arXiv:2601.17623v1 [math.CT] 24 Jan 2026

里奇流作为函子

Alexander Plakhotnikov *

2026年1月27日

摘要

本文尝试为里奇流提出一个范畴框架，将其视为一系列函子，这些函子通过奇异流时空连接黎曼度量叠与几何分解范畴。为了严格界定流的定义域，我们将可微叠的定义推广到巴拿赫流形位点。我们证明，里奇流为该叠定义了一种分层。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **2**

3 范畴框架 **4**

4 函子演化的示例 **7**

关键词： 里奇流、可微叠、几何分解、奇异流时空、无限维几何。

1 引言

本文探讨以下问题：我们能否将里奇流形式化为代数范畴之间的函子？这种形式化使我们能够使用代数几何和栈论的语言来处理对称性的保持以及几何极限的稳定性。

我们构造了一列层次化的函子：

$$\mathsf{Riem}_{\mathrm{iso}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathsf{SingFlows} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathsf{Dec} \tag{1}$$

其中 $\mathsf{Riem}_{\mathrm{iso}}$ 是黎曼流形范畴，SingFlows 是奇异里奇流时空范畴，而 Dec 是几何分解范畴。

我们的主要成果是以下三个定理：

定理 1.1（定理 A：函子性构造）。 将紧致黎曼三维流形赋予一个奇异里奇流时空这一对应构成了一个函子 $\mathcal{F}\colon \mathsf{Riem}_{\mathrm{iso}} \longrightarrow \mathsf{SingFlows}$。此外，流的渐近极限定义了一个函子 $\mathcal{A}\colon \mathsf{SingFlows} \longrightarrow \mathsf{Dec}$。复合 $\mathcal{D} = \mathcal{A} \circ \mathcal{F}$ 为任意初始度量提供了典范几何分解。

*圣彼得堡国立大学数学与力学系。俄罗斯圣彼得堡大学堤岸 7-9 号，邮编 199034。电子邮箱：st132770@student.spbu.ru

为严格处理微分同胚不变性，我们将初始数据空间建模为一个无限维可微栈 $\mathcal{X} = [\mathrm{Met}(M)/\mathrm{Diff}(M)]$。

定理1.2（定理 B：模空间叠的分层）。 函子 $\mathcal{D}$ 在叠 $\mathcal{X}$上诱导出一种分层。具体而言，若 g_0 是一个度量，且其流收敛到双曲极限，则存在一个包含 $[g_0]$ 的开子叠 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$（在弗雷歇拓扑中），使得其中每个度量的流都收敛到同一个双曲极限。

定理 1.3（定理 C：对称性守恒）。 设 (M, g)是一个黎曼流形，其等距变换群为等距变换群（g）。存在一个单射群同态

$$\Psi : \mathrm{Iso}(g) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}),$$

其中 $\mathcal{M}$ 是由 g 生成的奇异里奇流时空。这意味着，初始数据的对称性会作为时空的整体自同构得到保留，即使跨越拓扑奇点也不例外。

致谢。 我谨向 Gregory Taroyan 致以深切谢意，感谢他对相关思想的批评、宝贵建议和富有成效的讨论。

2 预备知识

度量的索博列夫空间

为了将度量空间视为流形，我们必须固定正则性。我们采用 Hebey 的标准构造。

定义 2.1 ([Heb96] 定义 2.1)**.** 设(M,g) 是一个黎曼流形。索博列夫空间 $H^p\,k\,(M)$ 是光滑函数空间 $C^\infty(M)$ 关于以下范数的完备化：

$$\|u\|_{H^p_k} = \sum_{j=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^j u|^p \, dv_g \right)^{1/p}.$$

我们固定 $p = 2$ 和$k > n/2 + 2$，使度量连续至C^2，且索博列夫嵌入定理成立。

巴拿赫流形

由于度量空间是无限维的，我们需要巴拿赫流形的定义。

定义 2.2（例如，参见 [Ban16]第 I 章）。 设 E 为巴拿赫空间。若拓扑空间 X 存在图册 $\{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i\in I}$，使得：

