arXiv:2601.17780v1 [math.LO] 25 Jan 2026

非瘦 P-滤子、米勒可测性与一个关于 Hrušák 的 ˇ ´问题

ANDREA MEDINI

Abstract. 给定一个基数 κ 以及定义在 ω 上的滤子 $\mathcal{F}_\alpha$，其中 $\alpha \in \kappa$，我们将证明：若 $\prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$ 是可数稠密齐性的，则 $\kappa < \mathfrak{p}$，且每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非贫乏 P-滤子。这部分回答了 Michael Hruš´ak 提出的问题。我们还将证明，少于 $\mathfrak{p}$ 个非贫乏 P-滤子的乘积具有米勒性质。此外，我们将明确阐述米勒可测性与米勒性质之间的联系。作为推论，我们将看到，少于 $\mathrm{add}(m^0)$ 个非贫乏 P-滤子的交集仍是非贫乏 P-滤子，其中 m^0 表示米勒零集构成的理想。最后，我们将考察米勒性质在交集和乘积下的保持性。

Contents

1. 引言 1 2. 一般预备知识 3 3. 滤子的预备知识 4 4. 推广一个旧引理 5 5. 对 Hruˇs´ak 问题的部分回答 8 6. 米勒可测性与米勒性质 8 7. 交集下米勒性质的保持 9 8. 乘积下米勒性质的保持 10 参考文献 11

1. Introduction

本文所说的空间是指蒂霍诺夫拓扑空间。本文所说的可数是指至多可数。回顾一下，空间 X 若具有可数稠密齐性（CDH），则 X 是可分的，并且对于 X 的任意一对可数稠密子集（D, E），都存在一个同胚 $h : X \longrightarrow X$，使得 $h[D] = E$。关于可数稠密齐性的介绍，参见 [AvM，第 14-16] 节；关于这一主题的一系列开放问题，参见 [HvM]。一个基本结果是

Date：2026年1月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主题分类：03E05、03E17、54B10。*Key words and phrases.* 滤子、非第一纲、P-滤子、可数稠密齐性、伪交数、米勒性质、米勒可测性、交集、乘积。作者感谢 Yurii Khomskii 向其推荐文章 [GRSS]。本研究全部由奥地利科学基金（FWF）资助，DOI 为 10.55776/P35588。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名许可协议（CC BY）公共版权许可。

每个“足够齐次”的波兰空间（例如 2^ω、 ω^ω，或任意可分可度量化流形）都具有可数稠密齐性（参见 [ACvM，定理 5.2] 或 [AvM，定理 14.1]，其中给出了精确表述）。

受 [HZA]，中一个问题的启发，文章 [MM] 开始研究 ω 上的（超）滤子作为 2^ω 的子空间时的可数稠密齐性。关于这一主题的进一步结果见于 [HGH] 和 [RZZ]。下述结果（它是 [KMZ, 定理 10] 的一个片段）可以视为这条研究路线的顶点。根据 [KMZ, 定义 5]，，若对每个可数无孤立点 $Q \subseteq X$，都存在一个无孤立点 $Q' \subseteq Q$，使得 Q' 在 X 中的闭包是紧的，则称空间 X 具有米勒性质 （MP）。引入这一性质是因为它在涉及可数稠密齐性和滤子时非常方便，而这一点在本文的背景下将再次显现。

定理 1.1（库嫩、梅迪尼、兹多姆斯基）。 设 $\mathcal{F}$ 是一个滤子。则下列条件等价：

- $\mathcal{F}$ 是一个非第一纲伪滤子，
- $\mathcal{F}$ 是可数稠密齐次的，
- $\mathcal{F}$ 具有米勒性质。

根据经典的休伊特–马尔切夫斯基–庞季切里定理（见 [En，推论 2.3.16]或 [Ku，习题 III.2.13]），至多 $\mathfrak{c}$ 个可分空间的乘积仍是可分的。由此人们或许会想知道，对于不可数的 κ，足够好的可分空间的 κ次幂是否可能是可数稠密齐次的。Stepr$\bar{\text{a}}$ns 和 Zhou [SZ 通过一致性证明实现了这一点；他们 4]，证明，对于每个无限 $\kappa < \mathfrak{p}$， 2^κ、$\mathbb{R}^\kappa$ 和 $[0,1]^\kappa$ 都是可数稠密齐次的，其中 $\mathfrak{p}$ 表示伪交数 （见[Ku，定义 III.1.21]）。事实上，在近期的文章 [MS]，中，我们证明了更一般的结果成立（不仅适用于幂，也适用于合适的乘积）。此外，基数 $\mathfrak{p}$ 是最佳的，因为根据 [MS，定理 8.1]，由至少 $\mathfrak{p}$ 个非平凡可分可度量空间构成的乘积都不是可数稠密齐次的。[2]

然而，下面的问题仍未解决（参见 [HG，第 7.1]，问；该问题归功于 Michael Hru$\check{\text{s}}$´ak）。

问题 1.2（Hru$\check{\text{s}}$´ak）。 对于哪些基数 κ 和滤子 $\mathcal{F}$， $\mathcal{F}^\kappa$ 是可数稠密齐性的？

鉴于我们上面讨论的历史，下面的说法似乎是自然的。

猜想 1.3。 设 κ 为一个基数，并设 $\mathcal{F}_\alpha$ 为 $\alpha \in \kappa$ 的滤子。则以下条件等价：

- $\prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$ 是可数稠密齐性的，
- $\kappa < \mathfrak{p}$ 且每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非第一纲 P-滤子。

我们将证明上述猜想的一半（见定理 5.1）。起初，我们相当确信，通过对 [HGH] 和 [MS]中的技巧作适当调整，便能证明另一半；遗憾的是，随后遇到了无法克服的技术困难。

作为一个关键引理的推论，我们将看到，少于 $\mathfrak{p}$ 个非第一纲 P-滤子的乘积具有米勒性质（见推论 4.2）。这促使我们进一步探究

[1]我们指的是 [HZA，第 3 个问题2]，。该问题要求找出一个非波兰的零维可分度量空间 X，使得 X^ω 具有可数稠密齐同性；最终， [Me 的定理 84]给出了这样一个空间的 ZFC 示例。[2]这一结果推广了 [HZA 的定理 33]，，其证明实质上使用了相同的论证。

