arXiv:2601.17626v1 [math.RA] 24 Jan 2026

齐次多项式求值矩阵的显式行列式及应用

Somphong Jitman 和 Wannarut Rungrottheera *

2026年1月25日

摘要

本文研究通过在向量对处对齐次二元多项式求值而构造的矩阵的行列式。对于多项式$kp(x,y) = \sum \alpha_i x^{k-i}y^i$，本文给出了相关$i=0n \times n$求值矩阵$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = \big[p(a_r, b_s)\big]_{r,s=1}^{n}$行列式的显式因式分解，该结果对所有$n \geq k+1$以及所有长度为$n$的向量对$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$和$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$均成立。特别地，本文证明，当$n \geq k+2$时，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = 0$；而在临界情形$n = k+1$下，则推导出一个闭式公式，该公式涉及向量集中的范德蒙德行列式以及$p(x,y)$的系数。若干著名行列式，包括由$(x+y)^k$以及经典商式$\frac{a^k-b^k}{a-b}$和$\frac{a^k+b^k}{a+b}$所产生的行列式，均可作为特例得到。本文还讨论了$n \leq k$，将这一问题与对称函数和广义范德蒙德行列式联系起来。最后，本文给出了此类矩阵和行列式的应用，包括和形式$p(x,y) = f(x+y)$的显式公式及其在线性变量变换下的等变律，以及通过 Schwartz-Zippel引理得到的有限域上的非零下界。

关键词： 广义范德蒙德矩阵、多项式求值矩阵、柯西-比内公式、齐次多项式、行列式、有限域**MSC2020：** 15A15, 11C08, 15B99

1 引言

多项式求值矩阵自然地出现在数学的许多领域，包括插值理论、逼近理论、编码理论和结构化线性代数（例如，参见 [2, 3, 6]）。给定多项式 $p(x, y)$ 以及两组求值点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$，可以构造矩阵

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = \big[p(a_r, b_s)\big]_{r,s=1}^{n},$$

*S. Jitman（sjitman@gmail.com）和 W. Rungrottheera（rungrottheera w@su.ac.th）任职于泰国 Nakhon Pathom 73000 的 Silpakorn University 理学院数学系

其代数性质和谱性质同时反映了多项式的结构以及求值点的几何分布。

经典例子包括范德蒙德矩阵及其变体，其行列式编码了多项式插值和根分离：

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \det V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

近年来，由对形如 $f(x+y)$ 或 $f(xy)$ 的多项式求值而得到的矩阵，已出现在各种不同的背景中，涵盖从加性卷积算子到编码理论和随机矩阵模型。特别是，针对形如 $\big[f(a_r+b_s)\big]$ 的矩阵，已有一些特殊情形的行列式公式，这些结果往往依赖临时性论证，或对 f 及求值集作出较强的结构性假设。在 [8], 中，研究了一个形如 $[(a_i+b_j)^k]_{i,\,j}$ 的多项式求值矩阵族，其行列式通过经由范德蒙德矩阵的因式分解计算得出。特别是，对于 $n\times n$ 矩阵 $C=[(a_i+b_j)^k]_{i,\,j}$，已有研究证明

$$\det(C)=(-1)^{\binom{k+1}{2}}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)\right)$$

当 $n=k+1$ 时，而对于所有 $n\ge k+2$，$\det(C)=0$。文献 [7] 讨论了多项式求值矩阵的进一步推广及相关类别。然而，现有结果通常存在一项或多项局限：它们仅适用于特定的多项式形式，只讨论 $n=k+1$ 的情形，或者当矩阵大小超过多项式次数时，无法对行列式给出统一解释。

本文旨在建立一个系统且统一的框架，用于分析由齐次二元多项式构成的多项式求值矩阵的行列式。齐次性是一项关键的结构性假设：它将多项式限制在有限维系数空间中，并使相应的求值矩阵能够通过结构化范德蒙德型矩阵进行因式分解。这种因式分解是推动我们所有主要结果的根本机制。我们不局限于孤立的例子，而是研究一般的齐次多项式

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^{k-i}y^i$$

并分析相对于 k 的所有 n 值所对应的求值矩阵。这一视角阐明了行列式何时恒为零、何时存在非平凡的闭式，以及这些现象如何取决于系数向量的支撑集（α_i）。令 $\mathbb{C}[x,y]$ 表示 $\mathbb{C}$ 上两个变量的多项式环。对于 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，令

$$\widehat{\mathbb{C}}_k[x,y]:=\Big\{p(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^{k-i}y^i \mid \alpha_i\in\mathbb{C}\Big\},$$

总次数为 k 的齐次多项式所构成的向量空间。我们也记 e

$$\widehat{\mathbb{C}}[x,y] := \bigcup_{k\geq 0} \widehat{\mathbb{C}}_k[x,y].$$

^给定向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$，以及多项式 $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$，我们关注相应的多项式求值矩阵

$$A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y)) := [p(a_r, b_s)]_{1\leq r,s\leq n}$$