1. $\{U_i\}$ 是 X 的开覆盖。*2.* 对每个 i，$\varphi_i :\ U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset E$ 是到 E 的一个开子集上的同胚。*3.* 对任意满足 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$的 i，j，转移映射 $\varphi_j \circ \varphi^{-1} i :\ \varphi_i(U_i \cap U^j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U^j)$ 是巴拿赫空间之间的 C^∞-态射。

在我们的语境中，Sobolev 类为 H^k 的黎曼度量空间 $\mathrm{Met}^k(M)$ 是一个巴拿赫流形，其模型空间是对称二阶张量截面的巴拿赫空间 $H^k(S^2T^*M)$。

无限维可微叠

为了定义度量叠，我们必须使用可微叠的语言。然而，文献中的标准定义仅限于有限维情形。

C. Blohmann 将可微叠定义如下：

定义 2.3 ([Blo08] 定义 2.3)**.** 有限维流形 $\mathfrak{Mfld}$ 上的站 $\mathcal{X}$ 称为可微的，如果存在一个流形 $S \in \mathfrak{Mfld}$，以及一个满射可表下沉 $S \longrightarrow \mathcal{X}$，称为图册。

我们对这一改编的动机如下：我们的研究对象是黎曼度量的模叠。截面空间 $\mathrm{Met}^k(M)$ 是一个巴拿赫流形，而非有限维流形，因此它不属于范畴 $\mathfrak{Mfld}$，标准的可微叠定义也就不适用。为了严格处理度量空间上的里奇流，我们必须将底站从有限维流形扩展到巴拿赫流形范畴，记作 **MBan**。

我们提出以下定义，以用于无限维情形：

定义 2.4。令 **MBan** 为赋有开覆盖拓扑的巴拿赫流形范畴。若群胚上的纤维化范畴 $\mathcal{X}$ 位于 **MBan** 之上，并满足以下条件，则称其为无限维可微叠：

1. 它满足关于**MBan**中开覆盖的同构与对象的下降公理。 [1]

2. 它存在一个图册：存在一个巴拿赫流形 $S \in$ **MBan** 以及一个满射可表下沉 $S \longrightarrow \mathcal{X}$。

注 2.5。令 M 为闭流形。令 $X = \mathrm{Met}^k(M)$ 为 H^k 度量所构成的巴拿赫流形。令 $G =\mathrm{Diff}^{k+1}(M)$ 为 H^{k+1} 微分同胚所构成的希尔伯特-李群。 [2] G 在 X 上的作用定义了一个平移李群胚 $G \times X \rightrightarrows X$。与之关联的商叠

$$\mathcal{X}_{\mathrm{Ric}} = [\mathrm{Met}^k(M)/\mathrm{Diff}^{k+1}(M)]$$

根据上述定义，这是一个无限维可微叠，其图册为 $X \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{Ric}}$。

定义 2.6。若奇异里奇流 $\mathcal{M}$ 满足：随着时间函数 $t \to \infty$，空间切片的厚部分在光滑拓扑下收敛到一个有限体积、常截面曲率为 -1 的完备双曲三流形 (H, g^{hyp})，则称其具有双曲极限。

定义 2.7。设 $\mathcal{X}$ 是 *MBan* 上的一个叠**MBan**。

1. 子叠 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个满子范畴，且在同构和拉回下封闭。也就是说，若 U 上的对象 x 属于 $\mathcal{Y}$，则任何与 x 同构的对象也属于 $\mathcal{Y}$；对于任意光滑映射 $f\colon V \to U$，拉回 f^*x 属于 $\mathcal{Y}$。*2.* 若子叠 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ 的包含态射 $\iota\colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 可由开嵌入表示，则称其为开子叠。具体而言，对于任意巴拿赫流形 T 以及任意态射 $T \to \mathcal{X}$，纤维积 $T \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$ 可表示为 T 的一个开子流形。在图册 $S \to \mathcal{X}$ 的语境下，$\mathcal{U}$ 对应于 S 的一个 G-不变开子集。

为了将里奇流解释为模叠上的梯度流，我们回顾佩雷尔曼引入的变分结构。

定义 2.8 ([佩雷尔02] 第 1.1 节及命题 1.2 的证明)。 设(M, g) 为一个闭黎曼流形，且 $f \in C^\infty(M)$ 为一个标量函数。 $\mathcal{F}$-泛函定义如下：

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R_g + |\nabla f|^2) e^{-f}\, dv_g.$$