米勒性质在交集和乘积下的保持性，这将在第 7 节和第 8 节中完成。作为这项研究的铺垫，我们将明确描述米勒性质与经典概念米勒可测性之间的联系（见命题 6.1）。一个尤为值得引用的结果是：少于 add(m^0) 个非第一纲 P-滤子的交集仍是一个非第一纲 P-滤子，其中 m^0 表示米勒零集的理想（见推论 6.3）。

2. General preliminaries

关于集合论，我们参考 [Ku]。特别地，我们假定读者熟悉基数 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{t}$，以及马丁公理。给定 x，$y \subseteq \omega$，我们用$x \subseteq^* y$表示 $x \setminus y$ 是有限的；我们还用 $x =^* y$ 表示 $x \subseteq^* y$和 $y \subseteq^* x$。给定 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$，按照 [Ku，定义 II.1.21]，，我们称 $z \subseteq \omega$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个伪交，如果 z 是无限的，且对每个$x \in \mathcal{X}$都有 $z \subseteq^* x$ 。我们将使用记号

$$\mathsf{Fin} = \{x \subseteq \omega : |x| < \omega\} \text{ and } \mathsf{Cof} = \{x \subseteq \omega : |\omega \setminus x| < \omega\}.$$

关于一般拓扑学，我们参考 [En]。我们也假定读者对波兰空间及其解析子集的基本理论有所了解，相关内容可参考 [Ke]。如果一个空间非空且没有孤立点，则称其为无孤立点空间。如果一个空间没有无孤立点子空间，则称其为散乱的。如果一个空间非空，且有一个由既开又闭集组成的基，则称其为零维。[3] 空间 X 的紧化是一个紧空间 γX，使得 X 是 γX的稠密子空间。空间 Z 的子集X 若存在 Z 的闭子集 C_n，它们的内部为空，且对每个 $n \in \omega$ 都有$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} C_n$，则称其为瘦集。若空间 X 的子集 X 是 X的瘦集，则称空间 X 为瘦的。若空间 X 的每个非空开子空间都非第一纲，则称空间 X 为$Baire$ 空间。给定空间 Z 和 X，若 X' 是 Z 的一个子空间，且与 X同胚，则称 X' 是 Z 中一个同胚于 X 的副本。

以下结果基本归功于 Dobrowolski、Krupski 和 Marciszewski；事实上，只需对 [DKM 的定理 4.1]的证明作显而易见的修改即可得到该结果。定理 2.1 将有助于证明定理 5.1。

定理 2.1. 设 κ 是一个无限基数，且设 X_α （ $\alpha \in \kappa$ ）是可分空间，并且每个 $|X_\alpha| \geq 2$。令 $X = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$。若 X 是可数稠密齐次，则 X 是一个贝尔空间。

以下两个著名结果将在本文最后部分发挥重要作用（分别参见 [Ke 的定理 7.7 和推论 21.23] ）。

定理 2.2 (亚历山德罗夫，乌雷松)。 设 X 是一个空间。那么，以下条件等价：

- X 与 ω^ω同胚，
- X 是零维波兰空间，且 X 没有非空的紧开子空间。

定理 2.3 (凯克里斯、圣雷蒙)。 设 Z 是一个波兰空间， $X \subseteq Z$是解析集。那么下列条件恰有一个成立：

- X 包含于 Z的一个 σ-紧子空间中，
- X 在 Z中包含 ω^ω 的闭副本。

[3]空空间的维数为 -1 （见 [En，第 7.1] 节）。

最后，我们陈述一个简单的引理，它在涉及米勒性质的某些证明中会很有用（其证明方法与 [MZ，引理 3.2]完全相同）。

引理 2.4。设 K 是一个紧可度量空间，且 D 是 K的稠密子空间。若 N 是 $K \setminus D$ 中 ω^ω 的一个闭副本，则cl$(N) \cap D$ 无孤立点，其中cl表示 K中的闭包。

3. 关于滤子的预备知识

回顾一下，滤子 是满足以下条件的集合族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$:

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$ 且 $\omega \in \mathcal{F}$,
- 若 $x \in \mathcal{F}$ 且 $x =^* y \subseteq \omega$，则 $y \in \mathcal{F}$,
- 若 $x \in \mathcal{F}$ 且 $x \subseteq y \subseteq \omega$，则 $y \in \mathcal{F}$,
- 若 x，$y \in \mathcal{F}$则 $x \cap y \in \mathcal{F}$。

当我们考虑强迫偏序集 P 上的滤子 时，也将使用相同的术语；不过在这种情况下，我们指的是 [Ku，定义 III.3.10]。

按照惯例，我们将 ω 的每个子集视为其特征函数，因此每个 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ 都赋予从2^ω继承的子空间拓扑。显然，这里相关的情形是 $\mathcal{X} = \mathcal{F}$为一个滤子。特别地，非瘦滤子 是指在此拓扑下构成非瘦空间的滤子 $\mathcal{F}$。由于每个滤子在 2^ω中都是稠密的，这等价于 $\mathcal{F}$ 是 2^ω的非瘦子集。以下关于非瘦滤子的著名刻画最初作为 [Ta，定理 ´eor`ème 21]的一部分发表。

引理 3.1（塔拉格朗）。设 $\mathcal{F}$ 是一个滤子。则以下条件等价:

- $\mathcal{F}$ 是非第一纲的,
- 对于两两不相交的 $a_n \in$ 有限集族，若满足 $n \in \omega$，则存在 $z \in \mathcal{F}$ 和 $I \in [\omega]^\omega$，使得对于每个 $n \in I$，都有 $z \cap a_n = \varnothing$。

事实上，给定一个足够小的非瘦滤子族，可以找到一个适用于每个滤子的单一 I。以下结果阐述了这一点，并将在引理 4.1 的证明中发挥作用。

引理 3.2。设 $\kappa < \mathfrak{t}$ 是一个基数，且 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 $\alpha \in \kappa$ 上的非瘦滤子。则对于两两不相交的 $a_n \in$ 有限集族，若满足 $n \in \omega$，则存在满足 $\alpha \in \kappa$ 的 $z_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$，以及$I \in [\omega]^\omega$，使得对于每个 $\alpha \in \kappa$ 和 $n \in I$，都有 $z_\alpha \cap a_n = \varnothing$。