及其行列式。对 [7] 和 [8] 中 $n \times n$ 矩阵 $C = [(a_i + b_j)^k]_{i,j}$ 行列式的研究，可视为特殊情形下的求值矩阵，其中多项式$p(x,y) = (x+y)^k$。以下示例说明多项式求值矩阵的概念。

例 1.1. 设$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 是 $\mathbb{C}^4$ 中的向量。设 $p(x,y) = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \in \widehat{\mathbb{C}}[x,y]$。则

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)^3 & (a_1+b_2)^3 & (a_1+b_3)^3 & (a_1+b_4)^3 \\ (a_2+b_1)^3 & (a_2+b_2)^3 & (a_2+b_3)^3 & (a_2+b_4)^3 \\ (a_3+b_1)^3 & (a_3+b_2)^3 & (a_3+b_3)^3 & (a_3+b_4)^3 \\ (a_4+b_1)^3 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^3 & (a_4+b_4)^3 \end{bmatrix}.$$

类似地，对于 $q(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3 \in \widehat{\mathbb{C}}[x,y]$，我们有

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q(x,y)) = \begin{bmatrix} a_1^3 + a_1b_1^2 + b_1^3 & a_1^3 + a_1b_2^2 + b_2^3 & a_1^3 + a_1b_3^2 + b_3^3 & a_1^3 + a_1b_4^2 + b_4^3 \\ a_2^3 + a_2b_1^2 + b_1^3 & a_2^3 + a_2b_2^2 + b_2^3 & a_2^3 + a_2b_3^2 + b_3^3 & a_2^3 + a_2b_4^2 + b_4^3 \\ a_3^3 + a_3b_1^2 + b_1^3 & a_3^3 + a_3b_2^2 + b_2^3 & a_3^3 + a_3b_3^2 + b_3^3 & a_3^3 + a_3b_4^2 + b_4^3 \\ a_4^3 + a_4b_1^2 + b_1^3 & a_4^3 + a_4b_2^2 + b_2^3 & a_4^3 + a_4b_3^2 + b_3^3 & a_4^3 + a_4b_4^2 + b_4^3 \end{bmatrix}.$$

本文系统而统一地研究了与齐次二元多项式相关的多项式求值矩阵，涵盖并拓展了经典的范德蒙德型构造和和形式构造。对于所有固定次数为 k 的齐次多项式，本文建立了求值矩阵$A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x,\ y))$ 分解为结构化范德蒙德型矩阵与依赖系数的核心矩阵的普遍因式分解。借助这一因式分解，我们证明当 $n \geq k+2$ 时，行列式恒为零。在临界方阵情形 $n = k+1$ 下，本文推导出显式行列式公式，其中包括对 $p(x,\ y) = f(x+y)$ 这类和形式多项式的闭式表达式。此外，本文还分析了线性变量变换下的等变性。在有限域上，本文进一步探讨其应用，并通过 Schwartz–Zippel 引理推导出概率非零界。此外，本文还讨论了 $n \leq k$，将该问题与对称函数和广义范德蒙德行列式联系起来。本文结构如下：第2节介绍求值矩阵的基本因式分解，并进一步探讨

方阵情形 $n = k+1$ 和矩阵情形$n \le k$下的显式行列式公式。第3节讨论这类矩阵和行列式的各种应用，包括和形式 $p(x,\ y) = f(x+y)$、线性变量变换下的等变性，以及在有限域上的行为。最后，第4节给出总结。

2 多项式求值矩阵的行列式

本节通过范德蒙德型矩阵建立多项式求值矩阵 $A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))$ 的一种因式分解。该因式分解揭示了矩阵的性质如何随尺寸参数 n 相对于次数 k 的变化而改变： $n < k+1$、$n = k+1$ 和 $n \ge k+2$ 这几种情形下，矩阵的秩和行列式性质有根本差异。由此可直接得到明确的秩界，并在方阵情形 $n = k+1$ 推导出闭式行列式公式，同时对若干特殊构型作了更为详细的考察。当 $n \ge k+2$ 时，矩阵 $A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))$ 的秩必定不超过 $k+1$，因此是奇异矩阵。对于一般情形 $n < k+1$，应用柯西–比内公式和广义范德蒙德恒等式，将 $\det\big(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))\big)$ 表示为一种结构清晰且便于计算的形式。

