键点：这表明如何将横向几何编码在谱位点中，从而为定理 *1(ii)*提供几何对应。

(ii)（层结构理念）。范畴谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 将每个横截面 T映射到其上谱测度所成的范畴。整体变换 $h\colon T \to T'$是沿叶的局部微分同胚，它们为不同横截面上的谱数据提供识别。这些识别仅在整体等价意义下满足余循环条件，因此局部谱数据只能在这些变换意义下粘合，使得 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 成为一个真正的层，而非一个层。这种层结构的非平凡性衡量了叶化偏离纤维化的程度。

(iii)（同伦层面的预期）。稳定化谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 为每个横截面赋予 $\Sigma_+^\infty T$。同伦极限 $\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 编码了全纯沿袭下的相容性。

这为特征类提供了一个同伦接收体。对于余维一叶状结构， $\mathbb{H}^2(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \otimes \mathbb{R}$ 中的非平凡元素可能反映 *Godbillon–Vey* 不变量 $gv(\mathcal{F}) \in H^3(M;\ \mathbb{R})$（猜想性的）。更一般地，$\mathbb{H}^n$ 对 $n \geq 1$ 的刻画包含次特征类和更高阶障碍，体现了分次障碍理论（推论 *1(c)*）。

注意：所有与经典叶状结构不变量的联系都是猜想性的、用于说明的，并非已确立的定理。

推论 2（同时对角化的障碍）。 设 (T, S)是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子， $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 是相应的范畴谱预层。当且仅当 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 作为层与某个常值层等价时，(T, S)可以同时对角化。在此情形下，谱位点 $\mathcal{C}$ 有一个终对象，定理 *1(ii)* 中的代数重构可简化为在该对象处求值。

证明。 我们证明这一等价关系：

$$(T,S)\text{ simultaneously diagonalizable} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{G}_{\mathrm{cat}} \simeq \text{constant stack}.$$

步骤 1：预备知识。 回忆一下，(T,S) 称为可同时对角化，若存在联合谱测度 $E\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$T=\int_{\mathbb{R}^2}\lambda_1\,dE(\lambda_1,\lambda_2),\qquad S=\int_{\mathbb{R}^2}\lambda_2\,dE(\lambda_1,\lambda_2).$$

等价地，$[T,S]=0$ 与 $\mathcal{A}=C^*(T,S)$ 是交换的。

步骤 2：可对角化 $\Rightarrow$ 常值层。 假设 $[T,S]=0$。那么 $\mathcal{A}$ 是交换的，且包含T,S，因此 $\mathcal{A}\in\mathcal{C}$。对于任意 $C\in\mathcal{C}$，包含 $C\hookrightarrow\mathcal{A}$ 是唯一的态射 $C\to\mathcal{A}$，从而 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的终对象。

定义常值层

$$\mathbf{C}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Cat},\qquad \mathbf{C}(C):=\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{A}),\quad C\in\mathcal{C},$$

其限制映射为恒等函子。

典范限制函子

$$r_C:=\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C\hookrightarrow\mathcal{A}):\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{A})\to\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$$

组装成一个自然等价 $\eta:\mathbf{C}\Rightarrow\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$。逆自然等价 $\varepsilon\colon \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}\Rightarrow\mathbf{C}$ 由以下方式给出：$\varepsilon_C:=r_C^{-1}$ 作用于对象和态射，这是因为 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$ 中的每个局部对象都唯一延拓到 $\mathcal{A}$。因此，$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 等价于常值层 $\mathbf{C}$，且下降数据是平凡的。

步骤 3：常值层 $\Rightarrow$ 可对角化。 假设 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 等价于一个取值于$\mathcal{D}\in\mathbf{Cat}$的常值层 $\mathbf{C}$。

- 终对象的存在性： 层的等价意味着，对于任意 $C_1,C_2\in\mathcal{C}$，都存在一个同时包含 C_1 和 C_2 的公共上界 $C_{12}\in\mathcal{C}$。应用佐恩引理可得一个极大元 $C_{\max}\in\mathcal{C}$，它是终对象。

- 交换性： 根据构造，$C_{\max}$包含 T,S，且是交换的。由于 $\mathcal{A}=C^*(T,S)$ 由 T,S 生成，因此有 $C_{\max}=\mathcal{A}$，进而有 $[T,S]=0$。

因此，$(T,\ S)$ 可同时对角化。

步骤 4：代数 重构。当 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的终对象时，定理 1(ii) 中的极限简化为 o

$$\varprojlim_{C\in\mathcal{C}}(C,T,S)\cong(\mathcal{A},T,S),$$

其中同构由在 $\mathcal{A}$ 处求值给出。

步骤 5：几何解释。同时对角化等价于$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$的下降数据平凡。若 $[T,S]\neq0$，谱栈具有非平凡的下降数据，谱位点缺少终对象，而代数重构确实需要在整个图表上进行粘合。因此，对角化障碍恰恰由谱栈的非平凡性编码。

□

推论 3（谱层的同伦不变量）。，设 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 是与希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一对自伴算子$(T、\ S)$ 相关联、定义在谱位点 $\mathcal{C}$上的谱栈。那么， $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 通过其分类空间 $B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$产生同伦不变量，系统地衡量交换性障碍：

- $\pi_0(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 对相容族的谱测度的同构类进行分类（经典重构）。
- $\pi_1(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 捕捉与 *Kochen–Specker*语境性相对应的单值化现象。
- $\pi_n(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 用于 $n \geq 2$ 测量粘合局部谱数据时的高阶相干性障碍。

存在一个自然比较映射

$$\Phi : B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} \longrightarrow \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}},$$

在适当的连通性或有限性假设下，它在低维不变量上诱导同构。

证明。 我们构造并诠释 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 的同伦不变量。

步骤 1：分类空间。 对于一个层 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$，其同伦型可以由其格罗滕迪克构造的神经的几何实现来建模：

$$B\mathcal{F} := \left| N\left(\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \right) \right|,$$

其中对象是形如 (C, X) 的对，满足 $C \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{F}(C)$，而态射是相容的限制映射。这产生一个 CW复形，其同伦群 $\pi_n(B\mathcal{F})$ 是该层的不变量。

步骤 2： π_0 **–经典重构**。 连通分支 $\pi_0(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$对应于模同构的谱测度相容族。根据定理 1(ii)，这些族与该层的全局截面一一对应，或者等价地，与 $\lim_{\longleftarrow C\in\mathcal{C}} C \subseteq \mathcal{A} = C^*(T, S)$ 的元素一一对应。

步骤 3： π_1 **– Kochen–Specker 语境性**。 在 $B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 中固定一个基点 (C_0, X_0)。基本群$\pi_1(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}, (C_0, X_0))$由以 (C_0, X_0) 为起点和终点的环路的同伦类组成。每个这样的环路都对应于一列语境 $C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_n = C_0$ 和谱对象 $X_i \in \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C_i)$，以及它们沿态射的限制之间的同构。

非平凡环路表明，将局部谱对象 X_0 沿语境循环传输后，返回的对象与 X_0 同构，但并不相同。这一现象编码了定义谱值的整体非情境赋值（即底层预层的全局截面）所面临的障碍。

形式上， 存在一个映射到底层谱预层 Σ 的分类空间的自然变换：

$$B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} \longrightarrow B\underline{\Sigma},$$

在此映射下， $\pi_1(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 的非平凡元素映射为科亨–斯佩克尔障碍类，从而量化非语境性的失效程度。

步骤 4： $\pi_{n\geq 2}$ – 高阶相干性障碍。 </style}对于 $n \geq 2$， $\pi_n(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 的元素对应于一个 n-球面语境上的相容谱测度族，其同构满足同伦意义下的相干性。这些刻画了将局部谱数据粘合成全局一致对象的高阶障碍。

步骤 5：与稳定不变量的比较。 考虑稳定化谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}} \simeq \Sigma^{\infty} N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$。存在一个自然比较映射

$$\Phi : B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} \longrightarrow \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}},$$

通过稳定化伴随的单位构造。在适当的有限性或连通性假设下，这将诱导出同构

$$\pi_n(B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}) \cong \mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}), \quad n = 0, 1, 2.$$

第6步：交换情形。 若 $[T, S] = 0$，则 $\mathcal{A}$ 是交换的，且 $\mathcal{C}$ 有一个终对象 $\mathcal{A}$。层$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 变为本质上常值，而 $B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 形变收缩到 $\mathcal{A}$上的纤维。

- 上下文障碍消失： π_1 以及与粘合相关的高阶相干性障碍均为平凡的。- Σ（$\mathcal{A}$）的经典拓扑不变量仍可能具有非平凡的高阶同伦群。

结论。 分类空间 $B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 提供了定义良好的同伦不变量，可用于检测情境性和高阶相容性障碍。在有利的情形下，这些低维不变量与超上同调群 $\mathbb{H}^n$（$\mathcal{C}$； $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$）一致，从而给出非交换性的分次几何度量。

□

注8（与胞腔层论的比较）。 尽管定理 *1*采用层与下降的语言，其概念和数学内容与 *[15]* 及相关研究中发展的胞腔层论有根本区别。

关键区别：

• 基范畴：胞腔层论研究拓扑空间或胞腔复形上的向量空间层。我们的框架则使用非交换算子代数的交换子代数偏序集上的预层。

• 代数内容：胞腔层在交换线性代数框架内运作（即固定交换基域上的向量空间层）。我们的谱预层通过下降失效来编码非交换性，其茎是交换的，但其整体截面揭示了非交换结构。

• 谱的含义：胞腔层论中的“谱”指的是谱图论（拉普拉斯算子的特征值）。而我们的“谱”指算子谱和盖尔范德对偶，其中同伦不变量用于测量联合谱的障碍。

胞腔层论将图论方法扩展到层上同调，同时仍处于组合拓扑的范畴之内。相比之下，定理 *1* 通过层叠论下降，为非交换算子建立了重构定理，其研究处于算子代数、高阶范畴论与非交换几何的交汇处。

表1：比较：胞腔层与谱栈

胞腔层论	**定理 1**
拓扑空间上的层	交换子代数偏序集上的预层
系数：向量空间	系数：盖尔范德谱
下降通常成立	下降在 $\Leftrightarrow$ 非交换性中失效
推广图拉普拉斯算子	重构非交换算子
组合拓扑学	算子代数 +非交换几何

4 同伦不变量

4.1 K理论层 $\mathcal{F}_K$

在本小节中，我们构造一个阿贝尔群层，用以编码从谱预层导出的 K-理论信息。此构造提供了代数不变量，可补充推论 3 中讨论的同伦不变量，并提供一个可计算的框架，通过类似向量丛的结构来衡量交换性的障碍。

定义与基本性质。

定义 12 (K理论层)。 令 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}:\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ 为范畴谱预层（定义 *5(a)*）。*K*理论层

$$\mathcal{F}_K : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

通过与格罗滕迪克群函子 K_0复合来定义:

$$\mathcal{F}_K(B) := K_0(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(B)) \quad \textit{for each } B \in \mathcal{C}.$$

明确地，对于一个余 交换的 C^*-代数 B，其盖尔范德谱为 $\Sigma(B)$，我们有自然同构 *ms*

$$\mathcal{F}_K(B) \ \cong\ K_0(C(\Sigma(B))) \ \cong\ K^0(\Sigma(B)) \ \cong\ K_0(B),$$

将 $\mathcal{F}_K(B)$ 与 $\Sigma(B)$上的虚向量丛阿贝尔群相对应。对于包含 $i:\ B_1 \hookrightarrow B_2$，限制映射

$$\mathcal{F}_K(i) : K_0(B_2) \longrightarrow K_0(B_1)$$

由沿连续限制映射 $\Sigma(B_1) \hookrightarrow \Sigma(B_2)$拉回向量丛诱导。

命题 1 ($\mathcal{F}_K$) 的同伦层性质。 令 $\mathcal{C}$ 为交换 C^*-代数范畴，并定义 $\mathcal{F}_K(C) = K_0(C)$。则 $\mathcal{F}_K$ 关于 $\mathcal{C}$上的典范格罗滕迪克拓扑满足同伦下降。

更确切地说，对于任意覆盖族 $\{C_i \hookrightarrow C\}$，典范映射

$$K(C) \longrightarrow \mathrm{holim}\Big(\prod_i K(C_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} K(C_i \cap C_j)\Big)$$

是谱的弱等价。特别地， $\mathcal{F}_K$ 是谱层的 π_0-截断。

证明。 令 $\{C_i \hookrightarrow C\}$ 为一个覆盖族，使得 $C = C^*(\bigcup_i C_i)$。根据盖尔范德对偶，这对应于紧豪斯多夫空间 $\Sigma(C)$上的闭覆盖 $\{\Sigma(C_i)\}$ 。

拓扑 K-理论在紧豪斯多夫空间上具有切除性，并满足闭覆盖的 Mayer–Vietoris 性质。因此，相应的谱预层

$$C \longmapsto K(C)$$

满足相对于此类覆盖的同伦下降。取 π_0 即可得到 $\mathcal{F}_K$所述的同伦层条件。

□

注 9 （函子性与解释）。 预层 $\mathcal{F}_K$ 可视为由 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$编码的范畴谱数据的线性化影子:

• 对于每个语境 B，群 $\mathcal{F}_K(B)$ 捕捉了谱范畴 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(B)$ 的 K 理论的去范畴化信息，并将其识别为盖尔范德谱 $\Sigma(B)$ 上的虚向量丛（在稳定等价意义下）。

• 限制映射反映了这些 K理论类在传递到较小的交换子代数时如何函子性地变换，并编码了不同语境中的谱数据之间的相容性。

• 与形成层论意义上的真正全局截面不同，$\mathcal{F}_K$中的相容族代表着将局部 K理论数据汇集为整体不变量的尝试，而严格粘合的失败则衡量了非交换性所产生的障碍。

由此，$\mathcal{F}_K$ 在范畴谱结构与经典拓扑不变量之间起到中介作用，使得非交换性可通过 K理论和同伦下降障碍显现出来。

与谱预层和稳定化的关系。K理论层与定义 5(b)中引入的稳定谱预层之间存在自然联系。

命题 2（稳定化与 K理论）。 设 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 为 K理论谱预层。则应用零阶同伦群函子可得到预层的一个自然同构：

$$\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{st}} \;\cong\; \mathcal{F}_K.$$

证明。 对于每个交换的 C^*-代数 $C \in \mathcal{C}$，我们有：

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C)) &= \pi_0(K(C)) && \text{(by definition)} \\ &= K_0(C) && \text{(definition of } K_0 \text{ as } \pi_0 \text{ of } K\text{-theory spectrum)} \\ &= \mathcal{F}_K(C) && \text{(definition of } \mathcal{F}_K\text{).} \end{aligned}$$

自然性源于：

1. 函子 $\pi_0 :\ \mathbf{Sp} \to$ **阿贝尔群**是自然变换，

2. 赋值 $C \mapsto K(C)$ 是函子性的（通过限制映射），

3. 识别 $\pi_0(K(C)) = K_0(C)$ 关于 C 是自然变换。

更明确地说，对于任意包含 $\iota :\ C_1 \hookrightarrow C_2$ 属于 $\mathcal{C}$，图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(K(C_2)) & \xrightarrow{\pi_0(K(\iota))} & \pi_0(K(C_1)) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ K_0(C_2) & \xrightarrow[K_0(\iota)]{} & K_0(C_1) \end{array}$$

可交换，从而建立自然同构。 □

注 10 (代数与拓扑精化**)**。 到目前为止考虑的 K-理论不变量具有拓扑性质：$\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C) = K^{\mathrm{top}}(C)$ 是 C^*-代数 C的拓扑 K-理论谱，而 $\mathcal{F}_K(C) = K_0^{\mathrm{top}}(C)$ 是其零次同伦群。

对于一个真正的 代数精化，可以转而考虑代数 K-理论预层 eaf

$$\mathcal{F}_K^{\mathrm{alg}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}, \quad \mathcal{F}_K^{\mathrm{alg}}(C) := K^{\mathrm{alg}}(C),$$

其中 $K^{\mathrm{alg}}(C)$表示环 C 的（非连通）代数 K-理论谱（忽略拓扑和范数结构）。

重要区别：

- $\pi_0\left(\mathcal{G}_{\mathrm{st}}(C)\right) = K_{\mathrm{top}\,0}(C)$ 将 $\Sigma(C)$ 上的向量丛分类至稳定同构。
- $\pi_0(\mathcal{F}_{K}^{\text{代数}}(C)) = K_{\text{代数}\,0}(C)$ 将有限生成的投射 C-模按代数等价分类。

- 对于光滑的 C^*-代数，Dennis 迹映射 经有理化后给出一个自然变换：

$$\mathcal{F}_K^{\mathrm{alg}} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{st}} \otimes \mathbb{Q}.$$

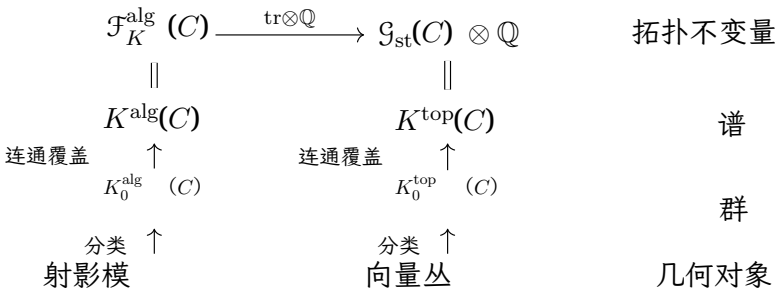
同伦极限

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{F}_K^{\mathrm{alg}}$$

它提供了能够捕捉交换子代数之间代数相容性数据的不变量，并有望精化$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}}$中的拓扑信息。

展示下方建议的图表有助于直观梳理代数 K 理论与拓扑 K 理论之间的层级关系，清楚呈现 *Dennis* 迹如何在有理化后将二者联系起来，以及每个层级（谱、群、几何对象）各自对应的内容。这阐明了从 $\mathcal{F}_K$ 到 $\mathcal{F}_K^{\mathrm{alg}}$ 进行精化的概念架构。