证明。令 $a_n \in$有限集族，使得 $n \in \omega$ 两两不交。利用引理 3.1 以及假设 $\kappa < \mathfrak{t}$，可以很容易地构造 $w_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ 和 $I_\alpha \in [\omega]^\omega$，使得对于 $\alpha \in \kappa$满足以下条件:

- $w_\alpha \cap a_n = \varnothing$ 对于每个 $\alpha \in \kappa$ 和 $n \in I_\alpha$,
- $I_\beta \subseteq^* I_\alpha$ 只要 $\alpha \leq \beta$。

构造完成后，令 I 为 $\{I_\alpha$ 的伪交：$\alpha \in \kappa\}$。这意味着我们可以固定 $n_\alpha \in \omega$，使得对于 $\alpha \in \kappa$，对每个$n \in I \setminus n_\alpha$都有 $w_\alpha \cap a_n = \varnothing$。最后，令

$$z_\alpha = w_\alpha \setminus \bigcup_{n \in n_\alpha} a_n.$$

对于 $\alpha \in \kappa$。很容易看出，z_α 和 I 正如所需。 □

若每个可数的 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$ 在 $\mathcal{F}$中都有一个伪交，则称滤子 $\mathcal{F}$ 为 P-滤子 。给定 $z \in [\omega]^\omega$，滤子 $\{x \subseteq \omega : \ z \subseteq^* x\}$ 是一个平凡的（瘦的）P-滤子例子。虽然在附加集合论假设下构造非第一纲 P-滤子并不困难，但它们在 ZFC 中是否存在，仍是一个长期未解的开问题（见 [JMPS]）。

以下结果实质上归功于 Shelah；事实上，这是 [Sh 第 4.3 条在第 327], 页的一个小推广，而且可以用同样的方法证明（另见[HGH，引理 2.5]）。命题 3.3 的第一部分（这是一个简单的练习）将在定理 5.1 的证明中发挥作用，而完整结果则与第 8 节有关（见定理 8.2 后的注释）。

命题 3.3。 设 $\kappa \leq \omega$ 为非零基数，且设 $\mathcal{F}_\alpha$ 为 $\alpha \in \kappa$上的滤子。令 $X = \prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$。则 X 与一个滤子同胚。此外，若每个 $\mathcal{F}_\alpha$都是非第一纲P-滤子，则 X 与一个非第一纲P-滤子同胚。

4. Generalizing an old lemma

以下结果是 [KMZ 引理 7] 的一个“多变量”推广；它是定理 5.1 证明中的组合核心。给定 $z \subseteq \omega$，我们将使用记号 $z\uparrow = \{x \subseteq \omega : \ z \subseteq x\}$。注意，每个 $z\uparrow$ 都是 2^ω 的紧子空间。

引理 4.1。 设 $\kappa < \mathfrak{p}$ 是一个基数，并设 $\mathcal{F}_\alpha$ 是关于 $\alpha \in \kappa$ 的非第一纲滤子。令 $X = \prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$，并将投影记为 $\pi_\alpha : \ X \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha$，其中 $\alpha \in \kappa$。假设 $Q \subseteq X$ 可数且无孤立点，并且每个 $\pi_\alpha[Q]$ 在 $\mathcal{F}_\alpha$ 中都有一个伪交。那么存在一个无孤立点的 $Q' \subseteq Q$ 和 $z_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$，使得对于 $\alpha \in \kappa$，每个 $\pi_\alpha[Q'] \subseteq z_\alpha\uparrow$。

证明。 首先任取一个 $r_\varnothing \in Q$。固定 $v_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$，使得对于所有 $r \in Q$ 和 $\alpha \in \kappa$, $\alpha \in \kappa$ 满足 $v_\alpha \subseteq^* \pi_\alpha(r)$。另外假设每个 $v_\alpha \subseteq \pi_\alpha(r_\varnothing)$。定义

$$\mathcal{S} = \{\varnothing\} \cup \{s \in 2^{<\omega} : |s| \geq 1 \text{ and } s(|s|-1) = 0\}.$$

另外设 $\mathcal{S}_{\leq n} = \{s \in \mathcal{S} : \ |s| \leq n\}$，以及 $\mathcal{S}_n = \{s \in \mathcal{S} : \ |s| = n\}$，其中 $n \in \omega$。我们需要一个记账函数 $\psi : \ \omega \longrightarrow \omega$，它满足以下要求：

(1) 对每个 $i \geq 1$, $\psi(i) < i$；(2) 对每个 $j \in \omega$, $\psi^{-1}(j)$ 是无限的。

构造这样的函数是一个简单的练习，留给读者完成。

将满足以下要求的所有形如 $p = (n, \ F, \ \zeta, \ k) = (n^p, \ F^p, \ \zeta^p, \ k^p)$ 的四元组组成的集合记为 P：

(3) $n \in \omega$, (4) $F \in [\kappa]^{<\omega}$, (5) $\zeta : \mathcal{S}_{\leq n} \longrightarrow Q$ 和 $\zeta(\varnothing) = r_\varnothing$, (6) $s \subsetneq s'$ 蕴含 $\zeta(s) \neq \zeta(s')$, 对所有 s, $s' \in \mathcal{S}_{\leq n}$, (7) $\vec{k} = (k_0, \ldots, k_n) \in \omega^{n+1}$, 其中 $0 = k_0 < \cdots < k_n$。

我们还将使用显然的记号 $\vec{k}^p = (k^p_0, \ldots, k^p_n)$ 表示 $p \in \mathrm{P}$，其中 $n = n^p$。对每个 $s \in 2^{<\omega}$ 定义 $\ell_s \in \omega$，使得 $\{t \in \mathcal{S} : \ t \subsetneq s\} = \{t^s_i : \ i < \ell_s\}$，其中当 $\ell_s \geq 1$ 时 $\varnothing = t^s_0 \subsetneq \cdots \subsetneq t^s_{\ell_s-1}$。注意，若 $s, s' \in 2^{<\omega}$ 且 $s \subseteq s'$，则对每个 $i < \ell_s$，都有$t^s_i = t^{s'}_i$。