2.1 多项式求值矩阵的因式分解

固定 $k \ge 0$和 $p(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} y^i \in \widehat{\mathbb{C}}_k[x,y]$。给定 $\mathbb{C}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$，定义 $(n \times (k+1))$ 范德蒙德型矩阵

$$V_{\mathbf{a}}^{(k)} := \left[a_r^{k-j}\right]_{1\le r\le n,\ 0\le j\le k} = \begin{bmatrix} a_1^k & a_1^{k-1} & \cdots & a_1^0 \\ a_2^k & a_2^{k-1} & \cdots & a_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^k & a_n^{k-1} & \cdots & a_n^0 \end{bmatrix},$$

and

$$W_{\mathbf{b}}^{(k)} := \left[b_s^j\right]_{1\le s\le n,\ 0\le j\le k} = \begin{bmatrix} b_1^0 & b_1^1 & \cdots & b_1^k \\ b_2^0 & b_2^1 & \cdots & b_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^0 & b_n^1 & \cdots & b_n^k \end{bmatrix}.$$

展开 $p(a_r, b_s)$ 可得矩阵恒等式

$$A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y)) = V_{\boldsymbol{a}}^{(k)} D_\alpha \left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T, \tag{1}$$

其中， $D_\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 由 $p(x,y)$ 的系数给出。

例 2.1。 对于 $k = 3$ 和 $n = 3$, 令 $p(x,\ y) = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, 并令 $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ 属于 $\mathbb{C}^3$。则 $D_\alpha = \mathrm{diag}(1,\ 3,\ 3,\ 1)$,

$$V_{\mathbf{a}}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_1^3 & a_1^2 & a_1^1 & a_1^0 \\ a_2^3 & a_2^2 & a_2^1 & a_2^0 \\ a_3^3 & a_3^2 & a_3^1 & a_3^0 \end{bmatrix}, \text{ and } W_{\mathbf{b}}^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1^0 & b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^0 & b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^0 & b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{bmatrix}.$$

因此，

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = V_{\mathbf{a}}^{(3)}\mathrm{diag}(1,3,3,1)\left(W_{\mathbf{b}}^{(3)}\right)^T.$$

命题 2.1。 设 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$ 为整数，且令 $p(x,y) \in \mathbb{C}_k[x,y]$。则

$$\mathrm{rank}(A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y))) \leq k+1.$$

特别地，如果 $n \geq k+2$，则 $\det(A_{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}(p(x,y))) = 0$。

证明。 因式分解（1）将 A表示为一个乘积

$$A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y)) = V_{\boldsymbol{a}}^{(k)} D_\alpha \left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T,$$

其中 $V_{(k)\boldsymbol{a}}$、 D_α和 $\left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T$分别是一个 $n \times (k+1)$ 矩阵、一个 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵和一个 $(k+1) \times n$ 矩阵。根据矩阵乘积的秩不等式，可得

$$\mathrm{rank}(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) \leq \min\{\mathrm{rank}(V_{\boldsymbol{a}}^{(k)}), \mathrm{rank}(D_\alpha), \mathrm{rank}(\left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T)\} \leq k+1.$$

如果 $n \geq k+2$，则秩小于或等于 $k+1$ 的 $n \times n$ 矩阵必为奇异矩阵。 □

2.2 临界情形 $n = k+1$

在本小节中，我们关注 $n = k+1$ 的情形。由 (1)，

$$A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y)) = V_{\boldsymbol{a}}^{(k)} D_\alpha \left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T,$$

它可写成三个方阵的乘积。因此，可以用范德蒙德乘积显式计算这些行列式。

定理 2.2. 设 $k \geq 0$ 和 $n = k+1$ 为整数，且 $p(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} y^i \in \widehat{\mathbb{C}}_k[x,y]$则

$$\det(A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y))) = (-1)^{\binom{k+1}{2}} \left(\prod_{i=0}^{k} \alpha_i\right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)\right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)\right),$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$。特别地，$\det(A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y))) \neq 0$ 当且仅当对所有 i 都有 $\alpha_i \neq 0$，且向量集 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 两两不同。

证明。 由 (1)，我们有

$$\det(A) = \det\left(V_{\boldsymbol{a}}^{(k)}\right) \cdot \det(D_\alpha) \cdot \det\left(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}\right)^T,$$

其中 $D_\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$。我们注意到，$W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}$是标准的（$k+1$）×（$k+1$）范德蒙矩阵，这意味着

$$\det(W_{\boldsymbol{b}}^{(k)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).$$

矩阵 $V_{\boldsymbol{a}}^{(k)}$的列顺序与标准（$k+1$）×（$k+1$）范德蒙矩阵相反；要将列顺序恢复为标准顺序，需要进行 $\binom{k+1}{2}$ 次相邻换位，因此

$$\det\left(V_{\boldsymbol{a}}^{(k)}\right) = (-1)^{\binom{k+1}{2}} \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