代数精化



关于范畴 K理论的备注：人们也可以考虑直接对谱测度范畴$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$应用 K-理论。然而，这需要为这些范畴赋予适当的 *Waldhausen* 结构或 ∞-范畴结构，超出了本文的范围。通过 $K^{\mathrm{alg}}(C)$ 给出的定义，则提供了一种数学上简洁且成熟的替代方案。

上同调不变量与障碍。层 $\mathcal{F}_K$ 产生的上同调群可作为非交换性的代数测度。

定义 13（谱位点的层上同调）。令 $\mathcal{F}_K$ 为谱位点 $(\mathcal{C}, J)$ 上的 *K*理论层。该位点上以 $\mathcal{F}_K$ 为系数的层上同调群 定义为全局截面函子的右导出函子：

$$H^n(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) := R^n\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F}_K), \quad n \geq 0,$$

其中 Γ： **Sh**$(\mathcal{C}, J) \to$**阿贝尔群** 将一个层映射到它的整体截面。

注 11（通过切赫上同调计算）。 在实际计算中， $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 可以通过相对于 J 中覆盖族的切赫上同调 来计算。对于一个覆盖 $\mathfrak{U} = \{C_i \hookrightarrow C\}_{i\in I}$，切赫复形为

$$\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}; \mathcal{F}_K) : 0 \to \prod_i \mathcal{F}_K(C_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}_K(C_i \cap C_j) \to \prod_{i,j,k} \mathcal{F}_K(C_i \cap C_j \cap C_k) \to \cdots,$$

and

$$H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^n(\mathfrak{U};\mathcal{F}_K),$$

其中极限取遍该位点中的所有覆盖。

注记 12（解释为障碍群）。上同调群 $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 衡量将局部 K_0-数据粘合为整体截面的障碍：

- $H^0(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K) = \Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)$ 由全局定义的 K_0-类组成。
- $H^1(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 分类了 $\mathcal{F}_K$ 的扭子，即无法全局拼合的局部 K_0-类族。
- 高阶群 $H^{n\geq 2}(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 编码了粘合过程中的高阶相容性障碍。

这些群非零表明存在真正的 K理论障碍，这些障碍源于底层代数 $\mathcal{A}$的非交换性。

定义 14（K 理论下降上同调）。一种改进方法是考虑 K理论谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Sp}$并定义

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) := \pi_{-n}\big(\operatorname{holim}_{\mathcal{C}}\mathcal{G}_{\mathrm{st}}\big),$$

其通过谱序列细化了层上同调

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C};K_{-q}(-)) \implies \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{st}}).$$

与算子 K 理论和整体重构的关系。

命题 3（整体截面与极限）。令 $\mathcal{A}$为一个（可能是非交换的）C^*-代数，并令 $\mathcal{C}$表示其按包含关系排序的交换 C^*-子代数偏序集。定义层

$$\mathcal{F}_K:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Ab},\quad B\mapsto K_0(B),$$

其限制映射由包含关系诱导。则：

1. $\mathcal{F}_K$ 的整体截面可自然地识别为交换子代数图表上的极限：

$$\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)\cong\varprojlim_{B\in\mathcal{C}} K_0(B),$$

其中，极限取在阿贝尔群范畴中。

2. 存在一个典范比较映射

$$c_{\mathcal{A}}:\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)\longrightarrow K_0(\mathcal{A})$$

由包含关系 $B\hookrightarrow\mathcal{A}$ 对所有 $B\in\mathcal{C}$ 诱导。

3. 若逆系统 $\{K_0(B)\}_{B\in\mathcal{C}}$ 满足 *Mittag-Leffler* 条件，则映射 $c_{\mathcal{A}}$ 是单射：对于每个 $B\in\mathcal{C}$，限制映射 $K_0(B')\to K_0(B)$ 的像随着 $B'\supseteq B$ 稳定。特别地，当 $\mathcal{A}$ 是 *AF*（近似有限维）代数时，这一条件成立。

4. 一般而言，$c_{\mathcal{A}}$ 并非满射。其余核测量了 $\mathcal{A}$ 中无法通过交换子代数检测到的 K_0-类。

证明。 (1) 根据偏序集上层的定义，全局截面可以计算为等化子

$$\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)=\ker\left(\prod_{B\in\mathcal{C}}K_0(B)\rightrightarrows\prod_{B_1\subseteq B_2}K_0(B_1)\right),$$

其中这两个箭头对应于沿包含关系 $B_1\subseteq B_2$ 的限制映射。这正是极限 $\varprojlim_{B\in\mathcal{C}}K_0(B)$。

(2) 每个包含关系 $\iota_B\colon B\hookrightarrow\mathcal{A}$ 都会诱导一个映射 $K_0(\iota_B)\colon K_0(B)\to K_0(\mathcal{A})$。根据逆极限的泛性质，这些映射组合成一个自然映射

$$c_{\mathcal{A}}:\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)\longrightarrow K_0(\mathcal{A}).$$

(3) 为了证明单射性，设 $x=(x_B)_{B\in\mathcal{C}}\in\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)$ 满足 $c_{\mathcal{A}}(x)=0$。那么对于每个 $B\in\mathcal{C}$，元素 x_B 在 $K_0(\mathcal{A})$ 中映射为零。若系统 $\{K_0(B)\}$ 满足 Mittag-Leffler 条件，则兼容性和像的稳定化会迫使 $x_B=0$ 对所有 B均成立，因此 $x=0$。对于 AF 代数，由于 $\mathcal{A}$ 的 K_0-类最终会在有限维子代数中得到检测，因此该条件成立。

(4) 当 $\mathcal{A}$ 存在无法源自任何交换子代数的 K_0-类时，满射性会失效。例如，Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ 满足 $K_0(\mathcal{O}_2)\cong\mathbb{Z}_2$，但每个交换子代数 $B\subseteq\mathcal{O}_2$ 的 $K_0(B)$ 都是无挠的。因此，$K_0(\mathcal{O}_2)$ 的生成元不属于 $c_{\mathcal{A}}$ 的像。

□

注 13 （K-理论的交换可检测性）。 正合列

$$0\longrightarrow\ker(c_{\mathcal{A}})\longrightarrow\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)\xrightarrow{c_{\mathcal{A}}}K_0(\mathcal{A})\longrightarrow\operatorname{coker}(c_{\mathcal{A}})\longrightarrow 0$$

量化了 K_0（$\mathcal{A}$）中有多少部分是“可由交换结构检测的”。当 $\mathcal{A}$ 是交换的，$c_{\mathcal{A}}$ 是同构。当 $\mathcal{A}$ 真正非交换时，余核$(c_{\mathcal{A}})$ 包含一些需要借助非交换现象构造的类，例如源自 *Fredholm* 模或循环上同调类的那些类。

定义 15 （K-理论预层）。 我们在谱位点 $\mathcal{C}$ 上定义两个相关的预层：

1. K_0 预层 $\mathcal{F}_K$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to$ **阿贝尔群**，其中 $\mathcal{F}_K(C)=K_0(C)$。这是层论的极限中所使用的版本。

2. KK理论谱预层 $\mathcal{F}_K^{\mathrm{sp}}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Sp}$，其中 $\mathcal{F}_K^{\mathrm{sp}}(C)=K(C)$。其同伦群恢复所有 K群：$\pi_n(\mathcal{F}_K^{\mathrm{sp}}(C))\cong K_n(C)$。

在不引起歧义时，我们用 $\mathcal{F}_K$ 表示二者，并说明所处的语境。

下面的推论说明 K 理论层上同调群如何度量交换性障碍，这是由谱层定理直接推出的。

推论 4 (K-理论重构所产生的障碍)。 设 $\mathcal{A}=C^*(T,S)$ 是一个含幺C^*代数，其谱位点为 $\mathcal{C}$，并令 $\mathcal{F}_K$ 表示 K_0理论层在 $\mathcal{C}$ 上的层。则：

(a) 如果 $\mathcal{A}$ 是交换的，则存在一个自然同构

$$H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\cong H^n(\Sigma(\mathcal{A});\underline{\mathbb{Z}}),$$

其中 $\Sigma(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的盖尔范德谱，而 $\mathbb{Z}$ 是常值层。特别地，当 $\Sigma(\mathcal{A})$ 具有非平凡拓扑时，$H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)$ 可以非零。

(b) 若 $H^1(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\neq 0$，则自然比较映射

$$c_{\mathcal{A}}:\varprojlim_{C\in\mathcal{C}} K_0(C)\longrightarrow K_0(\mathcal{A})$$

（来自命题 *3*）具有非平凡的余核。这表明 $\mathcal{A}$ 中存在无法从任何交换子代数检测到的 K_0-类。

(c) 对于 $n\geq 2$，群 $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 出现在下降谱序列中

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathcal{C};K_{-q}(-))\Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C};K(-)),$$

其中 $K(-)$ 表示拓扑 K-理论谱预层。$H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$中的非零元素刻画了在语境的多个交上粘合局部 K_0-类时的高阶相干性障碍。

证明。**(a) 交换情形：**若 $\mathcal{A}$ 是交换的，我们可以将 $\mathcal{A}\cong C(\Sigma(\mathcal{A}))$ 识别为 $\Sigma(\mathcal{A})$，其中 $\Sigma(\mathcal{A})$ 是盖尔范德谱。谱位点 $\mathcal{C}$ 由交换子代数 $C\subseteq\mathcal{A}$ 构成，而每个 C 都对应一个商映射 $\Sigma(\mathcal{A})\to\Sigma(C)$。

由于 $K_0(C)\cong\mathbb{Z}$，K_0-层是局部常值的。因此，层上同调的标准结果给出

$$H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\cong H^n(\Sigma(\mathcal{A});\underline{\mathbb{Z}}),$$

当 $n>0$ 时 $\Sigma(\mathcal{A})$ 具有非平凡拓扑时，可以非零（例如，S^1 给出 $H^1\cong\mathbb{Z}$）.

(b) 非消失 H^1：考虑由层条件导出的正合列：

$$0\to\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{F}_K)\to\prod_i\mathcal{F}_K(C_i)\to\prod_{i,j}\mathcal{F}_K(C_i\cap C_j)\to H^1(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\to 0,$$

对于 $\mathcal{C}$ 的覆盖 $\{C_i\}$。这里，$\Gamma(\mathcal{C},\ \mathcal{F}_K)\cong\varprojlim_{C\in\mathcal{C}}K_0(C)$，且 $c_{\mathcal{A}}$ 映射到 $K_0(\mathcal{A})$.

非零的 $H^1(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)$ 意味着存在一个相容族的局部 K_0-类，但它们不能 提升为 $K_0(\mathcal{A})$ 中的全局类，从而使 $c_{\mathcal{A}}$ 的余核非平凡。

(c) 高阶上同调：对于 $n\geq 2$，考虑 K-理论谱预层 $K(-)$ 的下降谱序列：

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathcal{C};K_{-q}(-))\Longrightarrow\pi_{-(p+q)}\big(\operatorname{holim}_{\mathcal{C}}K(-)\big).$$

$q=0$ 行满足 $E_{2}^{p,0}=H^p(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)$，而微分 $d_r^{p,0}$ 刻画了将 K_0-类的 p-上链提升为高阶相容数据（纳入 K_1 和更高阶 K-群）的障碍。因此，$H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)$ 中的非零元素揭示了将局部 K_0-类汇集为全局结构时的高阶相容性失效。

证明到此完成。 □

注14 (物理解释**)**。从量子理论视角来看，K_0-理论层的层上同调编码了在各个语境中一致赋予局部 *K*理论荷所面临的障碍：

- 非零的 $H^1(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 表明存在 K_0-类（例如对应拓扑荷的投影），它们在各个测量语境中都有良好定义，但无法一致地延拓为 $\mathcal{A}$中的全局类。这可以视为语境性的 *K*理论类比。

- 高阶上同调群 $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ </style}用于衡量将局部-类的族扩展到多个重叠语境上的障碍。非零元素对应于高阶相容性失效，即在$(n-1)$-重交上相容、但在 n-重交上不相容的电荷族。

因此， K-理论层提供了一个可计算代数不变量，用以捕捉谱位点中编码的非交换性。下一节将使用这些不变量来提出同时对角化的精确判据。

示例与计算。

示例 7（矩阵代数）。设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ 满足 $n \geq 2$，并设 (T, S) 是一对非交换自伴矩阵，它们生成 $\mathcal{A}$。

谱位点 $\mathcal{C}$：考虑位点 $\mathcal{C}$，它由所有极大阿贝尔子代数（*MASA*） $B \subseteq \mathcal{A}$组成。每个 *MASA* 都同构于 $\mathbb{C}^n$，对应于一组完备的两两正交秩一投影。

K_0 预层：对于每个 $B \in \mathcal{C}$，我们有

$$\mathcal{F}_K(B) := K_0(B) \cong \mathbb{Z}^n,$$

由极小投影的等价类生成。对于一个包含关系 $B_1 \subseteq B_2$（这只有在酉等价意义下才可能），限制映射

$$K_0(B_2) \longrightarrow K_0(B_1)$$

将 n 个投影等价类组成的元组从 B_2 投影到与 B_1 相容的等价类。

整体截面：尽管每个 $K_0(B)$都具有多维结构，极限

$$\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F}_K) = \varprojlim_{B \in \mathcal{C}} K_0(B)$$

在典范意义下同构于 $\mathbb{Z}$，由单位矩阵的类 $[1_n]$ 生成。因此，比较映射

$$c_{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F}_K) \longrightarrow K_0(\mathcal{A})$$

是一个同构。

层上同调： K_0 预层 $\mathcal{F}_K$ 在连通位点 $\mathcal{C}$ 上局部常值（任意两个极大交换自伴代数之间都可通过酉共轭作用关联起来）。由此可得

$$H^0(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) \cong \mathbb{Z}, \quad H^k(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) = 0 \, \textit{for all } k \geq 1,$$

˘因为由于存在一个在共轭作用下类似终对象的对象，任意覆盖的切赫复形都是可缩的。

解释：尽管 $M_n(\mathbb{C})$ 是非交换的，但其中每个 K_0-类都可通过交换子代数检测。高阶上同调的消失反映了不存在高阶*K*理论障碍。这种现象是有限维代数所特有的；对于无限维或更为奇异的 C^*- 代数（例如 *Cuntz* 代数），可能会出现非平凡的高阶上同调。

例 8 (连续迹代数**)**。对于谱为 X 的连续迹 C^*代数 $\mathcal{A}$，层$\mathcal{F}_K$ 是局部常值的，其纤维为 $\mathbb{Z}$，并由 *Dixmier-Douady* 类 $\delta \in H^3(X; \mathbb{Z})$ 扭曲。在此情形下，

$$H^1(X; \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^1(X; \mathbb{Z})$$

捕捉拓扑障碍，而高阶上同调 $H^3(X; \mathbb{Z})$ 则决定代数的扭曲。

例9（连续迹代数与谱位点 K-理论）。设 $\mathcal{A}$ 是一个谱为 X的连续迹 C^*-代数，令 $\delta(\mathcal{A}) \in H^3(X;\mathbb{Z})$ 表示其 ***Dixmier–Douady***类。固定一个生成对 (T,S)，并令 $\mathcal{C}$ 为相应的谱位点，其对象是同时包含 T和 S的交换 C^*-子代数 $C \subseteq \mathcal{A}$。

局部结构。对于每个 $C \in \mathcal{C}$，代数 C 是交换的，因此具有如下形式：$C \cong C(\Sigma(C))$，其中 $\Sigma(C)$ 是其盖尔范德谱。该 K_0 预层赋予

$$\mathcal{F}_K(C) := K_0(C) \cong \widetilde{K}^0(\Sigma(C)) \oplus \mathbb{Z},$$

其限制映射由沿连续映射 $\Sigma(C_1) \leftarrow \Sigma(C_2)$ 拉回而诱导，对应于包含关系 $C_1 \subseteq C_2$。

整体截面。整体截面群

$$H^0(\mathcal{C};\mathcal{F}_K) \;\cong\; \varprojlim_{C\in\mathcal{C}} K_0(C)$$

由相容的局部 K_0类组成。存在一个自然比较映射

$$c_{\mathcal{A}} :\; H^0(\mathcal{C};\mathcal{F}_K) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}),$$

由包含关系 $C \hookrightarrow \mathcal{A}$诱导。

当 $\delta(\mathcal{A}) = 0$：在此情况下，$\mathcal{A} \cong C(X) \otimes \mathcal{K}$。于是 $K_0(\mathcal{A}) \cong K^0(X) \cong \widetilde{K}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$。映射 $c_{\mathcal{A}}$是单射，其像由那些“局部交换”的 K_0类组成，也就是说，它们限制到每个交换子代数上时都是类。

上同调障碍。高阶上同调群 $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 衡量K_0-类的下降失败：

- $H^1(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 分类了 $\mathcal{F}_K$-扭子的同构类：这些是局部相容的 K_0-类族，但它们无法粘合成全局截面。非零意味着，$\mathcal{A}$ 中的某些 K_0-类无法通过交换子代数之间的任何相容族检测出来。

- 对于 $n \geq 2$，$H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 编码了高阶相干条件。例如，$H^2(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 衡量在双重交上相容的族能否延拓到三重交。

与 ***Dixmier–Douady*** 类的关系。*Dixmier–Douady* 不变量 $\delta(\mathcal{A})$ 分类了连续场 $\mathcal{A}$ 在 X 上的扭曲。虽然 $\mathcal{F}_K$ 本身不是扭曲层（它为每个交换子代数赋予的是未扭曲的 K_0），但提升局部数据的障碍会受到 $\delta(\mathcal{A})$的影响。

更确切地说，考虑与 ***Brauer***群相关的正合列：

$$0 \longrightarrow H^2(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow H^3(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

类 $\delta(\mathcal{A}) \in H^3(X;\mathbb{Z})$ 阻碍 $\mathcal{A}$ 成为平凡丛。这一障碍通过谱位点上调中 $\mathcal{F}_K$ 的下降谱序列无法退化而显现出来。