规定：若满足以下条件，则 $q \leq p$，并据此定义偏序集 P：

(8) $n^q \geq n^p$,

(9) $F^q \supseteq F^p$,

(10) $\zeta^q \supseteq \zeta^p$,

(11) $\vec{k}^q$ 是 $\vec{k}^p$ 的端延拓（也就是说，对于每个 $i \leq n^p$，都有 $k_i^q = k_i^p$），(12) 对于所有满足$n^p < |s| \leq n^q$的 $s \in \mathcal{S}$，$\zeta^q(s) \restriction \big(F^p \times k^q_{|s|-1}\big) = \zeta^q\big(t^s_{\psi(\ell_s)}\big) \restriction \big(F^p \times k^q_{|s|-1}\big)$，(13) $v_\alpha \setminus k^q_n \subseteq \bigcap \big\{\pi_\alpha\big(\zeta^q(s)\big) :$ 只要 $\alpha \in F^p$ 且 $n^p < n \leq n^q$，就有$s \in \mathcal{S}_{\leq n}\big\}$。

给定 $\alpha \in \kappa$ 和 $n \in \omega$，作如下定义：

- $D^{\mathsf{coord}}_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in F^p\}$,
- $D^{\mathsf{length}}_n = \{p \in \mathbb{P} : n^p \geq n\}$.

断言 1. 每个 $D^{\mathsf{coord}}_\alpha$都是 P 的稠密子集。

证明。这是显然的。 ■

断言 2. 每个 D^{length}_n都是 P 的稠密子集。

证明。取 $n \in \omega$。显然，只需证明对于每个 $p \in$P，都存在 $q \in$P，使得 $q \leq p$ 且 $n^q = n^p + 1$。因此取 $p = (n, F, \zeta, \vec{k}) \in$P。通过令 $n^q = n + 1$和 $F^q = F$，开始构造 q。为满足条件 (10)，我们必须对 $s \in \mathcal{S}_{\leq n}$令 $\zeta^q(s) = \zeta(s)$。给定 $s \in \mathcal{S}_{n+1}$，利用条件 (1) 以及 Q无孤立点这一假设，我们可以将 $\zeta^q(s)$定义为任意一个.....

$$\big\{r \in Q : r \restriction (F \times k_n) = \zeta\big(t^s_{\psi(\ell_s)}\big) \restriction (F \times k_n)\big\} \setminus \{\zeta(t^s_i) : i < \ell_s\}.$$

这样，条件 (6) 和 (12) 将得到满足。为了满足 (11)，我们必须为 $i \leq n$ 设置 $k^q_i = k^p_i$。要完成 q 的构造，只需选择足够大的 $k^q_{n+1} > k^p_n$，使条件 (13) 得到满足。 ■

断言 3。 P 是 σ-中心的。

证明。注意，满足要求 (3)、(5)、(6) 和 (7) 的三元组 (n、ζ、$\vec{k}$) 只有可数多个。给定这样的三元组，令

$$\mathbb{P}(n, \zeta, \vec{k}) = \{p \in \mathbb{P} : n^p = n,\, \zeta^p = \zeta \text{ and } \vec{k}^p = \vec{k}\}.$$

由于每个 P(n、ζ、$\vec{k}$) 显然都是中心的，因此所需结论成立。 ■

注意到该集合族

$$\mathcal{D} = \{D^{\mathsf{coord}}_\alpha : \alpha \in \kappa\} \cup \{D^{\mathsf{length}}_n : n \in \omega\}$$

根据断言 1 和 2，它由 P 的稠密子集组成，并且 $|\mathcal{D}| < \mathfrak{p}$ 因为 $\kappa < \mathfrak{p}$。因此，由于根据断言 3，P 是 σ-中心的，所以可以应用贝尔定理[4]（见 [Ku, TheoremIII.3.61]），该定理保证存在一个在 P 上的滤子 G，它与 $\mathcal{D}$ 的每个元素都有交集。

定义

$$\zeta = \bigcup \{\zeta^p : p \in G\},$$

并注意到 $\zeta : \mathcal{S} \longrightarrow Q$。然后令

$$Q' = \{\zeta(\phi \restriction n) : n \in \omega \text{ such that } \phi \restriction n \in \mathcal{S}\} \subseteq Q.$$

给定 $n \in \omega$，任取 $p \in G \cap D^{\mathsf{length}}_n$，然后令 $k_n = k^p_n$。由于每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非瘦滤子，应用引理 3.2 可得 $w_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$，其中 $\alpha \in \kappa$，且存在函数 $\phi : \omega \longrightarrow 2$，使得 $\phi^{-1}(0)$ 是无限集，并且

$$w_\alpha \cap \bigcup \{[k_n, k_{n+1}) : n \in \phi^{-1}(0)\} = \varnothing.$$

为 $\alpha \in \kappa$固定 $p_\alpha \in G \cap D^{\mathsf{coord}}_\alpha$。然后选择足够大的 $n_\alpha \in \omega$，使得对于 $\alpha \in \kappa$，每个

$$(v_\alpha \cap w_\alpha) \setminus n_\alpha \subseteq \bigcap \big\{\pi_\alpha\big(\zeta(s)\big) : s \in \mathcal{S}_{\leq n^{p_\alpha}}\big\}.$$

[4]这一结果实质上已在 [Be] 中得到；不过，这里需要的是 [Ku] 给出的现代表述。

最后，为 $\alpha \in \kappa$设定 $z_\alpha = (v_\alpha \cap w_\alpha) \setminus n_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$。显然，以下两个论断即可完成证明。