将测度 $dm = e^{-f} dv_g$ 视为固定。度量空间上相对于 L^2-度量的 $\mathcal{F}$ 梯度流由以下方程组给出：

$$\begin{cases} \partial_t g_{ij} &= -2(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f), \\ \partial_t f &= -R - \Delta f + |\nabla f|^2. \end{cases} \tag{2}$$

该系统在由 ∇f 生成的微分同胚作用下是严格抛物型的。

[1] 类似于 [Blo08，定义 2.2]。参见 [KM97，定理 43。1]

3 范畴框架

光滑流与叠轨迹

Th里奇流方程 $\partial_t g = -2\mathrm{Ric}(g)$ 在巴拿赫流形 $\mathrm{Met}(M)$中定义了一条曲线。

定理 3.1 ([DeT83] 定理 1)。 对于任意紧黎曼流形(M,g_0)，存在唯一的光滑解 $g(t)$，它定义在里奇流的极大区间 $[0,T)$上。

命题 3.2。里奇流　　由里奇流确定了模叠 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ric}} = [\mathrm{Met}(M)/\mathrm{Diff}(M)]$ 切丛的一个整体截面　　.

证明。 回忆一下，对于商叠 $\mathcal{X} = [U/G]$,，切叠$T\mathcal{X}$ 由与G 在TU上的切作用相关联的变换群胚表示。叠上的向量场 $\mathcal{X}$ 定义为投影$T\mathcal{X} \to \mathcal{X}$的一个截面。就该表示而言，这对应于图册$U$ 上的一个光滑向量场V : $U \to TU$，且该向量场关于G等变。

令 U = Met(M)，G = Diff(M)。 $\varphi \in$ G 对 g $\in$ U 的作用由拉回 Rφ(g) = φ^*g 给出。点 g 处的切空间记为 TgMet(M)，可识别为对称 (0,2) 张量场的空间 $\Gamma(S^2T^*M)$。作用的微分 d(Rφ) : TgMet(M) $\to$ T$_{\varphi^*}$ gMet(M) 在线性张量上作用：对于任意 h $\in$ TgMet(M)，有 d(Rφ)(h) = φ^*h。

里奇流由向量场 $\mathcal{R}$ 定义：$\mathrm{Met}(M) \to T\mathrm{Met}(M)$，其定义为 $\mathcal{R}(g) = -2\mathrm{Ric}(g)$。为证明它可下降到栈上，我们必须验证等变条件：

$$\mathcal{R}(R_\varphi(g)) = d(R_\varphi)(\mathcal{R}(g))$$

对于所有 $g \in \mathrm{Met}(M)$ 以及 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$。

计算左侧：

$$\mathcal{R}(\varphi^* g) = -2\mathrm{Ric}(\varphi^* g).$$

计算等式右侧：

$$d(R_\varphi)(-2\mathrm{Ric}(g)) = -2\varphi^*(\mathrm{Ric}(g)).$$

根据 Ricci 曲率张量的自然性（它是一个几何不变量），我们有恒等式 $\mathrm{Ric}(\varphi^* g) = \varphi^*\mathrm{Ric}(g)$。因此，等式两边相等。

这意味着赋值 $g \mapsto -2\mathrm{Ric}(g)$ 与群胚结构相容，并定义了 $T\mathcal{X}_{\mathrm{Ric}}$ 的良定义整体截面。与经典商空间 $\mathrm{Met}(M)/\mathrm{Diff}(M)$不同，在经典商空间中，由于作用非自由，向量场在具有等距变换的度量处定义不清；层形式保留了各向同性信息，因此等变向量场才是正确且严谨的对象。 □

奇点与时空

光滑流曲线 $g(t)$ 可能只在有限时间内存在 $T < \infty$。为了延续流，我们采用时空形式。

范畴 SingFlows

定义 3.3 （[BK19] 定义 1.2）。 奇异里奇流是一个元组 （$\mathcal{M}$, $\mathfrak{t}$, $\partial_{\mathfrak{t}}$, g），其中 $\mathcal{M}$ 是一个光滑的 *4* 维流形（可能带边界）， $\mathfrak{t}$ 是一个时间函数，而 g 是空间切片上的度量，满足里奇流方程和典范邻域假设。[3]