平凡丛情形。若 $\mathcal{A} \cong C(X) \otimes \mathcal{K}$，则 $\delta(\mathcal{A}) = 0$。在这种情况下，$\mathcal{F}_K$ 在局部同构意义下表现得如同常值层。上同调 $H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 于是与 $\mathcal{C}$的神经的切赫上同调相关。当 X 可缩且生成对 (T,S) 是一般的时，$\mathcal{C}$ 与一个点同伦等价，并且对于 $n \geq 1$，$H^n(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K) = 0$。对于一般的 X，这些群刻画了交换子代数的排列方式所具有的拓扑结构。

物理解释与应用。 在量子力学背景下，层 $\mathcal{F}_K$ 为组织相对于交换测量语境的 K-理论信息提供了一个数学上精确的框架。

- 对于交换子代数 B，群 $\mathcal{F}_K(B) = K_0(B)$ 对 B 中投影算子的稳定等价类进行分类。从物理角度来看，这些等价类编码了量子化电荷数据或拓扑不变量，只需借助语境 B 中包含的可观测量即可获取。

- 层条件表达了此类 K 理论数据在测量语境细化时的函子相容性。具体而言，若 $B_1 \subseteq B_2$ 是交换语境，则限制映射$K_0(B_2) \to K_0(B_1)$ 确保在较大语境中定义的电荷数据，在使用较少的可同时测量的可观测量进行描述时仍保持一致。

- 非平凡上同调类 $[c] \in H^n(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 表示将局部 K 理论电荷的相容族组装成单个全局截面的全局障碍。这类障碍反映了可观测代数内在的非局域或语境性特征，而非任何单一交换语境中可检测到的性质。

这一层论观点在概念层面上自然地关联到物质拓扑相的分类。对于复 K-理论（KU），K_0 对量子霍尔系统和拓扑绝缘体等拓扑相进行分类；而对于实 K-理论（KO），它则刻画拓扑超导相。层 $\mathcal{F}_K$ 为这些不变量提供了局部到整体组织原则，阐明全局拓扑相如何制约局部交换子代数中的测量，以及如何受到这些测量的制约。

更具体地说，对于作用于量子系统上的有能隙哈密顿量 H，费米投影 $P_F = \chi_{(-\infty, E_F]}(H)$在 $K_0(\mathcal{A})$中定义一个类，其中 $\mathcal{A}$ 表示可观测代数。层 $\mathcal{F}_K$ 描述了这一全局 K-理论类如何限制为不同交换测量语境中的相容 K-论数据，从而从结构上说明拓扑不变量如何通过局部可访问的可观测量显现。

与超上同调的关系及总结。 稳定谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$与 K_0-层 $\mathcal{F}_K$ 之间的关系通过同伦群函子 π_0联系起来。根据命题 2，存在一个自然同构

$$\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{st}} \;\cong\; \mathcal{F}_K.$$

取同伦极限后，这会诱导出一个典范比较映射

$$\mathbb{H}^0(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) = \pi_0(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) \cong \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F}_K),$$

它将一个相容的 K-理论谱族映射到相应的诱导 K_0-类族。

更一般地，同伦极限具有一个与谱层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$的 Postnikov 塔相关联的下降（*Bousfield–Kan*）谱序列：

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}; \pi_{-q}(\mathcal{G}_{\mathrm{st}})) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}).$$

由于 $\pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \cong \mathcal{F}_K$ 与$\pi_{-q}(\mathcal{G}_{\mathrm{st}})(C) \cong K_q(C)$ 对于 $q \geq 0$，E_2 页具体呈现为

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}; K_q(-)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}),$$

其中，$K_q(-)$ 表示预层 $C \mapsto K_q(C)$。特别是，$q = 0$ 行还原了层上同调群 $H^p(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$，这表明这些代数不变量是由 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$编码的同伦下降数据的最低层。

总结。 因此，层 $\mathcal{F}_K$ 在三种互补视角之间起到了概念和技术上的桥梁作用：

- **同伦论视角：** $\mathcal{F}_K = \pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ 从稳定谱层中提取零阶信息，将可计算的不变量与命题 2 中描述的高阶范畴结构联系起来
- **代数视角：** 作为阿贝尔群层， $\mathcal{F}_K$ 具有显式的上同调群 $H^*(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ ，
  ˇ 可通过切赫方法或下降方法计算。这些群衡量了在交换语境中粘合 K_0-类时出现的障碍。
- **物理视角：** 对于每个交换语境 C，群 $\mathcal{F}_K(C) = K_0(C)$ 对投影的稳定等价类进行分类，它们对应于可在C内测量的量子是非观测量。由此得到的上同调群捕捉了无法局限于任何单一语境的拓扑荷，反映了量子语境性的真实形式。

这些上同调群提供了具体且可计算的不变量，与推论 1 的同伦不变量互为补充。尤其是：

- $H^1(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 检测局部 K_0 数据粘合的初级障碍，对应于 Kochen–Specker 类型的语境性；
- 高阶群 $H^{n\geq 2}(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 衡量由测量语境的多重交叠所产生的高阶相干性障碍。

在接下来的各节中，我们将利用这些不变量，为同时对角化构建精确的障碍定理，并通过它们的 K 理论特征来分类不同程度的非交换性。

4.2 层上同调与同伦不变量

在本小节中，我们系统地构造不变量，从层论和同伦论的视角量化非交换性。这些不变量构成一个层级，逐级刻画将局部交换描述粘合为全局非交换结构时日益精细的障碍。

1. 通过层上同调刻画代数不变量。

层 $\mathcal{F}_K$ 通过其上同调群 $H^n(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 提供代数不变量，如定义 13 所定义。这些群衡量将局部 K_0-类延拓为全局类的障碍：

- $H^0(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K) \cong \Gamma(\mathcal{C},\ \mathcal{F}_K)$ 由全局定义的 K_0-类组成。
- $H^1(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 将局部 K_0-类的族分类：它们在交叠处相容，但无法粘合为全局截面。
- $H^{n\geq 2}(\mathcal{C};\, \mathcal{F}_K)$ 编码了在语境的 n 重交上保持相容性的高阶相干条件。

这些代数不变量捕捉了谱预层中所编码的完整范畴结构的去范畴化影子。为了获取高阶相干信息，我们引入同伦不变量。

2. 从范畴谱预层得到的同伦不变量。令

$$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

设其为定理 1(i) 中的范畴谱预层。应用神经函子

$$N : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

逐对象得到一个单纯集合预层

$$N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{sSet}, \quad C \mapsto N(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)).$$

对于每个 $C \in \mathcal{C}$， $N(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C))$ 是一个单纯集合，其 k-单纯形是范畴 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$ 中的一系列 k 可复合态射，该范畴由 $\Sigma(C)$ 上的谱测度构成。其几何实现

$$|N(\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C))| =: B\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C)$$

是该范畴的分类空间。

3. 提取同伦不变量。

我们通过两种互补的方法从 $N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 中获得同伦不变量：

1. 同伦极限： 应用同伦极限函子

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} : \mathbf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

到 $N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 并取同伦群

$$\pi_n(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}), \quad n \geq 0.$$

这些群能够检测不同语境下谱测度的相容族，而非零的高阶同伦群则表明存在高阶范畴障碍。

2. 稳定化 ： 逐点应用悬挂谱函子 Σ^{∞}_{+}，以获得一个谱预 a

$$\mathcal{G}_{\mathrm{st}} := \Sigma^{\infty}_{+} \circ N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}.$$

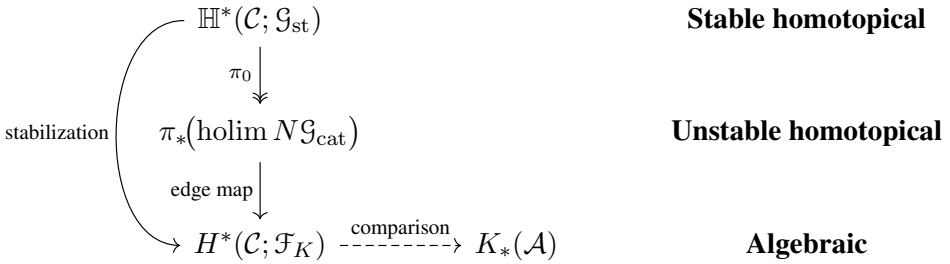
其超上同调

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) := \pi_{-n}(\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$$

（定理注 1(iii)) 提供了稳定不变量，可细化代数障碍 $H^*(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K)$.

4. 不变量层次结构。

这些不变量构成了一个连贯的层次结构，将不同层次的结构联系起来：



层级：

- **顶部（稳定同伦）：** $\mathbb{H}^*(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\text{稳定化}})$ 捕获了谱栈的完整稳定同伦信息。

- **中部（不稳定同伦）：** $\pi_*(\text{holim}\, N\mathcal{G}_{\text{cat}})$ 捕获了不稳定同伦信息，并通过稳定化与稳定版本相关（弗洛伊德塔尔悬挂定理）。
- **底部（代数方面）：** $H^*(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$（层上同调）与 $K_*(\mathcal{A})$（全局 K-理论）通过比较映射相连接。这些是最具体、最易计算的不变量。

关系：

- π_0： $\mathbb{H}^* \to H^*$ 提取零次同伦群，从稳定同伦中恢复层上同调。

- 稳定化：将非稳定同伦信息转换为稳定同伦信息。
- 边缘映射：源自下降谱序列，将同伦障碍与代数障碍联系起来。
- 比较：将局部定义的层上同调与该代数的全局 K-理论联系起来。

备注 15 (层级图的组成部分)。 层级图展示了代数、不稳定同伦不变量与稳定同伦不变量之间的关系。为了精确说明这种联系，可以明确标出函子性流

$$\mathcal{G}_{\text{cat}} \xrightarrow{N} N\mathcal{G}_{\text{cat}} \xrightarrow{\Sigma^\infty_+} \mathcal{G}_{\text{st}},$$

其中：

- $\mathcal{G}_{\text{cat}}$ 是范畴值谱预层；
- $N\mathcal{G}_{\text{cat}}$ 是逐对象神经，给出一个单纯集合预层（不稳定同伦信息）；
- $\mathcal{G}_{\text{st}}$ 是稳定化谱预层，承载完整的稳定同伦数据。

在文中加入这一函子性流，可确保图表与底层构造严格对应，并凸显该层级的数学意义。

定义 16 (谱上超上同调)。 对 T 和 S 的谱超上同调群 (T, S) 是稳定谱预层的同伦极限的同伦群：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\text{st}}) := \pi_{-n}\Big(\text{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\text{st}}\Big), \quad n \in \mathbb{Z},$$

其中 $\mathcal{G}_{\text{st}}$： $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Sp}$ 是定理*1(iii)*中的预层， $\mathcal{G}_{\text{st}}(C) = K(C)$是$C$的 K-理论谱。

另一种构造： 这些群也可以通过以下方式得到：

1. 取范畴谱预层的神经 $N\mathcal{G}_{\text{cat}}$，
2. 稳定化为谱： $\Sigma^\infty_+ N\mathcal{G}_{\text{cat}}$，
3. 取同伦极限及其同伦群。

该等价性由交换 C^*-代数的识别 $K(C) \simeq \Sigma^\infty_+\Sigma(C)$ 以及自然映射 $\Sigma(C) \to B\mathcal{G}_{\text{cat}}(C)$ 得出。

对于 $n \geq 0$，有不稳定超上同调群：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\text{cat}}) := \pi_n\Big(\text{holim}_{\mathcal{C}}\, N\mathcal{G}_{\text{cat}}\Big),$$

在较弱的连通性假设下，它们与 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\text{st}})$ 对 $n = 0,1,2$ 一致。

注 16(从层上同调到超上同调). 存在一个自然变换的边缘同态

$$e^p : H^p(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) \longrightarrow \mathbb{H}^p(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}), \quad p \geq 0,$$

由谱值预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}} := \Sigma^\infty_+ B\mathcal{G}$ 的 Bousfield–Kan 下降谱序列 产生:

$$E_2^{p,q} = H^p\big(\mathcal{C}; \pi_{-q}(\mathcal{G}_{\mathrm{st}})\big) \implies \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}),$$

其中 $\pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \cong \mathcal{F}_K$，且 $\pi_{-q}(\mathcal{G}_{\mathrm{st}})(C) \cong K_q(C)$，对于 $q \geq 0$。

边缘同态的性质:

- 对于 $p = 0$，它是一个同构:

$$H^0(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K) \cong \mathbb{H}^0(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}).$$

- 对于 $p = 1$，在较弱的连通性假设下它是单射（例如，当对所有 $C \in \mathcal{C}$，$K_1(C) = 0$ 时），但可能不是满射。
- 对于 $p \geq 2$，它通常既非单射也非满射，因为可能出现非平凡微分 $d^{p,0}_2$： $E^{p,0}_2 \to E^{p+2,-1}_2$ 以及扩张问题。

解释。 层上同调群 $H^p(\mathcal{C};\ \mathcal{F}_K)$ 检测纯粹由 K_0 理论导致的局部谱数据粘合障碍。相比之下，超上同调群 $\mathbb{H}^p(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 编码完整的 K 理论信息，包括更高阶的 K_q 贡献，以及它们通过谱序列微分产生的相互作用。因此， H^p 告诉我们局部 K_0 类是否能够粘合，而 $\mathbb{H}^p$ 则记录了障碍是否存在及其详细的同伦结构。

定理 2（非交换性的同伦刻画）。 设 T， $S \in \mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$中的算子，并设

$$\mathcal{C} := \{\, C \subseteq \mathcal{A} \mid C \textit{ is a commutative } C^*\textit{-subalgebra containing } T, S \,\}$$

为包含 T 和 S 的交换子代数所构成的偏序集，其序关系由包含关系给出。设 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴谱预层，并令 $\mathcal{G}_{\mathrm{st}} := \Sigma^\infty_+ N\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 表示其稳定化。

（*a*）消失判据：若 $[T, S] = 0$，则

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) = 0 \quad \textit{for all } n \neq 0.$$

唯一的非平凡不变量是

$$\mathbb{H}^0(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) \cong K_0(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}),$$

其中， $\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}$ 是由 T和 S生成的交换 C^*-代数。

(b) 第一同伦障碍： 群 $\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 对谱数据的不可缩环进行分类。非平凡元素对应于单值化: 沿语境循环输运谱测度后，会返回一个同构但并不完全相同的测度。当将其解释为对量子可观测量的赋值时，这刻画了 ***Kochen–Specker*** 类型的语境性。

(c) 更高阶 同伦障碍：对于 $n \geq 2$, $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\ \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 测度高阶相容性失效 :

- $\mathbb{H}^2$ 检测在三重交（gerbe）上无法一致组装自同构的障碍。
- $\mathbb{H}^3$ 检测四重交上的障碍（2-gerbe）。
- 更一般地， $\mathbb{H}^n$ 对于 $n > 3$ ，能够捕捉谱测度在 n重交上粘合时的高阶相容性障碍。

这些 群为非交换性的同伦复杂性提供了一种分次度量 *y.*

证明。 **(a) 消失判据**。 假设 $[T, S] = 0$。那么 T 和 S 生成一个交换的 C^*-代数$\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}$。 在这种情况下，谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$ 本质上是常值的：对于任意 $C \in \mathcal{C}$，存在一个典范等价

$$\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(C) \simeq \mathcal{G}_{\mathrm{cat}}(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}).$$

由于 $\mathcal{C}$ 是余滤的（所有有限图表都存在由交给出的锥），由余终性可知， $\mathcal{C}$上的同伦极限等价于任意一个足够大的阶段上的取值：

$$\mathrm{holim}_{C \in \mathcal{C}} B_{\mathcal{G}}(C) \;\simeq\; B_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}).$$

$B_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}})$ 是一个群胚的分类空间，因此 $\pi_n = 0$ 对于 $n \geq 2$ 而言， π_1 是谱测度的自同构群。经过稳定化后，

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}}) = \pi_{-n}\Sigma^\infty B_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}}) = 0 \quad \text{for all } n \neq 0.$$

识别 $\mathbb{H}^0 \cong K_0(\mathcal{A}_{\mathrm{comm}})$ 源于命题 2，因为 K_0 对于交换代数而言等于投影所生成的格罗滕迪克群。

(b) 第一同伦障碍。 $\mathbb{H}^1(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 的元素对应于同伦极限 $\mathrm{holim}_{\mathcal{C}} B_{\mathcal{G}}$ 中的环路。固定某个极大交换子代数 C_0 上的基点谱测度 X_0 。一个环路由以下内容组成：

$$(C_0, C_1, \ldots, C_k = C_0) \quad \text{with isomorphisms } f_i : X_{i-1}|_{C_{i-1} \cap C_i} \xrightarrow{\sim} X_i.$$

复合映射

$$f_k \circ \cdots \circ f_1 : X_0|_{\bigcap_i C_i} \longrightarrow X_0|_{\bigcap_i C_i}$$

给出 X_0 的一个自同构。当且仅当该自同构与单位元同伦时，这个环路才是可缩的。非零元素对应于满足 $[T, S] \neq 0$ 的环路，从而编码了 Kochen–Specker语境性。

(c) 高阶同伦障碍。 </style}对于 $n \geq 2$， $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{st}})$ 编码了同伦极限中满足高阶相干性的 $(n-1)$-单纯形：

- $\mathbb{H}^2$：三重交上的自同构；非平凡元素表示 ***gerbe***。
- $\mathbb{H}^3$：这些自同构在四重交上的相干性；非平凡元素表示 ***2-gerbe***。
- $n > 3$：刻画在 n 重交上相干延拓的失败。

因此，非交换性在不同语境中的谱数据之间引入了拓扑扭曲，其中最小的n 满足 $\mathbb{H}^n \neq 0$ ，表明最低阶的同伦障碍。

□

不变量层次结构提供了一个结构化框架，用于在多个细化层级上描述量子语境性：

1. **代数情境性：** $H^1(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\neq 0$ 表明，某些 K 理论荷（例如与投影相关联的拓扑数）无法在所有测量语境中得到一致赋值。