最后，$\det(D_\alpha) = \prod_{i=0}^{k} \alpha_i$。将这三个行列式相乘即可得到所述结论。□

注 2.1. 对于 $c \in \mathbb{C}$ 和 $p(x,y) = c \cdot q(x,y)$，其中 $q(x,y) \in \mathbb{C}_k[x,y]$，则 $D_\alpha = cD_\beta$，其中 α 和 β 分别是 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$ 的向量系数。因此，$\det(A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(p(x,y))) = c^n \det(A_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(q(x,y)))$。特别地，行列式关于 D_α 的列是多线性的，但作为多项式，它关于 $p(x,y)$ 并非线性的。

在以下各个特殊情形中，当 $n = k+1$ 时，我们使用定理 2.2；当 $n \ge k+2$ 时，则应用命题 2.1 来证明其消失。

推论 2.3 ([8, 命题 1 和 2])。设 $k \ge 0$ 和 $n \ge 1$ 为整数，并令 $p(x,y) = (x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i$。设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$。则以下结论成立。

1. 如果 $n \ge k+2$，那么 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = 0$。

2. 如果 $n = k+1$，那么

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = (-1)^{\binom{k+1}{2}} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\right) \left(\prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)\right) \left(\prod_{1\le i<j\le n} (b_j - b_i)\right).$$

特别地，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) \ne 0$ 当且仅当 a_i 两两不同且 b_j 两两不同时成立。

证明。注意，对于每个 $i \in \{0,1,\ldots,k\}$，我们有 $\alpha_i = \binom{k}{i}$，这意味着 $\det(D_\alpha) = \prod_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$。由定理 2.2 可得结论。

□

推论 2.4。设 $k \ge 0$ 和 $n \ge 1$ 为整数，且令 $p(x,y) = \sum x^{k-i} y^i$。令 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$。那么以下结论成立。

1. 若 $n \ge k+2$，则 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = 0$。

2. 若 $n = k+1$，则

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = (-1)^{\binom{k+1}{2}} \left(\prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)\right) \left(\prod_{1\le i<j\le n} (b_j - b_i)\right).$$

此外，我们有如下恒等式

$$p(a_r, b_s) = \frac{a_r^{k+1} - b_s^{k+1}}{a_r - b_s} \qquad (a_r \neq b_s),$$

这意味着 $A_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}(p(x,\ y))$ 在定义域 $\left[\begin{array}{c} a_r^{k+1} - (\quad -b_s{}^{k+1} \\ \hline a_r + b_s \end{array}\right]$ 上与 $a_r \neq b_s$ 一致。证明。注意，对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$，我们有 $\alpha_i = 1$ 这意味着 $\det(D_\alpha) = 1$。由定理 2.2 可得结论。

□

推论 2.5。设 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$ 为整数，并设 $p(x, y) = \sum_{i=0}(-1)^i x^{k-i} y^i$。设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$。则以下陈述成立。

1. 若 $n \geq k + 2$，则 $\det(A_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}(p(x, y))) = 0$。

2. 若 $n = k + 1$，则

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y))) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)\right)\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)\right).$$

此外，当 k 为奇数时，有如下恒等式

$$p(a_r, b_s) = \frac{a_r^{k+1} - (-b_s)^{k+1}}{a_r + b_s} \qquad (a_r \neq -b_s),$$

这意味着 $A_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}(p(x, y))$ 在定义域 $a_r \neq -b_s$ 上与 $\left[\begin{array}{c} a_r^{k+1} - (\quad -b_s{}^{k+1} \\ \hline a_r + b_s \end{array}\right]$ 一致。

证明。注意，对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$，我们有 $\alpha_i = (-1)^i$，这意味着 $\det(D_\alpha) = \prod_{i=0}^{k}(-1)^i = (-1)^{\binom{k+1}{2}}$；这一项与 $\det(V_{(k)\mathbf{a}})$ 中相同的幂相消，从而得到所述符号。结论由定理 2.2 得出。

□

2.3 $n \leq k$ 的情形

在本小节中，我们重点讨论 $n \leq k$ 的情形。不过，这些结果对于 $n = k + 1$ 也同样成立。因此，若无歧义，结果均用 $n \leq k + 1$ 表述。

对于一个 $m \times n$ 矩阵 M 和一个按递增顺序排列的指标集 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，令 $M(:\ I)$ 表示由 M 中指标属于 I 的列所构成的子矩阵。

定理 2.6 ([4, 定理 3.A.5（柯西-比内公式）]). 设 $m \leq n$ 为正整数。设 A 和 B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵。那么

$$\det(AB) = \sum_{I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n\}} \det(A(:, I)) \det(B(:, I)).$$

根据（1），我们回顾因式分解 $A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = V_{(k)\mathbf{a}} D_\alpha (W^{(k)}{}_{\mathbf{b}})^T$，其中

$$V_{\mathbf{a}}^{(k)} = \left[a_r^{k-j}\right]_{1\le r\le n, 0\le j\le k}, \quad W_{\mathbf{b}}^{(k)} = \left[b_s^j\right]_{1\le s\le n, 0\le j\le k}, \text{ and } D_\alpha = \operatorname{diag}(\alpha_0,\dots,\alpha_k).$$