定义 3.4（奇异流范畴）。 范畴 SingFlows 由以下部分组成：

- 对象： 满足完备性和典范邻域条件的奇异里奇流时空。
- 态射： 保持时间函数（$\mathfrak{t}' \circ \Phi = \mathfrak{t}$）、时间向量场和度量张量（$g = \Phi^* g'$）的光滑嵌入 Φ : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$

[3]定义见 [BK19，第 5.7] 条定义

注 3.5. 在 SingFlows 中，对象 $\mathcal{M}$ 是 *4* 维的。空间拓扑 $M_t = \mathfrak{t}^{-1}(t)$ 在奇异时刻发生变化。这将手术过程内化到了对象的几何定义中。

命题 3.6。 存在一个函子 $\mathcal{C}$： $\mathrm{Riem}_{\mathrm{iso}} \longrightarrow$ SingFlows，其对象为闭三维流形。

证明。 我们如下构造函子 $\mathcal{C}$：

1. 对象：
   对于黎曼流形 （M、g） $\in \mathrm{Riem}_{\mathrm{iso}}$，我们将 $\mathcal{C}$（M，g） 定义为满足典范邻域假设的唯一极大奇异里奇流时空 $\mathcal{M}$ = （$\mathcal{M}$、$\mathfrak{t}$、$\partial_{\mathfrak{t}}$、h） ，并且其时间 0 切片 （$\mathcal{M}_0$、h（0）） 与 （M、g）等距。此类时空的存在性由 [KL17，第 1.1]定理保证：对于每个紧致黎曼三维流形 M，都存在一个以 M 为初始条件的奇异里奇流。

2. 态射：
   设 φ： （M、g_M） $\to$ （N、g_N） 是 $\mathrm{Riem}_{\mathrm{iso}}$ 中的一个等距变换。设 $\mathcal{M} = \mathcal{C}$（$M$、$g_M$） 和 $\mathcal{N} = \mathcal{C}$（$N$、$g_N$） 是相应的时空。映射 φ 在初始切片之间诱导出一个等距变换 φ_0： $\mathcal{M}_0 \to \mathcal{N}_0$。根据奇异里奇流的唯一性定理 [BK19，第 1.3]，定理，两个奇异里奇流的时间切片之间的任意等距变换，都能唯一延拓为其极大未来发展的保时等距变换。我们将 $\mathcal{C}$（φ） 定义为这个唯一的时空等距变换 Φ： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，满足 $\Phi|_{\mathfrak{t}=0} = \varphi_0$。

3. 函子性：

   (i) 恒等：若 $\varphi = \mathrm{id}_M$，则在时间 0 切片上诱导的映射是恒等映射。初始切片上的恒等映射向时空的唯一延拓就是恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$。因此 $\mathcal{C}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(\mathrm{M})}$。(ii) 复合：设 $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 和 $\psi : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ 是等距变换。设 $\Phi = \mathcal{C}(\varphi)$ 和 $\Psi = \mathcal{C}(\psi)$。复合 $\Psi \circ \Phi$ 是从 $\mathcal{C}$(M) 到 $\mathcal{C}$(P) 的等距变换。限制在 $\mathfrak{t} = 0$ 上，$(\Psi \circ \Phi)|_0 = \psi_0 \circ \varphi_0$。根据延拓的唯一性，$\mathcal{C}(\psi \circ \varphi)$ 必须与 $\Psi \circ \Phi$ 一致。因此 $\mathcal{C}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{C}(\psi) \circ \mathcal{C}(\varphi)$。

□

渐近分解

定义 3.7 (范畴Dec)。 对象是赋有完备局部齐性度量的 *3*-流形的不交并（具体而言，包括双曲分支和图流形分支）。态射是局部等距变换。

定义 3.8 （渐近函子 $\mathcal{A}$）。 我们定义函子 $\mathcal{A}$： SingFlows $\to$ Dec 如下：

（*i*）对象：设 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathfrak{t}, \partial_{\mathfrak{t}}, g)$ 是一个奇异里奇流时空。我们定义 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ 为几何分解（M_∞, g_∞） $\in$ *Dec*，由这些完备双曲流形与对应于图流形分支的 *Seifert* 纤维空间的不交并组成。[4]（*ii*）态射：设 Φ： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是 *SingFlows* 中的一个态射（保时间等距嵌入）。对于任意充分大的 t， Φ 在时间切片 Φ_t： $\mathcal{M}_t \to \mathcal{N}_t$ 之间诱导一个等距变换。我们将 $\mathcal{A}(\Phi)$ 定义为由几何分支上的序列 $\{\Phi_t\}_{t\to\infty}$ 所诱导的唯一极限等距映射 Φ_∞： （$M_{\mathcal{M},\infty}$, $g_{\mathcal{M},\infty}$） $\to$ （$M_{\mathcal{N},\infty}$, $g_{\mathcal{N},\infty}$）。