2. **同伦情境性：** $\mathbb{H}^1(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})\neq 0$ 不仅刻画了不一致性的存在，还揭示了其拓扑本质，即谱数据空间中的不可缩环。

3. **高阶情境性：** $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})\neq 0$ 针对 $n\geq 2$ 检测高阶相干性的失效——即成对一致性成立，但在三个或更多语境的集合上，一致性却遭到破坏的情形。

注释17 (非交换性层级**)。** 我们将这些不变量组织成一个层级，以反映逐步加细的过程：

$$\begin{aligned} \textit{Algebraic level} &: H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)\quad (n\geq 0),\\ \textit{Homotopical level} &: \mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})\quad (n\in\mathbb{Z}),\\ \textit{Categorical level} &: B_{\mathcal{G}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to \mathbf{sSet}. \end{aligned}$$

每个层级都从互补的角度呈现同一基本现象：局部交换描述无法汇集为全局非交换结构。结合这些不变量是否为零及其具体取值，可以量化非交换性的程度与类型。

注释18 (资源理论解释**)。** 这一框架与量子资源理论有着自然的联系：

- 非零的 H^1 表明，在某些计算模型（例如基于测量的量子计算）中，实现量子优势所需的最少资源。
- 非零的 $\mathbb{H}^2$ 体现了需要高阶相干性或拓扑保护的协议所必需的资源。

- 更一般地说，这一层级提供了对情境资源的分级分类，超越了“语境性与非语境性”这种二元概念。

注 19 (计算方面的考量**)。** 尽管 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{cat}})$ 所编码的拓扑与同伦信息比 $H^n(\mathcal{C};\mathcal{F}_K)$更丰富，但后者通常更容易计算。对于许多应用而言，代数不变量足以检测语境性的存在。当某些现象取决于障碍的精确同伦型时，同伦不变量便不可或缺，例如：

- 区分不同的物质拓扑相，
- 对量子场论中的反常进行分类，
- 分析连续变形下的稳定性性质。

选择适当的不变量需要在计算可及性与信息完整性之间进行权衡。

不变量层次结构。

定义 17 (同伦群 π_* 的同伦极限**)**。令 $B_{\mathcal{G}}$ ： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}$ 为范畴谱预层的分类空间预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}$，其中每个 $B_{\mathcal{G}}(C)$ 都是 *Kan*复形。令

$$\mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}}\, B_{\mathcal{G}}(C)$$

将其记为 s 同伦极限。该同伦极限的同伦群 π_* 定义如下 *s:*

1. 非稳定同伦群:

$$\pi_n\Big(\,\mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}}\, B_{\mathcal{G}}(C)\Big),\quad n\geq 0,$$

用于测量稳定化之前相容的局部谱数据空间中的环路和高阶同伦类。在这种非稳定情形下，负同伦群没有定义。

2. 稳定同伦群： 应用无限悬挂函子 Σ^∞ 将分类空间稳定化为谱之后，

$$\pi_n^{\mathrm{st}}\Big(\Sigma^\infty\,\mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}}\, B_{\mathcal{G}}(C)\Big),\quad n\in\mathbb{Z},$$

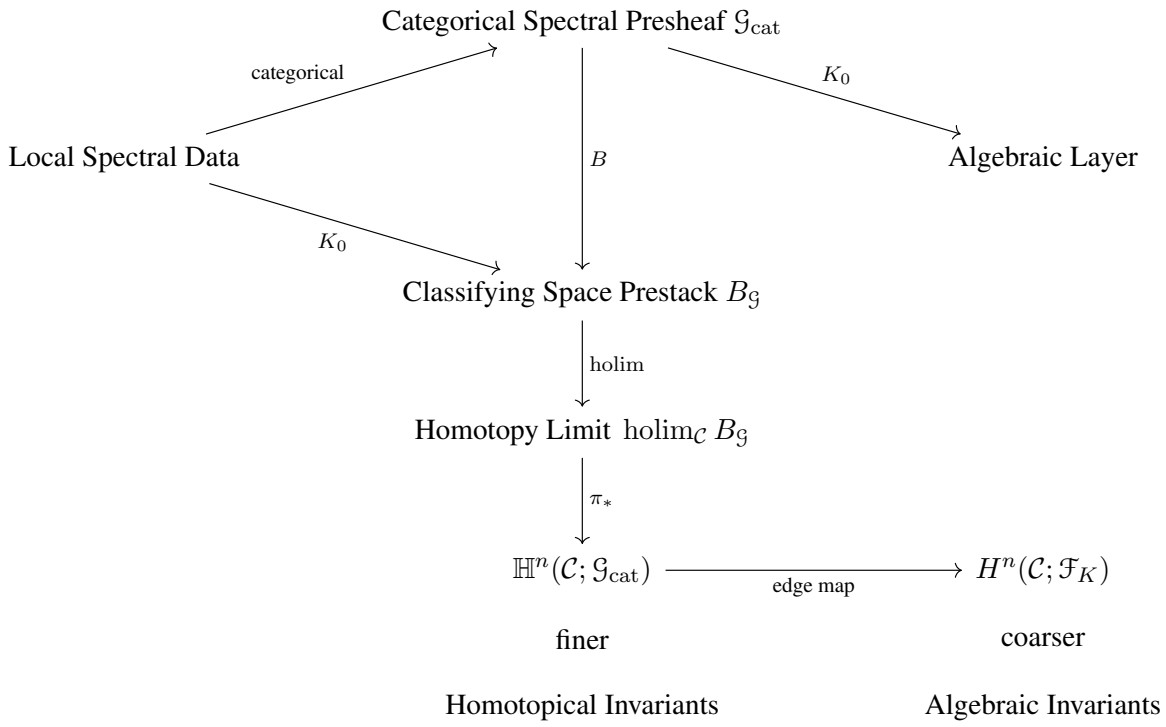
同伦群对所有整数 n 都有定义，包括负整数。稳定化确保这些群是同伦不变的，并能揭示有关粘合局部谱数据的障碍中更精细的稳定信息。在较弱的连通性假设下，也可以等价地在取同伦极限之前，先对每个$B_{\mathcal{G}}$（C）进行稳定化。

我们将稳定同伦群记为

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\mathcal{G}_{\mathrm{cat}}) := \pi_n^{\mathrm{st}}\Big(\,\mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}}\,\Sigma^\infty B_{\mathcal{G}}(C)\Big),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

在下方的层级图表中，记号 π_* 泛指 π_n （不稳定， $n\geq 0$）或 π_n^{st}（稳定， $n\in\mathbb{Z}$），具体取决于是否已进行稳定化。

下图说明了各种不变量之间的关系:



4.3 通过同伦极限研究层上同调与超上同调

本小节介绍与范畴谱预层相关的上同调不变量，并解释普通层上同调和超上同调如何自然地从谱值预层的同伦极限中产生。

4.3.1 函子性与 Morita 不变性

命题4（范畴谱预层的函子性与 Morita 不变性）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元的C^*-代数，并令 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 表示这样一个偏序范畴，其对象是 $\mathcal{A}$ 的含单位元交换 C^*-子代数，且其态射为包含关系。

假设对每个 C^*-代数 $\mathcal{A}$，我们关联一个预层

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat},$$

满足以下公理：

（*A1*）（限制函子性）对于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中的每个包含关系 $i\colon\ C' \hookrightarrow C$，存在一个限制函子

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(i)\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C) \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C'),$$

并且这些赋值严格具有函子性。

（*A2*）（关于 $*$-同态的函子性）对于任意含单位的 $*$-同态 $f\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 以及任意 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，存在一个函子

$$f_C^*\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(\overline{f(C)}) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C),$$

关于包含关系在 C 中是自然的。

（*A3*）（交换代数上的 *Morita* 不变性）如果 C 和 D 是交换 C^*-代数，且它们（强）*Morita* 等价，那么

$$\mathcal{G}(C) \simeq \mathcal{G}(D)$$

作为范畴，并且关于 *Morita* 等价具有函子性。

则以下结论成立。

(i) 赋值 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 关于带单位的 $*$-同态具有逆变函子性。

(ii) 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是强 *Morita* 等价的 C^*-代数，那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 作为各自上下文范畴上的层是等价的（通过 *Morita* 等价识别位点之后）。

(iii) 因此，通过逐对象的分类空间得到的相关单纯预层具有等价的同伦极限，从而定义了同构的超上同调和层上同调不变量。

证明。 我们分两步进行。

步骤 1：关于 $*$-同态的函子性。

设 $f\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个含幺的 $*$-同态。定义一个协变函子

$$f_*\colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B}), \qquad C \longmapsto \overline{f(C)}.$$

由于 f 保持乘法和对合， $f(C)$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个含幺交换 C^*-子代数，并且包含关系得以保持：若 $C' \subset C$，则 $f(C') \subset f(C)$。

根据假设 (A2)，对每个 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，都存在一个函子

$$f_C^* \colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(f_*(C)) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C),$$

它关于包含关系是自然的。具体而言，对每个包含 $i\colon C' \hookrightarrow C$，图表 am

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(f_*(C)) & \xrightarrow{\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(f_*(i))} & \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(f_*(C')) \\ {\scriptstyle f_C^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{C'}^*} \\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C) & \xrightarrow[\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(i)]{} & \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C') \end{array}$$

交换。

因此，族 $\{f_C^*\}_C$ 定义了一个自然变换

$$f^* \colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \circ f_* \Rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

预层 于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 上。这就建立了赋值 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的反变函子性。

逐对象应用分类空间函子 $B\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$，得到一个自然变换

$$B(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \circ f_* \Rightarrow B(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

的单纯预层。于是，同伦极限的标准性质蕴含了相关同伦不变构造的函子性。

步骤 2：Morita 不变性。

假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是强 Morita 等价的 C^*-代数，该等价由一个 $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}$ imprimitiv- ity 双模 E 实现。这样的双模在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 上的 Hilbert 模范畴之间诱导出一个等价，进而在 C^*-代数的 Morita 双范畴中诱导出一个等价。

设 $C \subset \mathcal{A}$ 是一个交换语境。沿着 $C \hookrightarrow \mathcal{A}$ 限制 E，得到 C 与一个交换的 C^*-子代数 $D \subset \mathcal{B}$ 之间的 Morita 等价（在等价意义下唯一）。根据假设 (A3)，这个 Morita 等价诱导出一个范畴等价

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C) \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(D).$$

这些等价与语境的包含关系相容，因为沿 $C' \subset C$ 限制印迹双模会得到较小语境对应的等价。因此，这族等价拼合为预层之间的等价（在相干同构意义下），也就是说，成为相应位点上的层之间的等价。

最后，等价的层具有逐对象弱等价的分类空间预层，因此其同伦极限也等价：

$$\operatorname{holim}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} B(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \;\simeq\; \operatorname{holim}_{\mathcal{C}(\mathcal{B})} B(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}).$$

取同伦群可得超上同调群之间的典范同构，而 π_0 则恢复了层上同调的相应结论。

证明至此完成。 □

命题 5 用于说明范畴谱预层在 $*$-同态下具有函子性，并在 Morita 等价下保持不变，从而确保相关的谱不变量和上同调不变量仅取决于 C^*-代数的内在非交换几何。因此，这些不变量定义良好，并且在算子代数与非交换几何中使用的标准等价下具有稳健性。

命题 5（范畴谱预层的反变函子性与 Morita 不变性）。设$\mathcal{A}$是一个含幺 C^*-代数，并且

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

记范畴谱预层为：它将范畴 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C)$ 中的谱数据赋给每个含幺交换 C^*-子代数 $C \subseteq \mathcal{A}$，这些谱数据定义在其盖尔范德谱 Σ_C 上（例如谱测度、投影值测度或等价的谱对象）；并将相应的限制函子赋给每个包含 $C' \subseteq C$ 。

(i) 对于任意含幺 $*$-同态 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，存在一个典范自然变换

$$\eta_f\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \circ f_*^{\mathrm{op}} \implies \mathcal{G}_{\mathcal{A}},$$

其中 $f_*\colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 将 C 映至 $\overline{f(C)}$。

(ii) 若 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ *Morita* 等价（等价地，稳定同构），则在对 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$上的典范格罗滕迪克拓扑进行层化后，与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 相关联的层等价。特别地，由 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$导出的所有层级上同调不变量都是 *Morita* 不变量。

证明。 **(i) 函子性**。设 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个含幺 $*$-同态，且 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$。限制映射$f|_C\colon C \to f(C)$是交换 C^*-代数之间的含幺 $*$-同态，因此诱导出一个盖尔范德谱之间的连续映射

$$\widehat{f|_C}\colon \Sigma_{\overline{f(C)}} \longrightarrow \Sigma_C,$$

逆变地。

根据预层 $\mathcal{G}$ 的定义，$\Sigma_{f(C)}$上的任意谱数据都可以沿着 $f|_C$ 拉回为 Σ_C上的谱数据。此构造定义了一个函子

$$\eta_f(C)\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(\overline{f(C)}) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}(C).$$

关于包含关系 $C' \subseteq C$ 的自然性，源自沿连续映射拉回的函子性，以及由此诱导的谱图表的交换性。因此，族 $\{\eta_f(C)\}_C$ 定义了一个自然变换

$$\eta_f\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \circ f_*^{\mathrm{op}} \Rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}.$$

(ii) Morita 不变性。设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ Morita 等价。根据 Brown–Green–Rieffel 定理，这等价于存在一个稳定同构

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{K},$$

其中 $\mathcal{K}$ 表示可分希尔伯特空间上的紧算子代数。

$\mathcal{A}$ 的交换子代数与 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$的交换子代数之间存在由稳定化诱导的对应关系。这种对应并非严格意义上的等价，但在转到相应的格罗滕迪克位点并进行层化之后便成为等价。在这一过程中，预层 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}}$ 确定等价的层，$\mathcal{B}$也同样如此。

沿稳定同构传递，可得到与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$和 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$相关联的层之间的等价。因此，任何由 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$构造的层级不变量，例如层上同调或超上同调，都在 Morita 等价下保持不变。

□

4.3.2 基本性质

定义 18 (连通谱预层的超上同调**)**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，且 $B_{\mathcal{G}}:\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **谱**$_{\geq 0}$ 是一个连通谱的预层（例如，逐对象应用代数 K-理论对象后，由范畴谱预层得到）。

$B_{\mathcal{G}}$ 的超上同调谱 是导出整体截面：

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}, B_{\mathcal{G}}) := \mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} B_{\mathcal{G}}(C) \in \mathbf{Sp}_{\geq 0}.$$

第 n个超上同调群对于 $n \geq 0$ 定义为

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; B_{\mathcal{G}}) := \pi_n\big(\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}, B_{\mathcal{G}})\big) = \pi_n\Big(\mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} B_{\mathcal{G}}(C)\Big).$$

以下定理确立了非交换不变量（ K-理论的层与超上同调，或谱预层）的基本性质，这些性质与经典代数拓扑中的性质相类似。该定理保证这些不变量具有函子性、满足 Mayer–Vietoris 序列，并且在交换情形下正确地归约为经典上同调，从而确保其一致性与可计算性。

定理 3 （函子性、Mayer–Vietoris 序列与交换情形下的归约）。 设 $\mathcal{A}$是一个可分 C^*-代数，并令 $\mathcal{C}$（$\mathcal{A}$） 表示其语境范畴：由 $\mathcal{A}$的可分含幺交换 C^*子代数构成、按包含关系排序的偏序集。考虑：

（*i*） 阿贝尔群的 K-理论预层 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$*:* $\mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to$ 阿贝尔群，定义为 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}(C) = K_0(C)\oplus K_1(C)$（或分别表示为 $\mathcal{F}^0{}_K^{\mathcal{A}}(C) = K_0(C), \mathcal{F}^1{}_K^{\mathcal{A}}(C) = K_1(C)$） 。

(ii) K理论谱预层 $\mathbb{K}^{\mathcal{A}}$： $\mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$，其中 $\mathbb{K}^{\mathcal{A}}(C)$ 是 C的连通 K理论谱，且当 $n \leq 0$ 时， $\pi_n(\mathbb{K}^{\mathcal{A}}(C)) = K_{-n}(C)$ ； 当 $n > 0$时，值为0 。

(iii) 与适当系数 $\mathcal{G}$相关联的一般谱预层 $B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}$： $\mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$。

在 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 上赋予格罗滕迪克拓扑，其中族 $\{C_i \hookrightarrow C\}$ 是一个覆盖，当且仅当由 $\bigcup_i C_i$ 生成的 C^*-子代数在 C中稠密。

于是：

(i) 反变函子性：对于任意含幺 $*$-同态 φ： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，所诱导的函子

$$\varphi_\sharp : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B}), \quad C \mapsto \overline{\varphi(C)}$$

是良定义的。存在自然变换

$$\alpha_\varphi : \varphi_\sharp^*\mathcal{F}_K^{\mathcal{B}} \to \mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}, \qquad \beta_\varphi : \varphi_\sharp^*\mathbb{K}^{\mathcal{B}} \to \mathbb{K}^{\mathcal{A}}, \qquad \gamma_\varphi : \varphi_\sharp^* B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}} \to B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}},$$

由 K-理论的函子性以及应用于 $\varphi|_C$： $C \to \varphi_\sharp(C)$ 的谱构造逐对象定义。

它们在上同调和超上同调上诱导自然映射：

$$\varphi^* : H^n(\mathcal{C}(\mathcal{B}); \mathcal{F}_K^{\mathcal{B}}) \to H^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}),$$
$$\varphi^* : \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{B}); \mathbb{K}^{\mathcal{B}}) \to \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}),$$
$$\varphi^* : \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{B}); B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}) \to \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}),$$

其中 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C};\ F)$**:** $= \pi_{-n}(\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C};\ F))$， F 是一个谱预层。