断言 4。 Q' 是无孤立点的。
证明。取 $r \in Q'$。令 $F \in [\kappa]^{<\omega}$ 和 $\ell \in \omega$。我们将找到 $r' \in Q'$，使得 $r' \neq r$且 $r' \restriction (F \times \ell) = r \restriction (F \times \ell)$。固定 $n \geq 1$，使得 $k_{n-1} \geq \ell$。利用断言 1 和 2，可以找到 $p \in G$，使得 $n^p \geq n$且 $F^p \supseteq F$。令 $s \in \mathcal{S}$满足 $s \subseteq \phi$ 且 $\zeta(s) = r$。令 $j \in \omega$ 为唯一的指标，使得对每个满足 $s \subsetneq s'$的$s' \in 2^{<\omega}$，都有 $s = t^{s'}_j$。由条件 (2)，可以找到 $s' \in \mathcal{S}$，使得$s \subsetneq s' \subseteq \phi$、 $|s'| > n^p$ 且 $\psi(\ell_{s'}) = j$。设 $r' = \zeta(s')$，并注意到由条件 (6) 可知 $r' \neq r$。最后，取 $q \in G$，使得 $q \leq p$ 且 $n^q \geq |s'|$。由条件 (12) 可得

$$r' \restriction (F \times k_{n-1}) = \zeta\big(t^{s'}_{\psi(\ell_{s'})}\big) \restriction (F \times k_{n-1}).$$

由于 $\zeta\big(t^{s'}_{\psi\ (\ell_{s'})}\big) = \zeta\big(t^{s'}_j\big) = \zeta(s) = r$，这表明 r' 符合要求。 ■

断言 5. $\pi_\alpha[Q'] \subseteq z_\alpha\!\uparrow$ 对每个 $\alpha \in \kappa$都成立。
证明。取 $\alpha \in \kappa$。我们将用归纳法证明，对每个满足 $\phi \restriction n \in \mathcal{S}$ 的 $n \in \omega$，都有 $z_\alpha \subseteq \pi_\alpha\big(\zeta(\phi \restriction n)\big)$。根据我们对 v_α 的选择，情形 $n = 0$ 显然成立。现在假设 $n \geq 1$ 且 $s = \phi \restriction n \in \mathcal{S}$。若 $n \leq n^{p_\alpha}$，则根据我们对 n_α 的选择，$z_\alpha \subseteq \pi_\alpha\big(\zeta(s)\big)$，因此假设 $n > n^{p_\alpha}$。令 $k \in z_\alpha$。我们将通过考察以下情形来证明 $k \in \pi_\alpha\big(\zeta(s)\big)$：

- $k \in [0, k_{n-1})$,
- $k \in [k_{n-1}, k_n)$,
- $k \in [k_n, \infty)$.

首先假设 $k \in [0, k_{n-1})$。选取 $q \in G$ 使得 $q \leq p_\alpha$ 且 $n^q \geq n$。由于我们已假设 $n > n^{p_\alpha}$，条件 (12) 保证

$$\zeta(s) \restriction (\{\alpha\} \times k_{n-1}) = \zeta(s') \restriction (\{\alpha\} \times k_{n-1})$$

存在某个 $s' \in \mathcal{S}$ 使得 $s' \subsetneq s$。因此，所需结论由归纳假设推出。情形 $k \in [k_{n-1}, k_n)$ 不可能，因为 $\phi(n-1) = s(n-1) = 0$ 意味着 $[k_{n-1}, k_n) \cap z_\alpha = \varnothing$，这与我们对 w_α 的选择矛盾。为完成证明，假设 $k \in [k_n, \infty)$。像上面那样选取 $q \in G$，并利用假设 $n > n^{p_\alpha}$，可知根据条件 (13)， $v_\alpha \setminus k_n \subseteq \pi_\alpha\big(\zeta(s)\big)$。由于$z_\alpha \subseteq v_\alpha$，可得 $k \in \pi_\alpha\big(\zeta(s)\big)$。 ■ □

显然，明确陈述下面的推论[5] 是值得的；不过，在定理 5.1 的证明中，我们需要引理 4.1 给出的更强结果。

推论 4.2。 设 $\kappa < \mathfrak{p}$ 是一个基数，且 $\mathcal{F}_\alpha$ 是关于$\alpha \in \kappa$的非第一纲P-滤子。那么 $\prod_{\alpha \in \kappa} \mathcal{F}_\alpha$ 具有米勒性质。

上述推论引出了下面的问题（另见定理 8.2）。

问题 4.3。 设 $\kappa < \mathfrak{p}$ 是一个基数，且 X_α 是关于 $\alpha \in \kappa$具有米勒性质的可分可度量空间。能否推出 $\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$ 具有米勒性质?

我们指出，利用推论 4.2，可以证明少于 $\mathfrak{p}$ 个非贫乏 P-滤子的交集是一个非贫乏 P-滤子。不过，我们省略证明细节，因为推论 6.3 给出了更好的结果（更好是因为 $\mathfrak{p} \leq \mathrm{add}(m^0)$，根据 GRSS 定理 1.1]，由[）。

[5]谁说只有 *theorems* 才可以有推论?

5. A partial answer to Hrušák's question

本节中，我们将结合迄今讨论过的结果，最终证明猜想 1.3 的一半，正如所承诺的那样。

定理 5.1. 设 κ 是一个基数，$\mathcal{F}_\alpha$ 是 $\alpha \in \kappa$的滤子。若 $\prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$ 是可数稠密齐次，则 $\kappa < \mathfrak{p}$，且每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非贫乏P-滤子。

证明。设 $X = \prod_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$，并将投影记为 π_α：对于 $\alpha \in \kappa$，$X \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha$。假设 X 是可数稠密齐次。根据 [En，习题 2.3.F.(c)]，，必有 $\kappa \leq \mathfrak{c}$，否则X 将不可分。由 [MS，定理 8.1] 可得 $\kappa < \mathfrak{p}$。

接下来只需证明每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非贫乏 P-滤子。根据定理 1.1，只需证明每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都具有米勒性质。事实上，由于 X 包含每个 $\mathcal{F}_\alpha$的闭副本，只需证明 X 具有米勒性质。首先假设 κ是有限的。在这种情况下，由于根据命题 3.3，X 与一个滤子同胚，所需结论由定理 1.1 得出。