应用：分层与对称性

无限维叠的分层

定理 3.9. 设 H 是一个双曲 *3*-流形。设 $\mathcal{X}_H \subset \mathcal{X}_{\mathrm{Ric}}$ 为流向一个与 H 等距的极限的度量所构成的子叠。则 $\mathcal{X}_H$ 关于叠上的弗雷歇拓扑是开集。

[4]更多详情请参见，例如， [BK19 第 1.3 节。].

证明. 设 $[g_0] \in \mathcal{X}_H$。与g_0 相关联的奇异流 $\mathcal{M}_0$ 在充分大的时间T后变为非奇异且双曲。根据对初始数据的连续依赖性（例如参见 [BK19, 定理 1.5]），对于任意在弗雷歇拓扑中充分接近g_0 的g，其关联时空 $\mathcal{M}_g$ 在几何拓扑中接近 $\mathcal{M}_0$。这意味着在充分大的时间T， $\mathcal{M}_g$ 的切片与H 微分同胚，且接近双曲度量。根据 Ye 的稳定性结果（[Ye93, 定理 2]），负曲率度量是线性稳定的。因此，一旦流进入双曲度量的一个小邻域，就会收敛到该度量。

因此， $\mathcal{X}_H$包含 $[g_0]$ 的一个开邻域。 □

对称性的保持

定理 C 的证明。令 $\Gamma = \mathrm{Iso}(M, g_0)$。该群通过自同构作用于 $\mathrm{Riem}_{\mathrm{iso}}$ 中的对象 (M, g_0)。由于 $\mathcal{C}$ 是一个函子（定理 5.3），它诱导出一个群同态 $\Psi: \Gamma \longrightarrow \mathrm{AutSingFlows}(\mathcal{M})$，其中$\mathcal{M} = \mathcal{C}(M, g_0)$。元素 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 是一个时空等距变换。它在时间 0 切片上的限制必须与初始等距变换一致，因为根据 [BK19，定理 1，3], 从 $t = 0$ 到极大流的等距变换延拓是唯一的。若 $\Psi(\gamma) = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，则 $\Psi(\gamma)|_{t=0} = \mathrm{id}_M$。但 $\Psi(\gamma)|_{t=0} = \gamma$。因此 $\gamma = \mathrm{id}$。这证明 Ψ 是单射。 □

推论：保持S^1-对称性

流的函子性与等距变换的保持带来了以下应用。

推论 3.10. 设(M,g_0) 是一个闭黎曼三维流形，且允许非平凡的光滑有效 S^1作用。令 $\mathcal{D}(M,g_0) \in \mathrm{Dec}$ 为渐近几何分解。那么， $\mathcal{D}(M, g_0)$ 的每个连通分支都允许一个有效的 S^1作用。

证明。令$G = S^1 \subseteq$ 等距变换群(g_0)。由定理 C，存在单射同态 $\Psi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$。

引理 3.11 (等距变换的保持)。 设$(M,g(t))$ 是 $M \times[0,T)$ 上以初始数据 $g(0) = g_0$为初始度量的里奇流唯一光滑解。设 $\varphi : M \to M$ 是初始度量的一个等距变换，即 $\varphi \in$ 等距变换群 (g_0)。那么，对所有 $t \in [0,T)$， φ 都是 $g(t)$ 的等距变换。

证明。 考虑拉回度量族 $\tilde{g}(t) = \varphi^* g(t)$。我们验证 $\tilde{g}(t)$ 满足里奇流方程。对时间求导，并利用拉回与时间导数可交换这一事实：

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^* g(t)) = \varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial t} g(t)\right).$$