这使（超）上同调成为反变的函子。如果 φ 是一个同构，那么所有映射都是同构。

（*ii*）***Mayer–Vietoris*** 序列：设 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是向下封闭子范畴（即，若 $C \in \mathcal{C}_i$和 $C' \subseteq C$，则 $C' \in \mathcal{C}_i$），且它们的并在 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中共尾（意为：对每个 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，都存在 $C' \subseteq C$使得 $C' \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$）。记 $\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$。则存在自然变换长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A});\mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbb{H}^n(\mathcal{C}_1;\mathbb{K}^{\mathcal{A}}|_{\mathcal{C}_1}) \oplus \mathbb{H}^n(\mathcal{C}_2;\mathbb{K}^{\mathcal{A}}|_{\mathcal{C}_2}) \longrightarrow \mathbb{H}^n(\mathcal{C}_{12};\mathbb{K}^{\mathcal{A}}|_{\mathcal{C}_{12}}) \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{C}(\mathcal{A});\mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \longrightarrow \cdots$$

对于 $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A});\, B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}})$，情况也类似。对于系数为 $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}_K$ 的层上同调，只有在应用适当的截断后，或通过谱序列，才存在相应的 *Mayer–Vietoris* 序列。

(iii) 交换约化：如果 $\mathcal{A}$ 是可分交换的，那么 $\mathcal{A}$ 本身就是$\mathcal{C}(\mathcal{A})$中的终对象。因此：

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A});\mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \simeq \mathrm{holim}_{C\in\mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}} \mathbb{K}^{\mathcal{A}}(C) \simeq \mathbb{K}^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}(\mathcal{A}),$$

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A});B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}}) \simeq B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}).$$

取同伦群可得：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A});\mathbb{K}^{\mathcal{A}}) = \pi_{-n}(\mathbb{K}(\mathcal{A})) = K_{-n}(\mathcal{A}).$$

由 *Bott* 周期性对于复 C^* 代数，$K_{-n}(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{A})$ 以及 $K_{n+2}(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{A})$，因此：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A});\mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \cong \begin{cases} K_0(\mathcal{A}) & n \textit{ even}, \\ K_1(\mathcal{A}) & n \textit{ odd}. \end{cases}$$

如果 $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}}$ 在盖尔范德对偶 $\mathcal{A} \cong C(\Sigma_{\mathcal{A}})$ 下对应于谱 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 上的谱层 $B_{\mathcal{G}}$，且如果 $B_{\mathcal{G}}$ 是局部系统 $\mathcal{G}$ 的 ***Eilenberg–MacLane*** 谱，那么：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A});B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}}) \cong H^n(\Sigma_{\mathcal{A}};\underline{\mathcal{G}}).$$

证明。我们详细证明每一部分。

(i) 反变函子性。

(a) 定义 $\varphi_\sharp$：对于 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，$\varphi(C)$ 是 $\mathcal{B}$ 的交换 $*$-子代数。其范数闭包 $\overline{\varphi(C)}$ 是一个交换 C^*-子代数，因此是 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的一个对象。对于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中的 $C' \hookrightarrow C$，我们有 $\varphi(C') \subseteq \varphi(C)$，而闭包保持包含关系，因此 $\varphi_\sharp$ 是一个函子。

(b) 自然变换：对于每个 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，映射 $\varphi|_C : C \to \varphi_\sharp(C)$ 是一个 $*$-同态。根据 K-理论的函子性，它导出：

$$\alpha_\varphi(C) : K_*(\varphi_\sharp(C)) \to K_*(C), \quad \beta_\varphi(C) : \mathbb{K}^{\mathcal{B}}(\varphi_\sharp(C)) \to \mathbb{K}^{\mathcal{A}}(C).$$

对于包含 $C' \hookrightarrow C$，自然性可由以下交换性推出：

$$\begin{array}{ccc} K_*(\varphi_\sharp(C)) & \xrightarrow{\alpha_\varphi(C)} & K_*(C) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} \\ K_*(\varphi_\sharp(C')) & \xrightarrow[\alpha_\varphi(C')]{} & K_*(C') \end{array}$$

由于两条路径都是沿 $C' \hookrightarrow C \to \varphi_\sharp(C) \to \varphi_\sharp(C')$ 的拉回，因而交换。因此 α_φ：$\varphi^*_\sharp \mathcal{F}^{\mathcal{B}}_K \to \mathcal{F}^{\mathcal{A}}_K$ 是自然变换。类似地，对于 β_φ 和 γ_φ也是如此。

(c) 关于（超）上同调的诱导映射：自然变换 β_φ 诱导出一个同伦极限的映射：

$$\mathbf{R}\Gamma(\beta_\varphi) : \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \varphi_\sharp^* \mathbb{K}^{\mathcal{B}}) \to \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}).$$

伴随 $\varphi_\sharp^* \dashv \varphi_{\sharp,*}$ 的单位给出一个比较映射：

$$\eta : \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{B}); \mathbb{K}^{\mathcal{B}}) \to \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \varphi_\sharp^* \mathbb{K}^{\mathcal{B}}).$$

复合后得到 $\varphi^* := \mathbf{R}\Gamma(\beta_\varphi) \circ \eta$，再取 π_{-n} 得到 $\mathbb{H}^n(\varphi) : \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{B}); \mathbb{K}^{\mathcal{B}}) \to \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}})$。

对于 $\mathcal{F}_K$，注意 Eilenberg–MacLane 函子 $H : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Sp}$ 将 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$ 映为一个谱预层，其超上同调通过谱序列计算 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$ 的层上同调。映射 α_φ 在这些谱序列之间诱导一个映射，因而在 H^n 上也诱导一个映射。

(d) 函子性：对于 $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$，显然 $\varphi^* = \mathrm{id}$。对于 $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$，可验证 $(\psi\circ\varphi)_\sharp = \psi_\sharp \circ \varphi_\sharp$ 和 $\beta_{\psi\circ\varphi} = \beta_\varphi \circ \varphi_\sharp^*(\beta_\psi)$，从而得到 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$。

(e) 同构情形：若 φ 是同构，则 $\varphi_\sharp$ 是范畴等价，因此 η 是等价（由 Quillen 定理 A 得出）。此外，β_φ 逐对象都是同构，因此 φ^* 是同构。

(ii) Mayer–Vietoris 序列。

(a) 设定：令 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 如所述为向下封闭且共尾。

(b) 同伦拉回：对于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 上的谱预层 F，考虑以下同伦极限构成的方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{holim}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}} F & \longrightarrow & \mathrm{holim}_{\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}} F|_{\mathcal{C}_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{holim}_{\mathcal{C}_2^{\mathrm{op}}} F|_{\mathcal{C}_2} & \longrightarrow & \mathrm{holim}_{\mathcal{C}_{12}^{\mathrm{op}}} F|_{\mathcal{C}_{12}} \end{array}$$

向下封闭条件意味着，对于任意 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，上方范畴 $(C \downarrow \mathcal{C}_i)$ 要么为空，要么具有始对象。$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 的余终性意味着该方块是同伦笛卡尔（一个同伦拉回）。这是由一个一般事实得出的：对于由向下封闭子偏序集覆盖的偏序集，其同伦极限可分解为一个同伦拉回。

(c) 长正合序列：对于任意谱的同伦拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2 & \longrightarrow & E_{12} \end{array}$$

存在一个同伦群长正合序列：

$$\cdots \to \pi_n(E) \to \pi_n(E_1) \oplus \pi_n(E_2) \to \pi_n(E_{12}) \to \pi_{n-1}(E) \to \cdots$$

将此应用于 $E = \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); F)$，其中 $F = \mathbb{K}^{\mathcal{A}}$ 或 $F = B\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$，并注意到 $\pi_{-n}(E) = \mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); F)$，即可得到所述的 Mayer–Vietoris 序列。

(d) 对于层上同调： 对于 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$，将上述结果应用于其 Eilenberg–MacLane 谱 $H\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$，再利用这样一个事实：当 $\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}}$被视为集中在 0 次的链复形时， $\mathbb{H}^n(\mathcal{C}; H\mathcal{F}_K^{\mathcal{A}})$ 就是层上同调 $H^n(\mathcal{C}; \mathcal{F}_K^{\mathcal{A}})$。

(iii) 交换约化。

假设 $\mathcal{A}$ 是可分且交换的。

(a) 终对象： $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是极大元，因而是终对象：对于任意 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$，存在唯一的态射 $C \hookrightarrow \mathcal{A}$。

(b) 同伦极限的退化： 对于具有终对象 t 的范畴 $\mathcal{C}$，以及任意图表 F： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}$，典范映射

$$\mathrm{holim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} F \to F(t)$$

是一个等价。这是因为取值为 $F(t)$ 的常值图表在图表范畴中是终对象。因此：

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \simeq \mathbb{K}^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}(\mathcal{A}).$$

(c) 超上同调计算：根据定义：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}) = \pi_{-n}(\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}})) \simeq \pi_{-n}(\mathbb{K}(\mathcal{A})) = K_{-n}(\mathcal{A}).$$

(d) *Bott* 周期性： 对于复数 C^*-代数，Bott 周期性给出自然同构 $K_{n+2}(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{A})$ forall $n \in \mathbb{Z}$。特别是， $K_{-n}(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{A})$。因此：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \cong K_n(\mathcal{A}).$$

由于 K_0 和 K_1 是仅有的非零群（对于 $n \geq 0$，在连通约定下），且周期性给出 $K_{2k} \cong K_0$、$K_{2k+1} \cong K_1$，我们得到：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); \mathbb{K}^{\mathcal{A}}) \cong \begin{cases} K_0(\mathcal{A}) & n \text{ even}, \\ K_1(\mathcal{A}) & n \text{ odd}. \end{cases}$$

(e) 一般系数： 如果 $B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}$在盖尔范德对偶下对应于 $\Sigma_{\mathcal{A}}$上的 $B_{\mathcal{G}}$，那么：

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{C}(\mathcal{A}); B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}) \simeq B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\Sigma_{\mathcal{A}}; \underline{B_{\mathcal{G}}}).$$

如果 $B_{\mathcal{G}}$ 是对应于阿贝尔群层 $\mathcal{G}$的 Eilenberg–MacLane 谱 $H\mathcal{G}$，那么：

$$\mathbb{H}^n(\mathcal{C}(\mathcal{A}); B_{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}) \cong \pi_{-n}(\mathbf{R}\Gamma(\Sigma_{\mathcal{A}}; H\underline{\mathcal{G}})) \cong H^n(\Sigma_{\mathcal{A}}; \underline{\mathcal{G}}).$$

证明至此完成。 □

4.4 障碍类

本节中，我们将讨论范围限定于有限维情形

$$\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C}).$$

因此，所有构造都是具体且纯代数性的。

定义 19 ($M_n(\mathbb{C})$的语境范畴)。 令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M_n(\mathbb{C}))$ 表示一个范畴，其对象是 $M_n(\mathbb{C})$的极大交换自伴 $*$-子代数（极大交换自伴代数），并按包含关系排序。态射由包含映射 $C_1 \hookrightarrow C_2$ 给出，只要 $C_1 \subset C_2$。

每个极大交换自伴代数 $C \subset M_n$（$\mathbb{C}$）都与对角子代数 $\mathbb{C}^n \subset M_n$（$\mathbb{C}$）酉共轭，即存在一个酉算子 $u \in U$（n）使得

$$C = u\,\mathbb{C}^n\,u^*.$$

因此，每个极大交换自伴代数都与 $\mathbb{C}^n$ 作为一个 $*$-代数抽象同构。

注 20。根据定义 *19*，我们知道：

1. 偏序集 $\mathcal{C}$ 在非平凡包含关系方面是离散的：由于极大交换自伴代数是极大的阿贝尔代数，$C_1 \subset C_2$蕴含 $C_1 = C_2$，因此每个非单位态射都是平凡的。

2. 两个不同的极大交换自伴代数的交通常是 $\mathbb{C} \cdot I_n$，即数量矩阵。

3. 从几何上看，极大交换自伴代数对应于 $\mathbb{C}^n$ 的正交分解，即分解为 n个一维子空间；$\mathcal{C}$的自同构群是射影酉群 PU（n），通过共轭作用。

定理 4 (正规矩阵的联合对角化 $M_n(\mathbb{C})$)。 设 $T, S \in M_n(\mathbb{C})$ 为正规矩阵。则以下条件等价：

(i) T和 S 可同时对角化，即存在酉算子 $U \in U(n)$ 使得

$$UTU^* \text{ and } USU^* \text{ are both diagonal matrices.}$$

(ii) T 和 S 交换：

$$[T, S] := TS - ST = 0.$$

(iii) 存在极大交换自伴代数 $C \subset M_n(\mathbb{C})$ 使得 $T, S \in C$。

证明。 我们分步进行。

步骤 1：可交换正规矩阵可同时对角化。

若 T和 S 交换且为正规算子，考虑 T的谱分解：

$$T = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda,$$

其中 P_λ 是投影到 T的特征子空间上的正交投影。

由于 T和 S交换，S保持 T的每个特征子空间不变。将 S限制在每个特征子空间 $P_\lambda\mathbb{C}^n$ 上，并在该子空间中进行对角化，可得到 T和 S的共同正交归一基。因此，它们可同时对角化。

步骤 2：联合对角化蕴含交换性。

若 T和 S可同时对角化，则存在酉算子 U，使得 UTU^*和 USU^*均为对角矩阵。对角矩阵彼此交换，因此 $[UTU^*, USU^*] = 0$。用 U进行共轭变换，可得 $[T, S] = 0$。

步骤 3：包含于极大交换自伴代数。

M_n(ℂ)中的极大交换自伴代数是一个极大的阿贝尔 $*$子代数，与对角矩阵代数 $\mathbb{C}^n$酉共轭。

- 如果 T和 S可同时对角化，那么存在一个酉算子 U，使得 UTU^*，$USU^* \in \mathbb{C}^n$，因此 T，$S \in U^*\mathbb{C}^nU$，它是一个极大交换自伴代数。- 反过来，如果对于某个极大交换自伴代数 C，有 T，$S \in C$，那么 C与 $\mathbb{C}^n$酉共轭，因此 T和 S 可同时对角化。

步骤 4：结论。

步骤 1–3 证明了这三个陈述等价。因此，在 M_n(ℂ)中，联合对角化唯一的障碍是非交换性，而任意一对可交换正规矩阵都自动包含在某个共同极大阿贝尔子代数中。

□

定理 5（联合可对角化的 Čech 上同调刻画）。设 $\mathcal{A} = M_n$（ℂ），且$T, S \in \mathcal{A}$ 是正规矩阵。令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$（$M_n$（ℂ））为定义 *19* 中的极大阿贝尔代数（*MASA*）语境范畴。

在 $\mathcal{C}$ 上定义预层 $\mathcal{F}_{T,\ S}$：

$$\mathcal{F}_{T,S}(C) = \begin{cases} \{\textit{marked joint diagonalization of } T, S \textit{ in } C\}, & \textit{if } T, S \in C, \\ \varnothing, & \textit{if } T \notin C \textit{ or } S \notin C, \end{cases}$$

其中，“标记的联合对角化”是指选取 $\mathbb{C}^n$ 的一个有序标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，使其同时对角化 T 和 S，并为联合特征值（λ_i, μ_i）分别标上 $Te_i = \lambda_i e_i$, $Se_i = \mu_i e_i$。

那么，以下条件等价：

(i) T与 S 可同时对角化（即 $[T, S] = 0$）；

(ii) 切赫上同调集合 $\check{H}^0(\mathcal{C};\mathcal{F}_{T,S})$ 非空；

(iii) 存在一个极大交换自伴代数 $C_0 \in \mathcal{C}$，使得 $T, S \in C_0$；

(iv) 对于 $\mathcal{C}$ 的每个由同时包含 T 和 S 的极大交换自伴代数组成的开覆盖 $\mathcal{U} = \{C_\alpha\}$，其关联的、取值于常值层 S_n（编码特征值排序的置换）的切赫 *1*-余循环在 $\check{H}^1(\mathcal{U};\ S_n)$ 中是平凡的。

证明。我们以循环方式证明这些等价关系。

(i) ⇒(ii)：若 $[T, S] = 0$，则根据定理 4，存在一个酉算子 U，使得 UTU^* 和 USU^* 均为对角矩阵。令 $C_0 = U^*\mathbb{C}^nU$，它是包含 T 和 S 的极大交换自伴代数。取 $\mathbb{C}^n$ 的标准基，经 U 共轭，并根据对角线元素标记特征值。由此得到$\mathcal{F}_{T,\ S}(C_0)$ 的一个元素。由于 $\check{H}^0(\mathcal{C};\mathcal{F}_{T,\ S})$ 恰好是全局截面的集合，因此 $\check{H}^0(\mathcal{C};\mathcal{F}_{T,\ S}) \neq \varnothing$。

(ii) ⇒ (iii)：根据定义，$\mathcal{F}_{T,\ S}$ 的一个全局截面是 $\mathcal{F}_{T,\ S}(C_0)$ 中的一个元素，其中 $C_0 \in \mathcal{C}$。根据 $\mathcal{F}_{T,\ S}$ 的定义，这意味着 T，$S \in C_0$。

(iii) ⇒ (i)：若对于某个极大交换自伴代数 C_0，有 T，$S \in C_0$，则 C_0 是交换的，因此 $[T, S] = 0$。根据定理 4，T 和 S 可同时对角化。

(i) ⇒ (iv)：假设 $[T, S] = 0$，并令 $\mathcal{U} = \{C_\alpha\}$ 为 $\mathcal{C}$ 的任意一个覆盖，其中的极大交换 -子代数都包含 T 和 S。（这样的覆盖确实存在：例如，取所有包含由 T 和 S 生成的交换代数的极大交换 -子代数。）

对于每个 C_α，选取一个标记的联合对角化 $B_\alpha \in \mathcal{F}_{T,\ S}(C_\alpha)$。在交叠 $C_\alpha \cap C_\beta$ 上，两个基 B_α 和 B_β 相差一个置换 $\sigma_{\alpha\beta} \in S_n$（因为二者都将相同的互相对易的正规算子 T 和 S 对角化，所以联合特征值是相同的集合，只是排列顺序可能不同）。

集合 $\{\sigma_{\alpha\beta}\}$ 构成一个取值于 S_n 上的 Čech 1-上链，其中 S_n 是定义在 $\mathcal{U}$上的常值层。在三重交 $C_\alpha \cap C_\beta \cap C_\gamma$上，我们有：