现在假设 κ 是无限的。在这种情况下，根据定理 2.1，X 是一个贝尔空间，因此是非第一纲的。由于每个 π_α 都是开映射，因此每个 $\mathcal{F}_\alpha$ 都是非第一纲的。为了证明 X 具有 MP，取一个可数无孤立点的 $Q \subseteq X$。固定 X 的可数稠密子集 D 和 E，使得 $D \supseteq Q$ 且 $E \subseteq \mathsf{Cof}^\kappa$。由于 X 是可数稠密齐次的，存在一个同胚 $h\colon X \longrightarrow X$，使得 $h[D] = E$。令 $R = h[Q] \subseteq \mathsf{Cof}^\kappa$。由于 Cof 的每个子集都有 ω 作为伪交，我们可以应用引理 4.1，从而得到一个无孤立点的 $R' \subseteq R$，其在 X 中的闭包是紧的。为完成证明，令 $Q' = h^{-1}[R']$，并注意到 $Q' \subseteq Q$。由于 h 是一个同胚，显然 Q' 是无孤立点的，且其在 X 中的闭包是紧的。□

6. Miller-measurability versus the Miller property

给定一个可分可度量空间 Z，如果对于 $X \subseteq Z$ 中的每个 Z 的闭副本 N，都存在 Z 中的 ω^ω 的闭副本 $N' \subseteq N$，使得 $N' \cap X = \varnothing$，我们就称 $X \subseteq Z$ 是 米勒零集；如果 $Z \setminus X$ 是米勒零集，我们就称 X 是 米勒满。利用定理 2.2 以及涉及树的标准论证，可以看出，当 $Z = \omega^\omega$ 时，上述定义的概念等价于经典概念（例如参见 [GRSS]）。回忆

$$m^0 = \{X \subseteq \omega^\omega : X \text{ is Miller-null}\}$$

是 米勒理想，并且

$$\mathsf{add}(m^0) = \min\left\{|\mathcal{X}| : \mathcal{X} \subseteq m^0 \text{ and } \bigcup \mathcal{X} \notin m^0\right\}$$

表示 m^0 的 可加性。众所周知，$\omega_1 \leq \mathsf{add}(m^0) \leq \mathfrak{c}$，其中第一个不等式由标准的融合论证得到，第二个不等式则是显然的。事实上，正如我们在第4节末尾已经提到的，不等式 $\mathfrak{p} \leq \mathsf{add}(m^0)$ 成立。

由于米勒性质的定义受到 [Mi]，中一个论证的启发，它与上述米勒可测性概念密切相关也就不足为奇了。这种联系已在 [MZ]，中得到利用，而下面的结果则对其作了明确说明。命题 6.1 将在接下来的两节中多次用到。

命题 6.1。设 X 是一个可分可度量空间。则以下条件等价：

[6]当然，只有当 Z 包含 ω^ω 的闭副本时，这些概念才有意义。

(1) X 具有米勒性质，(2) 对于 X 的每一个可度量化紧化 γX 以及 X的每一个可数稠密子集 D，集合 $X \setminus D$ 在 $\gamma X \setminus D$中是米勒满的，(3) 存在 X 的一个可度量化紧化 γX，使得对于 X的每一个可数稠密子集 D，集合 $X \setminus D$ 在 $\gamma X \setminus D$中是米勒满的。

证明。为证明蕴含关系 (1) $\rightarrow$ (2)，假设条件 (1) 成立。固定 X的一个可度量化紧化 γX；我们用 cl 表示 γX中的闭包。取一个可数稠密 $D \subseteq X$，以及 $\gamma X \setminus D$中的一个 ω^ω 的闭副本 N。令$Q = \mathrm{cl}(N) \cap D$，并注意到根据引理 2.4，$Q$ 无孤立点。因此，由米勒性质，存在一个无孤立点的 $Q' \subseteq Q$，使得 $\mathrm{cl}(Q') \subseteq X$。令 $N' = \mathrm{cl}(Q') \setminus D \subseteq X \setminus D$。由定理 2.2 可知，$N' \subseteq N$ 是 $\gamma X \setminus D$中的一个 ω^ω 的闭副本，正如所需。

蕴含关系 (2) $\rightarrow$ (3) 是显然的。为证明蕴含关系 (3) $\rightarrow$(1)，假设条件 (3) 成立。取一个可数无孤立点的 $Q \subseteq X$。令 $D \supseteq Q$为 X的一个可数稠密子集。利用 [En，第 7.4 题 17], ，可以找到 γX 的一个零维波兰子空间 Z，使得 $Z \cap D = Q$。由于根据 [MZ 命题 2，波兰空间具有米勒性质，存在 Z 的一个紧子空间 K，使得 $K \cap Q$ 在 K中无孤立点且稠密；我们用 cl 表示 K中的闭包。令 $N = K \setminus Q$，并注意到根据定理 2.2，N与 ω^ω 同胚。此外，$N = (\gamma X \setminus D) \cap K$这一事实表明，$N$在 $\gamma X \setminus D$中是闭的。由条件 (3) 可知，存在 $\gamma X \setminus D$中的一个 ω^ω 的闭副本 $N' \subseteq N$，使得 $N' \subseteq X \setminus D$。令 $Q' = \mathrm{cl}(N') \cap Q$，并注意到根据引理 2.4，$Q'$无孤立点。另一方面，$\mathrm{cl}(Q') \subseteq \mathrm{cl}(N') \subseteq N' \cup D \subseteq X$，这表明$Q'$ 在 X中具有紧闭包，正如所需。□

我们通过指出上述刻画对非第一纲 P-滤子有一些有趣的推论，来结束本节。

推论 6.2。设 $\mathcal{F}$ 是一个滤子。则以下条件等价:

- $\mathcal{F}$ 是一个非第一纲P-滤子,
- $\mathcal{F} \setminus D$ 对于 $\mathcal{F}$ 的每个可数稠密子集 D，在 $2^\omega \setminus D$ 中都是米勒满。

证明。直接结合定理 1.1 和命题 6.1 即可。 □

推论 6.3。设 $\kappa < \mathrm{add}(m^0)$ 是一个非零基数，且设 $\mathcal{F}_\alpha$ 对 $\alpha \in \kappa$ 是非第一纲P-滤子。则 $\bigcap_{\alpha\in\kappa} \mathcal{F}_\alpha$ 是一个非第一纲P-滤子。

证明。由定理 2.2 可知，对于 2^ω的每个可数稠密子集 D，$2^\omega \setminus D$ 与 ω^ω 同胚。根据推论 6.2，证明的其余部分显而易见。□