代入里奇流方程 $\partial_t g = -2\mathrm{Ric}(g)$：

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = \varphi^*\left(-2\mathrm{Ric}(g(t))\right).$$

由于里奇张量的自然性（在微分同胚下的几何不变性），我们有 $\varphi^*\mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}(\varphi^* g)$。因此：

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\mathrm{Ric}(\tilde{g}(t)).$$

因此， $\tilde{g}(t)$ 是里奇流的一个解。现在检查初始条件：

$$\tilde{g}(0) = \varphi^* g(0) = \varphi^* g_0.$$

由于 φ 是 g_0, 的等距变换，我们有 $\varphi^* g_0 = g_0$。因此， $\tilde{g}(t)$ 和 $g(t)$ 在$[0,T)$ 上都是里奇流的解，且具有相同的初始数据 g_0。

根据里奇流的唯一性定理（见 [DeT83] 或 [Ham82]），解是唯一的。因此， $\tilde{g}(t) = g(t)$ 对所有 $t \in [0,T)$均成立，这意味着：

$$\varphi^* g(t) = g(t).$$

这意味着 φ 在整个流动过程中始终是一个等距变换。 □

根据此引理，时刻 $t = 0$ 的对称群在所有光滑时刻 $t \in [0;T)$均持续存在。此外，奇异流的唯一性（参见 [BK19，定理 1.3]）保证对称群可延拓至手术后流形。因此，分解 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ 上的极限度量 g_∞ 必定在 G 的极限作用下保持不变。由于 Ψ 是单射，极限上的作用是有效的。

□

4 函子演化的例子

为说明函子 $\mathcal{F}$ 的用途，我们分析两个典型例子：奇点（颈缩）的形成以及孤子的演化。

例 1：SS^3 上的颈缩

考虑球面S^3，其上配备了一个类似哑铃的旋转对称度量g_0。正如 Angenent 和 Knopf 所证明的，这类度量会在有限时间T内形成一个“颈缩”奇点。

命题 4.1. 设 g_{dumb} 是 S^3 上满足 *[AK04]* 条件的旋转对称度量。函子 $\mathcal{F}$ 将(S^3, g_{dumb}) 映射为一个时空 $\mathcal{M}$，它在拓扑上是 S^3 与两个极限分支的不交并之间的一个协边。

证明。 设(S^3, g_0) 是 Angenent 和 Knopf [AK04] 描述的旋转对称初始数据。该度量可写为$g = ds^2 + \psi^2(s)g_{S^2}$，其中$s$ 是沿剖面曲线的弧长参数。这些条件确保翘曲函数 ψ 的最小值（颈部）在$t \nearrow T < \infty$时收缩至零半径，而颈部以外的曲率始终有界。

根据典范手术算法（或 [KL17]中的奇异流定义），时空$\mathcal{M}$ 构造如下：

1. 当$t \in [0, T)$时，流是光滑的，形成一个圆柱$S^3 \times [0,T)$。
2. 当$t \to T$时，几何形状趋近于一个以$S^2 \times \mathbb{R}$为模型的柱状奇点。
3. 奇异集 $\mathcal{S}$ 对应于$t = T$时的颈部赤道 $\{s_{min}\} \times S^2$。
4. 为了延续流，需要移除奇异轨迹，并粘入两个帽盖（拓扑圆盘D^3），以封闭断开的两端。

从拓扑上看，这一操作等价于一个四维协边。移除$S^2 \times D^1$（颈部区域与一个很短时间区间的乘积），并以$D^3 \sqcup D^3$ 替代，相当于附加一个1-柄（沿时间反向），或拆离一个1-柄（沿时间正向）。由于S^3 是将两个D^3 沿其边界S^2, 粘合而成，移除粘合区域会将球面分成两个互不相交的球$D^3 \sqcup D^3$,，随后通过手术帽盖将它们补成球面$S^3 \sqcup S^3$。

因此，由函子 $\mathcal{F}$构造的时空流形 $\mathcal{M}$ 是一个带边界的光滑四维流形 $\partial\mathcal{M} = M_{\text{initial}} \sqcup M_{\text{final}}$，其中 $M_{\text{initial}} \cong S^3$ 且 $M_{\text{final}} \cong S^3 \sqcup S^3$。奇点内在于 $\mathcal{M}$ 作为奇异叶状结构的结构之中，但 $\mathcal{M}$ 自身（作为 SingFlows 手术后的拓扑空间）代表了这一拓扑变化的协边轨迹。

□

示例 2：作为不动点的里奇孤立子

梯度里奇孤立子是满足 $\text{Ric}(g) + \nabla\nabla f = \lambda g$ 的度量 g，其中某个常数 t λ.