假设 $n \le k+1$。由此可知，$V_{(k)\mathbf{a}}$ 和 $W_{(k)\mathbf{b}}$ 均为列数大于或等于行数的矩形矩阵。将定理 2.6 中的柯西-比内公式应用于乘积 $V_{(k)\mathbf{a}} D_\alpha \left(W^{(k)}{}_{\mathbf{b}}\right)^T$，可得

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = \sum_{I=\{0\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le k\}} \det\left(V_{\mathbf{a}}^{(k)}(:,I)\right) \left(\prod_{i\in I}\alpha_i\right) \det\left(W_{\mathbf{b}}^{(k)}(:,I)\right). \tag{2}$$

对于 $m\in\mathbb{Z}$ 和变量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$，定义

$$H_0(\mathbf{x}) = 1, \qquad H_m(\mathbf{x}) = 0 \ \ (m<0),$$

对于 $m\ge 1$，递归地定义

$$H_m(x_1,\dots,x_n) = H_m(x_1,\dots,x_{n-1}) + x_n H_{m-1}(x_1,\dots,x_n). \tag{3}$$

命题 2.7 （[5, 第 41 页（3.6）]）。对于 $e_1 > \cdots > e_n \ge 0$,

$$\det[a_r^{e_j}]_{r,j=1}^n = \prod_{1\le r<r'\le n} (a_{r'} - a_r) \det\left[H_{e_j-(n-j)}(\mathbf{a})\right]_{j=1}^n.$$

定理 2.8。设 $1\le n\le k+1$ 为整数，且令 $p(x, y) = \sum_{i=0} \alpha_i x^{k-i} y^i$。则

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = \prod_{1\le r<r'\le n} (a_{r'} - a_r) \prod_{1\le r<r'\le n} (b_{r'} - b_r) \sum_{I=\{0\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le k\}} \left(\prod_{i\in I}\alpha_i\right) \det\left[H_{k-i_j-(n-j)}(\mathbf{a})\right]_{j=1}^n \det\left[H_{i_j-(n-j)}(\mathbf{b})\right]_{j=1}^n,$$

其中 H_m 如 (3) 中所定义。

证明。由 (2) 可得

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = \sum_{I=\{0\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le k\}} \det\left(V_{\mathbf{a}}^{(k)}(:,I)\right) \left(\prod_{i\in I}\alpha_i\right) \det\left(W_{\mathbf{b}}^{(k)}(:,I)\right),$$

其中求和遍历 n–子集 $I = \{0\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le k\}$。对于每个 $j\in\{1,2,\dots,n\}$，令 $e_j = k - i_j$。将命题 2.7 应用于 $V_{(k)\mathbf{a}}(:, I)$ 中的指数 e_j，得到

$$\begin{aligned}\det(V_{\mathbf{a}}^{(k)}(:,I)) &= \prod_{1\le r<r'\le n} (a_{r'} - a_r) \det\left(\left[H_{e_j-(n-j)}(\mathbf{a})\right]_{j=1}^n\right) \\ &= \prod_{1\le r<r'\le n} (a_{r'} - a_r) \det\left(\left[H_{k-i_j-(n-j)}(\mathbf{a})\right]_{j=1}^n\right).\end{aligned}$$

类似地，将命题 2.7 应用于 $W^{(k)}{}_{\mathbf{b}}(:, I)$ 中的指数 i_j，可得

$$\det(W_{\mathbf{b}}^{(k)}(:,I)) = \prod_{1\le r<r'\le n} (b_{r'} - b_r) \det\left[H_{i_j-(n-j)}(\mathbf{b})\right]_{j=1}^n.$$

结合这些结果，定理得证。 □

$_k$**推论 2.9.** 设 $1 \le n \le k+1$ 为整数，且 $p(x,y) = \sum \alpha_i x^{k-i} y^i$。设 $S = \{i \in_{i=0} \{0,1,\ldots,k\} \mid \alpha_i \neq 0\}$。则

$$\operatorname{rank}(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) \ \le \ \min\{n, |S|\}.$$

如果 $|S| < n$，那么 $\det(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x、\ y))) = 0$。

证明。 由于对于 $i \notin S$， $\alpha_i = 0$，我们可以删除零列，从而得到约化分解

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)) = V_{\mathbf{a}}^{(k)} D_\alpha (W_{\mathbf{b}}^{(k)})^T = V_{\mathbf{a}}^{(k)}(:,S) D_\alpha(S) \left(W_{\mathbf{b}}^{(k)}(:,S)\right)^T,$$