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma},$$

因为将 B_α 对应到 B_β 以及将 B_β 对应到 B_γ 的置换复合，必须等于将 B_α 对应到 B_γ的置换。这正是余循环条件。

现在，由于 T 和 S 可同时对角化，因此存在一个全局标记对角化 B_0。将 B_0 限制到每个 C_α 上，可得到局部基 B'_α。B_α 与 B'_α 之间的置换 τ_α 满足：

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}.$$

因此，余循环 $\{\sigma_{\alpha\beta}\}$ 是一个余边界，故在 $\check{H}^1(\mathcal{U};\, S_n)$ 中是平凡的。

(iv) ⇒ (i)： 取一个特定的覆盖 $\mathcal{U}$：对于 T和S的联合特征值（$\lambda_i,\ \mu_i$）的每一种排序 $\pi \in S_n$，选择（若可能）一个包含 T和 S 的极大交换自伴代数 C_π，并选取一个具有该排序的标记对角化。令 $\mathcal{U}$ 为所有此类 C_π构成的集合。

如果相应的Čech 1-余循环是平凡的，那么存在 $\tau_\alpha \in S_n$ 使得 $\sigma_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}$。固定一个指标 α_0，并将 $\tau_{\alpha_0}^{-1}$应用于 C_{α_0}上的排序，从而定义一个全局排序。这个全局排序与所有局部排序相容，这意味着存在一种对联合特征空间的一致标记。因此，可以构造一个酉算子，使 T和 S 按该排序同时对角化，于是$[T, S] = 0$。

□

注释 21 (几何解释**)**。 该定理揭示，对于 $M_n(\mathbb{C})$，联合对角化的障碍体现在 *Čech* 0 层级（全局截面的存在性），而不是 *Čech* 1 层级。式 ***(iv)*** 中构造的 *Čech* 0-上循环测量了单值化：当我们在包含 T 和 S 的极大交换自伴代数空间中移动时，特征值排序所产生的单值化。当 T 和 S 交换时，这种单值化总是平凡的，因为可以选择一个全局排序。在无限维情形或算子的连续族中，即使算子局部交换，$\check{H}^1$ 中的非平凡单值化确实也可能阻碍全局对角化。

注释 22 (与标准理论的关系**)**。 对于有限维 $M_n(\mathbb{C})$，***(i)*** $\Leftrightarrow$ ***(iii)*** 的等价性不过是这样一个代数事实：两个正规算子交换，当且仅当它们包含于某个共同极大阿贝尔子代数中。***(ii)*** 和 ***(iv)*** 中的上同调表述说明了这一代数条件如何转化为层论障碍的消失。在更一般的 C^*-代数语境中，交换子代数格更加复杂，上同调视角便变得至关重要。

例 10（对 $n = 2$ 的显式计算）。 考虑 $M_2(\mathbb{C})$ 其中

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

（*a*）语境：分别将 T 和 S 对角化的两个自然变换极大交换自伴代数为

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

它们的交是 $C_1 \cap C_2 = \mathbb{C} \cdot I_2$，即数量矩阵。

（*b*）局部对角化：

- 在 C_1 中，T 是对角的，其特征向量为：$e_{(1)1} = (1,0)$（特征值 1）、$e_{(1)2} = (0,1)$（特征值−1）。
- 在 C_2 中，S 是对角矩阵，其特征向量为：$e^{(2)}_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)$（特征值为 1），$e^{(2)}_{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)$（特征值为 -1）。

(c) 预层求值： 由于 $T \notin C_2$ 和 $S \notin C_1$，我们有：

$$\mathcal{F}_{T,S}(C_1) = \varnothing, \quad \mathcal{F}_{T,S}(C_2) = \varnothing.$$

因此 $\check{H}^0(\{C_1, C_2\}; \mathcal{F}_{T,\ S}) = \varnothing$，这表明存在一个非平凡障碍。

(d) 几何图景： 在 $M_2(\mathbb{C})$的极大交换自伴代数空间中， C_1 和 C_2 分别表示 T和 S 的两个不同“对角化语境”。没有任何单个极大交换自伴代数同时包含这两个算子，这一事实对应于这样的拓扑事实：两个局部对角化无法粘合成一个全局对角化。这个障碍由不存在 $\mathcal{F}_{T,\ S}$的全局截面来度量，即 $\mathrm{obs}(T, S) \neq 0$。

(e) 与交换子的相容性：直接计算可得：

$$[T, S] = TS - ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

因此 $\mathrm{obs}(T, S) \neq 0$ 与 $[T, S] \neq 0$相符，证实了定理 *5* 中的等价性。

备注 23 (解释与适用范围**)**。 对于 $M_n(\mathbb{C})$中的正规矩阵，障碍类 $\mathrm{obs}(T, S)$为代数交换子条件提供了一个拓扑细化：

- $\mathrm{obs}(T, S) = 0$ *(i.e.,* $\check{H}^0(\mathcal{C}; \mathcal{F}_{T,S}) \neq \varnothing$*) if and only if* $[T, S] = 0$.
- 当 $[T, S] = 0$ 时，这些矩阵可同时对角化，而且由交叠上的特征值排序构造的*ˇCech* 1-余循环总是余边界（在 $\check{H}^1$ 中平凡）。
- 当 $[T, S] \neq 0$ 时，没有极大交换自伴代数同时包含 T和 S，因此 $\mathcal{F}_{T,\ S}$ 在整个范畴$\mathcal{C}$上都具有空茎，而障碍则表现为 *ˇCech* 0 级上不存在全局截面。

这个有限维例子阐明了一般原理：联合对角化的失败可以通过不存在相容的局部对角化族来编码。在无限维的 ˇ情形或对于算子的连续族，*Cech* 上同调方法变得至关重要，因为局部交换性并不一定意味着全局可对角化，而高阶上同调群（$\check{H}^1$、$\check{H}^2$ 等）可能刻画真正的拓扑障碍。

然而，对于 $M_n(\mathbb{C})$，理论会大幅简化：障碍归结为单一条件 $[T, S] = 0$，因此，上同调理论工具虽优雅，却只是对经典代数判据的等价改写。

备注 24 (教学价值**)**。 这个例子起到了桥梁 作用，连接了：

1. 初等线性代数（ 2×2 矩阵的对角化）

2. 算子理论（ $M_n(\mathbb{C})$中的极大交换自伴代数）

ˇ*3.* 层理论与切赫上同调（偏序集范畴上的预层）

4. 非交换几何（作为“非交换谱”的上下文范畴）

这展示了现代同调方法如何为经典问题提供新的视角，即便它们在有限维情形下并未带来新的结果。这种方法的真正威力在无限维情形中才会显现：在那里，像 $[T, S] = 0$ 这样的代数条件可能不足或定义不明确，而上同调障碍仍然定义良好且富有意义。

5 栈论视角

本节介绍由前文发展的谱预层形式体系所带来的真正全新的结构性结论。我们不再重复范畴论或层论基础，而是着重讨论由层化和稳定化产生的全局几何对象与不变量。

5.1 从谱预层到谱堆

动机：为何需要层? 经典谱预层 $\Sigma\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **集合**为每个交换语境 $B \in \mathcal{C}$ 赋予其盖尔范德谱。尽管这一构造忠实地捕捉了局部经典谱数据，却存在一个根本局限：相容的局部谱未必能粘合成唯一的全局对象。

这种失败反映了非交换性的存在。尽管不同语境的交叠上可能存在谱之间的成对识别，但这些识别通常无法在三重交上满足严格的余循环条件。这类更高阶的相容性障碍无法仅靠集合值层完整编码，因为集合值层只记录粘合是否存在，却不记录支配粘合失败的相容性数据。

为了保留这些高阶相干信息，自然的做法是用范畴值预层，具体而言是群胚预层，取代集合值预层。在这种丰富化的框架中，下降不再要求严格相等，只需在同构意义下等价。这种弱化的粘合概念正是由栈条件精确形式化的，它为编码非交换谱几何提供了恰当的框架。

定义 20（谱群胚）。设 A 是一个含幺 C^*-代数，$\mathcal{C}$ 是其含幺交换C^*-子代数构成的偏序集。对每个 $B \in \mathcal{C}$，定义 $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{gpd}}(B)$ 如下：

- 对象：正规 $*$-同态 $\pi\colon L^\infty(\Sigma(B)) \to B'' \subseteq A''$（等价地，谱测度$\mu\colon \mathcal{B}(\Sigma(B)) \to A''$，其像与 B 交换）。
- 态射：对于 $\pi_1, \pi_2\colon L^\infty(\Sigma(B)) \to A''$，态射 $\pi_1 \to \pi_2$ 是一个偏等距算子 $W \in A''$，满足：

$$W^*W = \pi_1(1), \quad WW^* = \pi_2(1), \quad \textit{and} \quad W\pi_1(f) = \pi_2(f)W \ \forall f \in L^\infty(\Sigma(B))$$

当 $\pi_1(\mathbf{1}) = \pi_2(\mathbf{1}) = 1$ 时，这在 A'' 中就是酉等价。

定义 21（群胚的谱预层）。设 A 是一个含幺 C^*-代数，并令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$ 表示 A 的含幺交换 C^*-子代数按包含关系构成的偏序集。

定义一个反变函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd}$$

如下。

- 对象。 对于每个 $B \in \mathcal{C}$，令 $\mathcal{G}(B)$ 为其对象是正规 $*$-表示的群胚 s

$$\pi_B : L^\infty(\Sigma(B)) \longrightarrow A'',$$

其态射 $\pi_B \to \rho_B$ 为酉交织算子 $U \in \mathcal{U}(A'')$，满足

$$U\,\pi_B(f)\,U^* = \rho_B(f), \qquad \forall f \in L^\infty(\Sigma(B)).$$

• 限制函子。 对于包含 $i: B_1 \hookrightarrow B_2$，令 $r_{21}: \Sigma(B_2) \twoheadrightarrow \Sigma(B_1)$ 为由此诱导的盖尔范德谱之间的连续满射。这诱导出一个正规 $*$-同态

$$i^* : L^\infty(\Sigma(B_1)) \longrightarrow L^\infty(\Sigma(B_2)), \qquad f \mapsto f \circ r_{21}.$$

定义限制函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(i) : \mathcal{G}(B_2) \longrightarrow \mathcal{G}(B_1)$$

by:

- *on objects:* $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(i)(\pi_{B_2}) := \pi_{B_2} \circ i^*$;
- *on morphisms:* $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(i)(U) := U$.

作为谱图册的几何解释。 交换上下文的集合 $\mathcal{C}$ 在非交换空间中扮演着一个图册 的角色。每个上下文 $B \in \mathcal{C}$ 都提供一个局部经典图，由群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 编码，而重叠语境之间的过渡数据则通过群胚中的等价关系来表达，而非严格等式。由此得到的群胚预层——在满足下降条件时——将这些局部图组装成一个单一的全局对象，这直接类似于轨形或模叠；在这些对象中，几何空间通过保留普通空间层面无法捕捉的对称性和粘合数据而得到细化。

定理 6 （谱栈的存在性——典范形式）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，并令$\mathcal{C}$ 表示其含幺交换 C^*-子代数所构成的偏序集，赋予典范格罗滕迪克拓扑（其中，一个族 $\{B_i \hookrightarrow B\}$ 覆盖 B 当且仅当 B_i 生成 B 作为一个 C^*-代数）。

定义一个群胚预层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd}$$

将每个 $B \in \mathcal{C}$ 对应到群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$，其:

• 对象 是特征 $\chi: B \to \mathbb{C}$（等价地，根据谱定理，狄拉克谱测度 s δ_χ 在 $\Sigma(B)$上），

• 态射 只有恒等态射（两个特征同构，当且仅当它们相等）。

对于包含 $i: B_1 \hookrightarrow B_2$，限制函子 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(i)$ 由特征限制给出: $\chi \mapsto \chi|_{B_1}$。

于是:

(i) $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 是 $(\mathcal{C}, J_{\mathrm{can}})$ 上的层。

(ii) 连通分支的伴随层满足

$$\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \;\cong\; \underline{\Sigma},$$

其中 $\underline{\Sigma}$是经典谱预层 $\Sigma(B) = \Sigma(B)$。_

(iii) $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 提供了经典谱预层的群胚值细化，以范畴方式而非集合论方式编码下降数据。

证明。我们逐一验证每项断言。

(i) 层性质。令 $\{B_i \hookrightarrow B\}_{i\in I}$ 是典范拓扑下 $\mathcal{C}$ 的一个覆盖族，也就是说， B_i 联合生成 B，使其成为一个 C^*-代数。

一个对象　下降群胚 $\mathbf{Des}(\{B_i \to B\},\ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 由满足以下条件的特征 $\chi_i \in \Sigma(B_i)$ 组成：　t

$$\chi_i|_{B_i\cap B_j} = \chi_j|_{B_i\cap B_j} \quad \text{for all } i,j.$$

由于 $\{B_i\}$ 生成 B， $\bigcup_i B_i$ 的代数张成在 B 中稠密。 B_i 上的一个特征 χ_i 唯一延拓为由 B_i 生成的 C^*-子代数上的特征；根据相容性，这些延拓在交叠处一致，从而在整个 B 上得到一个良定义的特征 χ，且满足 $\chi|_{B_i} = \chi_i$。因此，每个下降数据都是有效的。

由于 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 中的所有态射都是恒等态射，态射上的下降条件自动满足：自然函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B) \to \mathrm{Des}(\{B_i \to B\}, \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$$

是全忠实的。由于它也是本质满的（由上述构造可知），因此是群胚等价。由此， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 满足下降条件，因而是一个层。

(ii) 与谱预层的识别。对于每个 $B \in \mathcal{C}$，群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 都是离散的，其对象集合为 $\Sigma(B)$。取连通分支（同构类）可得

$$\pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)) \cong \Sigma(B).$$

自然性直接由特征限制的函子性得出。对于任意包含 $i : B_1 \hookrightarrow B_2$，图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B_2)) & \xrightarrow{\pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(i))} & \pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B_1)) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \Sigma(B_2) & \xrightarrow{\quad r_{21}\quad} & \Sigma(B_1) \end{array}$$

交换，其中 $r_{21}(\chi) = \chi|_{B_1}$。因此， $\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \cong \Sigma$ 作为预层等价。

(iii) 范畴论精化。经典谱预层 Σ 仅记录局部经典态的集合，而层 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 则以范畴形式记录相同的数据及其下降行为。当推广到非离散群胚（例如态、赋值或表示群胚）时，这种精化至关重要；在这些情形下，粘合仅在等价意义下成立，而非在相等意义下成立。 □

注 25。 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 中态射的平凡性反映了这样一个事实：交换 C^*-代数的特征之间不存在非平凡的酉等价；两个特征酉等价当且仅当它们相等。更复杂的谱堆——例如由态、赋值或表示构造的谱堆——会产生真正非平凡的群胚，但不再允许识别 $\pi_0 \cong \Sigma$。因此，当前构造代表了经典谱预层的最小层论精化。 —

备注 26. 尽管 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 作为群胚值预层看似平凡，但将其表述为一个层，而非仅仅作为一个层，在概念上至关重要：这表明谱预层 Σ 已经满足层更强的下降条件。此外，这一构造为更复杂的非交换层堆提供了范本，在这些层堆中，态射变得非平凡，下降条件也要求真正的范畴粘合。交换情形的简单性构成了一个清晰的基准，可据此衡量非交换推广。

非交换性作为一种堆栈现象。 在这一框架中，非交换性体现为一种真正的层论现象：

- 对于交换的 C^*-代数，谱栈具有平凡的群胚结构，并且等价于一个普通的层，这反映了经典谱能够唯一粘合这一事实。
- 对于非交换的 C^*-代数，定义在交换语境上的局部谱数据未必能够严格粘合，而下降自然只能表述到等价为止。

谱栈的存在带来了以下概念性推论。

推论 5 (层失效与堆栈必要性)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，并设 $\mathcal{C} = \mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ 表示由含幺交换 C^*-子代数构成的范畴，并配备典范的（语境化）格罗滕迪克拓扑。若 $\mathcal{A}$ 是非交换的，则其关联谱预层

$$\underline{\Sigma} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad B \longmapsto \Sigma(B),$$

不是 $\mathcal{C}$上的层，但可以典范地提升为谱栈

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd}.$$

因此，非交换性恰恰通过必须采用层栈层级 而非层层级 的下降来体现。特别地，对于非交换的 $\mathcal{A}$，存在一些覆盖族 $\{B_i \to B\}$，使得 Σ 的相容局部截面无法粘合成唯一的全局截面，而相应的 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$中的下降数据则可以粘合到同构为止。

证明。 我们分三步进行。

1. 谱预层不是层。

设 $\mathcal{A}$ 是非交换的。量子逻辑中的一项基本结果（Kochen–Specker 定理及其 C^*代数表述）指出，当 $\mathcal{A}$ 具有足够强的非交换性时（特别是当它不含维数为 ≥ 3的 I 型因子时），预层 Σ 没有全局截面。等价地，在典范拓扑中存在覆盖族 $\{B_i \to B\}$，使得相容的局部特征族

$$\chi_i \in \Sigma(B_i), \qquad \chi_i|_{B_i \cap B_j} = \chi_j|_{B_i \cap B_j},$$

无法粘合成 $\Sigma(B)$中的一个特征。

这种失败反映了无法为非交换代数中的所有可观测量赋予一致的经典值——这是玻尔互补原理的一种体现。因此， Σ不满足层的等化子条件，因而不是 $\mathcal{C}$上的层。 —

2. 谱栈的典范增强。

尽管存在这一失败，定理 6 表明，范畴化函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B) := \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{gpd}}(B),$$

其对象是 $\Sigma(B)$ 上的谱测度，态射是酉等价，并且它对同一拓扑满足有效下降。也就是说，对于每个覆盖族 $\{B_i \to B\}$，典范函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B) \longrightarrow \mathrm{Des}\big(\{B_i \to B\}, \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}\big)$$

是群胚等价。

此外，取连通分支可恢复经典谱预层：

$$\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \;\simeq\; \underline{\Sigma}.$$