7. Preservation of the Miller property under intersections

本节将看到，米勒性质在足够小的交集下得以保持。这表明推论 6.3 只是一个更一般现象的特例。

定理 7.1。设 $\kappa < \mathrm{加}(m^0)$是一个非零基数，Z 是一个可分可度量空间，且 X_α 是 Z 的子空间，并且对 $\alpha \in \kappa$具有米勒性质。那么$\bigcap_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ 具有米勒性质。

证明。令 $X = \bigcap_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$，并取一个可数稠密无孤立点的 $Q \subseteq X$。固定 X 的一个可度量化紧化 γX。首先，利用 [En，习题 7.4.17], ，找出一个零维

波兰子空间 W，它满足 $Q \subseteq W$，且是 γX 的子空间。由于波兰空间具有米勒性质 [MZ，命题 2.3]，，存在 W 的一个紧子空间 K，使得 $K \cap Q$ 在 K 中无孤立点且稠密；我们用 cl 表示 K 中的闭包。

令 $X' = X \cap K$ 和 $X'_\alpha = X_\alpha \cap K$ 为 $\alpha \in \kappa$。注意到，每个 X'_α 都具有米勒性质（MP），因为它是 X_α的闭子空间。此外，显然，K 是每个 X'_α 的可度量化紧化，因为 $K \cap Q \subseteq X'_\alpha$。由命题 6.1可知，每个 $X'_\alpha \setminus Q$ 在 $K \setminus Q$中都是米勒满的。由于根据定理 2.2，$K \setminus Q$ 与 ω^ω同胚，假设 $\kappa < \mathsf{add}(m^0)$保证了 $X' \setminus Q$ 在 $K \setminus Q$中是米勒满的。特别地，在 $K \setminus Q$ 中存在 ω^ω 的一个闭副本 N，使得$N \subseteq X' \setminus Q$。令 $Q' = \mathsf{cl}(N) \cap Q$，并注意到根据引理 2.4，$Q'$ 是无孤立点的。另一方面，$\mathsf{cl}(Q') \subseteq \mathsf{cl}(N) \subseteq N \cup Q \subseteq X$，这表明 Q'在 X中具有紧闭包，正如所要求的那样。□

自然地，确认 $\mathsf{add}(m^0)$ 是最优的将会很好。

问题 7.2。令 $\kappa = \mathsf{add}(m^0)$。是否存在一个可分可度量空间 Z 以及其子空间 X_α，其中 Z 具有 $\alpha \in \kappa$ 的米勒性质，但 $\bigcap_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ 不具有米勒性质?

8. Preservation of the Miller property under products

我们最后证明，米勒性质在可数乘积下保持不变（另见问题 4.3）。首先我们将聚焦于以下非常特殊的情形，然后应用定理 7.1 得到完整结果。

引理 8.1。设 X 是一个具有米勒性质的可分可度量空间，并设 K 是一个紧可度量空间。则 $X \times K$ 具有米勒性质。

证明。固定 γX 的一个可度量化紧化 γX 。我们将证明，$X \times K$的紧化 $\gamma X \times K$ 满足命题 6.1 的条件 (3)；我们用 cl 表示 $\gamma X \times K$中的闭包。取 $X \times K$的一个可数稠密子集 D，以及 $(\gamma X \times K) \setminus D$中 ω^ω 的一个闭副本 N。记投影为 $\pi\colon \gamma X \times K \longrightarrow \gamma X$，并令 $E = \pi[D]$。给定 $x \in E$，令 $D_x = (\mathsf{cl}(N) \setminus N) \cap (\{x\} \times K)$，并注意到每个 $D_x \subseteq D$。

情况 1. 存在 $x \in E$，使得 D_x 是非散乱的。
设 $Q \subseteq D_x$无孤立点。令 $N' = \mathsf{cl}(Q) \setminus D$，并注意到 $N' \subseteq N$，因为 $\mathsf{cl}(Q) \subseteq \mathsf{cl}(N) \subseteq N \cup D$。此外，显然 N'在 $(\gamma X \times K) \setminus D$中是闭的。此时，由定理 2.2 可知，$N'$ 与 ω^ω 同胚。最后，$\mathsf{cl}(Q) \subseteq \{x\} \times K \subseteq X \times K$ 这一事实表明 $N' \subseteq (X \times K) \setminus D$。

情况 2. 对于每个 $x \in E$，D_x 都是散乱的。
由于散布可分度量空间是波兰空间（见 [Ke，推论 21.21]），我们知道，对于每个 $x \in E$，$(\{x\} \times K) \setminus D_x$ 必定是 σ-紧的。因此

$$N \cap (\{x\} \times K) = \big((\{x\} \times K) \setminus D_x\big) \cap \big(\mathsf{cl}(N) \cap (\{x\} \times K)\big)$$

对每个 $x \in E$ 都是 σ-紧的。

令 $Z = (\gamma X \setminus E) \times K$，并注意到 $N \setminus (E \times K)$ 是波兰空间 Z 的解析子集。为导出矛盾，假设 $N \setminus (E \times K)$ 包含于 Z 的一个 σ-紧子空间中。由于 E 可数，且对每个 $x \in E$，$N \cap (\{x\} \times K)$ 都是 σ-紧的，因此 N 本身也是 σ-紧的，这就产生了矛盾。因此，根据定理 2.3，不失一般性，我们可以假设 N 是 Z 的一个（闭）子集。

现在令 $W = \gamma X \setminus E$，并注意到 $\pi[N]$ 是波兰空间 W 的解析子集。如果 $\pi[N]$ 包含于 W 的一个 σ-紧子空间中，那么很容易推出 N 是 σ-紧的，这就产生了矛盾。因此，根据定理 2.3，存在 W 中的 ω^ω 的一个闭副本 M，使得 $M \subseteq \pi[N]$。但是 X 具有米勒性质，因此根据命题 6.1，存在 W 中的 ω^ω 的一个闭副本 $M' \subseteq M$，使得 $M' \subseteq X \setminus E$。