其中 $D_\alpha = \mathbf{diag}(\alpha_0, \ldots\ldots, \alpha_k)$， $V_{(k)\mathbf{a}}(:S)$、 $W^{(k)}{}_{\mathbf{b}}(:S)$ 是 $n \times |S|$，而 $D_\alpha(S)$ 是对角线元素非零的对角矩阵。因此，

$$\operatorname{rank}(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) \le \min\{\operatorname{rank}(V_{\mathbf{a}}^{(k)}(:,S)), \operatorname{rank}(D_\alpha(S)), \operatorname{rank}(W_{\mathbf{b}}^{(k)}(:,S))\} \le |S|.$$

显然，$\mathbf{rank}(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x,\ y))) \le n$，这意味着 $\mathbf{rank}(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x,\ y)) \le \mathbf{min}\{n, |S|\})$。如果 $|S| < n$，那么 $\mathbf{rank}(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x,\ y))) < n$，因此 $\mathbf{det}(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(p(x,\ y))) = 0$。 □

3 应用

在本节中，我们探讨行列式因式分解的若干推论和应用。我们首先给出特殊情形 $p(x,\ y) = f(x+y)$ 下多项式求值矩阵行列式的闭式公式，随后讨论线性变量变换下的等变性。然后，我们分析有限域上行列式的行为，并给出其恒等为零时的概率界。

3.1 $p(x,\ y) = = f(x+y)$ 的行列式公式

我们先从二元多项式为和形式的特殊情形开始，

$$p(x,y) = f(x+y),$$

其中， $f(t)$ 是一个次数为 k 的一元多项式，矩阵大小为 $n = k+1$。在这种情况下，多项式求值矩阵的行列式可以用求值点的范德蒙德因子简洁地进行因式分解。这为 $\mathbf{det}(A_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(f(x+y)))$ 提供了显式且便于计算的闭式公式，揭示了其完整的代数结构。

命题 3.1. 设 $n = k+1$ 为整数，且 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 为$_k$属于 $\mathbb{C}^n$。若 $f(t) = \sum \alpha_i t^i$ 的首项系数为 $\alpha_k \neq 0$，则$_{i=0}$

$$\det\left(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y))\right) = \alpha_k^n (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \prod_{1 \le r < r' \le n} (a_{r'} - a_r) \prod_{1 \le s < s' \le n} (b_{s'} - b_s).$$

证明。设 $V_{(k)\mathbf{a}} = [a_r^{k-j}]_{1\le r\le n, 0\le j\le k}$ 和 $W^{(k)}{}_{\mathbf{b}} = [b_s^j]_{1\le s\le n, 0\le j\le k}$。再写出“递增幂”求值矩阵

$$E_{\mathbf{a}} = [a_r^{i-1}]_{1\le r,i\le n}, \qquad E_{\mathbf{b}} = [b_s^{j-1}]_{1\le s,j\le n}.$$

令 R 为 $(k+1)\times(k+1)$ 列反转置换矩阵（反对角线上为 1，其余位置为 0）。那么

$$E_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{a}}^{(k)} R, \qquad E_{\mathbf{b}} = W_{\mathbf{b}}^{(k)}.$$

根据 $f(t)$ 的定义和二项式定理，我们有

$$f(a_r + b_s) = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m (a_r + b_s)^m = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a_r^i b_s^{m-i}.$$

设 $j = m - i$，于是 $i + j = m$。$a_r^i b_s^j$ 的系数为 $\alpha_{i+j}\binom{i+j}{i}$，因此

$$f(a_r + b_s) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{i+j} \binom{i+j}{i} a_r^i b_s^j.$$

将范围限制为 $i,\ j \le n-1$ 可确保所有项都适合 $n\times n$ 矩阵（若 $n = k+1$，则所有需要的项都会出现）。

现在将其写成矩阵形式：i 次幂 a_r^i 给出 $E_{\mathbf{a}}$ 的第 $(r,\ i+1)$ 个元素；类似地，b_s^j 给出 $E_{\mathbf{b}}$ 的第 $(s,\ j+1)$ 个元素，而中间的系数恰好是

$$(C_f)_{i+1,j+1} = \alpha_{i+j}\binom{i+j}{i}.$$

所需的因式分解

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y)) = E_{\mathbf{a}} C_f E_{\mathbf{b}}^T = V_{\mathbf{a}}^{(k)} (RC_f) \big(W_{\mathbf{b}}^{(k)}\big)^T$$

得证。因此

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y))) = \det\big(V_{\mathbf{a}}^{(k)}\big)\det(RC_f)\det\big(W_{\mathbf{b}}^{(k)}\big). \tag{4}$$

现在计算各个因子：由于 $V_{\mathbf{a}}^{(k)}$ 按降幂排列，需进行 $\binom{n}{2}$ 次相邻交换，才能将列反转为标准的范德蒙德顺序：

$$\det(V_{\mathbf{a}}^{(k)}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{1\le r<r'\le n} (a_{r'} - a_r).$$