因此， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 提供了 Σ的一种规范增强，在其中下降得以恢复。

3. 非交换性作为层叠级障碍。

第 1 步中确定的障碍源于集合值下降的刚性：层要求粘合截面相等。在非交换情形中，不同的交换上下文（极大阿贝尔子代数）提供了互补但彼此不相容的经典视角。

层叠 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 通过将相等性弱化为同构来解决这一障碍。尽管相容的局部特征可能无法粘合为全局特征，但相应的谱测度确实可以在酉等价意义下粘合。这种灵活性——能够通过同构而非相等来识别对象——正是层叠得以容纳破坏层条件的量子互补性的原因。

因此，层级下降的失败与堆栈层级的下降的成功共同提供了非交换性的一种精确几何特征：量子系统需要范畴论意义上的粘合，而非集合论意义上的粘合。

我们得出结论：对于非交换 C^*代数 $\mathcal{A}$，经典谱几何必然会在层的层面失效，但在层栈的层面得以恢复。因此，谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 才是编码非交换谱下降性质的恰当几何对象。

□

以下推论精确说明了非交换性不仅仅是代数缺陷，而是真正的几何障碍；它恰好由严格（层级）下降的失效检测到，并通过非平凡栈结构的出现来衡量。

推论6 (交换性的刻画)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*代数。以下条件等价：

(a) $\mathcal{A}$ 是交换的。

(b) 谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 等价于一个层，即对于每个 $B \in \mathcal{C}$ ，所有自同构群$\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)}(\mu)$ 都是平凡的。

(c) $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 的所有下降数据都严格有效：每个有效下降数据都存在唯一的粘合，且在唯一同构意义下唯一。

特别是，真正的非交换性恰由非平凡栈结构精确编码，而交换性则对应纯粹类似于层的行为。

证明。 我们证明 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$。

$(a) \Rightarrow (b)$。 假设 $\mathcal{A}$是交换的。对于每个 $B \in \mathcal{C}$ ，包络冯·诺依曼代数 B'' 都是交换的。在交换冯·诺依曼代数中，每个酉算子通过共轭作用于投影上都是平凡的；等价地，所有谱测度的内自同构都是平凡的。因此，每个对象 $\mu \in \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 都满足 $\mathrm{Aut}(\mu) = \{\mathrm{id}_\mu\}$。所以 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 等价于一个离散层，即层 $\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \simeq \underline{\Sigma}$。

$(b) \Rightarrow (c)$。 假设 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 中的所有自同构群都是平凡的。那么 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 等价于通过嵌入 $\mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Gpd}$由一个层导出的离散层。在这种情况下，任何有效下降数据都存在唯一的粘合：不存在可能产生不同粘合的非平凡自同构。更形式地说，给定一个覆盖 $\{B_i \to B\}$ 和有效下降数据（μ_i， ϕ_{ij}），若（μ，ψ_i）和（μ'， ψ_i'）是两个粘合，则复合 $\psi_i' \circ \psi_i^{-1}$： $\mu|_{B_i} \to \mu'|_{B_i}$ 可以粘合起来，得到一个同构 $\mu \cong \mu'$；根据上述假设，该同构必为单位元。因此，粘合在唯一同构意义下是唯一的。等价地，所有切赫余循环都是余边界，且下降严格有效。

$(c) \Rightarrow (a)$。我们证明其逆否命题。假设 $\mathcal{A}$ 是非交换的。根据推论 5，谱预层 Σ 不满足层条件。因此，存在一个覆盖 $\{B_i \to B\}$，它属于 $\mathcal{C}$，并伴有相容的局部特征 $\chi_i \in \Sigma(B_i)$（满足 $\chi_i|_{B_i \cap B_j} = \chi_j|_{B_i \cap B_j}$），但这些特征无法粘合为任何全局特征 $\chi \in \Sigma(B)$。

考虑相应的下降数据

$$(\delta_{\chi_i}, \mathrm{id}) \quad \text{in} \quad \mathcal{G}_{\mathrm{stk}},$$

它由狄拉克谱测度 δ_{χ_i} 以及交叠上的恒等同构组成。根据$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 的层性质（定理 6），这组下降数据是有效的：存在一个全局对象 $\mu \in \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$，以及同构 $\psi_i : \mu|_{B_i} \xrightarrow{\sim} \delta_{\chi_i}$。

如果下降是严格有效的，那么粘合 (μ, ψ_i) 在唯一同构意义下将是唯一的。特别是，μ 必须同构于某个狄拉克测度 δ_χ，其中 $\chi \in \Sigma(B)$，因为所有局部对象都是狄拉克测度，而且狄拉克测度之间的任何同构都必定来自一个特征（根据谱定理）。但这样一来，χ 在每个 B_i 上都将限制为 χ_i（通过同构 ψ_i），这与 χ_i 无法粘合成一个全局特征这一事实相矛盾。

因此，当 $\mathcal{A}$ 是非交换的时，存在有效但非严格有效的下降数据。由逆否命题可知，条件 (c) 蕴含 $\mathcal{A}$ 是交换的。

解释。该等价性表明，交换性对应于这样一种退化情形：叠式下降退化为类层下降——自同构是平凡的，且粘合是唯一的。另一方面，非交换性引入了本质性的高阶范畴结构：自同构变得非平凡，而粘合需要真正的范畴等价，而非严格相等。这以下降理论的术语，为交换性提供了精确的几何刻画。

□

注 27（与托普斯量子理论的关系）。谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 可以被视为 *Isham*、*D¨oring* 及其合作者所发展的量子理论托普斯理论方法的高阶范畴论精化（例如参见 *[16]*）。在标准的托普斯表述中，量子可观测量由谱预层编码

$$\underline{\Sigma} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set},$$

该谱预层将每个交换上下文 $B \in \mathcal{C}$ 映射到 B的盖尔范德谱 $\Sigma(B)$。该框架的一个核心结果是，只要环境代数 $\mathcal{A}$ 是非交换的，预层 Σ 就不具有任何全局截面。这一现象与 *Kochen–Specker* 定理密切相关，表达了不可能为量子可观测量赋予与语境无关的经典值。

我们并不试图在集合层面强行实现经典性，而是用群胚值赋值取代集合值预层 Σ

—

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Gpd},$$

该赋值保留了谱数据的内在对称性。具体而言，对于每个交换语境 B，群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 以范畴化形式编码谱信息：其对象可解释为 B 的表示（等价地说，是 $\Sigma(B)$ 上的投影值谱测度），而态射则由酉交织算子给出。这样，$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 记录的不仅是谱数据，还包括关联不同数据实现方式的自然等价。

根据定理 *6*，赋值 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 相对于在 $\mathcal{C}$上选定的格罗滕迪克拓扑，具有层的结构，并且对对象和态射都满足下降条件。这确保了谱数据能够在重叠的交换语境之间一致地粘合，即使底层代数 $\mathcal{A}$ 并非交换。由此得到的层因此提供了一个几何对象，使其在集合值谱预层呈现上下文障碍的情形下仍能保持良好的性质。

最后， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 与传统的拓扑斯理论图景之间的关系，可以通过去范畴化来理解。非正式地说，取连通分支 $\pi_0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 会舍弃幺正对称性数据，并恢复一个集合层次的影像，它与谱预层 Σ密切相关。从这个意义上说， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 是对拓扑斯方法的细化，而非取代：它通过保留在集合层次不可见的高阶范畴结构，丰富了经典谱预层。

从这一视角看，量子语境性不再被解释为仅仅发生在层层面的经典粘合失败，而是被视为真正非平凡栈结构的体现。谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 因而为量子理论提供了一个自然的高阶几何框架，其中群胚既编码谱数据，也编码联系不同经典语境的对称性。

注释28（通向同伦论不变量的路径）。 谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 为构造与非交换代数相关的同伦论不变量提供了一个自然的起点。这些不变量并不以经典意义上的数值测度为形式，而是编码了由于全局经典描述失败而产生的障碍论信息和高阶几何信息。通向这类不变量的概念性路径可以概述如下。

1. 逐对象应用神经函子 $N\colon\ \mathbf{Gpd}\ \to \mathbf{sSet}$ 得到一个单纯预层

$$N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet},$$

*wh*其值是编码群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}\ (B)$ 的同伦类型的*Kan*复形。

2. 添上一个不交基点后，可以先进行几何实现，再逐对象应用悬挂谱函子，从而得到一个谱预层，

$$\mathcal{G}_{\mathrm{sp}} := \Sigma^{\infty}_{+} \circ |-| \circ (-)_{+} \circ N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}.$$

*T*这一步对谱栈所承载的同伦数据进行了稳定化。

3. 为确保与下降相容，我们针对 $\mathcal{C}$ 上选定的格罗滕迪克拓扑进行同伦层化，从而得到一个谱层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}^{\mathrm{sh}}.$$

4. $\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}^{\mathrm{sh}}$ 的导出整体截面，即超上同调谱，

$$\mathbf{E}_{\mathcal{A}} := \mathbb{H}(\mathcal{C}; \mathcal{G}_{\mathrm{sp}}^{\mathrm{sh}}) \in \mathbf{Sp},$$

将局部定义的同伦数据汇集为一个全局对象。

稳定同伦群

$$\pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}}), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

以及相关的下降（或超上同调）谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}, \pi_q(\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}^{\mathrm{sh}})) \ \Rightarrow\ \pi_{p+q}(\mathbf{E}_{\mathcal{A}}),$$

定义与代数 $\mathcal{A}$ 自然相关的同伦不变量。这些不变量刻画了源于经典粘合失效的障碍理论信息：例如，谱序列中的非平凡同伦群或微分反映了全局截面的缺失，以及真正的高范畴下降数据的存在。

从这一视角看，非交换性不仅体现为集合值层条件不成立，也体现为与谱栈相关的非平凡同伦和上同调类的涌现。因此，所得不变量为比较不同程度和形式的语境性提供了结构化的同伦框架，而这些语境性表现为 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 的高阶几何复杂性。

概念层级与几何解释。 从经典几何框架到量子几何框架的演进，可以通过以下概念图加以概括：

代数结构	$\xrightarrow{\text{几何实现 / 赋值}}$	范畴 / 几何框架
交换 C^*-代数 $\mathcal{A}$	$\mapsto$	集合层 Σ （经典谱预层）
$\downarrow$		$\downarrow$
非交换性 $([\cdot,\cdot]\neq 0)$		范畴化 / 群胚富化 （增加对称性和高阶相干性）
非交换 C^*-代数 $\mathcal{A}$	$\mapsto$	群胚层 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ （带酉等价的谱栈）
$\downarrow$		$\downarrow$
同伦完备化 / 分析		稳定化与导出整体截面
同伦不变量 / 障碍类	$\mapsto$	整体谱 $\mathbf{E}_{\mathcal{A}}$ （产生超上同调不变量）

因此，谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 应运而生，成为编码 C^*-代数谱结构的基本几何对象。其层的性质——以非平凡自同构群和相容的下降数据为特征——捕捉了非交换性带来的复杂性；而其同伦精化（通过稳定化和导出整体截面实现）则产生可计算的不变量，反映出经典层论描述的失效。这一框架建立了算子代数、高阶范畴论与代数拓扑之间的深层联系，为分析量子系统和非交换空间提供了新工具。

5.2 同伦与稳定增强

在陈述主要的同伦增强定理之前，我们先简要概述其概念路径。谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 编码了 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的局部谱数据及其酉对称性。为了提取能够反映高阶非交换现象的整体不变量，我们需要经过几个同伦步骤：

- 首先，通过神经函子将层转化为单纯预层，从而编码每个交换语境下群胚的同伦类型。
- 添加一个不交基点，随后进行几何实现，并通过悬挂谱函子进行稳定化，从而得到上下文位上的谱预层。
- 最后，取该预层的同伦极限（或导出整体截面），将局部谱信息汇集为一个整体对象。

由此得到的稳定同伦类型捕捉了与 $\mathcal{A}$ 相关的所有高阶相干性和障碍理论数据，是对经典谱预层的推广。特别是，其稳定同伦群提供了函子性不变量：零次同伦群恢复交换兼容性，而更高次数的同伦群则量化了全局谱下降的障碍。

有了这一概念框架之后，我们现在通过以下定理将这些构造形式化。

定理 7 （C^*-代数的稳定同伦不变量）。 设 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 为与含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$相关联的谱栈。经过应用神经函子、带不交基点的几何实现以及稳定化后，存在一个谱预层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{sp}} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp},$$

其同伦极限

$$\mathbf{E}_{\mathcal{A}} := \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{sp}}$$

是 $\mathcal{A}$ 的稳定同伦不变量，除弱等价外，不依赖于所选的交换语境表示。此外，对于每个整数 $n \in \mathbb{Z}$，稳定同伦群

$$\pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}})$$

定义了 $\mathcal{A}$ 的函子性不变量：零次捕捉经典谱预层存在全局截面的障碍，而正次数则测度局部谱数据相干粘合的高阶障碍，从而量化非交换性。

定理 7 的证明。 **1. 稳定谱预层的构造**。

1. 从谱栈开始

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Gpd},$$

其中 $\mathcal{C}$ 是由 $\mathcal{A}$ 的交换含幺 $*$-子代数组成的位点。对于每个 $B \in \mathcal{C}$， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 是 B 上谱测度构成的群胚，其态射为酉等价。

2. 应用神经函子，得到一个单纯预层

$$N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}.$$

3. 添加一个不交基点，得到一个有基点的单纯预层

$$(N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})_+ : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}_*.$$

4. 逐对象应用几何实现：

$$|(N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})_+| : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}_*.$$

5. 使用悬挂谱函子进行稳定化：

$$\mathcal{G}_{\mathrm{sp}} := \Sigma^\infty_+ \circ |(N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})_+| : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sp}.$$

2. 函子性与同伦下降。

• 上面的每一步都是自然变换，因此 $\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}$ 关于 $*$-代数的 C^*-同态具有函子性。

• 由于 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 是一个层，$N \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 满足同伦下降。悬挂谱函子保持连通空间之间的弱等价，因此 $\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}$ 满足典范拓扑中的下降。

3. 同伦极限与不变性。定义

$$\mathbf{E}_{\mathcal{A}} := \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{sp}} \in \mathbf{Sp}.$$

这个对象与 $\mathcal{C}$ 的表示方式选择无关，只差一个典范弱等价：等价的位点会产生弱等价的图表，而同伦极限只取决于预层的弱同伦类型。

4. 作为函子性不变量的稳定同伦群。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\mathsf{Inv}_n(\mathcal{A}) := \pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}}).$$

这些具有函子性：

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \implies \mathbf{E}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \implies \mathsf{Inv}_n(\mathcal{B}) \to \mathsf{Inv}_n(\mathcal{A}).$$

零次（$n = 0$）：$\mathsf{Inv}_0(\mathcal{A})$ 将谱预层的整体截面按相干等价分类。如果 $\mathcal{A}$ 是交换的，则这恢复为盖尔范德谱 $\Sigma(\mathcal{A})$。

正次数（$n > 0$）：$\mathsf{Inv}_n(\mathcal{A})$ 测量相干粘合局部谱数据时的障碍。对于交换的 $\mathcal{A}$，所有 $\mathsf{Inv}_n(\mathcal{A}) = 0$；对于非交换的 $\mathcal{A}$，某些不变量非平凡，从而提供非交换性的定量测度。

负次数（$n < 0$）：这些刻画稳定同伦现象，并且在 $\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}$ 是连通的情况下可能消失。

5. 结论。 谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{sp}}$ 及其同伦极限$\mathbf{E}_{\mathcal{A}}$ 为谱栈提供了同伦精化。稳定同伦群 $\pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}})$ 是具有函子性的、与位点无关的不变量：它们在零次度上恢复经典谱数据，并在更高次度上量化非交换性。 □

注 29。 不变量 $\mathsf{Inv}_n(\mathcal{A})$ 由下降谱序列计算得到

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}, \pi_q(\mathcal{G}_{\mathrm{sp}})) \Rightarrow \pi_{p+q}(\mathbf{E}_{\mathcal{A}}),$$

它将局部同伦数据与全局障碍联系起来。对于交换的 $\mathcal{A}$，预层 $\pi_q(\mathcal{G}_{\mathrm{sp}})$ 集中在 $q = 0$次度，这解释了为什么$\mathsf{Inv}_n(\mathcal{A}) = 0$ 对于 $n > 0$。

5.3 与非交换几何的关系

非交换几何旨在将非交换的 C^*-代数诠释为广义空间，其几何性质并非由点编码，而是由代数、范畴或同调数据刻画。在交换情形下，格尔范德–奈马克定理将含幺交换 C^*-代数识别为紧豪斯多夫空间上连续函数构成的代数，从而仅凭谱即可恢复几何。然而，对于非交换代数，不存在单一的整体谱，几何信息必须由局部交换数据及其相容关系共同整合而成。对 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 为这一理念提供了具体实现，将一个 C^*-代数诠释为配备谱图册的空间。

局部经典图表。 令 $\mathcal{C}$ 表示给定含幺 C^*代数 $\mathcal{A}$的含幺交换 C^*子代数所构成的偏序集（或位点）。每个语境 $B \in \mathcal{C}$ 都可通过其盖尔范德谱 $\Sigma(B)$获得经典解释，该谱可视为某个设想中的几何空间里的一个仿射图。这些图各自都是经典的，但它们的交叠由语境包含关系所诱导的限制映射决定。

全局经典几何的失败。 一般而言，这些局部谱无法粘合成单一的全局空间，反映出 $\mathcal{A}$的内在非交换性。经典谱预层在集合层面捕捉到了这种失败，但丢失了关于酉等价以及两者之间高阶相干性的关键信息

局部模型。正如前文所示，这种信息损失恰恰表现为层级下降的失败。

谱栈作为几何增强。 谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 通过为每个语境 B 赋予的不仅是一个特征集合，而是一个包含谱数据及其酉等价的群胚，从而细化了谱预层。从几何视角来看， $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 充当结构层的高范畴替代物，不仅编码局部谱，也编码其粘合中固有的障碍与歧义。因此，它为非交换空间 $\mathcal{A}$提供了谱图册，将所有局部交换视角组织成一个连贯的全局对象。