命题 4.2。 设 (M, g) 是一个里奇孤立子。则 SingFlows 中的对象 $\mathcal{F}(M, g)$ 与积丛 $M \times [0, T)$ 同构（在流的范畴中），后者配备了通过由 ∇f 生成的微分同胚得到的拉回度量。

证明。我们通过特征线法（微分同胚）求解流方程，从而显式地构造该同构。

设(M, g_0) 是一个满足下列方程的梯度里奇孤立子：

$$\text{Ric}(g_0) + \nabla^2 f = \lambda g_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

我们在M上定义依赖时间的缩放因子 $\sigma(t) = 1 - 2\lambda t$ 以及依赖时间的向量场$X(t)$如下：

$$X(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \nabla_{g_0} f.$$

令 $\{\varphi_t\}_{t\in[0,T)}$ 为由向量场 $X(t)$ 生成的微分同胚族，并满足 $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$。具体而言，$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = -X(t)\big|_{\varphi_t(x)}$。

考虑单参数度量族 $g(t) = \sigma(t)\varphi^*_t g_0$。我们验证 $g(t)$ 是以g_0为初始度量的里奇流唯一解。对t求导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \dot{\sigma}(t)\varphi_t^* g_0 + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* g_0) \\
&= -2\lambda \varphi_t^* g_0 + \sigma(t)\varphi_t^*(\mathcal{L}_{-X(t)} g_0) \\
&= -2\lambda \varphi_t^* g_0 - \sigma(t)\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X(t)} g_0).
\end{aligned}$$

利用孤子方程 (3) 和恒等式 $\mathcal{L}_{\nabla f} g_0 = 2\nabla^2 f$，代入

$$\mathcal{L}_{X(t)} g_0 = \frac{2}{\sigma(t)}(\lambda g_0 - \mathrm{Ric}(g_0)).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(t) &= -2\lambda \varphi_t^* g_0 - \varphi_t^*\left(2\lambda g_0 - 2\mathrm{Ric}(g_0)\right) \\
&= -2\lambda \varphi_t^* g_0 - 2\lambda \varphi_t^* g_0 + 2\varphi_t^* \mathrm{Ric}(g_0).
\end{aligned}$$

注意：根据 X 流的符号约定，各项会相互抵消 λ。对于由 ∇f 生成、与收缩方向相反的微分同胚所作的标准拉回，我们得到：

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\varphi_t^* \mathrm{Ric}(g_0) = -2\mathrm{Ric}(\varphi_t^* g_0) = -2\mathrm{Ric}(g(t)).$$

因此，曲线 $g(t)$ 是里奇流解。函子 $\mathcal{F}$ 将 (M, g_0) 映射到唯一的极大时空。由于$g(t)$ 完全由初始度量经由 φ_t 拉回（并缩放）构造而成，因此所得时空 $\mathcal{M}$ 与纤维丛 $M \times [0,T)$ 典范同构，其纤维与 $(M, \sigma(t)g_0)$ 等距，并由 ∇f生成的微分同胚群作用扭曲。

□

参考文献

[佩雷尔曼02] G. Perelman.里奇流的熵公式及其几何应用. arXiv:math/0211159[math.DG], 2002.

[BK19] R. Bamler, B. Kleiner. 穿过奇点的里奇流的唯一性与稳定性. arXiv:1709.04122[math.DG], 2018.

[Blo08] C. Blohmann. *Stacky Lie* 群. arXiv:math/0702399v3 [math.DG], 2008.

[DeT83] D. DeTurck. 沿里奇张量方向变形度量. 微分几何杂志 18 (1983), no. 1,157–162.

[Heb96] E. Hebey. 黎曼流形上的索*об*列夫空间. 数学讲义, 1635. Springer- Verlag,Berlin, 1996.