这就是通常的范德蒙德行列式：

$$\det(W_{\mathbf{b}}^{(k)}) = \prod_{1\le s<s'\le n} (b_{s'} - b_s).$$

我们有 $\det(R) = (-1)^{\binom{n}{2}}$。利用标准的帕斯卡基论证可得 $\det(C_f) = \alpha_k^n (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$。

因此，$\det(RC_f) = \det(R)\det(C_f)$
$= \alpha_k^n \prod \binom{k}{i}$。

将这三个行列式相乘，

$$\begin{aligned}\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y))) &= \Big[(-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{r<r'}(a_{r'}-a_r)\Big]\Big[\alpha_k^n\prod_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\Big]\Big[\prod_{s<s'}(b_{s'}-b_s)\Big]\\ &= \alpha_k^n(-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\prod_{1\le r<r'\le n}(a_{r'}-a_r)\prod_{1\le s<s'\le n}(b_{s'}-b_s),\end{aligned}$$

如所需。 □

由命题 3.1 可知，对于首项系数为 $\alpha_k \neq 0$ 且 $n = k+1$ 的 $f(t) = \sum \alpha_i t^i$，不难看出，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y)))$ 与 α_i 无关，其中 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 任意。因此，我们得到以下推论。

推论 3.2. 设 $n = k+1$ 为整数，且 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$。若 $f(t) = \sum \alpha_i t^i$ 的首项系数为 $\alpha_k \neq 0$，且 $g(x) = \alpha_k t^k$，则

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y))) = \det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(g(x+y)))$$

注 3.1。注意到，当且仅当存在某个整数 $k \geq 0$ 和标量 c，使得 $f(t) = ct^k$ 时，$p(x, y) = f(x+y)$ 是齐次的。在这种情况下，命题 3.1 的结果与推论 2.3 和注 2.1 中的结果一致。

3.2 线性变量变换下的等变性

接下来，我们研究在应用线性变量变换 $(x, y) \mapsto (x', y') = B \cdot (x, y)$（其中 $B = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$）时，$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y))$ 如何变换。对于一个次数为 k 的齐次 $p(x, y)$，令 $p_B(x, y) := p(x', y')$。对于和形式 $p(x, y) = f(x+y)$，我们可以得到一个简洁明确的规则。

命题 3.3。 设 $f(x)$ 是一个次数为 k 的多项式，并且 $p(x, y) = f(x+y)$。令 $n \leq k+1$，并令

$$c := \alpha + \gamma \quad and \quad d := \beta + \delta.$$

设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的向量。那么

$$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x, y)) = [f(ca_r + db_s)]_{r,s=1}^{n} = A_{c\mathbf{a},\, d\mathbf{b}}(f(x+y)).$$

特别是，若 $n = k+1$，则

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x, y))) = c^{\binom{n}{2}} d^{\binom{n}{2}} \det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y))).$$

证明。由于 $p_B(x, y) = f(x' + y') = f\big((\alpha+\gamma)x + (\beta+\delta)y\big) = f(cx + dy)$，因此我们有

$$(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x, y)))_{rs} = f(ca_r + db_s) = (A_{c\mathbf{a},\, d\mathbf{b}}(f(x+y)))_{rs}.$$

具体而言，$A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x, y)) = A_{c\mathbf{a},d\mathbf{b}}(f(x+y))$。

对于 $n = k + 1$ 处的行列式缩放，使用命题 3.1 中的式 (4)，我们有 ve

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x,y))) = \det(A_{c\mathbf{a},d\mathbf{b}}(f(x+y))) = \det\big(V_{c\mathbf{a}}^{(k)}\big)\det(RC_f)\det\big(W_{d\mathbf{b}}^{(k)}\big).$$

由于

$$\det(V_{c\mathbf{a}}^{(k)}) = c^{\binom{n}{2}}\det(V_{\mathbf{a}}^{(k)}) \quad \text{and} \quad \det(W_{d\mathbf{b}}^{(k)}) = d^{\binom{n}{2}}\det(W_{\mathbf{b}}^{(k)}),$$

可以推得

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_B(x,y))) = c^{\binom{n}{2}}d^{\binom{n}{2}}\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\big(f(x+y)\big)).$$

□

结合命题 3.1 和命题 3.3，可立即得到 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(x+y))$ 的显式公式。

3.3 有限域上的行为

接下来，我们考察向量 a_i, b_j 从有限域 $\mathbb{F}_q$ 中随机选取时，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)))$ 的行为。我们重点研究 $n \le k+1$ 的情形，并给出行列式恒为零时的上界。这是通过应用 Schwartz–Zippel 引理得到的。