非交换空间作为栈空间。 这一观点将$(\mathcal{A},\ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$明确置于非交换几何的范式之中：代数 $\mathcal{A}$决定了一族局部经典图表，而谱栈则记录了它们相互作用所产生的整体几何。特别是，非交换性不再仅仅被视为一种代数缺陷，而是被视为一种真正的几何特征，可通过非平凡栈结构和高阶下降数据加以识别。

通向导出几何与同伦几何的桥梁。 由于 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 是层而非层，她自然通过神经和稳定化构造获得导出与同伦增强。这使谱层成为非交换不变量（如 K-理论和循环上同调）的几何载体，将算子代数与导出代数几何、高阶范畴论和同伦论中的现代工具联系起来。这在 C^*-代数的分析世界与导出几何对象的范畴框架之间建立了一座强有力的概念桥梁。

定理 8 (谱图册诠释)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个带单位的 C^*-代数，且 $\mathcal{C}$ 是其带单位交换 C^*-子代数的范畴，并赋予典范拓扑。则存在一个谱层

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd},$$

具有以下性质：

(i) 对于每个 $B \in \mathcal{C}$，群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 编码了 B的完整局部谱数据，包括其酉对称性。明确地说：

- 对象： $\Sigma(B)$ 上的谱测度（或者，等价地，根据谱定理，酉的 $*$-同态$C(\Sigma(B)) \to B''$）。
- 态射：酉算子 $U \in \mathcal{U}(B'')$满足：对所有博雷尔 $\Delta \subseteq\Sigma(B)$， $U\mu(\Delta)U^* = \nu(\Delta)$。

(ii) 对于包含关系 $B_1 \subseteq B_2$，限制函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B_2) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B_1)$$

刻画了谱数据及其对称性如何在不同语境之间相互关联。

(iii) $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 满足层（下降）条件：任意相容的局部谱数据族都能粘合为一个全局对象，且在同构意义下唯一。

(iv) 经典谱预层可表示为

$$\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \ \simeq\ \underline{\Sigma}, \qquad B \mapsto \Sigma(B).$$

从这个意义上说，对 $(\mathcal{C}, \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$为 $\mathcal{A}$ 提供了一个谱图册： $\mathcal{C}$ 为局部仿射图表编制索引，而 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 则编码图表及其粘合数据，包括高阶范畴信息。

定理 *8* 的证明。**步骤 1：局部经典图表**。对于每个 $B \in \mathcal{C}$，格尔范德–奈马克定理给出$B \cong C(\Sigma(B))$，因此 $\Sigma(B)$ 是一个紧豪斯多夫空间，可将其解释为一个局部仿射图表。

步骤 2：预层失效及对层栈的需求。经典谱预层

$$\underline{\Sigma} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad B \mapsto \Sigma(B),$$

当 $\mathcal{A}$ 是非交换的时代数时，它就不是层。造成这一缺失的原因是，集合值预层无法记录局部谱之间的酉等价和高阶相干性。这促使我们引入谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$。

步骤 3：层栈的构造。定义 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 为 $\Sigma(B)$ 上谱测度构成的群胚，其态射由酉等价给出：

$$\mu \to \nu \quad \text{iff} \quad \exists U \in \mathcal{U}(B'') \text{ s.t. } U\mu(\Delta)U^* = \nu(\Delta) \text{ for all Borel } \Delta \subseteq \Sigma(B).$$

对于包含关系 $B_1 \subseteq B_2$，限制函子由代数的包含自然诱导。

步骤 4：层性质。根据定理 6，$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 满足下降条件：谱数据的相容族可以粘合，且粘合结果在同构意义下唯一。这确保 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 能相干地编码整体几何，包括非平凡的酉对称性。

步骤 5：图册解释。

- 语境 $B \in \mathcal{C}$ 充当局部仿射图表。
- 群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 编码了每个图表的谱几何结构，包括高阶对称性（谱测度的自同构）。
- 限制函子和下降性质编码了图表之间的粘合数据。
- 经典谱预层可恢复为 $\pi_0 \circ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$，但该层包含额外的高阶范畴信息：自同构群 $\mathrm{Aut}(\mu)$ 记录了同一经典数据的不同实现之间的酉等价。

因此，$(\mathcal{C},\ \mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 构成一个谱图册：它由带有粘合数据的局部图表组成，并能忠实地捕捉 $\mathcal{A}$ 的几何结构，直至栈等价。 □

定理 8 将上述讨论形式化：$\mathcal{A}$ 的非交换几何完全由其谱图册 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$中包含的下降数据所捕捉。这一原则将某些非交换现象——例如量子语境性、超选择规则和测量兼容性——的研究归结为对经典图表粘合条件的分析，从而为算子代数提供一种几何语言，并为运用层理论和栈理论中的技术打开了大门。

6 Ap应用：通过谱堆重释 Atiyah-Singer

6.1 动机

经典 Atiyah-Singer (AS) 指标定理根据拓扑不变量计算紧流形 M 上椭圆算子 T 的指标：

$$\mathrm{index}(T) = \int_M \mathrm{ch}(\sigma(T)) \wedge \mathrm{Td}(TM),$$

其中 $\sigma(T) \in K^0(T^*M)$ 是 T 的符号类，而 $\mathrm{Td}(TM)$ 是切丛的 Todd 类。从核心来看，该定理将一个解析不变量（Fredholm 指数）表达为一个拓扑障碍，连接了分析、几何与拓扑。

在我们的框架中，一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 可以解释为一个非交换空间，其中交换子代数（语境）$B \subset \mathcal{A}$扮演“仿射图表”的角色。谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 将算子在这些语境中的局部谱信息组织成一个连贯的全局结构。这提供了一种自然变换的视角：正如阿蒂亚–辛格定理将指标解释为拓扑障碍一样，非交换代数中弗雷德霍姆算子的局部谱数据也可以通过谱栈加以汇集和研究。

设 $T \in \mathcal{A}$ 是一个具有经典指标的弗雷德霍姆算子

$$\mathrm{index}(T) = \dim \ker T - \dim \mathrm{coker} T.$$

对于每个交换语境 $B \in \mathcal{C}$，在限制 $T|_B$ 有定义时，都可以考虑它。$T|_B$ 的谱数据可由盖尔范德谱 $\Sigma(B)$ 上的谱测度 μ_B 描述，其中 B 同时涵盖点谱和连续谱的贡献。所有此类局部谱测度 $\{\mu_B\}_{B\in\mathcal{C}}$ 构成群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}(B)$ 中的对象，其态射由保持谱数据的酉等价或自同构给出。

因此，谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 编码了将这些局部谱数据粘合为 $\mathcal{A}$ 的全局谱对象所需的相容条件。在交换情形下，这些粘合条件显然成立，从而恢复经典阿蒂亚–辛格定理。在真正的非交换情形中，层可能呈现非平凡的自同构和高阶相干现象，为从全局的下降理论视角研究指标和谱不变量提供了一个框架。

这一观点在经典指标理论与非交换几何之间建立了概念上的桥梁：Atiyah-Singer 定理将解析不变量表示为拓扑或上同调障碍，而谱栈框架则允许我们通过对局部谱数据进行相干组装来解释和分析这些不变量。从这个意义上说，谱栈为我们理解交换与非交换情形下的指标理论提供了全新的视角。

6.2 K 理论与同伦解释

在谱栈框架中，含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 导出一个 K-理论层 $\mathcal{F}_K$，定义在谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 上，用以编码交换语境中的局部指标数据及其下降关系。该框架将经典 Atiyah-Singer 指数理论自然地扩展到非交换情形。

推论 7 (交换 C^*-代数**)。** 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 是一个交换含幺 C^*-代数，且 $T \in \mathcal{A}$ 是一个弗雷德霍姆算子（例如，紧流形 X 上的椭圆算子）。那么谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 退化为盖尔范德谱 X，K-理论层 $\mathcal{F}_K$ 是 $K^0(X)$，而上同调 $H^*(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 与 X 的通常 ***de Rham*** （或奇异）上同调一致。

在这种情况下，栈论指标公式

$$\mathrm{index}(T) = \langle \mathrm{ch}([T]), [X] \rangle$$

归结为经典的阿蒂亚–辛格指标定理。

证明。对于交换的 C^*-代数 $C(X)$，盖尔范德谱就是 X 本身。谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$没有非平凡自同构，因此下降是自动的。$K$-理论层 $\mathcal{F}_K$ 就是 $K^0(X)$，而陈特征取值于 $H^{\mathrm{even}}(X)$。经典的庞加莱对偶给出一个基本类 $[X]$，与陈特征配对即可恢复通常的指标：

$$\langle \mathrm{ch}([T]), [X] \rangle = \mathrm{index}(T),$$

这与阿蒂亚–辛格公式相一致。 □

推论 8 (矩阵代数**)**。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ 为 $n \times n$ 复矩阵代数，且 $T \in \mathcal{A}$为弗雷德霍姆算子。那么谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 是平凡的（单个点），而 K-理论层 $\mathcal{F}_K$化简为 $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$。

在此情形下，栈论指标公式化约为线性映射指标的经典公式：

$$\mathrm{index}(T) = \dim \ker T - \dim \mathrm{coker}\, T.$$

证明。 对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 只有一个对象，且没有非平凡态射。 K- 理论 $M_n(\mathbb{C})$ 为 $K_0(M_n(\mathbb{C}))$ $\cong \mathbb{Z}$，由投影的秩生成。此情形下的陈特征是单位映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$。与平凡栈（一个点）的基本类配对，得到

$$\langle \mathrm{ch}([T]), [\mathrm{pt}] \rangle = \dim \ker T - \dim \mathrm{coker}\, T,$$

从而得到标准的有限维 Fredholm 指数公式。 □

注 30. 这 两个推论展示了极端情形下谱栈结构的退化 *:*

- 在交换情形下（$C(X)$），层$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 等价于经典空间 X .
- 在完全非交换的矩阵情形（$M_n(\mathbb{C})$）中，层退化为一个点。

中间态的非交换代数呈现出真正的层状行为，而谱栈框架则自然地将 *Atiyah-Singer* 指数理论扩展到能够捕捉这类现象。

6.3 导出与同伦精化

Th谱栈可通过神经与稳定化增强为谱预层 :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{der}} := \Sigma^\infty \circ N\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sp}.$$

同伦极限

$$X_{\mathcal{A}} := \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{der}}$$

计算导出整体截面，纳入经典粘合以及由非交换性引起的高阶相容性现象。

推论 9 （来自谱堆的稳定同伦不变量）。 稳定同伦群 *s*

$$\pi_n(X_{\mathcal{A}}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

定义 $\mathcal{A}$ 的函子性不变量：

- $\pi_0(X_{\mathcal{A}})$ 在交换情形下还原经典 *Fredholm* 指标。
- $\pi_n(X_{\mathcal{A}})$ 对于 $n > 0$，用于度量组装局部谱数据时的高阶障碍和相干性失效。
- $\pi_n(X_{\mathcal{A}})$ 对于 $n < 0$，编码稳定同伦现象；若预层是连通的，这些现象通常会消失。

这一构造为指标理论提供了同伦精化，其中 π_0 对应于经典解析指标，而高阶同伦群则捕捉了微妙的非交换效应。

证明。 该论证通过将层化的 K-理论层提升为导出且稳定的同伦增强来展开：

步骤 1：谱预层。谱栈是一个伪函子

$$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Gpd}.$$

应用神经和稳定化后得到一个谱预层 $\mathcal{G}_{\mathrm{der}}$，它编码对象、态射以及所有高阶相容数据。

步骤 2：同伦极限。同伦极限

$$X_{\mathcal{A}} := \mathrm{holim}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{G}_{\mathrm{der}}$$

计算导　　出的整体截面，记录严格下降的障碍和高阶相容性　　.

步骤 3：同伦群的解释。

- $\pi_0(X_{\mathcal{A}})$ 对应于整体谱截面（模相容等价），并且在交换情形下恢复经典 Fredholm 指标。
- $\pi_n(X_{\mathcal{A}})$ 对 $n > 0$ 测量局部谱数据粘合时的高阶障碍。
- $\pi_n(X_{\mathcal{A}})$ 对 $n < 0$ 反映稳定同伦现象，并且在连通预层中通常消失。

步骤 4：函子性。 含幺 $*$-同态 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 诱导自然映射

$$X_{\mathcal{A}} \longrightarrow X_{\mathcal{B}}$$

因此在所有同伦群上诱导函子映射 $\pi_n(X_{\mathcal{A}})$。 □

注释 31。 在这一框架中，导出谱栈为经典指标理论与非交换稳定同伦论搭建了一座桥梁。零次同伦群恢复解析指标，而高阶群则编码了与真正的非交换代数相关、日益复杂的障碍和相干现象。

6.4 讨论

经典 Fredholm 指标、算子 K-理论以及层化和导出视角之间的关系，可通过以下图表对应关系概括：

$$\begin{array}{ccc}
T \in \mathcal{A}_{\mathrm{Fred}} & \xrightarrow{\ \mathrm{index}\ } & \mathrm{index}(T) \in \mathbb{Z} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{classifying point}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \simeq K^0(\mathrm{pt})} \\
\mathrm{pt} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{stk}} & \xrightarrow{\ \text{global } K\text{-class}\ } & \in K^0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{derived enhancement}} \\
\mathrm{pt} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{der}} & \xrightarrow{\ \text{derived global sections}\ } & \pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}})
\end{array}$$

在此框架中，弗雷德霍姆算子 $T \in \mathcal{A}$ 确定一个经典指标 $\mathrm{index}(T) \in \mathbb{Z} \cong K^0(\mathrm{pt})$。等价地，$T$ 定义了谱栈 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$的一个分类点，该谱栈以弗雷德霍姆条件为约束，对局部谱数据进行参数化。相应的全局 K- 理论类 $[\mathcal{F}_T] \in K^0(\mathcal{G}_{\mathrm{stk}})$ 则编码了在不同语境中相干地平凡化局部谱数据时所遇到的障碍。

从 $\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 转向其导出增强 $\mathcal{G}_{\mathrm{der}}$，会以同伦相干下降取代严格下降。导出整体截面的谱 $\mathbf{E}_{\mathcal{A}}$ 囊括了这些高阶相容数据，其稳定同伦群 $\pi_n(\mathbf{E}_{\mathcal{A}})$ 则衡量谱下降到整体时依次出现的障碍。

在这一设定下：

- 0 次度还原为经典 Fredholm 指数，为层论 K理论与传统指标理论搭建了一座具体的桥梁。

- 正次数刻画了由真正的非交换代数引发的高阶障碍与相干现象。

- 负次数则捕捉导出整体截面中的稳定同伦现象。

注 32. 具体而言，$\mathcal{G}_{\mathrm{stk}}$ 表示由满足弗雷德霍姆条件的弗雷德霍姆复形或局部谱数据参数化的谱栈，而 $\mathcal{G}_{\mathrm{der}}$ 是它的导出增强，用以编码同伦相干的下降数据。谱 $\mathbf{E}_{\mathcal{A}}$ 由 $\mathbf{E}_{\mathcal{A}} = \Gamma\big(\mathcal{G}_{\mathrm{der}}, \mathcal{O}^{\mathrm{top}}\big)$ 得到，即在 $\mathcal{G}_{\mathrm{der}}$ 上的谱层的（超）层上同调或全局截面；这里采用的是导出或谱代数几何的意义。

尽管完整的栈论指标公式仍有待进一步研究，但这一框架已经为经典阿蒂亚–辛格定理提供了具体应用，并产生了能够捕捉高阶非交换效应的函子性同伦不变量。

参考文献

[1] M. Reed 和 B. Simon，《现代数理物理方法》第 IV 卷：《算子分析》。纽约：Academic Press，待定；谱定理和算子理论的标准参考文献。[2] J. L. Taylor，“若干交换算子的联合谱”，《泛函分析杂志》，第 6 卷，172–191 页，1970 年；泰勒联合谱的奠基性构造。[3] A. Connes，《非交换几何》。圣迭戈：Academic Press，1994 年；非交换几何的奠基性著作。[4] A. D¨oring 和 C. Isham，“‘什么是事物？’：物理学基础中的托扑斯理论”，载于《物理学的新结构》。施普林格，2010 年，第 753–937 页。[5] S. Kochen 和 E. P. Specker，“量子力学中的隐变量问题”，载于《恩斯特·施佩克选集》。施普林格，2011 年，第 235–263 页。[6] L. Breen，《关于 2-gerbe 和 2-栈的分类》。法国数学会，1994 年。[7] S.-Y. Chang，“Hilbmult：用于算子代数的巴拿赫富化多范畴”，2025 年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2511.13674[8] ——，“复合与相干：算子网络的语法”，2025 年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2511.13706[9] ——，“多范畴伴随、单子性与量子资源”，2025 年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2512.15951

[10] OpenAI，“ChatGPT（GPT-5）模型”，https://chat.openai.com/，2025 年；用于构想验证和参考资料辅助的大语言模型。[11] DeepSeek-AI，“DeepSeek 大语言模型”，https://www.deepseek.com/，2025 年；用于交叉验证概念和数据的 AI 助手。[12] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第 2 版，数学研究生教材丛书。纽约：施普林格出版社，1998 年，第 5 卷；范畴论的标准参考文献。[13] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《流形上的层》，数学基础丛书。施普林格出版社，1990 年，第 292 卷。[14] P. T. Johnstone，《大象素描：托扑斯理论纲要》。牛津：牛津大学出版社，2002 年，第 1 卷；托扑斯理论和范畴逻辑的综合性参考著作。[15] J. Hansen 和 R. Ghrist，“迈向胞腔层的谱理论”，《应用与计算拓扑杂志》，第 3 卷，第 4 期，315–358 页，2019 年；该论文将其与您的谱层理论进行比较。[16] A. D¨oring 和 C. J. Isham，“物理理论的托扑斯基础：IV. 系统范畴”，《数学物理学杂志》，第 49 卷，第 5 期，2008 年。