[Ban16] Efstathios Vassiliou、Efstathios Dodson、C.T.J. Galanis、George。（2016）。弗雷歇空间中的几何：射影极限方法。doi.org/10.1017/CBO9781316556092。

[KL17] B. Kleiner、J. Lott。奇异里奇流 *I*。《数学学报》219（2017），第 1 期，65–134 .

[KM97] A. Kriegl, P. W. Michor.整体分析的便利框架.数学调查与专著，第 53 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1997 年。

[Ye93] R. Ye.里奇流、爱因斯坦度量与空间形式. 美国数学会会刊 338 (1993)，第 2 期，871–896 页。[Bam20] R. Bamler. 里奇流非塌缩极限的结构理论. arXiv:2009.03243 [math.DG], 2020.[Ebi70] D. Ebin. 黎曼度量流形. 整体分析（纯数学专题讨论会论文集，第 XV 卷，伯克利，加利福尼亚州，1968 年），美国数学会，1970 年，第 11–40 页。[AK04] S. Angenent, D. Knopf. 里奇流在 S 上颈缩的一个例子$^{n+1}$. 数学研究快报 11 (2004)，第 4 期，493–518 页。[Ham82] R. Hamilton. 具有正里奇曲率的三维流形. 微分几何杂志 17 (1982)，第 2 期，255–306 页。[Ham88] R. Hamilton. 曲面上的里奇流 . 数学与广义相对论（圣克鲁斯，加利福尼亚州，1986 年），237–262 页，当代数学，第 71 卷，美国数学会，1988 年。

附录：论层形式的必要性

一种将度量模空间形式化的朴素方法，是考虑拓扑商空间 Met（M）/Diff（M）。然而，由于存在具有非平凡等距变换群的度量，这个空间并非光滑流形。正如 Ebin 的奠基性工作所示 [Ebi70], ，度量（M）在度量g 附近的局部结构由一个切片S_g 刻画，该切片横截于 Diff（M）的轨道。商空间中的邻域与S_g/Iso（g）同胚。因此，商空间具有轨形型奇点。

层形式通过将各向同性群保留为数据的一部分，解决了这一问题。具体而言，对于一点 $[g] \in \mathcal{X}$，层中的自同构群与等距变换群 Iso（g）典范同构。这样的保留对定理 C 至关重要，因为它使我们能够连续追踪对称性的演变，而无需任意选择规范（坐标）。

此外，由于微分同胚不变性，里奇流方程 $\partial_t g = -2\mathrm{Ric}(g)$ 并非严格抛物型；其符号在与 Diff(M)-轨道相切的方向上退化。在栈 $\mathcal{X}$ 中，这些方向对应于态射（规范变换）。因此，该流作为栈上的向量场是良定义的；而在度量的巴拿赫流形上，则需要借助 DeTurck 技巧来打破这种对称性。

紧化定义域的障碍

很自然会问，为什么我们要构造一个到 SingFlows 的函子，而不是定义一个包含奇异极限的紧化栈 $\overline{\mathcal{X}}$。在光滑对象范畴中，这种做法主要面临两项障碍：

1. **微分结构的丧失：** 里奇流在奇异时刻的极限通常被描述为 Alexandrov 空间或 RCD*(K,N) 空间（具有合成里奇曲率界的度量测度空间） [Bam20]。尽管这些对象在度量几何中构成一个有效的模空间，但它们并非巴拿赫流形。将它们纳入 $\overline{\mathcal{X}}$ 会迫使我们放弃巴拿赫流形位点$_{\mathbf{M}}\mathbf{Ban}$，从而无法以流方程所要求的经典意义定义里奇张量或切丛。

2. **拓扑变化：** 奇点的形成（例如颈缩）往往会导致底层拓扑流形M 发生变化（例如连通和分解）。栈 $\mathcal{X}_M \simeq [\mathrm{Met}(M)/\mathrm{Diff}(M)]$ 定义在固定的拓扑类型上。经历手术的轨迹会不连续地跳转，从 $\mathcal{X}_M$ 转到另一个栈 $\mathcal{X}_{M'}$。

函子方法（$\mathcal{F}$: $\mathrm{Riem}_{\mathrm{iso}} \to$ SingFlows）通过将这一不连续过程嵌入一个光滑的四维协边中，解决了这些问题。在这种情形下，“奇点”只是光滑4维流形的一个子集，因此可以在全局范围内使用微分几何工具。