引理 3.4 ([1, 引理 A.36], Schwartz–Zippel)。设 $\mathbb{F}_q$ 是一个阶为 q 的域，且 $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个总次数为 $d \ge 0$ 的非零多项式。设 $S \subseteq \mathbb{F}_q$ 是一个非空集合，并从中均匀随机地选取 $(r_1, \ldots, r_n) \in S^n$。那么概率

$$\Pr\big[p(r_1,\ldots,r_n) = 0\big] \le \frac{d}{|S|}.$$

命题 3.5。设 $\mathbb{F}_q$ 是一个阶为 q 的有限域，且 $n \le k+1$ 为整数。设 $\alpha_i \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ 对于 $0 \le i \le k$，并设 $\boldsymbol{a} = (a_1、\ldots、a_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1、\ldots、b_n)$ 分别从 $\mathbb{F}_q^n$ 中独立且k均匀地选取。若 $p(x、y) = \sum \alpha_i (x+y)^i$，则 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x、y))) = 0_{i=0}$ 的概率为

$$\Pr\left(\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = 0\right) \le \frac{nk}{q}.$$

证明。由（4）可得

$$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = \det\big(V_{\mathbf{a}}^{(k)}\big)\det(RC_p)\det\big(W_{\mathbf{b}}^{(k)}\big) \text{ and } \det(RC_p) = \alpha_k^n \prod_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.$$

由于对于所有 $1 \le i \le n$ 都有 $\alpha_i \ne 0$，$\det(RC_p) \ne 0$，这意味着 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)))$ 是一个非零多项式。

k对于每个 $1 \le r \le n$ 和 $1 \le s \le n$，我们注意到，每个元素 $p(a_r, b_s) = \sum \alpha_i (a_r + b_s)^i$ 的次数至多为 k，涉及 $2n$ 个变量 a_r 和 b_s。利用莱布尼茨展开，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y)))$

是 n 个元素的乘积，其中每个元素分别依赖于一对不同的变量 (a_r, b_s)，这意味着总次数至多为 nk。因此，$\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y)))$ 是一个关于 $2n$ 个相互独立且在 $\mathbb{F}_q$ 上均匀分布的变量的总次数至多为 nk 的非零多项式。根据引理 3.4，可得

$$\Pr\left(\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x,y))) = 0\right) \leq \frac{nk}{q}.$$

证明完成。 □

4 结论与说明

利用简单而强大的范德蒙德分解 $A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y)) = V^{(k)}_{一个} D_\alpha(W^{(k)}_{个})^T$，我们建立了一个统一框架，用于理解与齐次二元多项式相关的多项式求值矩阵的行列式。我们的分析涵盖了各种矩阵规模，从 $n \leq k+1$ 到方阵的临界情形 $n = k+1$ 及更大的情形；此时秩约束会迫使 $n \geq k+2$的行列式为零。

在方阵情形 $n = k+1$中，我们得到了 $\det(A_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p(x, y)))$ 的闭式表达式，该式以范德蒙德乘积和系数因子表示，并由此恢复并推广了诸如 $[(a_i+b_j)^k]$ 这类矩阵的经典公式。对于 $n \leq k+1$，结合柯西–比内公式与利用完全齐次多项式 H_m 对广义范德蒙德子式进行的初等求值，我们得到了行列式的对称展开，从而直接推出秩界和消失判据。

若干应用展示了我们的行列式分解的多样用途。我们为方形和形式情形推导了一个闭式公式，其中 $p(x, y) = f(x+y)$，且 $n = k+1$。除这一特殊情形外，我们还建立了和形式多项式在线性变量变换下的显式等变性定律，并借助 Schwartz–Zippel 引理证明了有限域上的概率性非零界。

更一般地，研究与非齐次二元多项式相关的多项式求值矩阵的行列式将会很有意义。

致谢

作者谨向 Natcha Karnjano 和 Kullanut Ueaumakul 致谢，感谢他们提供的有益讨论。S. Jitman 的研究经费由泰国国家研究委员会和 Silpakorn University 根据研究资助 N42A650381 提供。

参考文献

[1] S. Arora 和 B. Barak，《计算复杂性：一种现代方法》，剑桥大学出版社，2012年。

[2] °A. Bj¨orck 和 V. Pereyra，范德蒙德方程组的求解，《数学计算》24 （1970年）893–903。

[3] P. J. Forrester，对数气体与随机矩阵，伦敦数学会专著，第34卷，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2010年。[4] N. Johnston，线性代数与矩阵代数导论，数学本科生教材，施普林格，2021年。[5] I. G. Macdonald，对称函数与霍尔多项式，第2版，牛津数学专著，牛津大学出版社，1995年。[6] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane，纠错码理论，北荷兰数学文库，第16卷，北荷兰，阿姆斯特丹，1977年。[7] T. Palakawong 和 D. Samart，关于由多项式取值生成的矩阵的行列式，泰国数学学会《数学杂志》（泰国国王陛下赞助）**67**（2022年）1–12。[8] A. L. Yandl 和 C. Swenson，一类行列式为零的矩阵，《数学杂志》**85**（2012年）126–130。