最后，令 $N' = N \cap \pi^{-1}[M']$，并注意到 N' 是 Z 的闭子集。因此，如果 N' 包含于 Z 的某个 σ-紧子空间中，那么 N' 本身将是 σ-紧的，这与 $\pi[N'] = M'$ 的事实相矛盾。由定理 2.3 可知，Z 中存在 ω^ω 的一个闭副本 N''，使得 $N'' \subseteq N'$。容易看出，N'' 是 $(\gamma X \times K) \setminus D$ 中 ω^ω 的一个闭副本，并且 $N'' \subseteq (X \times K) \setminus D$。□

定理 8.2。设 $\kappa \leq \omega$ 是一个基数，且令 X_α 为具有关于 $\alpha \in \kappa$ 的米勒性质 （MP）的可分可度量空间。则 $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ 具有米勒性质（MP）。

证明。固定 $\alpha \in \kappa$ 的 X_α 的可度量紧化 γX_α。令 $Z = \prod_{\alpha\in\kappa} \gamma X_\alpha$，并注意到 Z 是可分可度量的，因为 $\kappa \leq \omega$。定义

$$X'_\alpha = \{x \in Z : x(\alpha) \in X_\alpha\}$$

对于 $\alpha \in \kappa$，并注意到每个 X'_α 都具有米勒性质（MP），这由引理 8.1 可知。显然，由于 $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\kappa} X'_\alpha$，所需结论由定理 7.1 得出。□

与第 6 节一样，我们可以明确表述定理 8.2 的一个特殊情形，即每个 X_α 都是滤子。不过，我们不打算这样做，因为这无异于重复命题 3.3，而该命题的证明要直接得多。

我们指出，上述结果与 Fitzpatrick 和 Zhou 的一个问题 [FZ，问题 4]，有一定关联。该问题可以理解为：寻找一种“自然的”拓扑性质 $\mathcal{P}$，使得零维可分可度量空间 X 具有性质 $\mathcal{P}$，当且仅当 X^ω 是可数稠密齐次（CDH）。注意，任何满足这一要求的性质都必须在可数幂下保持不变。特别是，对于认为米勒性质（MP）可能是这类性质的合适候选者的人来说，定理 8.2 或许是个令人鼓舞的结果。

References

[ACvM] R. D. Anderson D. W. Curtis J. van Mill. *Trans.* , , 伪拓扑希尔伯特空间。: ( ), –。[AvM] A. V. Arhangel'skii, J. van Mill. 拓扑齐次性。 *Recent Progress in General Topology III.* 2014, 1 68 Atlantis Press，巴黎，–。[Be] M. G. Bell. 关于组合原理 *P*(*c*)。 *Fund. Math.* **114: 2** (1981)，149–157。[DKM] T. Dobrowolski, M. Krupski, W. Marciszewski. 可数稠密齐次拓扑向量空间是贝尔空间。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **149: 4** (2021), 1773–1789。[En] R. Engelking. *General topology.* 修订并完成版。《纯数学丛书》，第6卷。Heldermann 出版社，柏林，1989。[FZ] B. Fitzpatrick Jr., H. X. Zhou. 稠密齐性空间中的一些开放问题。 *Open problems in topology.* 1990 251 259 North-Holland，阿姆斯特丹，。–。[GRSS] M. Goldstern M. Repický S. Shelah O. Spinas. *Proc. Amer. Math.* , , *Soc.* **123 5** 1995 1573 1581 , 关于树理想。: ( ), –。[HG] R. Hernández-Gutiérrez. *Topology Proc.* 函数空间的可数稠密 **56** 2020 125 146 齐性。( ), –。[HGH] R. Hernández-Gutiérrez, M. Hrušák. 非第一纲 *P*-滤子具有可数稠密齐性。 *Colloq. Math.* **130: 2** (2013)，281–289。[HvM] M. Hrušák J. van Mill. *Topology Appl.* , 关于可数稠密齐性的开放问题。( ), –。 **241** 2018 185 196

[HZA] M. Hrušák B. Zamora Avilés. *Proc.* , 可
Amer. Math. Soc. **133 11** 2005 3429 3435
定义空间的可数稠密齐性。: ( ), –。[JMPS] W. Just, A. R. D. Mathias, K. Prikry, P. Simon. 关于大型 p-理想的存在性。*J. Symbolic Logic.* **55**:2 (1990), 457–465。[Ke
] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory.*《数学研究生教材》第156卷。施普林格出版社，纽约，1995。[Ku] K. Kunen. *Set theory.*《逻辑研究》（伦敦），第34卷。College Publications，伦敦，2011。[KMZ] K. Kunen, A. Medini, L. Zdomskyy. 非第一纲 P-滤子的七种刻画。*Fund. Math.* **231**:2 (2015), 189–208。[Me] A. Medini. 零维可定义空间幂空间中的可数稠密齐性。*Canad. Math. Bull.* **58**: 2 (2015), 334–349。[MM
] A. Medini D. Milovich. 2^ω *Topology Appl.* , 作为 子
159 5 2012 1318 1333
空间的超滤子拓扑。: ( ), –。[MS] A. Medini, J. Steprāns. 波兰空间大乘积中的可数稠密齐性。预印本，见 https://www.arxiv.org/abs/2510.25322。[MZ] A. Medini, L. Zdomskyy. 介于波兰与完全贝尔之间。*Arch. Math. Logic.* **54**:1-2 (2015), 231–245。[Mi
] A. W. Miller. *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983).* 有理完
Contemp. Math. **31** 1984 143 159
美集强迫。( ), –。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[RZZ] D. Repovš, L. Zdomskyy, S. Zhang. 可数稠密齐性滤子与门格尔覆盖性质。 *Fund. Math.* **224**:3 (2014), 233–240。[Sh
] S. Shelah. *Proper and improper forcing.*第二版。《数学逻辑展望》，施普林格出版社，柏林，1998。[SZ] J. Steprāns, H. X. Zhou. 关于可数稠密齐性空间的一些结果 I。 *Topology Appl.* **28**:2 (1988), 147–154。[Ta
] M. Talagrand. *Studia Math.* 可测函
67 1 1980 13 43
数的紧集与不可测滤子。: ( ), –。

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 8-10/1041040 Vienna,
Austria*Email address*: andrea.medini@tuwien.ac.at
URL: https://www.dmg.tuwien.ac.at/medini/